UNA APROXIMACIÓN A LA DEMOSTRACIÓN MEDIANTE UNA SECUENCIA DE PROBLEMAS ABIERTOS DESDE LA TEORIA DE LA MEDIACIÓN SEMIÓTICA

YEIMY HERRERA PORTILLA
Código: 0738942-3487

Director: DIEGO GARZÓN

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
AREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Santiago de Cali, 2013

UNA APROXIMACIÓN A LA DEMOSTRACIÓN MEDIANTE UNA SECUENCIA DE PROBLEMAS ABIERTOS DESDE LA TEORIA DE LA MEDIACIÓN SEMIÓTICA

YEIMY HERRERA PORTILLA
Código: 0738942-3487

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

Director: DIEGO GARZÓN

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
AREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Santiago de Cali, 2013

A mis padres, hermanos y sobrinos.
Por sus consejos, apoyo incondicional
valores, motivación, cariño, amor y
fortaleza que siempre me brindan.

AGRADECIMIENTOS

Cada sueño por cumplir está acompañado de personas especiales que te apoyan incondicionalmente, te ayudan a superar obstáculos y te dan fuerzas para terminar con éxito y admiración cada proyecto de la vida. Sin la participación de cada una de ellas no hubiese sido posible la realización de este proyecto. Por ello es para mí un verdadero placer utilizar este espacio para resaltar mis más sinceros agradecimientos a:

Ante todo a ***DIOS*** por brindarme la oportunidad de vivir, de hacer de mí una persona capaz de cumplir con cada una de mis metas y por darme la fortaleza necesaria para luchar por un objetivo y continuar con mi diario vivir.

A mis Padres ***CARLOS JULIO HERRERA y CLARA PORTILLA*** con mi profundo respeto y admiración, mis más sinceros agradecimientos por darme su ejemplo excepcional, haberme enseñado los valores necesarios para hacer de mí, un modelo de persona con características especiales para ser quien soy hoy.

A mis hermanos ***SUGEY, JULIETH y WILDER*** por el apoyo incondicional que siempre me brindan, por sus consejos y motivación para seguir siempre adelante y por ser el ejemplo de persona que siempre soñaron nuestros padres.

A mi director, el profesor ***DIEGO GARZÓN CASTRO*** por todo el tiempo dedicado, sus aportes, respaldos y sugerencias e ideas de las que tanto provecho he sacado.

A los compañeros, amigos y profesores que dedicaron su tiempo para darme aportes importantes para la culminación de este trabajo de grado.

A la Institución Educativa Nuestra Señora del Palmar y las estudiantes por su participación e interés en este proyecto de grado.

A todos mil gracias

Yeimy

CONTENIDO

INDICE DE TABLAS

Pág.

INDICE DE ILUSTRACIONES

Pág.

RESUMEN

Este trabajo de grado desarrolla una aproximación a la demostración desde una perspectiva sociocultural y curricular, en particular desde la perspectiva de la mediación semiótica. Se presenta una propuesta de aula en la cual se diseña e implementa una secuencia de problemas abiertos con un grupo de estudiantes de la Institución Educativa Nuestra Señora del Palmar, como un medio para desarrollar y mejorar el razonamiento matemático en las aulas de clase.

La secuencia didáctica toma en consideración el papel que realizan ciertos instrumentos para mediar entre la cultura matemática y el conocimiento que se vive dentro del aula de clase. De esta manera se utiliza el pantógrafo de Scheiner como un instrumento de mediación semiótica para la construcción del conocimiento matemático al igual que la gestión docente que será primordial para el mejoramiento del aprendizaje y comprensión de las matemáticas, en particular para las semejanzas vista como una transformación geométrica.

Palabras clave: Demostración-teoría de la mediación semiótica-unidad cognitiva-diseño de secuencia de problemas abiertos-transformaciones geométricas.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado resalta la importancia de incluir la demostración en los currículos escolares como un medio para el mejoramiento del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. A partir de un enfoque cognitivo se parte de la inclusión de instrumentos que actúan como mediadores semióticos para la construcción del conocimiento matemático a través del proceso que inicia con la producción de una conjetura hasta la posible construcción de su demostración.

De esta manera, se propone la realización e implementación de una secuencia de problemas abiertos a partir de la teoría de la mediación semiótica, que se enfoca principalmente en la descripción por la vía experimental del paso de la conjetura a la demostración para la generación de procesos demostrativos que ayuden al mejoramiento del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Para este fin, se plantea la integración del pantógrafo de Scheiner como un instrumento de mediación que permite explotar las cualidades semióticas implícitas en él y las producidas por los mismos estudiantes en la interacción con los problemas abiertos. Para la presentación de este trabajo se organizó en cinco capítulos descritos a continuación:

En el capítulo 1, se presenta una mirada al problema de investigación en el cual se formula y se justifica la importancia de su estudio, además se describe el problema a partir de las diferentes investigaciones que se han realizado en el campo de la didáctica de las matemáticas, en torno al abordaje de la demostración en el currículo escolar como proceso para el mejoramiento del aprendizaje de las mismas.

En el capítulo 2, se desarrolla el marco teórico en términos de tres dimensiones: cognitiva, didáctica y la dimensión matemática, que ayudan a construir la base para la realización de la investigación y brindar elementos fundamentales para la solución de la problemática planteada.

En el tercer capítulo se explica la metodología empleada para el diseño de la secuencia didáctica, describiendo los problemas abiertos con su intención y función en la secuencia, así como su implementación en el aula de clase bajo las herramientas descritas en el marco teórico, para evidenciar el proceso de la conjetura a la demostración.

En el cuarto capítulo se analizan los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia didáctica de problemas abiertos, articulando los marcos teóricos que sustentan el proceso de la conjetura a la demostración.

Y por último, el capítulo cinco en el cual se muestran los resultados de la investigación a partir de los análisis realizados en el capítulo cuatro, entre ellas la importancia de incluir la demostración en el currículo escolar para el mejoramiento del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

INTRODUCCIÓN

En este capítulo se pretende abordar a partir del estudio ICMI todo lo referente al problema de investigación, la importancia de incluir y resaltar el papel que juega la demostración vista como un proceso para mejorar la comprensión de los conocimientos matemáticos y la necesidad de evidenciarla en la práctica escolar Colombiana como una herramienta indispensable para el desarrollo de capacidades y habilidades de los estudiantes. También se resalta el papel de la geometría como un objeto de conocimiento propicio que ayuda a desarrollar y mejorar el razonamiento humano, permitiendo a su vez la posibilidad de incluir instrumentos de mediación semiótica para la construcción del conocimiento matemático.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Tradicionalmente las matemáticas han sido vistas como una serie de conocimientos acumulativos e inmutables que es necesario aprender, ya que en la práctica educativa los procesos matemáticos son considerados como un producto, es decir, como una secuencia de pasos lógicos los cuales nos llevarán a conclusiones verdaderas planteadas por matemáticos conocidos o hacia el conocimiento de algún producto ya probado por los mismos. Siendo esta una de las razones por las cuales se convierte en la principal debilidad de los estudiantes, pues esta concepción cercena la creatividad y la comprensión en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se convierte de esta forma en una repetición de conocimientos que se enfoca principalmente al desarrollo de técnicas, procedimientos o estrategias de resolución de problemas que pueden dar una visión de las matemáticas como un cúmulo de resultados que son considerados verdaderos y que solo se requiere memorizarlos.

En ese sentido Bishop considera: “El currículo dirigido al desarrollo de técnicas está formado por procedimientos, métodos, aptitudes, reglas y algoritmos que dan una imagen de las matemáticas como una materia basada en el hacer. Es decir las matemáticas no se presentan como una materia de reflexión”(Bishop, 1988, p.24). Esta visión y su enfoque en el desarrollo de técnicas conlleva hacer de lado el aporte de las matemáticas no como un producto sino como un proceso, es decir como una herramienta indispensable e importante para el desarrollo de capacidades y habilidades en nuestros estudiantes.

En efecto “las matemáticas son un ejemplo por excelencia de amplificador de la capacidad del razonamiento humano”. (Bishop, 1988, p.36.). Es decir las matemáticas son una herramienta esencial que ayuda a fortalecer los procesos de pensamiento humano y abren las puertas necesarias para el desarrollo del razonamiento matemático.

En este sentido, el razonamiento matemático es considerado como el fundamento del conocimiento matemático y se caracteriza por sus aspectos fundamentales como son: la argumentación, la prueba y la demostración. En este trabajo estos aspectos se definen de la siguiente manera:

- La argumentación como “la exposición de una tesis controvertida, el examen de sus consecuencias, el intercambio de pruebas y buenas razones que la sostienen, y una clausura bien o mal establecida."(BALACHEFF, 1999).

La prueba y la demostración serán tomadas de acuerdo a las definiciones presentadas por Balacheff (2000) que las describe de la siguiente forma:

- La prueba será una explicación reconocida y aceptada por una comunidad dada, en un momento dado, como por ejemplo en un salón de clases.

- La demostración como la prueba dominante en matemáticas, que trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas; es decir, la prueba se convierte en una explicación socialmente aceptada por una comunidad especifica dada y la demostración en una forma estricta de prueba que se define dentro de un proceso social en el seno de la comunidad matemática.

Estos aspectos esenciales, principalmente el de la prueba y la demostración, no forman parte de los contenidos y prácticas escolares Colombianas, puesto que la prueba y la demostración son consideradas, en la mayor parte de la comunidad educativa, como una forma de razonar compleja que impide el aprendizaje de las matemáticas y por lo tanto no aporta los medios necesarios para el desarrollo del razonamiento matemático.

Se ha notado por esto un gran interés entre educadores e investigadores matemáticos por incluir la prueba y la demostración como procesos para incorporar el razonamiento humano en los currículos escolares, pues estos aspectos desempeñan un papel fundamental en la adquisición de habilidades para la justificación de argumentos frente a problemas no solo matemáticos sino de la vida social del estudiante.

Este es el caso del estudio ICMI 19 (2010), en el cual se destaca el papel de la prueba y la demostración como procesos para el desarrollo y la comprensión de los conocimientos matemáticos, igualmente propone comenzar desde los primeros grados escolares y que se vaya desarrollando a medida que el estudiante avanza en sus conocimientos y se acerque cada vez más a los planteados por los investigadores en el área de las matemáticas, es decir la prueba y la demostración, permiten a su vez abrir la conexión faltante entre las matemáticas escolares y las matemáticas como disciplina.

Del mismo modo, para los investigadores matemáticos, la demostración va más allá de una simple secuencia de pasos lógicos y coherentes. La demostración ayuda principalmente a la comprensión del conocimiento matemático no solo para darnos cuenta cuando algo es cierto sino porque lo es. Por esta razón, la enseñanza y el aprendizaje de la prueba y la demostración deben verse como procesos esenciales para desarrollar capacidades y habilidades que tienen que ver con el razonamiento matemático y que permite a su vez mejorar las prácticas de enseñanza del profesor y la actividad matemática del estudiante. Según el ICMI (2010), para que lo anterior se evidencie se debe comenzar en los primeros grados escolares, donde es necesario que el profesor sea consciente del valor de la demostración y contribuya al reconocimiento del papel de la demostración para la comprensión del conocimiento matemático.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La propuesta curricular en matemáticas planteada por el MEN (1998), donde se orienta y se desarrolla el área de matemáticas en el país, considera la geometría como una herramienta para interpretar y entender el mundo que nos rodea, puesto que es uno de los pensamientos en el currículo que posibilita un acercamiento a la realidad. La geometría es considerada una fuente de modelación para desarrollar procesos que conlleven a niveles más complejos, los cuales generan situaciones problema que propician las formas de argumentación y establecimiento de conjeturas, donde los estudiantes puedan llegar a la validación de argumentos geométricos.

Es decir, la geometría se considera como una herramienta que ayuda a cualificar procesos asociados con el desarrollo del razonamiento matemático, habilidades específicas y permite a su vez una aproximación a la demostración. Sin embargo, al observar la forma como se desarrollan estos procesos dentro del currículo escolar y el tiempo mínimo dedicado para el trabajo con ellos en el aula de clase, evidencian la poca importancia para el desarrollo del razonamiento matemático de nuestros estudiantes, puesto que estos procesos comúnmente se resaltan en el último grado escolar de la educación básica o en niveles superiores, lo cual ha provocado a lo largo de los tiempos una falta de reconocimiento, inseguridad o rechazo de los estudiantes y profesores frente a los contenidos geométricos.

La geometría por lo tanto debe verse como un objeto de conocimiento que ayuda a desarrollar y a mejorar el razonamiento matemático en las aulas de clase y así, por medio de ella, valorar el papel fundamental que juega la prueba y la demostración para la comprensión de contenidos matemáticos, que ayuden al estudiante a pasar de un nivel pragmático hasta un nivel teórico[1] donde haya apropiación de conceptos matemáticos y por medio de herramientas, puedan comenzar un proceso de exploración, conjetura, argumentación y prueba hasta llegar a la construcción de la demostración.

[1]El nivel teórico se hace referencia al contexto teórico que abarca el proceso de la demostración y el nivel pragmático hace referencia a el contexto práctico, es decir, donde se evidencia lo que funciona por medio de las actividades prácticas que se lleven a cabo en el aula de clase.

Esto es posible a través del papel que juegan las herramientas que pueden concebirse como mediadores semióticos y que cumplen la función de controladores para la construcción del saber matemático. De aquí surge como hipótesis en esta propuesta la posible función realizada por un artefacto, en particular por el pantógrafo de Scheiner, cuando se introduce en la práctica escolar y es utilizado por el profesor como instrumento de mediación semiótica, para introducir a los estudiantes en la demostración como un proceso para la comprensión de los conocimientos matemáticos.

Por lo tanto, como profesores e investigadores matemáticos, debemos fomentar y ayudar a reconocer el valor de la prueba y la demostración como un proceso para el desarrollo y la comprensión del conocimiento matemático, donde por medio de situaciones problema se visualice la importancia de su introducción en las prácticas escolares como un proceso que se construye y que inicia desde la producción de una conjetura hasta la posible construcción de su demostración. De aquí se plantea el problema de investigación que hace alusión al siguiente interrogante:

¿Qué caracteriza un entorno de aprendizaje, que hace posible una aproximación a la demostración cuando se integra un instrumento como el pantógrafo de Scheiner desde la Teoría de la Mediación Semiótica?

1.3 JUSTIFICACIÓN

La demostración ha sido concebida durante muchos años como una forma de razonar muy compleja que impide que los estudiantes avancen en sus conocimientos matemáticos. De hecho muchos profesores afirman que incluir la demostración en las aulas de clase conlleva a una destrucción de los conocimientos ya construidos e interiorizados por los estudiantes. A raíz de esto se evidencia un notable interés de los educadores matemáticos por estudiar este proceso y resaltar la importancia de incluirlo dentro del currículo escolar como una herramienta para mejorar la comprensión de los conocimientos matemáticos. Tal es el caso del Estudio ICMI (2010) donde se discuten los diferentes significados de la demostración y la forma en que éstos influyen en las concepciones escolares de los profesores frente al desarrollo de la demostración. Esto con el fin de resaltar el papel importante que juega la demostración en la construcción del conocimiento matemático y así lograr avanzar en conocimientos más complejos.

Asimismo, para el estudio ICMI (2010), el papel de la demostración es de suma importancia dentro del currículo escolar, puesto que actúa no solo como un método de validación sino también como una herramienta, que permite favorecer y mejorar la comprensión matemática, es decir proporciona una manera de darnos cuenta porqué una afirmación puede ser verdadera. Esta es sin duda alguna, la razón más importante para otorgarle importancia a la demostración en los procesos de enseñanza y aprendizaje, puesto que la demostración proporciona una forma de pensar que desarrolla la cognición de los estudiantes frente a los objetos y procesos matemáticos.

En este sentido, el documento de debate del estudio ICMI (2010): prueba y demostración en educación matemática, plantea las siguientes características importantes frente al desarrollo de la demostración:

1. La prueba y la demostración en los currículos escolares tienen el potencial para proporcionar un vínculo a largo plazo con la disciplina compartida por los matemáticos y cualificar los procesos de participación en la formación de la ciudadanía.

2. La prueba y la demostración pueden proporcionar una manera de pensar que profundiza la comprensión matemática y el carácter más amplio del razonamiento humano.

3. La prueba y la demostración son fundamentales y complejos y deben desarrollarse gradualmente a partir de los primeros grados. (Lin, Hsieh, & G, 2010, p.2)

De esta manera, una aproximación a la demostración en el contexto escolar como una herramienta para la comprensión, posibilita un sentido dado al conocimiento matemático escolar y proporciona también la conexión faltante entre estos y los conocimientos desarrollados por los investigadores matemáticos.

Para este estudio, el papel de la demostración debe ser fundamental en nuestras aulas de clase y debe partir desde los primeros grados escolares, donde se pueda crear una cultura matemática más útil y encaminada a mejorar la cognición de nuestros estudiantes. Es por esto que el ICMI (2010) plantea:

> El éxito de este proceso dependería obviamente de las opiniones de los profesores acerca de la esencia y las formas de las demostraciones, de lo que hacen los profesores con sus alumnos en las aulas, de cómo los profesores interpretan y aplican tareas curriculares que tienen el potencial de ofrecer oportunidades a los

estudiantes a participar en la demostración, y diagnosticar las dificultades de los estudiantes en la demostración y el diseño de intervenciones para ayudar a superar estas dificultades. (Lin, Hsieh, & Hanna, 2010, p.2).

De esta forma, la demostración se convierte en una herramienta potente que debe estar presente dentro del currículo escolar para el desarrollo de habilidades de pensamiento, posibilitando que el estudiante pueda enfrentarse a nuevas situaciones o procesos matemáticos y además sea capaz de argumentar y validar sus razonamientos. Como menciona Quintero (2010): "Al respecto en los trabajos revisados se hace reiterativo el reclamo por el reconocimiento del sitio preponderante que dentro de la cultura escolar y en la formación del individuo debe ocupar la comprensión de los procesos demostrativos como fundamento y esencia para la construcción del saber matemático".(Quintero, 2010, p.30).

Se hace necesario con esto fomentar o implementar nuevos entornos de aprendizaje que sirvan de soporte para que los estudiantes afronten los problemas que posee el proceso demostrativo que va desde la producción de una conjetura[2] hasta su posible demostración. Asimismo, se evidencia que los estudiantes tienen un gran potencial para argumentar situaciones de la vida cotidiana, pero aun así no ven la relación de ellas con los conocimientos matemáticos y tampoco del cómo emplear este potencial en estos procesos.

Por todo lo anterior, este trabajo adopta una perspectiva curricular donde la demostración más que un método de validación se concibe como un proceso que permite favorecer la comprensión matemática y el desarrollo del razonamiento matemático. Esta forma de concebir la demostración abre paso

[2] La conjetura se entenderá como "una proposición que se prevé verdadera pero que está pendiente de ser sometida a examen. Este examen puede tener como resultado su aceptación o su rechazo" (Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid, & Oleksiy, 2008, p.433)

a aumentar el interés de muchos investigadores sobre este tema y aunque entre ellos existan muchas concepciones frente a la demostración, existe un principio que lo fundamenta respecto a todas y es:

> "Especificar claramente los supuestos hechos y proporcionar un argumento apropiado apoyado en un razonamiento válido a fin de extraer conclusiones necesarias" (Lin, Hsieh, & Hanna, 2010, p.1)".

Este es un principio de hecho importante en el corazón de la demostración porque proporciona un camino hacia el desarrollo del razonamiento humano. Siguiendo estos propósitos en este trabajo de grado se pretende diseñar una secuencia de problemas abiertos para la educación básica en el grado noveno, donde a través de instrumentos de mediación semiótica y guiado por el profesor fomente el paso de la producción de una conjetura hasta la construcción de su demostración en contextos geométricos y de esta manera resaltar el valor de la demostración.

1.3.1 Representación del proceso de la conjetura a la demostración en el currículo escolar Colombiano

El paso de la conjetura a la demostración es un proceso que se encuentra implícito en los lineamientos curriculares (MEN, 1998), dentro de lo que se denomina "Razonamiento". El razonamiento se plantea dentro de los 5 procesos generales y tiene que ver con las matemáticas como comunicación, como modelación y como procedimiento. De manera general se entiende "por razonar, la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión" (MEN, 1998, p.54). Así el razonamiento matemático juega un papel importante en el currículo escolar y debe ser incorporado en todos los trabajos y prácticas educativas matemáticas.

Por lo tanto razonar tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.

- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.

- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.

- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.

- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.(MEN, 1998, p.54).

Para favorecer el desarrollo de este eje se debe:

- Propiciar una atmósfera que estimule a los estudiantes a explorar, comprobar y aplicar ideas. Esto implica que los maestros escuchen con atención a sus estudiantes, orienten el desarrollo de sus ideas y hagan uso extensivo y reflexivo de los materiales físicos que posibiliten la comprensión de ideas abstractas.

- Crear en el aula un ambiente que sitúe el pensamiento crítico en el mismo centro del proceso docente. Toda afirmación hecha, tanto por el maestro como por los estudiantes, debe estar abierta a posibles preguntas, reacciones y reelaboraciones por parte de los demás. (MEN, 1998, p.54).

El razonamiento aparece tanto en los lineamientos curriculares como en los Estándares básicos de matemáticas como un proceso relevante que tiene en cuenta los cinco pensamientos y aunque se sugiere incorporarlos en todos los niveles académicos Colombianos se habla más de como los estudiantes lo adquieren de manera intuitiva durante sus primeros grados escolares y solo es hasta los grados de educación media que se menciona la importancia de trabajar con proposiciones, teorías y demostraciones, como lo explica el siguiente párrafo:

> Un objetivo fundamental es el de proporcionar a los estudiantes numerosas experiencias que les hagan sentir, admirar y ejercitar el maravilloso poder lógico de su cerebro para lanzar hipótesis, formular conjeturas, confirmarlas o refutarlas, argumentar en favor o en contra de una tesis, realizar inferencias, detectar supuestos ocultos, demostrar teoremas, generar y transformar información en forma rigurosa y extraer de ella otra información no percibida a primera vista, construir algunas demostraciones para enunciados matemáticos, dar contraejemplos. Deben aprender diferentes métodos de demostración. Tener experiencias en las que utilicen razonamientos inductivos y deductivos. Es necesario también analizar afirmaciones de la vida cotidiana a partir de los principios lógicos que sustentan la argumentación. (MEN, 1998, p.66).

Por tal motivo varios investigadores en educación matemática han fomentado la inclusión de la demostración desde los primeros grados escolares, creando estrategias que posibiliten el desarrollo de este proceso demostrativo que se da mediante una exploración-conjetura-argumentación-prueba que conduce a introducir a los estudiantes al proceso de demostración.

1.3.2 Las transformaciones geométricas en el currículo escolar colombiano

Las transformaciones geométricas están incluidas dentro del desarrollo del pensamiento geométrico y su estudio ha ido cobrando importancia sobre la presentación formal de la geometría establecida por teoremas y demostraciones. Las transformaciones permiten visualizar, observar y analizar movimientos de figuras, que a su vez permiten desarrollar esquemas activos en la imaginación e intuición del estudiante, es decir, que ayuden a que el estudiante reflexione y pueda conjeturar acerca de las acciones y movimientos que se pueden observar con ayuda de elementos o artefactos prácticos que favorezcan la interiorización de los elementos desarrollados en este proceso.

Por tal motivo en los lineamientos curriculares se propone "De esta manera que se trabaje la geometría por medio de aquellas transformaciones que ayuden a esa exploración activa del espacio y a desarrollar sus representaciones en la imaginación y en el plano del dibujo". (MEN, 1998, p.41).

Las transformaciones geométricas, como las homotecias, pueden permitirnos explorar las propiedades que hay implícitas dentro de este proceso y producir en los estudiantes la exploración, conjetura, argumentación y prueba que dará paso a la introducción al proceso demostrativo.

De allí surge nuestra primera hipótesis: El potencial semiótico del pantógrafo puede favorecer el proceso de la conjetura a la demostración durante la experimentación de la secuencia didáctica en el ámbito de las transformaciones geométricas, como son las homotecias.

- Las homotecias en el currículo escolar

En este trabajo de investigación se seleccionó una de las transformaciones geométricas conocidas como son las homotecias, por dos razones importantes:

1. Por ser un saber contemplado en el currículo escolar Colombiano dentro de lo que se considera como transformación geométrica que puede permitir el proceso de la conjetura a la demostración.

2. Por ser una herramienta que actúa sobre el proceso de la conjetura a la demostración, el cual se encuentra implícito en el artefacto que funcionará como instrumento de mediación semiótica como lo es el "pantógrafo de Scheiner".

Analizando las homotecias en los estándares básicos, en los diferentes grados, se puede observar una coherencia horizontal en el cual este concepto juega un papel importante y está implícito en los procesos de razonamiento, tal como se relaciona en la siguiente tabla:

Grados	Proceso de razonamiento	Estándares
1-3	Observación de figuras para identificar formas y tamaños	Reconozco congruencia y semejanza entre figuras (ampliar, reducir).
4-5	Resolución de problemas que requieren el despliegue de razonamiento matemático: inferencias, restricciones, criterios.	• Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características • Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza

		entre figuras. • Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.
6-7	*Hacer predicciones y comparaciones por manipulación y transformación de figuras. *Proponer problemas que demandan distintos procedimientos y niveles de razonamiento.	• Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte. • Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales. • Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos
8-9	*Argumentar sobre la validez de una proposición estableciendo condiciones. *Lanzar hipótesis, formular conjeturas, confirmarlas o refutarlas, argumentar en favor o en contra de una tesis, realizar inferencias, detectar supuestos ocultos.	• Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. • Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).

		• Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. • Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Tabla 1. Las homotecias dentro del currículo escolar

La información presentada en la anterior tabla conlleva a introducir el concepto de homotecia como una transformación geométrica que analiza varios conceptos dentro de ella como: la semejanza de triángulos. Esto permite también ubicar nuestra secuencia didáctica en el grado noveno, dada la coherencia horizontal del concepto y puesto que los estudiantes en este nivel trabajan la formulación de conjeturas verificando propiedades donde se puede lograr construir una demostración.

1.3.3 Análisis de pruebas realizadas en Colombia en el área de Matemáticas

- Pruebas Saber 5° y 9°

Las pruebas saber 5° y 9° son evaluaciones nacionales de carácter externo que se aplican cada tres años (en los grados quinto y noveno de la educación básica de todo el país). Estas pruebas han sido desarrolladas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y el ICFES desde el año 1991 con el fin de conocer el desarrollo de las competencias básicas específicamente en las áreas de lenguaje, matemáticas y ciencias naturales.

Las últimas pruebas realizadas fueron en el 2012 para los grados 5° y 9° y se contó con la participación también de los estudiantes del grado 3°,que están en la mitad del ciclo de básica primaria, esto con el fin de ayudar adoptar medidas más oportunas para el mejoramiento de la calidad de la educación Colombiana

Los resultados y análisis de estas pruebas permiten contribuir al mejoramiento de la educación Colombiana, dando aportes importantes para que los actores que influyen en la educación de los estudiantes como lo son: el gobierno, la escuela, los profesores, los padres y la misma sociedad, identifiquen valores, conocimientos, habilidades que ellos desarrollan sin importar sus condiciones sociales, económicas y culturales y así lograr contribuir con planes de mejoramiento para la calidad de la educación Colombiana. En el 2012 la prueba saber en el área de matemáticas estuvo enfocada en las siguientes competencias y procesos a evaluar(Pruebas saber 2012, p.47):

COMPETENCIAS	PROCESOS
Comunicación, representación y modelación	• Traducción entre formas de representación • Matematización de situaciones
Razonamiento y Argumentación	• Justificación de procedimientos y estrategias. • Generalización
Planteamiento y resolución de problemas	• Selección y ejecución de operaciones pertinentes. • Validación de soluciones

Tabla 2. Competencias y procesos en las pruebas saber 2012

Los últimos resultados analizados de la prueba de 2009 muestran que se hace necesario apoyar y fortalecer programas que estudien estas competencias básicas en el área de matemáticas, con el fin de propiciar el desarrollo de propuestas de investigación que permitan mejorar los resultados a nivel institucional. Es así como este análisis se recoge en esta propuesta como un incentivo para construir la secuencia didáctica, con el fin de mejorar las competencias que se relacionan con el razonamiento y la argumentación.

- Pruebas Timss

Las pruebas Timss, por sus siglas en inglés, se refiere al estudio internacional de tendencias en matemáticas y ciencias, se realiza gracias a la participación de un grupo de instituciones internacionales dirigidas por la IEA (Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo) y busca proveer información para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las ciencias fundamentales para el desarrollo de competencias que vinculan la solución de problemas y el razonamiento riguroso. Este estudio es realizado cada cuatro años y se mide el rendimiento de estudiantes que cursan cuarto y octavo grado de la educación básica, con el fin de obtener información necesaria para establecer los principales factores que influyen en el aprendizaje de los estudiantes, como también en la organización de las prácticas de enseñanza.

Colombia ha participado en dos aplicaciones en el año 1995 y la última en 2007. Ambas pruebas muestran la importancia de incluir el razonamiento en la aplicación de estas, puesto que el razonamiento matemático implica la capacidad de pensamiento lógico y sistemático incluyendo el razonamiento intuitivo e inductivo que permite llegar a soluciones para problemas tanto matemáticos como de la vida real a través de patrones y regularidades.

En el 2007 se evaluaron dominios de contenido y dominios cognitivos como los que se presentan a continuación:

<table>
<tr><th>Dominios de contenido para cuarto grado</th><th colspan="2">Porcentajes</th></tr>
<tr><td>Números</td><td colspan="2">50%</td></tr>
<tr><td>Formas geométricas y medidas</td><td colspan="2">35%</td></tr>
<tr><td>Presentación de datos</td><td colspan="2">15%</td></tr>
<tr><th>Dominios de contenido para octavo grado</th><th colspan="2">Porcentajes</th></tr>
<tr><td>Números</td><td colspan="2">30%</td></tr>
<tr><td>Álgebra</td><td colspan="2">30%</td></tr>
<tr><td>Geometría</td><td colspan="2">20%</td></tr>
<tr><td>Datos y probabilidad</td><td colspan="2">20%</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Dominios cognitivos</th><th colspan="2">Porcentajes</th></tr>
<tr><th>Cuarto</th><th>Octavo</th></tr>
<tr><td>Conocer</td><td>40%</td><td>35%</td></tr>
<tr><td>Aplicar</td><td>40%</td><td>40%</td></tr>
<tr><td>Razonar</td><td>20%</td><td>25%</td></tr>
</table>

Tabla 3.Dominios de contenido y porcentajes en las pruebas Timss 2007

El proceso de razonar que tiene un 25% para el grado octavo, “va más allá de la solución de problemas rutinarios. Abarca la capacidad de pensamiento lógico y sistemático, así como situaciones nuevas, contextos complejos y problemas que requieren el desarrollo de varios pasos para su resolución. También incluye el razonamiento intuitivo e inductivo basado en patrones y regularidades que pueden ser utilizados para solucionar problemas rutinarios”. (MEN 2010, p29).

Los resultados de estas pruebas muestran que los estudiantes Colombianos de octavo grado tienen dificultad para resolver problemas matemáticos en los distintos dominios, en particular al que se refiere a aspectos como solución de problemas, razonamiento matemático, entre otros, que muestra que se debe trabajar y prestar más atención, por parte de la comunidad educativa, en la forma en cómo inciden en el proceso de enseñanza de los estudiantes. En esta dirección es que la propuesta de la secuencia va encaminada a mejorar estos procesos que tienen que ver con el razonamiento de los estudiantes.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo General

- Caracterizar una aproximación a la demostración mediante el diseño y puesta en escena de una secuencia de problemas abiertos desde la teoría de la mediación semiótica.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Fundamentar una perspectiva didáctica respecto a la demostración desde la Teoría de la Mediación Semiótica.

- Determinar aspectos fundamentales para el diseño e implementación de la secuencia de problemas abiertos que promueva el paso de la conjetura a la demostración en el contexto de la geometría transformacional.

- Establecer características que permitan una aproximación a la demostración.

CAPITULO 2: MARCO TEÓRICO

INTRODUCCIÓN

En esta propuesta de trabajo de grado el marco teórico se desarrolla bajo una perspectiva socio-cultural, desde el enfoque constructivista Vygotskiano, Ramírez (2009), donde el conocimiento de un individuo se construye propiamente de la interacción con su experiencia social y cultural en el medio que lo rodea. De esta manera el individuo y su medio son participantes activos del proceso de aprendizaje de los conocimientos fundamentales para el ser humano. Teniendo en cuenta que el asunto central e importante en esta propuesta es el paso de la conjetura a la prueba, para una aproximación a la demostración que va direccionada a la comprensión del conocimiento matemático, explicamos este marco teórico desde tres dimensiones: la cognitiva, la didáctica y la matemática que permiten resaltar y valorar este proceso para mejorar la cognición de los estudiantes en referencia a las matemáticas.

En primer lugar, se introduce la dimensión cognitiva centrada principalmente en la continuidad que puede existir desde la producción de una conjetura hasta su respectiva demostración. Esta incluye la Teoría de la mediación semiótica elaborada a partir de algunos conceptos desarrollados por Vygotsky, donde pone en evidencia herramientas que pueden convertirse en mediadores para la construcción del saber matemático. Siguiendo esta idea se introduce también la Unidad cognitiva, teoría desarrollada por algunos autores investigadores en Didáctica de las Matemáticas, que han analizado a partir de estudios la posibilidad de permitir a partir de esta teoría el paso de la producción de una conjetura a la construcción de su demostración mediante actividades de mediación semiótica que ayudan a que se visualice de alguna manera la continuación existente entre la conjetura de un enunciado y la construcción de su demostración.

En segundo lugar se introduce la dimensión didáctica articulada desde el ciclo didáctico, definido por los investigadores italianos, donde se hace énfasis a los problemas abiertos, que servirán para el análisis y diseño de la secuencia didáctica.

En tercer lugar, se explica desde la dimensión matemática el marco geométrico en particular desde la geometría transformacional, enfocada principalmente en el caso de la semejanza vista desde una transformación geométrica, que deja ver su relación con el instrumento de mediación semiótica para la aproximación a la demostración.

2.1 DIMENSIÓN COGNITIVA

La relación entre la producción de una conjetura y su posible demostración implica un proceso entre dos discursos un poco diferentes: la argumentación y la demostración. Las investigaciones didácticas sobre estos dos tipos de discursos son demasiadas y se distinguen radicalmente por las diferencias que puede haber en sus estructuras, en las intenciones de cada una de ellas y en los productos que pueden generar.

Existen por lo tanto dos puntos de vista radicalmente opuestos sobre esta relación: por un lado tenemos un primer grupo que analiza las diferencias estructurales entre la argumentación y la demostración, las cuales crean un obstáculo o una barrera para pasar de un discurso al otro y, por otro lado, tenemos un segundo grupo que se enfoca más por la continuidad que puede existir entre estos dos discursos.

En el primer grupo se encuentran los aportes de Duval (1995) que, desde su punto de vista radical, pone en evidencia una amplia distancia entre la argumentación de un enunciado y su posible demostración, puesto que se debe considerar el valor epistémico y el valor teórico que conlleva esta distancia, ya que el valor epistémico que implica las creencias del estudiante a veces no concuerdan con el marco teórico propuesto, así de esta forma un estudiante por medio de la teoría puede comprobar la validez de un enunciado pero sin creer aun en ella. Esto según Duval establece un conflicto cognitivo que no deja pasar de la producción de una conjetura a la construcción de su demostración.

En contraposición con Duval y en representación del segundo grupo, se encuentran algunos investigadores italianos Como Mariotti, Bartolini, Boero, entre otros, que han llevado a cabo estudios históricos-culturales donde se ha puesto en evidencia un posible paso de la conjetura a la demostración, teniendo en cuenta otros posibles factores que influyen dentro de esta, como es la inclusión de mediadores semióticos que actúan sobre este proceso. Siguiendo esta idea, en este trabajo se adopta la postura del segundo grupo, como una hipótesis para evidenciar la posible continuidad que puede existir entre la producción de una conjetura y su posible demostración mediante instrumentos de mediación semiótica explicados a continuación.

2.1.1 Teoría de la Mediación Semiótica (TMS)

Esta teoría ha sido desarrollada en particular a partir de los años 80 por María G. Bartolini & María A. Mariotti y se basa en los trabajos realizados por Vygotsky, especialmente el de mediación semiótica. Este marco teórico permite ir de un plano teórico a un plano pragmático y viceversa, construyéndose así elaboraciones teóricas y experimentales en clase, que contribuyen a mejorar y desarrollar el proceso y la función de la demostración, en la cognición de los estudiantes.

De esta forma la TMS otorga un valor central en la formación de conceptos a:

1. Al lenguaje y al uso de signos.

2. A la utilización de herramientas, para el desarrollo de actividades didácticas y dirigidas hacia finalidades específicas.

3. A las dinámicas sociales, que enlazan estrechamente los planos inter-subjetivo e intra-subjetivo[3]. (Quintero, 2010, p.33).

Estos autores siguen a Vygostky en sus conceptos de signos y herramientas, en el cual consideran los signos como una herramienta psicológica o también llamada por éstos como herramientas de mediación semiótica que tiene una finalidad interna sobre el individuo, es decir que permiten que este interiorice en sí mismo los significados socialmente compartidos para su respectiva comprensión. Y las herramientas, vistas desde la parte práctica, como herramientas técnicas con una finalidad externa, es decir las que permiten que a partir de éstas y del proceso con ellos el conocimiento se interiorice en el individuo. La diferencia entre estas dos básicamente se reducen a la actuación que cada una de ellas ejerce en el comportamiento humano.

De esta manera, como lo expresa Mariotti (1998), la TMS resalta la importancia de incluir en el desarrollo del conocimiento matemático artefactos cognitivos como elementos principales del aprendizaje de los estudiantes.

[3]El plano intersubjetivo se entiende como el contexto donde las personas comparten conocimientos construidos por las mismas personas en sus interacciones cotidianas y usadas como recursos para interpretar el significado de los elementos de la vida cultural y social. El plano intra-subjetivo hace referencia a los conocimientos construidos interiormente por cada una de las personas.

Por esta razón, esta teoría ofrece un marco adecuado para el uso de instrumentos en el campo de la educación matemática que se manipulan como instrumentos de mediación semiótica para estudios de investigación en el aula de clases. En relación con esto se da una breve definición de estos instrumentos explicando su contribución en la educación matemática.

Para la TMS y especialmente para Vygotsky, los conocimientos internos de cualquier individuo han sido precedidos por comportamientos en una fase externa y social. De esta manera la TMS se fundamenta en dos características principales, como son los mediadores semióticos que se describen desde los signos y las herramientas y las interacciones sociales entre estudiante-estudiante y profesor-estudiante. El profesor actúa también como mediador semiótico entre el conocimiento matemático y el aprendido por el estudiante y permite a su vez pasar del plano intersubjetivo al plano intrasubjetivo, que se sustenta en lo que Vygotsky llama la zona de desarrollo próximo y el concepto de internalización.

Para Vygotsky lo que permite explicar el paso del plano intersubjetivo al plano intrasubjetivo es el proceso de internalización que define como el proceso que permite trabajar desde una herramienta exteriormente orientada en un signo interiormente orientado que conlleva así a la apropiación de actividades y de situaciones socio-culturales determinadas en una comunidad, pero para que este proceso se produzca Vygotsky introduce lo que denomina la Zona de Desarrollo Próximo, donde el estudiante interacciona de cierta manera con el profesor y con sus compañeros de clase y es en esta interacción lo que ayuda a desarrollar una zona de aprendizaje potencial donde podrá manipular los diferentes conocimientos que en ella se produzcan. De esta manera el estudiante construye a partir de las interacciones con sus compañeros y con el profesor los conocimientos que después serán interiorizados para la apropiación de los conocimientos matemáticos.

De aquí se deduce uno de los rasgos más importantes en esta teoría y es al papel que juegan las interacciones sociales con las que a menudo el individuo se enfrenta y que le ayudan a interiorizar los conceptos compartidos dentro de una comunidad. Por esta razón, en esta teoría las interacciones sociales también incluyen el papel que cumple el profesor cuando interactúa con los estudiantes al permitir desarrollar los conocimientos matemáticos para ser interiorizados en ellos. De este modo, el profesor jugará un papel importante como mediador semiótico entre el estudiante y la cultura matemática.

El proceso de internalización definido por Vygotsky como hace referencia a una fase social, está relacionada con el uso de signos que no solo se manifiestan en palabras sino también en gestos, expresiones, entre otros medios semióticos. El uso de signos como lo menciona Mariotti (2008) en el cumplimiento de una tarea tiene una doble función cognitiva: por un lado el estudiante produce signos relacionados con la realización de una tarea que le permite comunicarse con los demás participantes en ella. Y por otro lado esta producción se relaciona con el proceso de interpretación que le permite intercambiar ideas.

- Mediadores Semióticos

La mediación semiótica se fundamenta en el desarrollo de la relación entre los estudiantes y el conocimiento matemático que va hacer mediado por el profesor, que representa un mediador de la cultura matemática. Es decir, los estudiantes se relacionan con una tarea y en particular con el instrumento

utilizado para su desarrollo, el cual direcciona el conocimiento matemático que ha de ser mediado por el profesor.
Por otro lado la relación entre el instrumento y la tarea pueden ser expresados por signos que están relacionados a la solución de la tarea en particular. En cualquiera de los casos, la producción de signos se caracteriza por su constante relación con los procedimientos realizados por los estudiantes.

A continuación se explican los instrumentos de mediación semiótica a emplear en este trabajo de grado

- Artefacto e instrumento: El Pantógrafo de Scheiner

El pantógrafo de Scheiner es un instrumento formado por cuatro reglas que se articulan en los puntos A, B, C y D como lo muestra la figura No.1, formando un paralelogramo. Está compuesto por tres elementos importantes como son: El punto O, que se fija a una superficie, el punto Q que lo denominaremos el puntero y el punto P que será el trazador móvil (como lo muestra la figura No.1). Teniendo el punto fijo, mientras el puntero recorre la figura inicial, el trazador móvil dibuja la figura final que será la figura transformada por el pantógrafo a partir de la inicial.

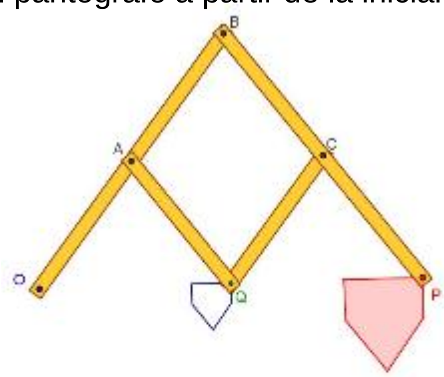


Ilustración 1. Modelo Pantógrafo de Scheiner

El pantógrafo de Scheiner cumple con ciertas características para su buen funcionamiento como son:

- El punto P de la regleta BC se elige de tal manera que PC =BC al igual que para la regleta AB.

- Los puntos O, Q y P deben permanecer alineados durante el movimiento del pantógrafo.

De esta manera Q y P se corresponden entre sí por medio de una homotecia de centro en O y razón de homotecia k= OP/OQ.

En este apartado se quiere hacer énfasis en la función realizada por instrumentos como lo es el pantógrafo de Scheiner, cuando es introducido en la práctica escolar como una herramienta para el desarrollo de conocimientos y como es utilizado a la vez por el profesor como instrumento de mediación semiótica. Así de este modo, el pantógrafo como lo menciona en su trabajo Hoyos (2006), tendrá dos funciones, por un lado servirá de herramienta para ayudar a los estudiantes a comprender los conocimientos matemáticos y por el otro será utilizado por el profesor como instrumento de mediación semiótica para la internalización de dichos conocimientos matemáticos.

En este trabajo se optó por utilizar el pantógrafo de Scheiner, ya que es un instrumento constituido como mecanismo para tratar el tema de transformaciones geométricas. Algunas investigaciones realizadas (ANTONINI & MARTIGNONE, 2011) han revelado las potencialidades que posee este artefacto como una herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, que permite promover situaciones donde se evidencia la formulación de conjeturas y la generación de argumentaciones.

Por lo tanto, el pantógrafo permitirá, por un lado, visualizar los conocimientos matemáticos que se pretenden alcanzar en este trabajo y por otro lado, a través de la utilización como instrumento de mediación semiótica permitirá realizar el proceso de internalización explicado por Vygotsky para la aprehensión de estos conocimientos. Es decir para el paso del plano intersubjetivo al plano intrasubjetivo.

- El Profesor

El profesor juega un papel importante como mediador pues es el encargado de introducir a los estudiantes en la cultura matemática y de promover la evolución de los signos que hacen referencia a los significados personales y que se convierten en significados válidos para la cultura matemática.

De esta manera y como lo menciona Mariotti (2009), el profesor hace la función de mediador semiótico permitiendo utilizar el artefacto como una herramienta de mediación semiótica y la posibilidad de guiar al estudiante para que logre conectar los significados personales que se derivan del uso del artefacto con los significados matemáticos reconocidos por un experto en el campo.

2.1.2 Unidad Cognitiva

La Unidad Cognitiva pertenece al segundo grupo en contraposición con Duval (1995). A diferencia de este, esta teoría se apoya en la presencia de una unidad cognitiva que ayuda a pasar de la conjetura a la demostración. Este marco teórico ha sido desarrollado y elaborado por un grupo de investigadores italianos como lo son: (Boero, 1999; Bartolini Bussi & Mariotti, 1999), entre otros, que han explorado la posible continuidad existente entre la producción de una conjetura y su posible demostración por parte de los estudiantes en contextos geométricos y aritméticos.

Ellos consideran que mediante la unidad cognitiva el estudiante puede ir construyendo el conocimiento matemático mediante el proceso demostrativo, y a través de situaciones de problemas abiertos apropiados, en contextos adecuados, diseñados intencionalmente por el profesor para evidenciar esta continuidad. Dicha continuidad es la que se denomina "Unidad Cognitiva" y es descrita por estos investigadores italianos de la siguiente manera:

> Durante la producción de la conjetura, el estudiante progresivamente se ocupa de su enunciado a través de una intensa actividad argumentativa funcionalmente mezclada con la justificación de la plausibilidad de sus otras opciones. Durante la etapa subsiguiente de prueba el estudiante se conecta con su proceso de una manera coherente en la organización de algunas de las justificaciones "argumentos" producidos durante la construcción del enunciado de acuerdo con una cadena lógica. (BACCAGLINI-FRANK, 2010, p.21).

En otras palabras la Unidad Cognitiva se evidencia cuando existe la continuidad entre la actividad argumentativa que se produce en la fase de producción de conjeturas y el proceso de justificación formal que se produce en la fase demostrativa.

2.1.2.1 Fases en la Unidad Cognitiva

Con el fin de desarrollar esta continuidad estos autores trabajan desde un contexto geométrico que expone así la elaboración de una conjetura y la posible construcción de su demostración, La UC define este proceso en cuatro fases importantes como lo explica (Boero, 1999):

- Fase 1: Argumentativa de producción a la conjetura

  Esta fase incluye la exploración de la situación problemática en este caso el problema abierto, identificación de regularidades y condiciones para que estas ocurran, así mismo como de argumentos para la producción de la conjetura.

- Fase 2: De estabilización de la formulación de la conjetura

  Esta fase incluye tanto la formulación de la conjetura como su exploración, se acentúan las relaciones entre hipótesis y tesis, es decir, se establece lo que tenemos y a donde queremos llegar. De la misma forma, se incluyen identificación de argumentos apropiados para la validación de la conjetura relacionada con la teoría de referencia.

- Fase 3: De construcción de la demostración

  Esta fase describe la selección y encadenamiento de los argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva, es decir cuando a través de esto se puede explicar la validación de los argumentos de una manera informal.

- Fase 4: De estabilización de redacción de la demostración

  Esta fase es un poco más rigurosa porque representa la fase de estabilización de la demostración, es decir la organización de la cadena de argumentos en forma de una demostración que es reconocida por la comunidad de matemáticos profesionales. Esta fase corresponde a una manera formal de presentar una demostración en matemáticas.

Estas cuatro fases permiten de algún modo que la UC sea utilizada como una herramienta para el análisis de procesos que pongan en evidencia las potencialidades de ciertas situaciones problemáticas con respecto a la introducción de los estudiantes en la demostración y permite a la vez identificar los posibles obstáculos que de ella se derivan. Así la UC analiza situaciones de casos donde a partir de estos se puede avanzar en términos de dificultades y permitir pasar de la elaboración de una conjetura a la construcción de su demostración, con la cual nos ayuda también aproximarnos al proceso de la demostración, a resaltar su importante aporte en relación a la comprensión del conocimiento matemático y a potenciarlos procesos de razonamiento humano.

2.1.2.2 Continuidades en la UC

Para Pedemonte (1998) es posible reconocer la Unidad Cognitiva si se evidencian las siguientes continuidades:

1. Continuidad en el lenguaje

   Esta continuidad puede ser observada mediante las palabras, las expresiones, las frases que se utilicen a lo largo del proceso para evidenciar esta transición de la producción de la conjetura hasta su posible demostración.

2. Continuidad conceptual

   Esta continuidad se evidencia de manera directa, mediante la interacción de los estudiantes ya sea con el profesor o con sus compañeros de clase. Se observa a través del discurso que el estudiante utiliza para referirse algún concepto.

3. Continuidad de marco

Esta continuidad se verifica cuando se analiza si tanto la producción de la conjetura como su posterior demostración fueron construidas bajo el mismo marco teórico que utilizó en cada una de las dos fases.

4. Continuidad heurística

   Esta continuidad se observa cuando los elementos utilizados como variables y los elementos que permanecen fijos son considerados de igual forma en cada una de las dos fases, es decir si son utilizados con el mismo sentido tanto en la producción de la conjetura como en su posible demostración.

5. Continuidades en las dinámicas mentales

   Esta continuidad puede observarse cuando a lo largo del proceso, el estudiante sigue siendo mentalmente activo y sigue manteniendo una coherencia entre las variables puestas en juego.

Estas continuidades se toman como referencia para analizar también el proceso de la producción de una conjetura hasta su posible demostración.

2.2 DIMENSIÓN DIDÁCTICA

Para asuntos de orden metodológico se propone una perspectiva didáctica que interviene en el diseño y construcción de la secuencia de problemas abiertos y a su vez aporta herramientas importantes para el análisis de estos problemas dentro de la secuencia. Esta perspectiva se sitúa como un instrumento metodológico basado en el ciclo didáctico desarrollado por los investigadores italianos, que centran su interés en los problemas abiertos que ayudan a los procesos de aprendizaje relacionados con el uso de artefactos a través de una mirada semiótica y que brindan un apoyo al diseño, organización de las situaciones, actividades y problemas propuestos.

2.2.1 Ciclo didáctico

El ciclo didáctico definido por los investigadores italianos se refiere a una secuencia de situaciones diseñadas para desarrollar un proceso semiótico en el cual se construya un conocimiento. Este ciclo inicia con situaciones que conllevan al estudiante a resolver problemas utilizando el artefacto escogido, para continuar con otras situaciones que permitirán producir signos individuales, para luego producir signos colectivos reconocidos dentro de una comunidad, en este caso dentro de la comunidad matemática.

Como lo indica Bartolini & Mariotti (1999), la idea principal es la de explotar el sistema que relaciona el instrumento, las actividades y los conocimientos matemáticos. Por un lado el instrumento se relaciona con una actividad específica que busca proporcionar una solución y por otro lado el mismo se relaciona con el conocimiento matemático a construir, es decir estas actividades articulan al instrumento como una herramienta para el desarrollo de conocimientos y a la vez como un instrumento de mediación semiótica utilizada por el profesor para la construcción de los conocimientos.

Del mismo modo, estas secuencias didácticas deben estar encaminadas a resolver problemas, en las cuales las soluciones no sean tan evidentes y puedan proporcionarle al estudiante experimentar una situación similar al que perciben los investigadores matemáticos, que producen teoremas al tratar de probar o analizar otros de la misma especie.

De esta manera, el ciclo didáctico lo entenderemos como una secuencia didáctica que incluye problemas abiertos, los cuales se definen a continuación, para seguir el proceso de la conjetura a la demostración. Los problemas abiertos son descritos por estos investigadores italianos de la siguiente manera:

2.2.2 Problemas Abiertos

Para Mariotti (1998), los problemas abiertos ayudan a que el estudiante se aproxime un poco más al proceso de demostración y abren las puertas en cuanto se refiere al proceso de producción de conjeturas que introducen a los estudiantes a la argumentación hasta llegar a la construcción de una posible demostración. Es decir, los problemas abiertos tienen el potencial de evocar una incertidumbre o una duda que promueva una necesidad intelectual para encontrar o llegar a una forma de resolución. Como dice Mariotti “Son particularmente valiosos aquellos problemas que requieren la producción de una conjetura. Más aún el proceso de producción de una conjetura es determinante para introducir a los alumnos a la argumentación”. (Mariotti, 1998).

De este modo, los problemas abiertos diseñados en este trabajo cumplirán ciertas condiciones que los diferenciaran de otros problemas comunes. Como lo menciona BACCAGLINI- FRANK (2010), estos problemas abiertos se diferencian de otros porque hacen que el estudiante se enfrente a una situación donde no hay instrucciones precisas, sino que son de libre exploración. A continuación presentamos algunas de sus características:

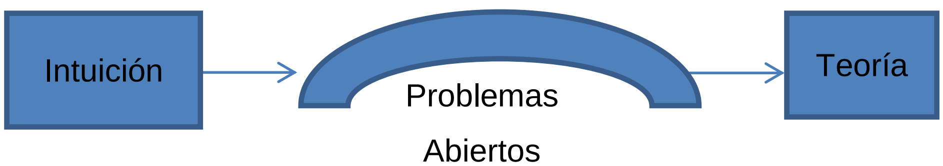
- El enunciado no debe presentar ninguna indicación de su posible solución.

- Deben de proponer varios métodos para resolver el problema que ayuden a estimular el descubrimiento y la generación de varios esquemas de respuesta.
- Debe contener varias soluciones que proporcione al estudiante la libertad para generar hipótesis, donde los estudiantes puedan tomar decisiones en cuanto a la forma de explorar el problema y conducir la construcción de conjeturas.
- Debe generar controversia entre los estudiantes
- Deben partir de una situación que permita la exploración, más que de una sentencia del tipo "demuestre que..."
- Deben de ser problemas que generen dudas en si son verdaderos o falsos, o si existe una solución o no del problema.
- Deben de ser problemas que permitan la exploración, la argumentación y por último la validación de esos argumentos.

Para seguir este proceso y observar en los estudiantes (para fines de este trabajo) la continuidad entre la producción de una conjetura y su posible demostración, debe de existir una unión entre el enunciado, la prueba y la teoría, es decir como lo explica Mariotti (1998) "la unidad entre enunciado, prueba y teoría no debe romperse, requiriendo la construcción de relaciones complejas entre los principios, enunciados y sus consecuencias. La conservación de aquella unidad permite mantener la conexión con el nivel intuitivo, condición básica para la producción autónoma de teoremas y para el uso productivo de esos teoremas en el razonamiento matemático".

La idea entonces de construir problemas abiertos radica en la manera como ayudan a superar los conflictos, construyendo una relación correcta entre el nivel intuitivo y la actitud teórica, es decir una continuidad entre el pensamiento espontaneo o sentido común de los estudiantes hasta convertirlo en un pensamiento matemático aceptado. Estos problemas tienen el propósito que estos dos aspectos trabajen conjuntamente y se conviertan en dos herramientas importantes de un mismo comportamiento mental.

De esta manera, los problemas abiertos nos permitirán partir de la exploración del problema mediante la producción de conjeturas, para así llegar a que el estudiante valide sus propios argumentos; el siguiente esquema muestra el objetivo del diseño de estos problemas que sirven como un puente para establecer la relación entre el nivel intuitivo y el nivel teórico.



Desde un punto de vista didáctico este esquema nos muestra un aspecto crucial que se relaciona con la necesidad de desarrollar un sentido de la demostración estrictamente relacionado con la teoría. Los problemas abiertos permitirán entablar un relación entre el nivel intuitivo que tiene cada persona y convertir esos argumentos de manera que actúen en el pensamiento matemático.

2.2.3 Actividades dentro del ciclo didáctico

Los problemas abiertos definidos por los investigadores italianos giran entorno al ciclo didáctico propuesto por ellos, donde las actividades se clasifican de la siguiente manera:

- Actividades con los artefactos: En esta actividad los estudiantes se enfrentan a tareas que se relacionan directamente con el artefacto.

Por lo general estas actividades se usan para iniciar el ciclo didáctico y promover la aparición de signos específicos en relación con el uso del artefacto y las herramientas particulares trabajadas en parejas o en grupo.

- Producción individual de los signos: Estas actividades se centran en los procesos semióticos relacionadas con las primeras actividades, el uso del artefacto y en la producción individual de los estudiantes. Están enfocadas principalmente en las producciones escritas por ellos como lo son: los dibujos, la escritura, etc.

- La producción colectiva de los signos: Estas actividades se centran en las discusiones colectivas que juegan un papel importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje. El papel del profesor es fundamental para la evolución de los signos relacionados con la actividad con los artefactos y en el proceso de convertir esos signos en signos matemáticos. El principal objetivo del papel del profesor es impulsar el avance de estos signos en signos matemáticos teniendo en cuentas las contribuciones que se hacen individualmente y así poder explotar las potencialidades semióticas procedentes de la utilización del pantógrafo en particular.

2.3 DIMENSIÓN MATEMÁTICA

La demostración vista como un proceso conlleva a plasmar y diseñar actividades en las cuales se pueda ir construyendo el conocimiento matemático y pueda ser internalizado por los estudiantes mediante las herramientas de mediación semiótica. La geometría es una de las herramientas necesarias para el desarrollo de capacidades y para mejorar la cognición y el razonamiento en nuestros estudiantes, puesto que sirve justamente como un modelo para representar la realidad permitiendo así de este modo vincularse a la práctica en las aulas de clase.

En relación con esto las distintas perspectivas teóricas en didáctica de las matemáticas como los son (Mariotti & Bartolini, 2002; y Boero, 1998) centran sus análisis en la introducción en el salón de clases de experiencias científicas que tengan que ver con la geometría y que permitan vincular instrumentos para dibujar o tratar temáticas como un medio para la construcción del conocimiento matemático. Incluso, la UC utiliza experiencias científicas relacionadas con la geometría, las cuales proporcionan por un lado el proceso de producción de la conjetura con respecto al sistema de conceptos y técnicas relacionadas con la teoría, y por otro lado la necesidad de incluir la demostración de una forma precisa, que conlleve a seguir el proceso de construcción de la demostración.

Como menciona Mariotti (2002), no se puede olvidar “que no existe demostración sin teoría” puesto que ella solo tiene sentido si se hace referencia a un marco teórico donde se incluyen los axiomas, definiciones y teoremas.

En relación con lo anterior en este trabajo será un aspecto importante la necesidad de desarrollar en nuestros estudiantes un sentido de la demostración como un proceso que va relacionado estrictamente con la teoría a desarrollar. Así las actividades de producción de la conjetura se unen al desarrollo de la teoría y proporcionan un marco intelectual para la continuidad entre el momento de la argumentación y el de la demostración, donde el papel del profesor se vuelve fundamental para cumplir con el objetivo principal de este trabajo, el cual introducirá a los estudiantes en la demostración. Teniendo en cuenta que el conocimiento no está definido completamente sino que se irá construyendo poco a poco por los estudiantes.

Por lo tanto para lograr los objetivos de este trabajo, definimos nuestra dimensión matemática en un marco geométrico, desde una perspectiva transformacional, que nos permitirá analizar las propiedades que permanecen invariantes al transformar una figura en otra semejante y así lograr construir y validar la teoría. De este modo, nuestro marco se centrará en la semejanza vista desde una transformación geométrica dentro de la geometría euclidiana transformacional.

2.3.1 Aspectos teóricos de las transformaciones geométricas

El concepto de transformación geométrica puede tener sus primeros indicios en la geometría euclidiana, aunque en esta época no fue elaborada, se dice que se aplicaba sin tener conciencia de su concepto como tal, y de sus aplicaciones. En efecto era utilizada como un instrumento donde no importaba su significado y donde no se era consciente de estarlas utilizando. Este primer indicio del concepto de transformación en Euclides se limitaba a establecer correspondencia entre objetos mediante la superposición de figuras, para así establecer la igualdad o semejanza de las mismas.

El concepto de transformación geométrica se comienza a utilizar conscientemente, según Piaget & García (1982) cuando aparece la geometría analítica representada por Descartes (1596-1650) donde junto con Fermat van a sustituir los puntos de un plano por pares de números, y las curva por ecuaciones. La geometría analítica reemplaza las propiedades geométricas de las figuras por propiedades algebraicas, lo que permite reconocer a una figura como un conjunto de puntos, es decir como una familia de curvas con ciertas propiedades. Así después de esto se da paso a lo que es la llamada geometría proyectiva donde Poncelet y Charles incorporarán los sistemas de transformaciones como método fundamental de la geometría. Más tarde estos sistemas ejercieron su influencia hasta los comienzos del siglo XX donde sirvió de base para que Klein y Lie pasaran de una etapa de transformaciones proyectivas a la de las estructuras de grupo, y con base a esta noción de grupo de transformaciones y de sus correspondientes invariantes es que se introduce la herramienta esencial para distinguir entre los diferentes tipos de geometría. Así de esta manera y de acuerdo con el programa de Erlangen, Campos (2007)propuesto por Klein(1872), “el criterio que distingue a una geometría de otra es el grupo de transformaciones bajo el cual sus proposiciones conservan su validez”. Klein explica lo que hace en el párrafo siguiente:

> Hay transformaciones del espacio que no alteran en nada las propiedades geométricas de las figuras. Por el contrario, estas propiedades son, efectivamente, independientes de la situación ocupada en el espacio por la figura considerada, de su tamaño o magnitud absoluta, y finalmente también del sentido en el cual estas partes están dispuestas. Los desplazamientos del espacio, sus transformaciones con similitud, así como aquellas con simetría, no alteran pues las propiedades de las figuras más que las transformaciones compuestas con las precedentes. Llamaremos grupo principal de transformaciones del espacio al conjunto de todas estas transformaciones; las propiedades geométricas no son alteradas por las transformaciones del grupo principal. La recíproca es igualmente verdadera: las propiedades geométricas están caracterizadas por su invariancia con respecto a las transformaciones del grupo principal no altera. (PIAGET & GARCÍA, 1982, pág. 102).

De esta forma se introduce en geometría la noción de transformación que permite reconocer el sistema de transformaciones que deja ciertas propiedades invariantes y que forman así un grupo, el cual permite también analizar las propiedades internas incluidas en este. En relación con lo anterior en este trabajo se basará sobre este concepto de transformación para la semejanza en el plano euclidiano.

2.3.2 Las Semejanzas en el Plano Euclidiano

Las semejanzas serán vistas desde una transformación geométrica en el cual las distancias pueden cambiar, aunque se preserven sus ángulos. A continuación introducimos algunos conceptos que clasifica una transformación en el plano euclidiano. (COXETER, 1971, p.96):

- Dilatación u Homotecia

Una dilatación es una transformación que preserva (o invierte) la dirección: es decir transforma toda recta en una paralela a ella. Por lo tanto se dice que dos figuras son homotéticas cuando son semejantes y se encuentran colocadas de manera semejante, es decir, si las relaciona una dilatación.

Definición (General):

Consideremos cualquier figura plana, que consista del sistema de puntos A, B, C,….. y sean las líneas OA, OB, OC,….. las que conectan estos puntos a cualquier punto O del plano. Si A’, B’, C’,… son puntos respectivos de estas líneas y si existe un número λ tal que:

$$\lambda = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \cdots,$$

Entonces la figura formada por los puntos A’, B’, C’,…. Es semejante a la figura dada y está semejantemente colocada. Se sigue inmediatamente que, si tres o más puntos de una figura dada están en una línea recta, los puntos correspondientes de la segunda figura están también en una línea recta y estas dos líneas son paralelas. Por lo tanto dos figuras análogas colocadas semejantemente, se llaman figuras homotéticas. El punto O es su centro de homotecia y la constante λ es su razón de homotecia. La razón homotética de dos figuras homotéticas es también llamada razón de similitud, y su centro de homotecia es llamado centro de similitud.

2.4 ARTICULACIÓN DE LOS MARCOS TEÓRICOS

Las dimensiones teóricas presentados anteriormente aportan elementos importantes que permiten complementarse para observar el proceso de la producción de una conjetura hasta su posible demostración que abre paso a introducir a los estudiantes a los procesos demostrativos, para la comprensión de los conocimientos matemáticos.

La TMS y la UC desde la dimensión cognitiva, aportan características relevantes que se complementan para dar cuenta de una continuidad en el proceso de la conjetura a la demostración, mediante la inclusión y el análisis de instrumentos de mediación semiótica que posibilitan la evolución de signos matemáticos en la interacción con la secuencia didáctica diseñada intencionalmente por el profesor.

El CD y los PA desde la dimensión didáctica, hacen su aporte brindando herramientas metodológicas útiles para el diseño, análisis e implementación de la secuencia de problemas abiertos, que permiten estructurar los momentos de enseñanza, la observación y los momentos de intervención del profesor para guiar el proceso de la conjetura a la demostración.

Y por último, la dimensión matemática que permite hablar de una teoría construida en conjunto con el proceso demostrativo mediante la interacción de los instrumentos de mediación semiótica y el diseño de la secuencia didáctica.

La articulación de estos marcos genera un aliento para caracterizar los entornos de aprendizaje que son propicios para generar pensamiento y discurso matemático en miras a mejorar la comprensión de los conocimientos matemáticos.

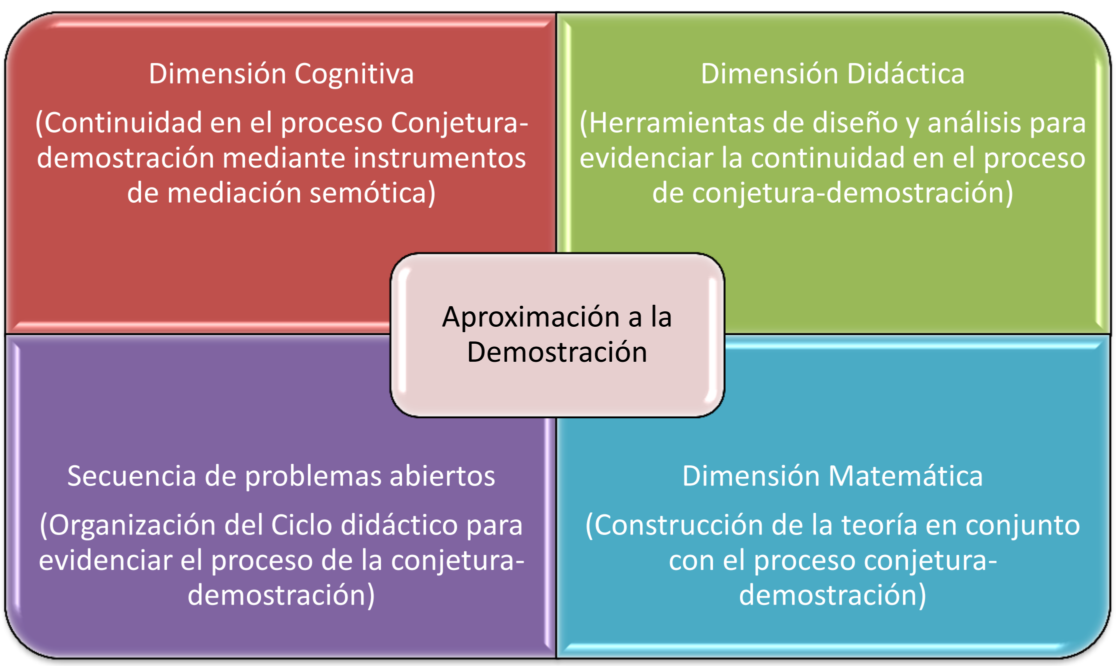


Ilustración 2. Articulación de las dimensiones teóricas

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

INTRODUCCIÓN

Los capítulos presentados anteriormente han permitido fijar una base teórica que describe la forma en que se encuentra dentro de la problemática educativa, el proceso de conjetura - demostración y la manera de abordar este problema para el mejoramiento del aprendizaje matemático. En este capítulo y en sentido a cumplir el objetivo principal de esta investigación, se propone el diseño de una secuencia de problemas abiertos como solución a la problemática de investigación, en el cual se describen los elementos a tener en cuenta en la realización de estos y en la aplicación de la secuencia para la descripción del paso de la conjetura a la demostración en el contexto de las transformaciones geométricas.

3.1 ENFOQUE METODOLÓGICO

En esta investigación se optará por una metodología cualitativa a través de un estudio de caso, el cual es una herramienta metodológica muy valiosa en la investigación, útil en la generación de resultados que permiten conseguir un acercamiento entre las teorías descritas y la realidad que se vive dentro de una sociedad, en este caso dentro del aula de clase, posibilitando el fortalecimiento, crecimiento y desarrollo de las teorías existentes o el surgimiento de nuevos aportes que contribuyan a mejorar dichas prácticas escolares. La fortaleza de este método:

> Radica en que a través de él mismo se mide y se registra la conducta de las personas involucradas en el fenómeno estudiado, además, en el método de estudio de caso los datos pueden ser obtenidos desde una variedad- de fuentes, tanto cualitativas como cuantitativas; esto es, documentos, registros de archivos, entrevistas directas, observación directa, observación de los participantes e instalaciones u objetos físicos. (Martínez, 2006, p.167).

Igualmente, este método de estudio de caso es considerado conveniente para problemáticas que se consideran prácticamente nuevas donde se resaltan sus rasgos más distintivos como lo son: la examinación e indagación de fenómenos contemporáneos con su entorno real y la posibilidad de estudiar tanto un caso único como múltiples casos. De esta manera, el hablar de un estudio de caso, implica la diversidad de fuentes y técnicas de obtener información, como lo afirma López y Fernández (2004):

> Mediante este método, se recogen de forma descriptiva distintos tipos de informaciones cualitativas, que no aparecen reflejadas en números si no en palabras. Lo esencial en esta metodología es poner de relieve incidentes clave, en términos descriptivos, mediante el uso de entrevistas, notas de campo, observaciones, grabaciones de vídeo, documentos. (López & Hernández, 2004, p.666, como se citó en Alvarez & San Fabian, 2012).

En este sentido, este trabajo de investigación se adecua claramente a esta metodología por su finalidad en la descripción y análisis de los diferentes medios semióticos que no aparecen reflejadas en números sino en palabras, gestos, expresiones, etc. Asimismo, este trabajo de grado se describe dentro de esta metodología de estudio de caso a partir de la explicación de los elementos relevantes de este método como lo son la selección del caso, las unidades de análisis, la recolección y análisis de datos mediante la confrontación del marco teórico y los resultados obtenidos en la fase de intervención, para la construcción del informe final. Tomando la clasificación de Pérez & Serrano (1994), este método sigue tres fases generales ampliamente aceptadas como lo son: la fase preactiva, la fase interactiva y la fase postactiva. (Alvarez & San Fabian, 2012).

- Fase preactiva: que incluye todos los fundamentos epistemológicos y teóricos que enmarcan la pregunta de investigación, los objetivos generales y específicos, la información del contexto donde se desarrolla la investigación, como también las fuentes de información que serán útiles para establecer la relación entre el marco teórico y la intervención empírica en el aula de clase.

- Fase interactiva: que se refiere al momento de intervención en el aula y a los procedimientos llevados a cabo para su implementación, utilizando las diferentes técnicas de observación y de recolección de información. En este trabajo de investigación esta fase se enfatiza en el momento de interacción en el salón de clase con la secuencia de problemas abiertos.

  Cabe mencionar que en este trabajo esta fase de intervención se toma como un ejemplo para la creación de entornos de aprendizaje que ayuden a fortalecer el aprendizaje de la demostración para la enseñanza de las matemáticas, es decir, se tomará como un referente para la organización e implementación del dispositivo experimental desarrollado a partir de esta fase pero que no se alcanza a desarrollar en este trabajo.

- Fase post-activa: que hace énfasis a la elaboración del informe final donde se detallan las consideraciones críticas sobre el caso estudiado y las conclusiones de los resultados de la investigación.

Para fines de este trabajo de investigación y en miras a cumplir con el objetivo principal de caracterizar el proceso de la conjetura a la demostración desde la teoría de la mediación semiótica, este trabajo desarrolla una metodología cualitativa-descriptiva para lograr determinar los factores que influyen en el proceso a estudiar y el acercamiento que existe de este entre las teorías planteadas y la realidad que se vive dentro del aula de clase.

3.2 CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS

3.2.1 Referente contextual

Los participantes de la intervención en el aula de la secuencia de problemas abiertos son estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Nuestra Señora del Palmar de carácter oficial de la ciudad de Palmira, que tiene como misión: "Infundir una Educación Liberadora Integral, comprometida con el individuo mismo y con la sociedad (dentro de un enfoque de Educación HOLÍSTICA: (global-integral), HERMENÉUTICA: (comprensión e interpretación, lectura y abordaje de la realidad), HEURÍSTICA: (El error y la investigación como fuente de conocimiento), HUMANISTA: (Compromiso, identidad en valores)". Por lo tanto la educación de las estudiantes va encaminada a una cultura participativa, democrática, enmarcada en la crítica constructiva donde logren potenciar sus capacidades y fortalezas frente al conocimiento enseñado.

La Institución Educativa Nuestra Señora del Palmar, ha sido galardonada en 1998 como proyecto educativo sobresaliente por el Ministerio de Educación Nacional y ha representado a la ciudad de Palmira en las experiencias significativas de matemáticas en el año 2006. Las estudiantes en general tienen un buen rendimiento académico y en el año anterior 2012 lograron excelentes resultados en las pruebas Icfes.

3.2.2 Perfil del estudiante

Las participantes en este trabajo de investigación son tres estudiantes de sexo femenino de 14 y 15 años de edad de la Institución Educativa Nuestra Señora del Palmar. Las estudiantes fueron seleccionadas por el profesor a cargo del área de matemáticas de la institución por su buen rendimiento académico, por su interés y disposición para participar voluntariamente de este trabajo investigativo, sin ninguna presión académica. Las sesiones desarrolladas en este trabajo se realizan en jornada de la tarde, contraria a la habitual de las estudiantes, y se dispone del espacio y de los implementos de la biblioteca de la Institución Educativa como son las mesas, asientos, reglas entre otros. De este modo, se analizan los diferentes medios semióticos como lo son: las palabras, explicaciones, argumentos, gestos, etc de estas tres estudiantes del grado noveno de la Institución educativa mencionada.

En el momento de la implementación de la secuencia las estudiantes cursaban el último periodo (IV) del grado noveno, año lectivo 2012. Y los contenidos matemáticos previos vistos en el tercer periodo, en lo referente a geometría a cargo del plan de área de matemáticas, se presentan en la siguiente tabla:

Institución Educativa Nuestra Señora del Palmar- Plan de área de Matemáticas (asignatura Geometría) Periodo III			
CONTENIDO	LOGRO	CRITERIOS DE EVALUACION	RECURSOS
• Relaciones geométricas. • Semejanzas y congruencia de triángulos • Ángulos adyacentes, complementarios y suplementarios.	Utiliza criterios de semejanza de triángulos para demostrar teoremas relativos a la proporcionalidad de los de lados triángulos.	Divide un segmento en partes iguales. Haya correctamente la cuarta, la tercera y la media proporcional entre segmentos. Identifica y resuelve correctamente los casos de semejanza de triángulos.	Regla Guías Fotocopias Calculadora Cuaderno Tablero

Tabla 4. Organización del plan de área de matemáticas - periodo III

La estructura descrita en la anterior tabla, determina que las estudiantes pueden aplicar criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas, donde pueden lograr demostrar teoremas relativos a la proporcionalidad de los lados de un triángulo. De esta manera, esta organización del plan de área de matemáticas en la Institución se toma como un referente para identificar los resultados esperados por las estudiantes mediante la interacción con la secuencia didáctica de problemas abiertos.

3.2.2 Criterios de selección de la Institución Educativa

Los criterios definidos para la selección de la institución educativa participante en este trabajo de investigación fueron las siguientes:

- Por el buen desempeño y rendimiento académico de sus estudiantes
- Por la disposición amablemente de participar y colaborar con el proyecto de investigación.
- Por la cercanía para la estudiante investigadora
- Por el interés en mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de sus estudiantes.
- Por confiar y creer que la demostración es una herramienta indispensable que debe estar incluido en los currículos escolares.

3.2.3 Consideraciones generales

Esta secuencia de problemas abiertos se realizó en 6 sesiones de dos horas cada una, las dos primeras sesiones dedicadas al momento de exploración del artefacto como fase previa y las otras 4 sesiones dedicadas a cada problema abierto. Los instrumentos utilizados durante las sesiones fueron: el pantógrafo de Scheiner, la regla como herramienta de verificación, las hojas de trabajo donde se encuentra descrito el problema y donde las estudiantes plasman sus respuestas u operaciones y las hojas de papel periódico (en pliego) que sirven para plasmar los dibujos realizados con el pantógrafo, para la solución del problema.

Para el análisis de la aplicación de la secuencia en el aula de clase y para la intervención del profesor como mediador semiótico se tomarán tres registros de observación como son: producciones escritas realizadas por las estudiantes que se fundamentan a partir de las estrategias presentadas a la solución del problema y se plasman en las hojas de dibujo (que son en papel periódico en pliego), videos para la observación de los medios semióticos como son los gestos y actitudes frente a los problemas y por último, un registro de audio para evidenciar las palabras que no se alcanzan a plasmar en las producciones escritas por las estudiantes. Esto con el fin de identificar los diferentes signos que se produjeron en la realización de la secuencia.

En este trabajo utilizaremos dos instrumentos de mediación semiótica como son el pantógrafo de Scheiner acompañado de objetos como el lápiz, regla, y papel para dibujo, para la obtención e interpretación de los dibujos realizados por el pantógrafo, como también el papel del profesor participante en la organización del trabajo en clase y en la evolución de los signos que actúan en el proceso de conjetura-demostración.

Cabe resaltar que la inclusión del pantógrafo como instrumento de mediación semiótica es posible por la gestión del profesor en la organización intencionada del diseño de la secuencia de problemas abiertos para cumplir con los objetivos principales de este trabajo. A continuación se describen los instrumentos de Mediación Semiótica:

- Pantógrafo de Scheiner**:** Cabe resaltar como primera medida que cualquier objeto se puede convertir en un instrumento de mediación semiótica siempre y cuando haya sido concebido intencionalmente por el profesor para mediar un contenido matemático a través de un diseño didáctico. (Bartolini & Mariotti, 2008). De esta manera el pantógrafo hace su función de IMS por su inclusión intencionada en la secuencia de problemas abiertos que permite resaltar su doble relación semiótica, es decir, por un lado este instrumento se vincula con los signos personales producidos por los estudiantes en relación con la realización del problema y por otro lado, los significados matemáticos pueden estar conectados con el pantógrafo y su uso, en relación al conocimiento matemático implícito en él, en este caso el de la transformación geométrica de homotecia.

Por lo tanto, en esta unidad de análisis nos enfatizamos en la producción de signos personales y signos matemáticos que se observan siguiendo las categorías de signos descritas a continuación: (BARTOLINI, MARIA, & MARIOTTI, 2008)

- Signos individuales: en relación a la utilización del pantógrafo con su funcionamiento, elementos que lo conforman y los dibujos trazados por él mismo. Esta categoría incluye muchas señales como: los signos no verbales (gestos o dibujos), signos verbales y signos escritos que permiten identificar los elementos básicos importantes para la continuación del proceso semiótico y el aprovechamiento de estos para la conversión a signos matemáticos.

- Signos matemáticos: en relación al contexto matemático que determina los signos matemáticos compartidos por los estudiantes durante su camino escolar y que pueden ser expresados o resaltados por una proposición, una definición, una conjetura o una demostración. Estos signos son el objetivo principal en el proceso de mediación semiótica mediante la guía del profesor, el cual describiremos en nuestra siguiente unidad de análisis.

- *Gestión Docente*: El profesor como mediador semiótico influye en la evolución de los signos personales en signos matemáticos, tiene la responsabilidad de dirigir y de impulsar estos signos individuales teniendo en cuenta los aportes y el surgimiento de patrones en el aula de clase, que ayuden a explotar las potencialidades semióticas que provienen de la utilización del pantógrafo en relación a la solución del problema presentado. De esta manera la gestión docente se analizará desde el instante en que es presentado el problema a los estudiantes y en referencia a las intervenciones realizadas por él.

3.3 INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN (Rejillas de Análisis)

3.3.1 Rejilla de organización de los momentos de enseñanza

La secuencia de problemas abiertos se organiza a través de tres momentos de enseñanza fundamentales que representan las tres fases del ciclo didáctico expuesto en el marco teórico, con el fin de desarrollar la relación semiótica en la conversión de un signo individual a un signo matemático (Ilustración No. 3) a través de las herramientas de mediación semiótica utilizadas por el profesor intencionalmente para mediar el contenido matemático, en este caso el de la semejanza de figuras por medio de la transformación de homotecia.

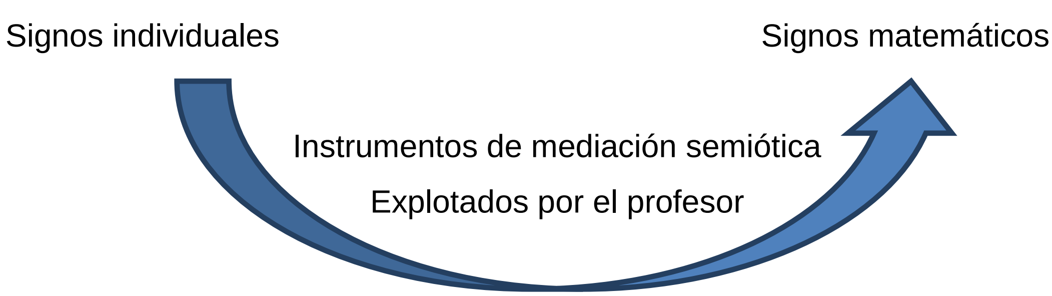


Ilustración 3. Relación semiótica

Estos momentos se describen en la siguiente rejilla de organización de la enseñanza.

ORGANIZACIÓN DE LOS MOMENTOS DE ENSEÑANZA A TRAVÉS DEL CICLO DIDÁCTICO

MOMENTOS DEENSEÑANZA	MEDIOS SEMIÓTICOS	OBJETIVO
MOMENTOS DE EXPLORACIÓN	Producción escrita, intercambio social, dibujos.	Iniciar el ciclo didáctico para la aparición de signos específicos relacionados con el funcionamiento del pantógrafo
MOMENTOS DE PRODUCCIÓN INDIVIDUAL	Dibujos, gestos, palabras, inclusión de teorías previas	Producción de conjeturas y de signos particulares
MOMENTOS DE PRODUCCIÓN SOCIAL	Producción de textos y dibujos, participación en los debates colectivos, reformulación de teorías	Producción de signos matemáticos a través de las pruebas de las conjeturas dadas en el momento de producción individual

Tabla 5. Rejilla de Organización de los momentos de enseñanza

- Momento de Exploración

Este momento de la enseñanza se realiza con el fin de dar inicio al ciclo didáctico y lograr la aparición de signos específicos que se relacionan con el uso del artefacto, es decir con su funcionamiento. En este momento el estudiante se enfrentará por primera vez al artefacto por medio de preguntas abiertas que permiten la exploración del artefacto, en este caso el pantógrafo, a través de su manipulación y con el que se producen algunas figuras que contribuyen al reconocimiento del artefacto, su funcionamiento y utilidad.

Este momento está compuesto de 3 actividades las cuales cada una comprende preguntas abiertas encaminadas a: la exploración del pantógrafo, al proceso de identificación de propiedades matemáticas implícitas en él y por último la del trabajo individual en casa, como una pequeña consulta de la utilización del pantógrafo en la vida cotidiana.

- Momento de producción individual

Este momento de producción individual es presentado a las estudiantes por medio de problemas abiertos que implican la utilización del artefacto como instrumento de mediación semiótica y que permiten la producción de las primeras conjeturas a la par con la construcción de la teoría. En este momento surgen las estrategias de solución a los problemas planteados que se sustentan en los diferentes medios semióticos como son: las producciones escritas, comentarios y reflexiones de los dibujos relacionados con la utilización del artefacto, palabras, gestos e interacción con los compañeros de grupo.

- Momento de producción social

Como se ha esclarecido anteriormente los debates colectivos e interacciones sociales desempeñan un papel fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de cualquier conocimiento matemático, más aún en el proceso de conjetura-demostración, porque es a partir de esta interacción que el profesor actúa de manera conveniente para promover los signos individuales que se han producido en los momentos anteriores para convertirlos en signos reconocidos en la cultura matemática. Estas interacciones sociales son una parte crucial en el proceso semiótico en el que se basa la enseñanza y aprendizaje de la demostración puesto que la intervención del profesor es esencial para explotar las potencialidades semióticas teniendo en cuenta las contribuciones individuales que se resaltaron en las producciones anteriores.

Estos momentos estarán presentes en toda la secuencia, aunque en los análisis le daremos prioridad a los dos últimos momentos que son los de producción de signos y conversión a signos matemáticos, donde se puede visualizar el paso de la conjetura a la demostración.

3.3.2 Rejilla de Selección: Dimensión didáctica

La rejilla descrita a continuación incorpora las teorías descritas en el marco teórico en relación a la dimensión didáctica para el diseño de la secuencia de problemas abiertos que van actuar en el proceso de la conjetura a la demostración. De esta manera, permite describir, organizar y seleccionar los problemas abiertos que intervienen en la secuencia.

- Criterios para la selección de problemas abiertos

Los problemas abiertos, como ya se ha mencionado, son una característica importante en el dominio de las matemáticas y ayudan principalmente a promover el proceso de producción de conjeturas y su posible demostración. En este trabajo de investigación los problemas abiertos diseñados varían en tres características como son: método de solución, interpretación y seguimiento, los cuales están definidos por Silver (1995), de la siguiente manera:

- Problemas abiertos en relación al método de solución: que se caracteriza por introducir diferentes métodos de solución. En estos problemas los estudiantes muestran y discuten la validez, generalización y la potencia de varios métodos que se relacionan con la solución visual y el uso de aproximaciones sucesivas.

- Problemas abiertos de interpretación: Estos tipos de problemas son susceptibles a interpretaciones diferentes y a distintas respuestas aceptables de problemas, por lo tanto poseen una rica experiencia para los estudiantes porque dan cabida a una amplia gama de soluciones plausibles.

- Problemas abiertos de seguimiento: Estos problemas abiertos se dan cuando el problema original desencadena problemas abiertos relacionados con la misma problemática. Estos son importantes para producir generalizaciones y nuevas conjeturas que se derivan del problema planteado.

Esta caracterización aporta una herramienta importante para la selección de los problemas abiertos participantes en la secuencia y a su vez ayudan a optimizar la organización de los momentos de enseñanza incluyendo las características de los instrumentos de mediación semiótica para la descripción del proceso de la conjetura a la demostración.

En este trabajo de investigación se diseñaron los problemas abiertos desde las dos características de interpretación y seguimiento, puesto que nos acercó más a el proceso de conjetura-demostración que queríamos caracterizar, además nos permitió incrementar las características principales de la mediación semiótica para que estos problemas se vuelvan relevantes y puedan ser utilizados por el profesor para cumplir los objetivos planteados con los instrumentos de mediación semiótica.

A continuación se describe esta rejilla de selección y organización de la secuencia:

DIMENSIÓN TEÓRICA	TEÓRIA	UNIDAD DE ANÁLISIS	CRITERIOS	A TRAVÉS DE
Dimensión	Problemas abiertos	Esquemas de solución	Interpretación y seguimiento	Características de los PA y la TMS

Tabla 6. Rejilla de selección y organización de la secuencia didáctica para el proceso de la conjetura a la demostración

Didáctica	Ciclo didáctico	Transformaciones de signos individuales a signos colectivos	Fases del CD	Gestión profesor y continuidades en la UC

En esta sección las unidades de análisis se encaminan hacia los problemas abiertos y el ciclo didáctico, con miras a explotar la relación sujeto-artefacto-problemas-conocimiento que se produce al interactuar con los compañeros de clase y con el profesor, esquemas de solución de los problemas abiertos planteados, centrándose en las dos características de seguimiento e interpretación y las características de los problemas abiertos descritas en el marco teórico, para la observación del proceso conjetura-demostración.

Mediante la organización del ciclo didáctico se podrá visualizar si los signos individuales que surgen al interactuar con los problemas están adquiriendo un pleno desarrollo hacia la conversión de los signos matemáticos, es decir, si las conjeturas producidas en este se están encaminando a través del ciclo didáctico en llegar a la construcción de su demostración.

3.3.3 Rejilla de observación para el análisis de secuencia

Para el análisis de la información obtenida a partir de cada uno de los registros se presenta a continuación la rejilla de observación que contiene las unidades de análisis a observar en los registros y los criterios de evidencia para cada uno de los procesos.

DIMENSIÓN TEÓRICA	**UNIDAD DE ANÁLISIS**	**CRITERIOS PARA EVIDENCIAR LOS PROCESOS**
TEORIA DE LA MEDIACIÓN SEMIÓTICA	Pantógrafo como IMS	Producción de signos
	Gestión Docente como IMS	Discusión Matemática

	Continuidad o ruptura en el proceso de producción de conjetura y su posible demostración	Fases de la UC y Continuidades Pedemonte
TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS	Construcción de la teoría	Propiedades de semejanza de figuras por medio de las transformaciones de homotecia

Tabla 7.Rejilla de observación para el análisis del proceso de conjetura-demostración

Describiremos con mayor detalle las unidades de análisis de esta rejilla de observación de la siguiente manera:

3.3.4 Unidad de análisis

Para llevar a cabo el análisis de la secuencia de problemas abiertos propuesta en este trabajo de investigación se escogieron estas unidades de análisis que corresponden a las dimensiones teóricas descritas en la tabla anterior y lograr extraer los aportes relevantes de cada una de ellas que conlleva al análisis del proceso de la conjetura a la demostración.

Los instrumentos de mediación semiótica tienen como objetivo la producción de signos individuales al explorar el pantógrafo a través de los dibujos trazados por él, en este sentido se explota la relación sujeto-artefacto, que permite el surgimiento de signos individuales encaminados a la producción de conjeturas. La gestión docente explota la relación que existe entre el artefacto-problemas-conocimiento que se tiene en cuenta en la organización del trabajo en clase y también participa en las interacciones sociales con el fin de gestionar la evolución de los signos producidos para convertirlos en signos reconocidos por la cultura matemática.

Desde la unidad cognitiva se enfatiza el análisis para observar y analizar el proceso de la conjetura a la demostración, como también resaltar los principales obstáculos con los que se enfrentan las estudiantes al llevar a cabo este proceso. Por lo tanto, en esta unidad hacemos referencia a las continuidades de Pedemonte, donde es posible reconocer si existe una continuidad en el proceso de conjetura y su posible demostración, o si por el contrario se produjo una ruptura que no permitió el desarrollo del proceso demostrativo. Las continuidades resaltadas por Pedemonte (1998), como son: continuidad en el lenguaje, continuidad conceptual, continuidad de marco, continuidad heurística y continuidades en las dinámicas mentales; se observarán a partir de los signos producidos por los estudiantes durante la interacción con la secuencia de problemas abiertos diseñadas para este fin. Desde esta teoría se explotará la relación entre el sujeto-artefacto-problemas para identificar las continuidades propuestas por Pedemonte a través de las fases de esta teoría descritas anteriormente en el marco teórico.

La dimensión matemática participará activamente, pues ella permite fijar una teoría, en la que el proceso de conjetura-demostración se puede visualizar a través del trabajo y el desarrollo de las propiedades que enmarcan la teoría, en este caso dentro de las propiedades de la homotecia. En esta dimensión se explota la relación sujeto-problemas que incluye el uso del pantógrafo, que permite verificar el proceso de continuidad mediante la construcción de la teoría y si las argumentaciones producidas en la etapa de conjeturas pueden validarse en la etapa de construcción a la demostración.

Para la observación de esta unidad de análisis se tendrá en cuenta el papel que juega la teoría matemática implícita en el pantógrafo “las transformaciones de semejanza central u homotecia”, como también los conocimientos matemáticos acordes con el nivel de aprendizaje de las estudiantes, para la posterior construcción de las propiedades matemáticas de la semejanza de figuras por medio de dicha transformación geométrica. Esta unidad se relaciona directamente con la solución propuesta por las estudiantes de los problemas presentados, en el cual se producen los signos matemáticos acordes a la teoría, es decir, que permiten la construcción de la teoría a la par con el proceso semiótico descrito anteriormente. De esta manera, la construcción de la teoría se puede ver reflejada en las producciones escritas y verbales de las estudiantes en interacción con el problema presentado incluidas en los signos individuales y matemáticos.

3.4 TRABAJO DE CAMPO

El trabajo de campo hace referencia a la fase interactiva que comprende el momento de intervención en el aula de clase, teniendo en cuenta primero que las estudiantes de la Institución Educativa Nuestra Señora del Palmar no estaban familiarizadas con los problemas abiertos y tampoco habían interactuado alguna vez con el pantógrafo de Scheiner.

La fase interactiva consta de dos etapas, la primera etapa que recoge el momento de exploración y donde se da inicio al ciclo didáctico y la segunda etapa “activa”, donde las estudiantes tienen que discutir la solución de 4 problemas abiertos utilizando el pantógrafo Scheiner.

3.4.1 Primera etapa

Esta etapa comprende el momento de exploración donde las estudiantes se encuentran por primera vez con el pantógrafo de Scheiner. Las estudiantes se enfrentan a preguntas abiertas con relación al pantógrafo, su funcionamiento, las figuras trazadas, su composición, etc. Para determinar el manejo del pantógrafo, identificar algunas características matemáticas y su posible utilización en la realidad. Esta primera etapa se dividió en 3 actividades relacionadas con el momento de exploración del pantógrafo descrita en la siguiente tabla:

Actividades	Exploración del Pantógrafo	Identificación de propiedades matemáticas	Trabajo individual
Objetivos	Manipulación del pantógrafo identificando sus elementos	Producción de figuras para la identificación de propiedades matemáticas	Investigación en casa sobre el pantógrafo y sus usos.
Ejemplos preguntas	*¿De qué está compuesto el artefacto?. *¿Qué puntos de él permanecen alineados durante el movimiento? *Identifique. ¿Cuál es el puntero y cuál es el extremo móvil entre B y C? *¿Qué papel juegan los puntos A, B, y C?.	*¿Qué figura traza el extremo móvil? ¿Qué características tiene con respecto al original? *¿Qué cambios ocurren con la imagen trazada por el extremo móvil si se recorren los mismos dibujos elaborados en el punto b?. *¿Cómo se gradúa el artefacto de tal forma que pueda obtener figuras de diferentes tamaños a partir de la figura inicial? *¿Cómo llamarías a este artefacto si tú fueras el diseñador? *¿Qué propiedades matemáticas hay implícitas en el pantógrafo?.	*Investiga. ¿Qué es un pantógrafo? ¿Para qué sirve? *Dibuja en tu cuaderno el pantógrafo con sus respectivas características *Investiga. ¿Qué es una transformación geométrica?

		*¿Qué posibles problemas geométricos podrías proponer utilizando el artefacto?.	

La segunda etapa activa consiste en la secuencia de problemas abiertos encaminados a describir el proceso de producción de conjeturas hasta su posible demostración. En esta sección se describen los problemas abiertos empleados para el objetivo principal de este trabajo de grado utilizando el pantógrafo como instrumento de mediación semiótica.

3.4.2 Etapa activa (Problemas abiertos)

Presentamos a continuación cada uno de los enunciados de los problemas abiertos incluidos en la secuencia, junto a los datos de entrada para cada problema, las variables, la intencionalidad y las acciones del estudiante. Las acciones de las estudiantes se activan en los momentos de producción individual y social donde el estudiante tiene que utilizar el pantógrafo para la solución del problema.

Las acciones del profesor se activan en los momentos de producción social reafirmando los pasos dados para llegar a una solución y realizando al final un recuento de lo visto en relación con la producción matemática, con el fin de promover los signos producidos en signos matemáticos. Por lo tanto, las acciones del profesor se ven reflejadas en las intervenciones de éste, cuando participa en los momentos de interacción social y están dirigidas principalmente a:

- Presentar el problema y motivar a las estudiantes a reflexionar sobre el
  enunciad

Tabla 8. Fase previa – Exploración del pantógrafo o

- Controlar el uso de los instrumentos, es decir, en relación al buen manejo del pantógrafo sin alterar los resultados

- Pedir argumentaciones y explicaciones a las ideas planteadas para que puedan surgir pequeñas conjeturas.

- Guiar y orientar la secuencia para lograr obtener un proceso demostrativo.

3.4.2.1 Problema 1

Enunciado: *Dado un punto fijo y un segmento situado en el papel de dibujo No. 1. Si se traza un segmento con el pantógrafo desde el punto fijo, 6 veces mayor que la longitud del segmento dado. ¿Cómo trazar diferentes segmentos cuya longitud se encuentre entre el segmento dado y el segmento 6 veces de mayor longitud, tal que al unir los vértices estos concurran a un mismo punto?*

Datos entrada	Variables	Intencionalidad	Acciones del estudiante
Punto fijo y figura inicial (segmento inicial)	Razón y figura final	Caracterizar los movimientos de los segmentos trazados, es decir, la forma en que estos cambian según se acercan al punto fijo y cómo las rectas que unen los vértices concurren al punto fijo del	*Observar la hoja de dibujo e inferir donde debe estar el punto fijo del pantógrafo y donde debe ser colocado el puntero para que describa el segmento pedido. *Crear suposiciones o pequeñas conjeturas que denoten la validez de sus argumentos o para comprobar

		pantógrafo. Esto se relaciona con una de las propiedades de la homotecia, el centro de homotecia y sus puntos homólogos deben estar en una misma recta.	que el pantógrafo está bien ubicado. Dar respuesta al problema planteado con el análisis e interpretación de sus posibles soluciones

Tabla 9. Descripción problema No. 1

En este primer problema se comienzan a transformar segmentos que nos permiten caracterizar qué función cumple el punto fijo y las escalas del pantógrafo, en el camino al reconocimiento de los elementos de homotecia como son su centro y razón de homotecia. También para observar que está sucediendo cada vez que los segmentos se acercan más al punto fijo y que sucede con las rectas que unen los vértices de los segmentos, de esta manera, se introducen las primeras características que trae implícito el funcionamiento del pantógrafo que se relacionan con las propiedades de homotecia como son:

- Toda recta l que no pase por el centro de homotecia se transforma en una recta l' paralela.

- El centro de homotecia O y los puntos homólogos deben estar alineados.

En la siguiente tabla se describe la expectativa en cuanto a las posibles soluciones al problema y los signos individuales y matemáticos que se espera produzcan las estudiantes.

Solución esperada	**Signos individuales**	**Signos matemáticos**

Para este primer problema se espera que el estudiante tome como referencia el punto fijo y el segmento dado, y a partir de él dibuje con el pantógrafo diferentes segmentos de distintos tamaño con los cuales tendrá que variar la escala del pantógrafo para la realización de estos. Asimismo, se espera que el estudiante pueda observar en la realización de este problema que los segmentos deben estar organizados de menor a mayor para que al unir sus vértices concurran a un mismo punto.	En relación al funcionamiento del pantógrafo, el estudiante reconocerá que el punto fijo del pantógrafo debe estar sobrepuesto en el punto inicial dado en el problema, al igual que el puntero que será el que recorrerá el segmento dado para transformar a partir de él los demás segmentos. También reconocer que al variar la escala, entre más grande sea la variación más cerca estará el puntero del punto fijo y más lejos estará el trazador móvil.	En relación al problema se espera que el estudiante sea capaz de producir relaciones geométricas entre los segmentos, observar distancias, explicar porque los vértices concurren a un mismo punto, identificar propiedades de homotecia entre el segmento dado con el segmento transformado por el pantógrafo como por ejemplo que los segmentos son paralelos y proporcionales, como también que los puntos homólogos deben estar alineados.

Tabla 10. Descripción de la solución esperada por las estudiantes

3.4.2.2 Problema 2

Enunciado: *Una empresa quiere diseñar un juego para niños que permite armar figuras como la que muestra la figura 3. Suponga que para realizar este diseño se le presentan algunas piezas estándar como las que se encuentran en la hoja de dibujo 3 y una condición: la razón entre los lados de la figura 1 ampliada y los lados correspondientes en la figura estándar sea de 2.*

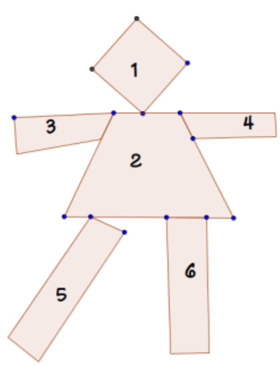


Ilustración 4. Juego para niños

¿Qué condiciones deben cumplir las demás piezas para que se ajusten de acuerdo a la condición de modo que quede como la muestra la figura 4?

Datos entrada	**Variables**	**Intencionalidad**	**Acciones del estudiante**
Figuras iniciales (piezas del juego) y la razón (escala)	Razón (escala) y centro (punto fijo del pantógrafo	Reconocimiento de propiedades para cuadriláteros. Relaciones entre la escala del pantógrafo con la razón de homotecias. (reducir figuras)	*Analizar u observar las piezas presentadas en la hoja de dibujo para lograr el trazado de la figura final *Organizar el pantógrafo para el adecuado lugar de la figura transformada *Tratar de buscar una buena forma de solución del problema por medio de mediciones, etc. *Afianzar características encontradas en los problemas anteriores para el reconocimiento de las escalas como representantes de las razones.

Tabla 11. Descripción problema No.2

En este problema se introducen los cuadriláteros mediante un juego para niños, donde las piezas del juego se dan separadas como entrada en la hoja de dibujo, el estudiante tendrá que variar el centro y la escala para trazar el dibujo cumpliendo la razón dada. De este modo, el estudiante podrá relacionar la escala del pantógrafo con el concepto de razón para introducir algunas propiedades en las figuras como los lados proporcionales.

En la siguiente tabla se muestra la solución esperada junto con los signos personales y signos matemáticos de las estudiantes en este problema:

Solución esperada	Signos individuales	Signos matemáticos
Para este problema se espera que las estudiantes inicien ampliando la figura 1 con la razón pedida, es decir que logren identificar que la razón está relacionada con la escala del pantógrafo y de esta manera realicen la primera figura en escala 2. Las demás piezas deben ajustarlas para que queden como la figura, es decir se espera que las estudiantes puedan deducir relaciones entre la figura original y las piezas estándar presentadas en la hoja de dibujo para así encontrar la razón que más se adecue a la figura. Cabe mencionar que las piezas están a diferente tamaño, así de esta maneras tendrán que analizar si se amplía la figura o si se tiene que reducir para formar el juego completo.	En relación al funcionamiento del artefacto, las estudiantes reconocerán que la razón está relacionada con la variación de la escala en el pantógrafo y que en este reconocimiento podrán encontrar las otras escalas para cada una de las piezas, también se espera que mediante el funcionamiento y la observación de las figuras trazadas por el pantógrafo las estudiantes reconozcan que es posible reducir una figura y que eso dependerá del intercambio entre la función del puntero con el trazador móvil, es decir el trazador móvil pasa a ser el puntero y el puntero el trazador móvil para la reducción de la figura.	En relación al problema se espera evidenciar signos matemáticos que pueden estar ligados a la relación entre dos magnitudes es decir, al concepto de razón, donde se pueda definir la proporcionalidad de segmentos.

Tabla 12. Descripción de la solución esperada por las estudiantes (Problema 2)

En este momento se pretende hacer una intervención por parte del profesor para introducir el concepto de homotecia, esperando que los estudiantes logren conocerlos elementos relevantes de ella como son su centro de homotecia que representa el punto fijo del pantógrafo y su razón de homotecia que varía según la escala del pantógrafo. Se espera que el estudiante logre identificar y relacionar la razón de homotecia con la variación de la escala del pantógrafo, como también establecer propiedades de semejanzas de figuras como son los lados proporcionales.

3.4.2.3 Problema 3

Enunciado: *El sistema articulado descrito, consiste en 3 hexágonos regulares conectados como indica la ilustración 5.*

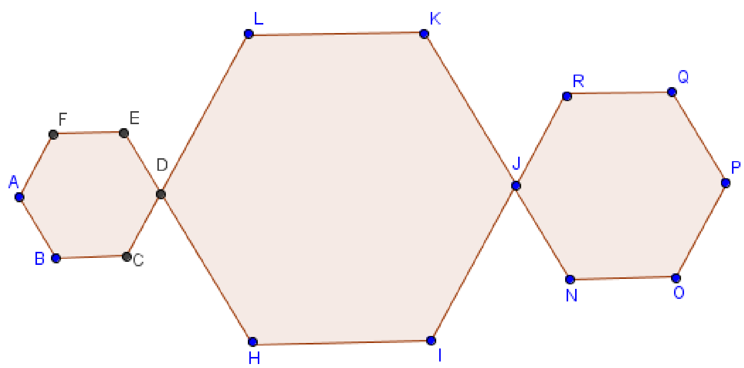


Ilustración 5. Sistema articulado (problema 3)

Dado un hexágono regular. ¿Cómo puede trazarse un nuevo sistema articulado como el de la figura, a partir de este hexágono y con ayuda del pantógrafo, considerando que la razón entre $\frac{DL}{AF} = 2.5$ *y entre* $\frac{JR}{AF} = 1.5$*?. Explica el procedimiento empleado.*

- *Suponga que A es el punto fijo del pantógrafo. ¿Cuáles son las razones de las homotecias con centro en el punto A en las que:*

a) Al punto D le corresponde el punto J

b) Al punto D le corresponde el punto P

Datos entrada	**Variables**	**Intencionalidad**	**Acciones del estudiante**
Razón y el modelo de la figura final	Figura inicial y Punto fijo	En este problema se pretende orientar las características encontradas para que surjan conjeturas con relación a las propiedades encontradas en la figura inicial y la figura final.	*A partir del hexágono dado construir un nuevo sistema articulado como el que muestra la figura que cumpla las condiciones dadas. * Analizar u observar las propiedades encontradas y comparar la figura inicial con las obtenidas con el pantógrafo. * Conjeturar a partir de la observación las propiedades de homotecia que se conservan, como los lados paralelos, lados proporcionales, alineación de puntos homólogos.

Tabla 13. Descripción problema No.3

En este problema se introduce los hexágonos para el proceso de generalizar las propiedades de las figuras trazadas por el pantógrafo y afianzar el concepto de razón relacionada con la escala del pantógrafo. De esta forma se espera que el estudiante, con las características vistas en cada una de las figuras trabajadas, pueda conjeturar las posibles propiedades existentes en el instrumento y las relacione con los conceptos previos que trae, es decir que se refleje en los signos matemáticos como definiciones, conjeturas de las propiedades de homotecia, etc. En este momento las estudiantes deben de tener presente la definición de homotecias, identificando su centro y su razón de homotecia, por este motivo en este problema se pregunta sobre las razones de homotecias.

En la siguiente tabla describiremos las expectativas en cuanto a la solución del problema, los signos individuales y matemáticos que se esperan produzcan las estudiantes.

Solución esperada	Signos individuales	Signos matemáticos
Para este problema se espera que las estudiantes a partir del hexágono dibujado puedan trazar un nuevo sistema articulado teniendo en cuenta las condiciones dadas y de esta manera puedan encontrar relaciones matemáticas del sistema articulado dado en la grafica y el realizado por ellas con el pantógrafo. Se espera que en la interacción con este problema analicen, observen y comparen la figura inicial con la obtenida por el pantógrafo y puedan conjeturar y deducir propiedades matemáticas sobresalientes en las dos	En relación al funcionamiento del pantógrafo, las estudiantes tendrán que organizarlo de tal forma que logren realizar el mismo sistema articulado con las condiciones pedidas, también comiencen a reconocer porque el pantógrafo está dibujando figuras similares y que es lo que hace que varíe la escala.	En relación al problema se espera evidenciar conjeturas relacionadas con los signos matemáticos que se han venido identificando en los problemas anteriores y que permitan conducir a una construcción de su posible demostración. Esto signos matemáticos están ligados a la identificación de propiedades matemáticas que tienen que ver con la semejanza de figuras y la transformación de homotecia.

que se siguen conservando, tales como: lados paralelos, lados proporcionales, ángulos iguales y figuras semejantes.		

Tabla 14. Descripción de la solución esperada por las estudiantes (Problema 3)

3.4.2.4 Problema 4

Enunciado: *De acuerdo a lo explorado en los anteriores problemas. ¿Qué características presentan las figuras trazadas con el pantógrafo?. ¿Cómo puedes definirlas?. Explica y argumenta tu respuesta.*

En este problema se pretende hacer una generalización de todo lo explorado, observado y analizado de los problemas anteriores, reafirmando las propiedades encontradas para lograr caracterizar las figuras trazadas por el pantógrafo.Se espera que el estudiante logre identificar que las figuras trazadas por el pantógrafo son semejantes a las dadas mediante una transformación de homotecia, es decir, que puedan conjeturar que propiedades matemáticas identifican en las figuras iniciales y las transformadas por el pantógrafo que hace que las figuras sean semejantes: como lados paralelos, ángulos correspondientes iguales, lados proporcionales y lados homólogos situados en una misma recta.

En la siguiente tabla mostraremos las expectativas en cuantos a la solución del problema, signos individuales y signos matemáticos que se esperan realicen las estudiantes:

Solución esperada	Signos individuales	Signos matemáticos
Para este problema final se espera que las estudiantes con todo lo explorado, interactuado con los problemas anteriores puedan enlazar las figuras dibujadas con el funcionamiento del pantógrafo. De esta manera se espera que las estudiantes puedan generalizar las propiedades de las figuras inicial con la transformada por el pantógrafo y puedan así conjeturar y comenzar un proceso demostrativo para probar dichas conjeturas.	En relación al funcionamiento del artefacto, se espera que las estudiantes produzcan signos individuales que pueden estar ligados a la forma del pantógrafo, a su estructura como por ejemplo que puedan identificar el paralelogramo que forma el pantógrafo, puedan deducir a través de sus partes como son las figuras trazadas por él.	En relación al problema se espera evidenciar signos matemáticos que pueden estar ligados a la definición de semejanza y con ello puedan lograr probar porque el pantógrafo transforma una figura en otra semejante a ella.

Tabla 15. Descripción de la solución esperada por las estudiantes (Problema 4)

A partir de los resultados en la fase activa y lo sucedido en el aula de clase, se espera evidenciar el proceso de conjetura-prueba que permite hacer un acercamiento a la demostración en matemáticas, cuando se incorpora un instrumento de mediación semiótica como lo es, el pantógrafo de Scheiner.

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE RESULTADOS

"Tratar de conocer la realidad en la que viven nuestros alumnos es un deber que la práctica educativa nos impone: sin esto, no tenemos acceso a su modo de pensar y difícilmente podremos, entonces, percibir lo que se saben y cómo lo saben".
Paulo Freire

INTRODUCCIÓN

Este capítulo describe el desarrollo de la secuencia de problemas abiertos, su implementación en el aula de clases y los resultados visibles que pueden sustentar el posible proceso de la conjetura a la demostración. Los análisis descritos en este capítulo, respecto a cada uno de los problemas abiertos propuestos, se realizan desde el lente de la rejilla de observación y análisis de resultados (Tabla No. 7) descrita en el capítulo anterior.

4.1 RESULTADOS DE LA EXPERIMENTACIÓN

La rejilla de observación (tabla No. 7) posibilita la articulación de unidades de análisis a las cuales hace alusión el marco teórico. Por ejemplo: la Teoría de la Mediación Semiótica, la Unidad Cognitiva y las transformaciones geométricas para analizar el proceso de conjetura-demostración que se puede dar en la interacción con los problemas abiertos. En estos análisis utilizaremos la nomenclatura E1, E2 y E3 para referirnos a las tres estudiantes que participaron en el trabajo de campo, así como también la letra "P" que se referirá al profesor cuando interviene en las interacciones con las estudiantes.

4.1.1 Momento de Exploración

Este momento de enseñanza se enfatizó en la exploración y el reconocimiento del pantógrafo, las estudiantes lograron identificar el punto fijo, el puntero y el trazador móvil, como también que el trazador móvil convertía a una figura recorrida por el puntero, en otra figura que tenía la misma forma pero variaba en su tamaño dependiendo de la escala del pantógrafo. De esta manera se puede observar un avance en relación a la identificación de propiedades de la transformación de homotecia, puesto que las estudiantes perciben una relación de similitud entre la figura inicial y la transformada por el pantógrafo, es decir reconocen que las figuras son parecidas pero las diferencia su tamaño.

Este momento de exploración también permitió reconocer las funciones básicas del pantógrafo en general, así como las funciones de cada elemento que estructura el pantógrafo como lo son: el punto fijo, puntero y trazador móvil, como también la variación en las escalas del pantógrafo. Aunque este momento fue más de reconocimiento del pantógrafo, las estudiantes alcanzaron a percibir la relación de semejanza entre las figuras aunque aun no reconocen las propiedades de semejanza definidas, lo cual se evidencia en el argumento que dan de que se reconocen las figuras semejantes por su parecido entre ellas, aunque se diferencian de tamaño, y no por la propiedades geométricas como son: la congruencia de ángulos y las razones ente lados correspondientes que determinan una constante.

4.1.2 Momentos de producción individual y producción social

En este trabajo de investigación se destaca el análisis de estos dos momentos puesto que son cruciales para identificar los medios semióticos que los estudiantes utilizan para seguir un proceso demostrativo con la participación del profesor y así identificar características sobre el proceso que existe entre la producción de la conjetura y la posible construcción de su demostración. Se inicia con la primera unidad de análisis referente a la función de los instrumentos de mediación semiótica para identificar los signos producidos en esta etapa. En particular se presentarán algunos fragmentos tomados del registro de video y de algunas producciones escritas realizadas por las estudiantes, buscando analizar las acciones del estudiante y el profesor en relación con la solución esperada por las estudiantes, así como también identificar los signos individuales y matemáticos producidos por las estudiantes y anticipados según las tablas descritas en el capítulo anterior para cada problema. De este modo se obtienen herramientas para la caracterización del proceso de la conjetura a la demostración mediante la Unidad Cognitiva.

A continuación se describen las acciones del profesor y el estudiante según los fragmentos de los videos para cada problema, seguidamente de la solución presentada por las estudiantes junto a los signos individuales y matemáticos observados.

4.1.2.1 Problema 1

Dado un punto fijo y un segmento situado en el papel de dibujo No. 1. Si se traza un segmento con el pantógrafo desde el punto fijo, 6 veces mayor que la longitud del segmento dado. ¿Cómo trazar diferentes segmentos cuya longitud se encuentre entre el segmento dado y el segmento 6 veces de mayor longitud, tal que al unir los vértices estos concurran a un mismo punto?		
	Transcripción de video	***Descripción de las acciones del profesor y el estudiante***
Fragmento de video 1	*P:¿Cómo lo piensan hacer?* *E1: Solamente la escala de las columnas va a cambiar, osea cada vez que va ir bajando se va poniendo más grande, pero como usted nos dice que*	*El profesor interviene intencionalmente para que las estudiantes expliquen el procedimiento que están realizando. Las estudiantes comienzan a buscar una*

	tenemos que tener un punto fijo, por ejemplo podemos coger y tener este (refiriéndose al segmento o figura inicial dada) de punto fijo… E2: Aja, aquí empieza la de 2, la de 3, la de 4….(señalando el espacio que hay después del segmento inicial)……...	posible forma de solución del problema moviendo el pantógrafo y trazando algunas líneas, después comienzan a observar donde deberá de ir el punto fijo y hacen suposiciones por ejemplo tomando de referencia como punto fijo el segmento dado en el problema. Pero al final se dan cuenta que el punto fijo del pantógrafo debe estar ubicado el punto inicial y no en el segmento inicial dado.
Fragmento de video 2	E1: Se pasó (risas) llegó el puntero acá (señalando donde quedo el puntero). E2: podemos rectificar si quedo bien…. (Coge la regla para medir el segmento inicial)… uno y medio (hace unos cálculos) y después dice: tendría que quedar de 9… E1: mide el segmento final (6 veces de mayor longitud que el inicial) y dice: yo que le dije que nos habíamos pasado….. P: ¿cómo lo hizo? E2: medí el tamañito de este (Señalando el segmento inicial) entonces lo multiplique y luego me di cuenta como	En este fragmento las estudiantes ya han identificado que el punto fijo del pantógrafo debe estar sobrepuesto en el punto inicial dado en el problema, después comienzan a recorrer el segmento inicial con el puntero del pantógrafo, pero se exceden de la medida del segmento recorrido, por lo que el segmento transformado aumenta de tamaño más de lo previsto. La E2 rectifica si el segmento transformado ha quedado bien entonces mide el segmento inicial con la regla que da 1.5 cm y luego

	tenía que quedar…por 6…..(mira a la otra compañera) y dice: porque es por 6 veces no? *E1: por la escala…*	*multiplica este por 6, lo que le da un resultado de 9 cm. Con esto concluye que el segmento transformado deberá medir 9cm. El profesor interviene para que explique como hizo este procedimiento y porque concluye este resultado. En este momento las estudiantes reconocen que el segmento se está ampliando 6 veces y lo definen por la escala del pantógrafo.*
Fragmento 3 (producción escrita)	*Como conclusión las estudiantes escribieron en la hoja de trabajo lo siguiente:* • *El punto de unión es el punto fijo del pantógrafo* • *Las escalas del pantógrafo son las encargadas de aumentar el tamaño y la distancia entre las columnas*	*En este fragmento escrito por las estudiantes se observa que han logrado identificar algunas característica en relación al funcionamiento del pantógrafo como son: la unión de los vértices de los segmentos dibujados concurren a el punto fijo del pantógrafo que es el mismo punto inicial dado en el problema y reconocen que las escalas determinan la ampliación de los segmentos transformados.*

Tabla 16. Fragmentos de video problema1

A partir de los fragmentos recolectados en el problema 1, analizaremos desde la tabla No. 10, la solución del problema propuesto por las estudiantes, así como también los signos individuales y signos matemáticos que se evidenciaron en este problema.

Solución presentada	***Signos individuales***	***Signos matemáticos***
Las estudiantes comenzaron primero a identificar los datos de entrada y las variables en juego. Después que ubicaron el punto fijo en el punto inicial dado, transformaron el segmento inicial en otro 6 veces de mayor longitud, a partir de allí fueron variando la escala de menor a mayor es decir, ubicaron el pantógrafo en escala 5, luego en escala 4, en 3 y luego hicieron es escala 2, para así obtener los segmentos que iban a estar entre el segmento inicial y el transformado inicialmente por ellas mismas. Al finalizar el dibujo de los segmentos, unieron los vértices y se dieron cuenta que las rectas que unían los	*En este primer problema los signos individuales observados en relación al funcionamiento del pantógrafo se manifestaron cuando las estudiantes trataban de establecer la ubicación del punto fijo del pantógrafo como se vio en el primer fragmento que primero toman como punto inicial el segmento dado y luego se dan cuenta que el puntero es el que debe recorrer el segmento. En este momento también se logra reconocer la variación de la escala que lleva analizar la organización de los segmentos trazados para que al*	*En este problema no se evidencian signos matemáticos aún, las argumentaciones y explicaciones de las estudiantes aun son muy mínimas y no dejan ver la presencia de enunciados, definiciones, teoremas matemáticos que conlleve a la producción de conjeturas. Tampoco se identifican características entre los segmentos por ejemplo que sean paralelos como se esperaba.*

vértices de los segmentos concurrían a un mismo punto que coincidía con el punto inicial dado y el punto fijo del pantógrafo.	*unir sus vértices lleguen a un mismo punto fijo. Como también reconocer que este punto fijo coincide con el del pantógrafo*	

Tabla 17 Solución problema 1 propuesta por las estudiantes y Producción de signos individuales y matemáticos

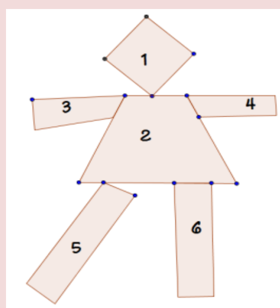
En este primer problema se logra observar como las estudiantes comienzan a planear la estrategia de solución del problema, tratando de organizar los elementos del pantógrafo tales como el punto fijo y el puntero, para así obtener los otros segmentos, que les permite identificar y reconocer el punto inicial como un representante del punto fijo en el pantógrafo.

La gestión docente del problema propuesto se manifiesta cuando genera preguntas que permitan controlar como el uso de la escala y sus variaciones afectan la longitud del segmento transformado. Por ejemplo, en el fragmento 2, se comienzan a observar algunos signos individuales en relación a la escala del pantógrafo, en el momento en que es utilizado el proceso multiplicativo para verificar si el segmento final concuerda con el funcionamiento del pantógrafo, es decir, la estudiante realiza una multiplicación del segmento cuando la escala del pantógrafo es 6, obteniendo así la longitud que debe de tener el segmento trazado mediante el pantógrafo. La utilización del proceso multiplicativo puede visualizarse como un signo matemático, pero en este caso es producido por las estudiantes sin la necesidad de intervención del profesor, es decir fue producido en base a sus conocimientos previos.

En este primer problema, aunque no se produce ningún signo matemático relevante en relación con las propiedades de la transformación de homotecia, se logra evidenciar signos no verbales que pueden estar ligados a los gestos tales como: sonrisas, admiración, de sorpresa cuando verifican que un comentario de algunas de ellas referente al modo de utilizar el pantógrafo es válido. Esto se hace relevante en la medida en que se observa que estos signos pueden ayudar en la motivación de las estudiantes en la solución de los problemas siguientes.

4.1.2.2 Problema 2

Una empresa quiere diseñar un juego para niños que permite armar figuras como la que muestra la figura 3. Suponga que para realizar este diseño se le presentan algunas piezas estándar como las que se encuentran en la hoja de dibujo 3 y una condición: la razón entre los lados de la figura 1 ampliada y los lados correspondientes en la figura estándar sea de 2. ¿Qué condiciones deben cumplir las demás piezas para que se ajusten de acuerdo a la condición de modo que quede como la muestra la figura 3?



	Transcripción de video	**Descripción de las acciones del profesor y el estudiante**
Fragmento de video 1	P: ¿Cómo se dan cuenta que la razón de los lados es 2? E1: Porque se tiene que hacer a escala 2 y necesitamos es que ajuste E2: porqué sabemos, porque es el doble (saca la lengua como si hubiese	El profesor interviene intencionalmente para que las estudiantes expliquen el procedimiento que están realizando. Las

	dicho algo mal) P: Si, porque ahí dice la razón entre los lados de la ampliada sobre los lados de la otra sea de 2. Si da 2? E1: ¿Cómo así? P: ¿Qué es una razón? E2: Es por ejemplo que 2 a 1 ehh 1 a 2, osea que este lado es 2 a este que es menos….(señalando la figura inicial dada) P: Entonces sería la razón entre los lados de la figura ampliada. ¿Cuál es la figura ampliada? E1: esta (señalando la figura trazada por el pantógrafo) P: ¿Cuánto vale un lado de esa? E2: 4 P: y los lados correspondientes de la otra sea 2, el de este es: E2: 2(señalando un lado de la figura inicial) P: entonces 4 dividido 2? E2: esa es la raa…zón…… 2 P: esa es la razón, la relación entre los dos, la división 4 dividido 2 E2: 2 E3: osea que nos quedó buena.	estudiantes utilizan la escala 2 del pantógrafo pero sin aun relacionar esta con la razón 2 dada en el problema. Es decir, aunque las estudiantes identifican que la escala 2 está relacionada con la razón pedida, no son capaces de argumentar el porqué de esta relación. En este momento se evidencia que el concepto de razón aun no está claro. La gestión docente en este caso es el de florecer estos signos para que ellas reconozcan la razón representada en las escalas del pantógrafo. De esta manera se visualiza en este primer fragmento como mediante preguntas las estudiantes

		logran relacionar e identificar la razón con la escala 2 del pantógrafo.
Fragmento de video 2	E1: Tenemos que señalar el punto fijo? P: Si no lo han señalado, ¿Qué pueden hacer para averiguarlo? E1: Unir las líneas (señalando los vértices de las figuras) y ahí ya está E2: ya sabemos dónde está el punto fijo.	En este fragmento, se logra evidenciar que aún permanece intacto el reconocimiento del punto fijo que identificaron en el problema 1, es decir, notamos en este fragmento que las estudiantes conservan el reconocimiento del punto donde concurren las rectas que unen los vértices de la figura inicial con la transformada por el pantógrafo.
Fragmento de video 3	E1: coge la regla y mide (se rasca la cabeza, observa mira, se rasca la cabeza y coge la regla) P: ¿Qué estás haciendo ahí midiendo? E1: Es que aquí tienen que quedar de la misma medida (señalando el dibujo armado que se presentó en el enunciado del problema). E2: No, no tienen que quedar de la	En este fragmento 3 da cuenta como las estudiantes inician estrategias de solución cuando tratan de buscar la escala apropiada para la solución del problema, las

	misma medida P: ahí en el dibujo están en la misma medida? E2: pero mira que los puntos de unión son diferentes (La Est 1 mueve los labios, mira la figura que está en el enunciado y la compara con la otra) E1: lo hacemos de 3? E2: si de 3 E3: de 3? (coge el pantógrafo con ayuda de la est 2 y cambian la escala a 3). Después de un tiempo se dan cuenta que no funciona…	diferentes señales que se pueden visualizar en los registros como los planteados en este fragmento nos muestra el proceso en el que está inmersa la E1 tratando de encontrar un argumento válido, para hallar la razón indicada que sirva para trazar la figura acorde con la figura inicial, pero después de un tiempo se da cuenta que no funciona.
Fragmento de video 4	*E2: coge la regla, mide un lado del trazado en el papel de dibujo y mide un lado de la figura que se encuentra en el enunciado del problema 3. Se para y luego dice: Este muñeco nos quedó torcido, este cuerpo quedo más allá y tiene que ser derecho.* *E2: nos quedó mal el 2* *E3: no me diga* *E2: párese bien aquí y vera, que este brazo quedo muy inclinado y el cuerpo con el brazo 4 tiene que ser aquí*	*En el fragmento 4 también se logra visualizar como las estudiantes se introducen en un proceso de solución del problema, cuando intenta transformar el juego descrito en el enunciado con las características presentadas. Ellas*

	derecho y el cuerpo nos quedó subido. *P: analicen todo, desde donde está empezando el punto de la cabeza, en donde está la conexión de la cabeza con la otra.* *E3: porque aquí en el dibujo este pedazo aquí es más angosto que acá (señalando el lado de un brazo de la figura en la hoja de dibujo)* *P: cuanto es la diferencia de la distancia de aquí hasta este punto según el dibujo (señalando la figura en la hoja donde está el enunciado del problema)* *E2: coge la regla para verificar… dice: aunque……. pues obviamente este pedacito es más pequeño que el otro (señalando la figura en la hoja de dibujo) pero no tanto, cierto?* *P: En cuanto es la diferencia? En cuanto seria la diferencia?* *E1: a mí me parece que esta igual* *P: y ya lo midieron?* *E2: no, hay una diferencia* *E3: sii, este lado es más anchito que este* *P: ¿Cuánto es la diferencia?* *E3: venga miro* *Las tres estudiantes miden los lados de la figura inicial mostrada en el papel de trabajo donde va el enunciado* *E3: este es 0.5 y este 0.7 entonces es*	*comparan la figura final trazada con el pantógrafo con la figura inicial expuesta en el enunciado y comienzan a detectar similitudes y relaciones que deben cumplirse en las dos, por ejemplo: cuando comparan la figura inicial y se dan cuenta que el brazo es más derecho, o cuando encuentran una diferencia en uno de los extremos de la cabeza que parte al lado superior del cuerpo en dos.*

	0.2 *P: así tendría que ser la diferencia también de allá* *E3: pero a escala 3?* *E1: 15* *E3: pero 5 a escala 3, 15* *E1: si, aquí tendría que dar 15 señalando la figura trazada por el pantógrafo* *E2: es que no usamos bien ese pedazo…* *P: que estás haciendo ahí? (Le pregunta a la Est 1)* *E1: Es como un experimento (sonríe)* *P: dale…. Pero como lo estás haciendo?* *E1: estoy dividiendo con que esta parte de acá quede igual a la parte de acá… ya?(señalando el dibujo en la hoja del enunciado).. entonces haciendo la medida como dividiendo acá (Señalando la de la hoja de dibujo)* *P: y eso a que te va a llevar?* *E1: a que este punto conecte como aquí..porque es que mire aquí es 0.5 y aquí 0.7, osea que este le lleva 2 a este, entonces aquí necesito un numero por el cual este quede a este y su diferencia sea 0.2.. entonces necesito pasar estas medidas (señala las divisiones en la hoja del enunciado) acá para poder hacer la razón de acá*	

	me quede 0.2….(sigue midiendo los lados) luego de un momento dice: listo *P: entonces como lo haces? Usted estaba hallando es el punto de corte donde iba el puntero?* *E1: si*	

Tabla 18. Fragmentos problema 2

A partir de estos fragmentos recolectados en el problema 2, describiremos la solución presentada por las estudiantes en este problema y los signos individuales y los signos matemáticos que se identificaron en el desarrollo de este problema.

Solución presentada	***Signos individuales***	***Signos matemáticos***
Este problema se inició con la identificación de la razón dada en el problema relacionada con la escala del pantógrafo. Después de esto las estudiantes establecieron relaciones entre las figuras iniciales y la figura del juego de niños mostrada en el problema, con estas relaciones lograron variar las escalas del pantógrafo para trazar y organizar las demás piezas de tal manera que quedara de la misma forma como la figura del problema. En este	*En este problema se evidenciaron signos referentes al funcionamiento del pantógrafo tales como la identificación de la razón en relación con la escala del pantógrafo, por ejemplo cuando las estudiantes utilizan la escala 2 para realizar el problema. También se producen signos referentes a la organización y escala del pantógrafo para trazar la figura tal y como la solicita el*	*En este problema se producen algunos signos que pueden estar ligados al concepto de razón, como por ejemplo cuando las estudiantes logran establecer relaciones numéricas entre las figuras para el trazado de la figura transformada con las condiciones dadas en el problema. No se evidencia que estos signos estén ligados al concepto de proporción de segmentos como se*

problema también se exploro el pantógrafo para la reducción de figuras ya que las figuras 6 y 7 debían ser reducidas para ajustarse según la figura dada. Al finalizar lograron ajustar las piezas según el dibujo propuesto y lograron trazarlo en la hoja de dibujo con las nuevas proporciones.	*problema, como es el reconocimiento de la relación entre la razón y la variación de la escala del pantógrafo.*	*esperaba en este problema.*

Tabla 19 Solución problema 2 propuesta por las estudiantes y los signos individuales y matemáticos evidenciados

En este problema 2, las estudiantes logran establecer relaciones de medida para realizar el dibujo con las condiciones dadas en el problema. Con lo que surgen conjeturas de verificación, es decir a través de las relaciones de las medidas, realizan conjeturas que pueden ser validadas por la herramienta de verificación como es la regla y que les permite por tanto encontrar las razones que ajustan para las demás piezas. Al finalizar, logran afianzar el concepto de razón que aun no estaba claro y lo relacionan con la variación de las escalas del pantógrafo. También en este problema las estudiantes han explorado y reconocido que el pantógrafo les permite también reducir figuras, cambiando el puntero con el trazador móvil, permitiendo de esta manera realizar el juego completo con todas las piezas descritas.

En este problema, el profesor explicó que es una transformación de homotecia identificando las características ya encontradas por las estudiantes en los problemas como son su centro de homotecia y razón de homotecia. Esta intervención se dio en el sentido que las estudiantes lograran expresar lo que ya venían trabajando como son el punto fijo y las escalas del pantógrafo, en términos matemáticos como centro de homotecia y razón de homotecia. Por esto en el siguiente problema se expresa el enunciado en estos términos matemáticos.

4.1.2.3 Problema 3

En este problema describiremos primero la solución presentada por las estudiantes en referente a este problema, junto con los signos individuales y matemáticos producidos por las estudiantes, para luego mostrar algunos fragmentos relevantes en cuanto a la producción de una conjetura que se venía esperando desde el primer problema y que surgió en la solución del problema como es: la de los lados paralelos.

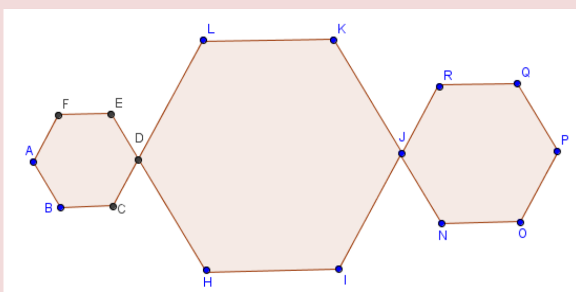
Solución presentada	***Signos individuales***	***Signos matemáticos***
Las estudiantes iniciaron este problema con el hexágono dado. A partir de allí según las razones dadas en el problema, las estudiantes sin ningún problema organizaron la escala del pantógrafo según las razones dadas y realizaron el sistema articulado sin ningún dificultad, también lograron identificar el centro de homotecia y la razón de homotecia. Al finalizar identificaron propiedades	*En relación al funcionamiento del pantógrafo las estudiantes logran reconocer similitudes entre las figuras iniciales y las transformadas por el pantógrafo. En este problema al conjeturar que los lados de la figura inicial y final son paralelos los relacionan al funcionamiento del pantógrafo puesto que este trae un*	*En este problema se evidenciar signos matemáticos en referente a los lados del hexágono. Las estudiantes lograron identificar que los lados son paralelos debido a que el pantógrafo está formado por un paralelogramo, este signo matemático abrió paso a la construcción de una prueba descrita en la tabla siguiente.*

en el sistema de la figura como la de los lados paralelos y también lograron relacionarlo con el paralelogramo que forma el pantógrafo en la intersección de las regletas.	*paralelogramo implícito en la unión de las regletas que lo conforman.*	

Tabla 20 Solución problema 3 propuesta por las estudiantes y los signos individuales y matemáticos evidenciados

Aunque en este problema se presentaron inconvenientes con el sonido de algunos videos, se describe el proceso en el cual las estudiantes probaron que los lados eran paralelos. A continuación presentamos algunos fragmentos en relación a este proceso de prueba que se evidenció en este problema junto con la explicación de todo el procedimiento empleado por las estudiantes.

Dado un hexágono regular. ¿Cómo puede trazarse un nuevo sistema articulado como el de la figura, a partir de este hexágono y con ayuda del pantógrafo, considerando que la razón entre $\frac{DL}{AF} = 2.5$ y entre $\frac{JR}{AF} = 1.5$?. Explica el procedimiento empleado.



	Transcripción de video	Descripción de las acciones del profesor y el estudiante
Fragmento de video 1	*P: Ustedes saben cuánto valen los ángulos internos de un triángulo* *E1; E2; E3: si son 180* *E3: forma un ángulo llano* *E1: entonces este de acá es recto (señalando* *Entonces este mide 90, este también mide 90 y estos* *E2: 45 y 45* *E1: ¿Cómo sabemos que miden 45?.... porque este triángulo no es…(da golpes con el dedo a la mesa)….. ¿Cómo es que se llama este triángulo, como es q se llama?. Este no es triángulo……* *E2: Escaleno* *E3: Isósceles* *E1: isósceles, isósceles no es* *E2: escaleno porque tiene todos los lados diferentes* *E1: No*	*El profesor interviene intencionalmente para que las estudiantes argumenten porque los lados son paralelos y puedan construir una prueba para su conjetura. Las estudiantes inician formando triángulos dentro del hexágono y analizando las medidas de los ángulos. El profesor les pregunta sobre los ángulos internos de un triángulo para orientar a las estudiantes en el camino hacia la prueba de la conjetura. En este primer fragmento se evidencia un proceso de razonamiento por parte de las estudiantes para probar el paralelismo cuando el profesor les pregunta por los ángulos internos de un triángulo. Y es a partir de esta pregunta que comienzan a justificar lo que están observando.* *En este fragmento también se evidencia como se ha generado un conciencia argumentativa, es decir, las estudiantes comienzan a ser consecuentes de que las observaciones que parecen válidas tienen que ser justificadas, es decir debe existir una explicación válida para verificar si es verdad o no, lo que están proponiendo, como por*

		ejemplo cuando la E2 dice que los ángulos son de 45 y 45, la E3 dice ¿Cómo sabemos que miden 45?.Se refleja una actitud de duda donde manifiesta que deben estar seguras de que mida 45. La E3 esta guiando a su compañera para que pueda explicar el porqué de sus argumentaciones.
Fragmento de video 2	*E1: Este mide 90? (señalando un ángulo)… No, este no mide 90 porque esta quedaría así, más o menos así (alargando más el segmento con la regla), entonces bueno, este y este no son los que miden lo mismo?* *E3: vea este es correspondiente con este* *E1: este es correspondiente con este, entonces este mide 90, si este mide 90 y 90, entonces este mide 45… ahhnoo* *E2: No, porque tiene que dar 180 entonces este también mediría 90 (refiriéndose a un ángulo llano)* *E1: 90? Pero podría medir mas, si?*	*En este segundo fragmento se evidencian signos matemáticos que surgen en el proceso de prueba que van encaminadas a las definiciones de:* • *Triángulo isósceles* • *Ángulos internos de un triángulo.* *También la forma en que es organizada la figura para tratar de analizar mejor las relaciones que hay entre ellas.* *En este problema ocurrió un inconveniente de sonido por lo que no tenemos registros de audio para lo que surgió después del fragmento dos, los videos han quedado sin audio y no se pudo registrar lo que las estudiantes lograron hacer. Pero después que plasmaron de nuevo la figura en otro lugar (Como lo muestra la*

	E2: No, mide 90 *E1: mide 90* *P: Eso si es un triángulo isósceles?* *E1: vamos a mirar (coge la regla para verificar)… esto donde se uniría, tratando de formar otro triángulo… (Expresión de preocupación) dice: virgen del agarradero mejor coloquémoslo acá, cierto?... entonces este mide, también mediría 90… y esta seria de aquí, acá..no. Sería de aquí, acá, no?.. virgen santísima yo no sé ni que hice (mano en la cabeza de preocupación).Aquí hay uno, aquí está el otro (señalando los triángulos formados), este sería otro, no? Y este no es igual a estos dos.. (mano en la cabeza) jum.* *E3: y si sacamos esto acá y lo hacemos más bien acá.. (señalando el espacio en blanco en la hoja de dibujo).*	*imagen 2), comenzaron a encontrar la relación que hay entre los ángulos y los lados a partir de los hexágonos formados tanto por el que ellas dibujaron inicialmente como el que trazaron con el pantógrafo.*

Tabla 21. Fragmentos problema 3

Las siguientes ilustraciones se muestran con el fin de explicar el procedimiento realizado por las estudiantes en la hoja de dibujo, ya que no se cuenta con la transcripción del video por falta de audio:

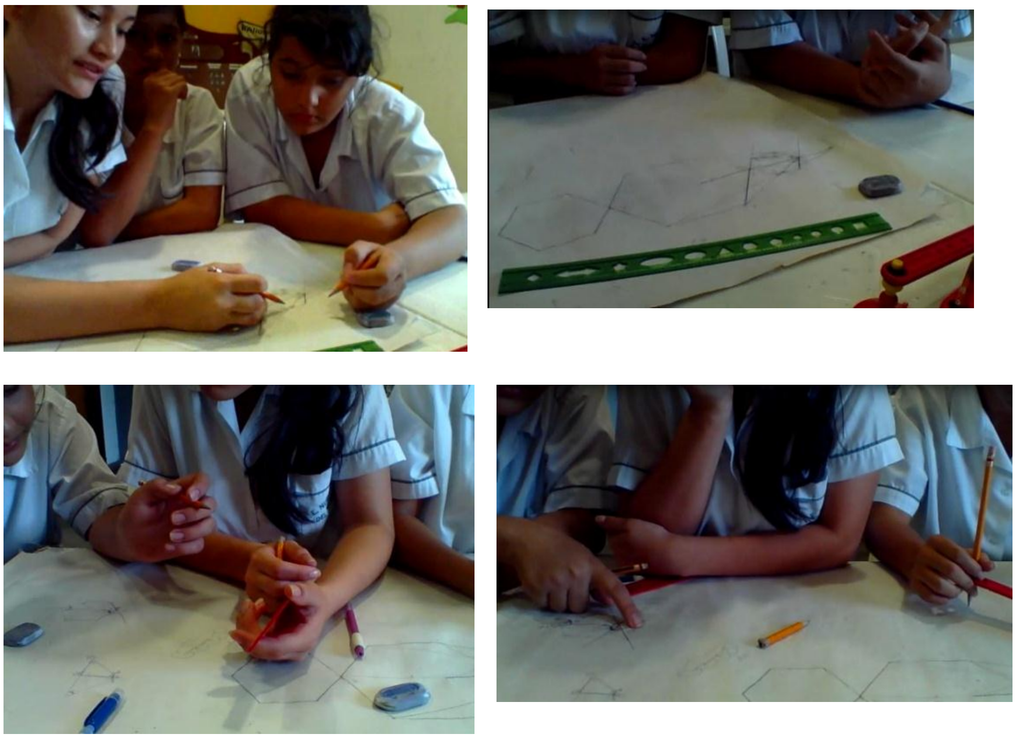


Ilustración 6 imágenes del procedimiento realizado en el problema 3

Procedimiento: Después de realizar el sistema articulado por los hexágonos descritos en el enunciado, las estudiantes identifican propiedades entre el lado que recorre el puntero con el trazado por el pantógrafo y concluyen que estos dos son paralelos. El argumento en estos momentos de las estudiantes es que los lados son paralelos, porque nunca se cortan y lo sustentan con el movimiento del pantógrafo, es decir al mover el pantógrafo dicen el paralelogramo que forman las regletas del pantógrafo nunca se corta. Para incentivar a la construcción de una prueba para esta conjetura, el profesor les recuerda a las estudiantes el siguiente teorema:

- Si dos recta cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos congruentes, entonces son paralelas.

A partir de la introducción de este teorema, las estudiantes comienzan un proceso de razonamiento para probar que los ángulos internos alternos de las rectas paralelas que contiene los segmentos en el sistema articulado como son $\overline{AF} \parallel \overline{DI}$, como lo muestra la siguiente ilustración:

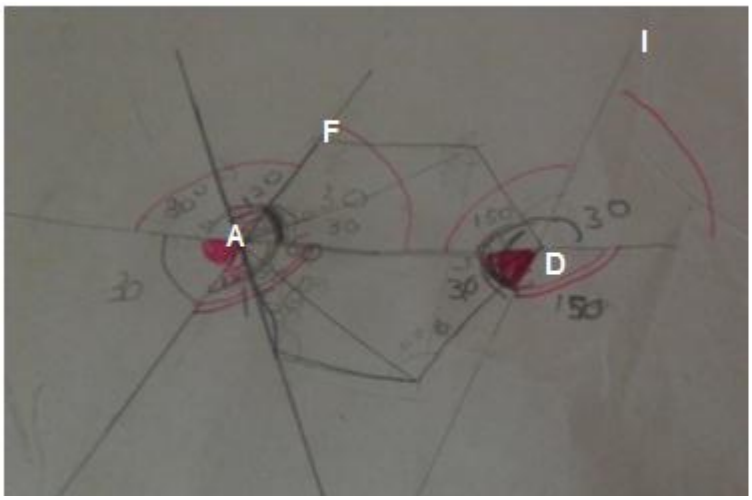


Ilustración 7. Procedimiento realizado por las estudiantes en las hojas de dibujo

En este problema las estudiantes establecieron medidas de ángulos para determinar que los ángulos alternos internos son congruentes, por lo que concluyeron que las rectas eran paralelas. Las estudiantes en un principio no tenían indicios de probar esta conjetura, puesto que no tenían herramientas teóricas para fundamentar los argumentos expresados en la solución del problema, pero debido a la intervención del profesor al enunciarles el teorema de rectas paralelas cortadas por una secante, las estudiantes afirmaron, debido a sus conocimientos previos, que los ángulos alternos internos deberían ser iguales, al igual que sus correspondientes y los opuestos por los vértices.

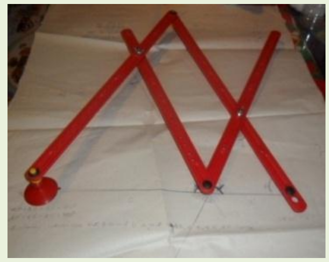
Este problema es relevante porque dio paso a una prueba que determinó una posible continuidad en el proceso de conjetura-demostración. Recordemos que la prueba en este trabajo se toma como “una explicación reconocida y aceptada por una comunidad dada, en un momento dado, como por ejemplo el salón de clases”. La explicación dada por las estudiantes fueron reconocidas por ellas mismas y por el profesor que finalmente acepto la justificación que ellas realizaron. Este proceso de prueba no es una demostración formal, pero se da a raíz de argumentos válidos que no tienen una justificación formal paso a paso, pero que se hace relevante para introducir a las estudiantes al proceso demostrativo en matemáticas.

4.1.2.4 Problema 4

<table>
<tr><th colspan="2">De acuerdo a lo explorado en los anteriores problemas. ¿Qué características presentan las figuras trazadas con el pantógrafo?.¿Cómo puedes definirlas?. Explica y argumenta tu respuesta.</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Fragmento de video 1</td><td>Transcripción de video</td></tr>
<tr><td>E1: Las figuras realizadas, que la primera era la figura inicial la A, siempre la figura B que era la que hacíamos con diferentes escalas, solo iba aumentar de tamaño, pero no iba a variar su forma pero si de tamaño. La función del pantógrafo seria aumentar imágenes…
E2: aumentar o disminuir imágenes.
E1; E3: (a la vez): a diferentes escalas
P: Qué características entonces tienen las figuras?
E2: que son semejantes
E3: y que nunca cambia su forma y tienen los ángulos iguales
P: si fuéramos hacer un heptágono, como seria?. ¿Cómo funcionaría el pantógrafo?
E2: pues en escala 7, yo me imagino porque por ejemplo hicimos el del pentágono que es el de escala 5 y lo hicimos a escala 5
P: y un heptágono no podría ser en escala 8 por ejemplo?</td></tr>
</table>

	E1: Si, la escala no varía por la figura, porque al fin al cabo la escala es independiente de la figura, es para aumentar o disminuir el tamaño
Fragmento de video 2	E3: el pantógrafo está organizado por escalas, y todas están iguales…. Las cuatro regletas que tienen todas tienen las mismas escalas a la misma longitud, entonces uno ya lo organiza que quede 7 con 7…. P: por ejemplo que se está cumpliendo aquí? (colocando el pantógrafo abierto en la mesa) E2: que son paralelos (señalando los lados del pantógrafo paralelos) P: y ustedes ya probaron que las figuras tienen lados paralelos, cierto?que otra cosa habíamos dicho que tenía que tener el pantógrafo? E3: el punto fijo E2: tiene que tener el punto fijo, puntero y punto móvil P: y como tenía que estar esos tres? E2: en línea recta P: como creen que estos tres están lineales E1: pues porque al hacer la figura, al hacer los puntos de cada figura todos tienen que estar rectos. P: pero como hace para probar que justamente estos tres están en línea recta E1: al unirlos y también al cerrar el pantógrafo ahí se va a ver P: supongamos, uno podría cerrar, así queda (cerrando el pantógrafo en un lugar) como se hace para probar E2: porque esto tiene que dar una medida directa P: ¿Cuál? E2: cuando uno lo organiza aquí en esta forma tiene que tener uncua….Parale…. E1: paralelogramo P: aja, eso es una de las cosas que cumple el pantógrafo…¿Cómo son estos dos triángulos?, aquí podemos formar estos triángulos

(señalando los triángulo formados por el pantógrafo como muestra la figura)..



E1: son triángulos isósceles, no, equiláteros

E2: equiláteros?

E3: estos no son equiláteros

E2: semejantes

P: semejantes porque?

E1; E2: porque varían de tamaño pero no de forma

P: como hacemos para mostrar que dos triángulos son semejantes

E3: porque tienen sus mismos ángulos, tienen la misma medida de sus ángulos pero sus segmentos, sus lados varían

P: entonces mostremos que esto es verdadero lo que ustedes están diciendo……lo cambie de escala, que se sigue cumpliendo?

E2: que siguen siendo equiláteros

P: son equiláteros?

E2: noo, siguen siendo semejantes

E1: semejantes por sus ángulosy también están cumpliendo la semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA) no?

E2: Lado-ángulo-lado; ángulo-lado-ángulo?

P: en dos figuras semejantes los ángulos son?

E3: en dos figuras semejantes los ángulos son iguales pero sus lados varían

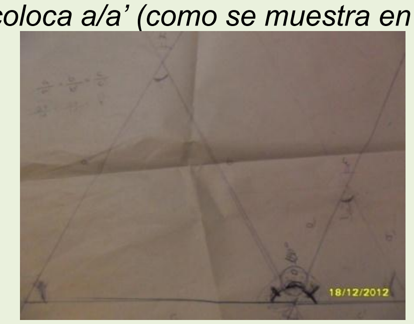
P: listo vamos a probar que los ángulos son iguales

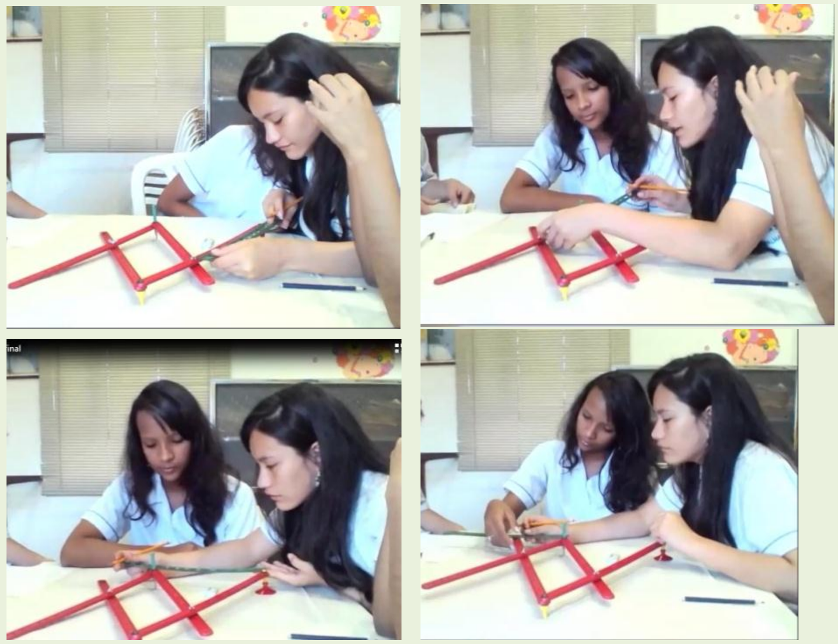
E1: vea aquí hay un triángulo (coge el pantógrafo y señala el triángulo). Espere y vera. ¿Lo podemos dibujar aquí? (lo dibuja en el papel)..asímas o menos(dibuja un triángulo)…..se podría decir que si dividimos este triángulo a la mitad nos quedarían dos

	ángulos rectos., cierto?  E3: y si se hace aquí y se unen los puntos y luego…(dibuja el otro triángulo) este también lo podemos dividirlos a la mitad y quedan dos ángulos P: osea que tienen que saber que este ángulo es igual a este, este a este y este a este (señalando los ángulos correspondientes en los dos triángulos semejantes)  E3: y si son equiláteros por lo tanto cada uno mide 60 grados E2: no, yo creo que no son equiláteros, son isósceles E1: son isósceles tienen dos lados iguales pero uno diferente E3: si porque mire que estos dos son más largos, y este lado es más grande (señalando el otro lado) E1: osea que este ángulo y este ángulos son iguales (señalando los ángulos iguales del triangulo isósceles) pero este esdiferente..y estos dos son iguales (señalando el de los otros triángulos) y aquí tenemos uno de 90 y si este es de 90….. E3: 45 y 45 (señalando los otros dos ángulos) E1: No, porque si no tendría que ser equilátero E2: No, porque este no es rectángulo isósceles E1: Este es rectángulo……(mirando a la estudiante 2) E2: escaleno

	E1: Rectángulo escaleno P: ya habíamos dicho que estos tres tenían que ser colíneales, ¿Cuáles son ahí los colineales? (señalando en la figura que realizaron en la hoja de dibujo). E1: este, este y este (señalando los tres puntos que representan al punto fijo, puntero y trazador en el dibujo) P: y como uno hace para saber que tres son colineales, osea que están en una misma recta? E1: porque en una misma recta sin que como es que es? Sin que se parta o se divida están los tres y aquí no se divide P: ¿Cómo es el ángulo en una línea recta? E1; E2: llano E3: entonces aquí se suman esto, la medida que de acá es el de este y este (Señalando los tres ángulos que forman el ángulo llano). E1: Y cómo vamos a sumar eso? E2: pues si ahh no, ahh no (cara de creer que no va a funcionar)….vea según aquí este es el, el puntero? Creo según ustedes aquí, donde estaría el ángulo de 180. E1: (cogiendo el pantógrafo, abriendo y cerrando) pero mirándolo de este lado uno podría formar el ángulo que quisiera, no?Mirándo desde este.. P: como son estas rectas? (señalando las reglas del pantógrafo) E2 y E3: (a la vez): paralelas P: y ustedes ya saben, ya probaron en la anterior sesión, que losángulos alternos internos son? E2: iguales P: como pueden usar todo eso para probarlo? E3: seria prolongarlos porque este ángulo es igual a este (Señalando en el pantógrafo). Mire (quita el pantógrafo y extiende las líneas con las reglas). P: ustedes necesitan probar que estos de adentro son congruentes para luego decir que son semejantes las dos.

	E3: traza las líneas y dice esta sería la transversal, no? Entonces ya se pueden empezar hallar los ángulos. E1: entonces esta… cual sabemos de aca?.. esta? E2: mide 180 E1: Esto de acá adentro mide 180 (señalando todo el ángulo llano) E2: Entre la suma de estos tres ángulos miden 180 E1: toca hallar este ángulo y este Gestos: (bostezo, toca con el lapicero la mesa) (Se quedan pensando y en silencio) E3: y este no mide 90? E1: ahh es recto este mide 90 P: como saben que este mide 90? E1: porque este es recto y forman una L P: en el pantógrafo esta recto? (Señala el ángulo).. no siempre es recto E3: venga y vera profe (cogen el pantógrafo y lo abren) P: pero y si se mueve? No va hacer, osea que eso quiere decir que este ángulo de aquí esta variando… E1: si E3: pero en este momento P: pero, igual estamos tratando de demostrar que es lo que hace el pantógrafo en todas las escalas… E2: profe este siempre va a variar (coge el pantógrafo lo abre y lo cierra) dependiendo de la escala P: por eso entonces va a variar, entonces no es fijo. Este si es fijo (señalando el ángulo llano) porque así usted mueva la escala, así hagan lo que sea este siempre va hacer 180 y porque van hacer 180, porque están colineales siempre. E2: y este también es fijo y este también es fijo (Señalando los ángulos del vértice de arriba de los dos triángulos). E1:tenemos otras paralelas, esta y esta de acá (repintando con la regla)..y aquí ya formamos el pantógrafo.

	P: ¿Cómo son los ángulos internos de un triángulo? *E3: miden 180 grados* *E2: la suma de los tres ángulos es de 180 grados* *P: tienen que los ángulos internos de un triángulo es de 180, tienen que es un triángulo isósceles osea que los ángulos de la base son?* *E1; E2; E3: iguales… (silencio)…..* *P: primero miremos que es lo que tenemos que probar? Que no lo tienen claro.* *E2: que los triángulos son semejantes.*
Fragmento 3	*P: Ahora tienen que mirar que los ángulos sean congruentes y que los lados son proporcionales.* *E3: entonces se pueden medir los lados, no? Para que sean proporcionales* *P: Y como hacen para saber que son proporcionales?* *E3: porque tienen que dar una razón* *P: Y esa razón tiene que ser igual para cuales?. Para un solo lado?* *E2: No, para todos* *E3: entonces se coloca por ejemplo: a (nombrando a un lado), a' (al otro lado del triángulo) entonces, esto es con mayúscula creo, entonces se coloca a/a' (como se muestra en la foto)…es igual*  *E2: es igual a k, que es la razón?* *P: cuánto es la razón mirenla ahí.* *E3: es igual a b/b' y c/ c' (sigue nombrándolos)* *P: como lo pueden probar?* *E3: se, se miden….mide los lados del pantógrafo con la regla… luego dice: entonces si da (aplaude)..*



P: ahora nos falta mirar son los ángulos….tienen información cojamos este primer triángulo, ¿Cómo son los ángulos internos, a que es igual los ángulos internos?

E2: a 180

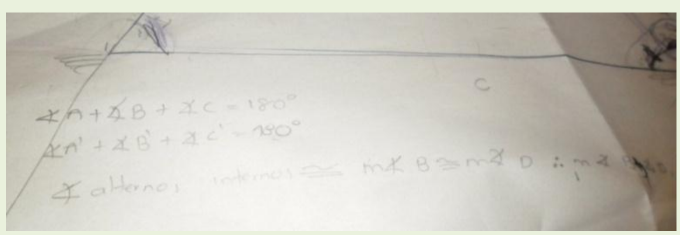
P: Listo tiene A, B y C, la suma de A, B y C es?

E2: 180

(La estudiante E3 escribe: ABC =..)

P: ABC?

E3: No, perdón discúlpeme y escribe: <A+<B+<C = 180



P: ¿Que más tienen? Que los ángulos alternos….

E2: alternos internos son iguales

P: listo y cuáles son los alternos internos ahí?

E2: son este y….este (señalando los alternos internos)

P: ese colóquele una letra, coloquémosle D…. entonces seria que

	B y D son iguales… entonces sería que B=D=F=..a este me parece? *E3: escribe la* $m\measuredangle B \cong m\measuredangle D$ *(como se ve en la imagen)* *Luego escribe m∡B, ∡D, ∡E, ∡B', ∡F son ≅* *P: Como sabes de estos?* *E3: porque son opuestos y son alternos internos* *P: Y que teníamos que comprobar?* *E3: Ayy profeee, profe, profe este C es igual a este, este A es igual a este y este es igual a este* *P: porque son iguales* *E3: porque se supone que son congruentes?* *E2: semejantes* *P: semejantes es lo que vamos a probar… después de un silencio* *E3: (sonríe) si profe lo tenemos pero no profe…*

Tabla 22. Fragmentos problema 4

En el primer fragmento se observa como las estudiantes han logrado construir una generalización del funcionamiento del pantógrafo, identificando las características más importantes que denotan las figuras trazadas por el pantógrafo como son la semejanza de figuras, justificando el hecho de que cambien de forma y que sus ángulos deben ser iguales, como también el hecho de reconocer que la escala del pantógrafo, no depende de la figura.

En el fragmento dos se observa como las estudiantes mediante las expresiones verbales, están inmersas en una cadena de argumentos para demostrar que las figuras son semejantes y comienzan este proceso analizando los triángulos formados en el pantógrafo, en este momento conjeturan que los ángulos tienen que ser iguales y recuerdan algunos criterios de semejanzas. Las estudiantes entran en un momento de análisis, de exploración y de verificación de sus argumentos para lograr establecer bases que ayuden al proceso de demostración de los ángulos iguales.

Se evidencia también, como a través de la observación del pantógrafo y la intervención del profesor las estudiantes pueden reconocer que son triángulos semejantes, aunque la estudiante 2 afirma que los triángulos son equiláteros es corregida por sus compañeras. Se observa también que el término de semejanza está presente en las estudiantes y reconocen que si dos triángulos son semejantes entonces sus ángulos deber ser congruentes. Se evidencia por lo tanto algunos signos matemáticos que surgen en la interacción con el pantógrafo y el profesor, como cuando justifican que se está cumpliendo algún criterio de semejanza, como (A-A-A) y (L-A-L). A pesar que logran conectar esto con los criterios de semejanza no se evidencia que logren conectar estos signos matemáticos con lo que van a demostrar.

La estudiante 1 está activa y busca mediante el dibujo del pantógrafo plasmado en la hoja de dibujo encontrar que los ángulos son iguales. Después de realizar el dibujo en la hoja, las otras estudiantes se activan en ayuda a la E1 para explicar porqué pueden ser los ángulos congruentes.

En el tercer fragmento se observa una ruptura porque las estudiantes no logran enlazar lo que están observando con lo que tienen que demostrar, esto conlleva a analizar una ruptura en la Unidad Cognitiva que no permite llegar a una demostración.

En el cuarto fragmento, la profesor les recuerda que es lo que van a demostrar y las estudiantes deciden comprobar primero que los lados son proporcionales, en este momento se evidencia signos matemáticos con relación a los lados proporcionales que se han ido construyendo y afianzando en el transcurso de la secuencia, porque este concepto de proporción no estaba claro y no lo relacionaban con los conocimientos previos. La E3 mide los lados del pantógrafo con la herramienta de verificación y luego aplaude cuando se da cuenta que tienen la misma razón.

En la última parte se observa que aunque las estudiantes han logrado encontrar, reconocer y producir algunos signos matemáticos referentes al problema, como los ángulos alternos internos, ángulos correspondientes entre paralelas, lados proporcionales etc; aún no logran enlazar estos con los conocimientos para la justificación de la semejanza, Se produce entonces una ruptura para continuar el proceso de la conjetura a la demostración.

4.1.3 Continuidades presentes en la Unidad Cognitiva

Los análisis a continuación pertenecen a la segunda unidad descritos en la tabla No. 7. Se analiza de manera general durante toda la secuencia y desde la UC, las continuidades descritas por Pedemonte (1998). De esta manera, se reconoce la UC, si se evidencian las continuidades descritas por este autor en el marco teórico de este trabajo. De este modo, describiremos cada continuidad a partir de los registros y análisis obtenidos anteriormente.

- Continuidad en el lenguaje: esta continuidad durante la secuencia se pudo evidenciar por medio de las diferentes expresiones de las estudiantes como lo son sus gestos, palabras y acciones, cuando en el momento de afianzar algún concepto lo seguían expresando de la misma forma durante la secuencia. Por ejemplo: en los momentos que se observan donde las estudiantes hablaban con propiedad sobre el punto fijo del pantógrafo que se hallaba uniendo los vértices de la figura inicial y final, y cuando seguían refiriéndose a la razón como parte de la escala del pantógrafo.

- Continuidad conceptual: esta continuidad se evidencia en las interacciones sociales entre las estudiantes y en las que interviene el profesor. En esta secuencia los conceptos previos se afianzaron y se entrelazaron con conceptos matemáticos construidos durante la secuencia, con lo cual se puede afirmar que las estudiantes lograron identificar y referirse con propiedad a los conceptos relacionados con la homotecia. Por ejemplo, cuando se refieren a las propiedades de las figuras trazadas por el pantógrafo y cuando relacionan mediante los conocimientos de homotecia las partes del pantógrafo, como el punto fijo (centro de homotecia), escala del pantógrafo (razón de homotecias).

- Continuidad de marco: Se evidencia en el marco teórico donde se produjo la conjetura que están descritas desde las propiedades encontradas para la solución del problema. En este caso la conjetura surgió en el problema 3, cuando se logró identificar los lados paralelos y se dio paso para que mediante la medición de los ángulos se estableciera una prueba de la conjetura producida. Se resalta que en el problema 4 se evidencia que a pesar de que surgió de nuevo otra conjetura con relación a las figuras trazadas por el pantógrafo como: la semejanza de figuras, no se logró evidenciar una prueba que permitiera la continuidad de marcos teóricos, tanto en la producción de la conjetura como en el proceso de prueba con vías a continuar el proceso hacia la demostración.

- Continuidad heurística: tomando como referencia el problema 3 y 4 se evidencia una continuidad heurística al establecer que las variables y los elementos mantuvieron su significado tanto en la fase de producción de conjetura como en la prueba. Esto se observa a través de las figuras dibujadas con el pantógrafo.

- Continuidad en las dinámicas mentales: En esta secuencia las estudiantes en su proceso para dar solución al problema y encontrar argumentos válidos para sus afirmaciones, estuvieron constantemente activas, más aún después de llegar a validar sus argumentos como en el problema 3 que se logró probar que los lados son paralelos, las estudiantes seguían activas y con mucha motivación para continuar con el proceso. En el problema 4 se produjo una discontinuidad mental, esto se evidenció en la inactividad de las estudiantes debido a factores externos que influyeron en el entorno de aprendizaje.

A partir de estas continuidades que se analizaron en la secuencia de problemas abiertos, describiremos este proceso desde las cuatro fases de la unidad cognitiva explicadas en el marco teórico. Se enfatiza en el caso del problema 3 donde se produjo una prueba que validó la conjetura realizada por las estudiantes, así como también donde se produjo una ruptura cognitiva como en el problema 4.

- Fase 1: Argumentativa de producción a la conjetura
  Esta fase se evidenció desde la presentación del problema abierto en el que las estudiantes inician el proceso a través de una observación, análisis, comparación y luego encuentran patrones que les permiten hacer una afirmación, en el caso del problema 3 cuando se produce la conjetura que relaciona una de las propiedades de homotecia: el paralelismo.

- Fase 2: De estabilización de la formulación de la conjetura
  En esta fase se observó la producción y formulación de conjeturas que se manifestaron de dos maneras: cuando surgen de las propiedades

encontradas en la manipulación del pantógrafo o cuando surge como una conjetura que solo requiere de una verificación. Por ejemplo, cuando se conjetura "la razón entre dos segmentos" y se valida midiendo los lados con la regla y haciendo la respectiva relación. El otro tipo de conjeturas en relacion a las propiedades matematicas encontradas requiere de un proceso mas complejo que el anterior. Es decir, este último tipo de conjeturas requiere que las estudiantes puedan explicar y argumentar porque es posible la conjetura mencionada, en estos momentos las estudiantes entran en una actividad argumentativa plausible, es decir no formal, que comienza desde sus conocimientos previos y lo que han experimentado en el transcurso de la secuencia de problemas abiertos.

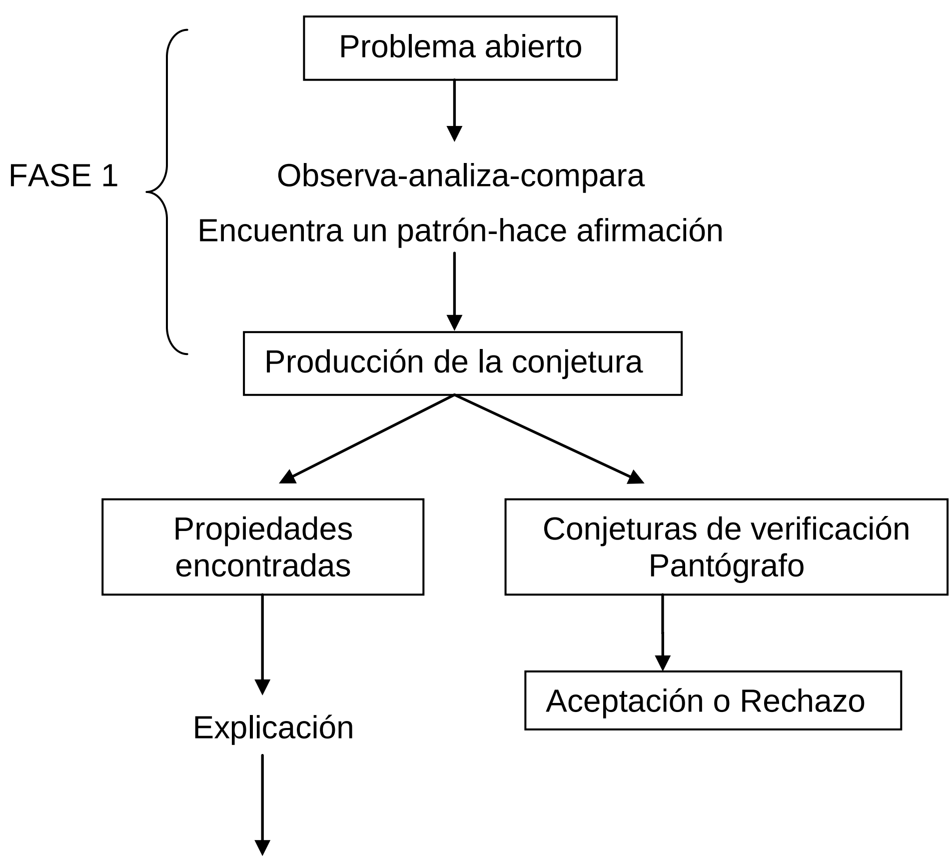
- Fase 3: De construcción de la demostración
  Esta fase la podemos identificar cuando las estudiantes van en busca de justificar sus argumentos, se produce un proceso de exploración de caminos en busca de la validación de esos argumentos donde se producen signos individuales que a través de la gestión docente se van convirtiendo en signos matemáticos, esto da inicio a la actividad demostrativa y a que se pueda encontrar una posible construcción de la prueba o la validación de sus argumentos.

Cabe mencionar, como en el problema 4, cuando los estudiantes no logran conectar los signos producidos en referente al camino de la demostración se produce una ruptura, es decir cuando aun teniendo signos individuales y matemáticos encontrados no logran enlazar en el proceso a la demostración. En este sentido se produce una ruptura en esta fase que no permite que se realice una actividad demostrativa y las estudiantes se pierden en el proceso hacia la demostración.

- Fase 4: De estabilización de redacción de la demostración

  Esta fase no es alcanzada en este trabajo de investigación puesto que se requiere un nivel de rigor más avanzado donde las estudiantes tendrían que estructurar el proceso demostrativo con una cadena de argumentos válidos reconocidos por los investigadores matemáticos. Pero aunque no se llega hasta la producción de una demostración formal, se logra guiar a los estudiantes en un proceso de prueba que motiva la introducción de la demostración para la comprensión de los conocimientos matemáticos. Puesto que las estudiantes en este ejercicio, se mostraron más activas y más dispuestas a validar los argumentos producidos en la interacción de la secuencia de problemas abiertos.

Lo anterior se describe en la siguiente estructura, en relación con el problema 3 y 4 donde se produjo una continuidad y una ruptura respectivamente.



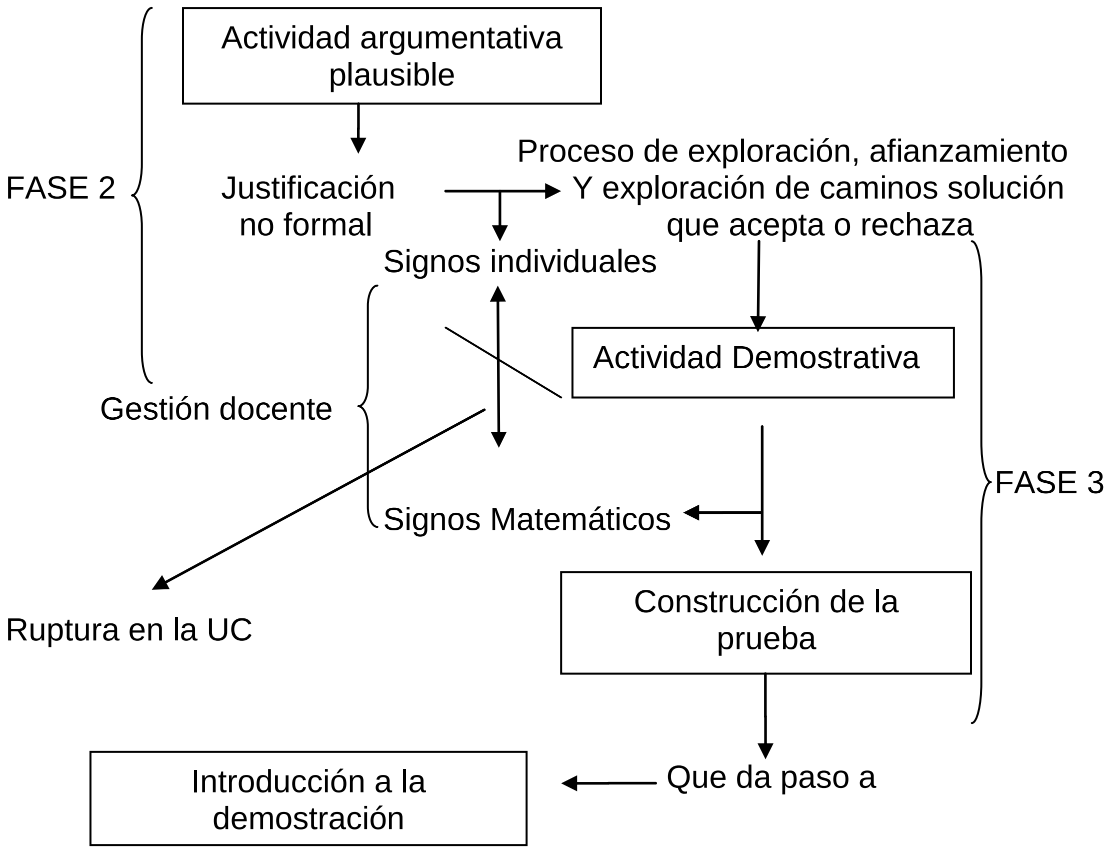


Ilustración 8. Estructura del paso de la conjetura a la demostración.

La anterior estructura nos muestra un posible camino de producción de la conjetura hasta la construcción de su prueba en base a los resultados analizados en este trabajo de investigación. El problema abierto permite que se realice un proceso de comparación, observación, y análisis donde el estudiante razona en base a sus conocimientos previos y establecidos en el problema, que le permite realizar una afirmación que da paso a la producción de una conjetura. Las conjeturas que se produjeron durante la interacción de la secuencia son de dos tipos: conjeturas de verificación y conjeturas por la observación de propiedades implícitas en el pantógrafo.

Las conjeturas de verificación se dan cuando el estudiante realiza una afirmación que puede ser validada por una herramienta de verificación, en este caso por la regla, esto se evidencia cuando las estudiantes hacen alusión a que la longitud debe ser 9cm, porque relacionan el segmento inicial con la escala del pantógrafo como en el problema 1 y también como en el problema 4, cuando se verifica que los lados de los triángulos formados en el pantógrafo son proporcionales, las estudiantes midieron los lados e hicieron la relación correspondiente para verificar que los lados son proporcionales. A este tipo de conjeturas que se logran verificar tan solo con medicionesy que terminan tan solo con una aceptación o rechazo de la verificación, se les ha denominado conjeturas de verificación.

En cuanto a las conjeturas en base a las propiedades implícitas en el pantógrafo y según la observación de las propiedades de las figuras realizadas por el mismo, son a las que se les da prioridad, porque nos permiten observar el proceso en el que están inmersas las estudiantes para validar sus argumentos. Por ejemplo, en el problema 3 donde se produjo una conjetura que hacía alusión a los lados paralelos de las figuras, las estudiantes tratan, como primera medida, de dar una explicación en base a sus conocimientos previos, es por esto que ellas afirman que dos rectas paralelas son las que al prolongarse no se interceptaban en ningún punto. Es aquí donde las estudiantes inician una actividad argumentativa plausible, es decir, aceptada por sus condiciones teóricas previas.

Cuando las estudiantes entran en un proceso de justificación al buscar más argumentaciones posibles para la explicación de sus conjeturaciones, es que el profesor hace presencia en tratar de guiar a las estudiantes en un proceso de exploración de caminos en torno a la justificación de sus argumentos, donde logra conectar los signos individuales producidos en la interacción con los problemas con signos matemáticos, que tal vez ya han sido vistos por las estudiantes pero donde no había un afianzamiento de los conceptos relacionados con el problema. De esta manera, permite que el estudiante avance en la justificación de sus argumentos en bases teóricas establecidas y pueda iniciar un proceso en vía a la construcción de la prueba, como se evidencio en el problema 3. Este tipo de procesos dan inicio a introducir a las estudiantes en la demostración como un elemento esencial para la comprensión de conocimientos matemáticos, en este caso particular para la construcción de los conocimientos relacionados con la homotecia.

Si los signos individuales producidos por las estudiantes no se logran conectar con los signos matemáticos establecidos dentro de la teoría estudiada, se produce una ruptura que no permite avanzar hacia el proceso de exploración de caminos en vía a la solución del problema y de esta manera no se evidencia una actividad demostrativa que conduzca a la generación de la prueba de la conjetura, como se evidencio en el problema 4.

4.1.4 Análisis de la dimensión matemática

Los siguientes análisis pertenecen a la tercera unidad descrita en la tabla No.7, que explica la dimensión matemática puesta en escena en el desarrollo de la secuencia didáctica de problemas abiertos. Recordemos "que no existe demostración sin teoría" como menciona Mariotti (2002), puesto que de esta manera la demostración no tiene sentido si no hace referencia a un marco teórico que contenga axiomas, definiciones y teoremas.

En el desarrollo de la secuencia se determinaron definiciones que no estaban afianzadas por las estudiantes como el concepto de homotecia, pero se fueron consolidando a medida que se iba avanzando en la interacción con los problemas abiertos y con las intervenciones del profesor. Estas definiciones y teoremas afianzadas por las estudiantes han quedado plasmadas en sus argumentos y en su intento por realizar un proceso demostrativo como el que se vivió en el problema 3. A pesar que en el problema 4 no se logró llegar a una prueba, las estudiantes mostraron que las definiciones trabajadas durante la secuencia, como las propiedades de las homotecias seguían estando presentes en sus argumentos, por ejemplo: el concepto de razón y cuando identifican las propiedades de las figuras semejantes trazadas por el pantógrafo como son: sus lados proporcionales, lados paralelos, ángulos correspondientes congruentes.

Lo anterior, evidencia que la teoría estuvo presente en el desarrollo de la secuencia y que al final los conceptos matemáticos fueron afianzados, mejorando así no solamente las afirmaciones hechas por las estudiantes, sino también las respectivas argumentaciones sobre la validez de las conjeturas. Aunque no se pudo enlazar el paso de la conjetura a la demostración, como en el problema 4, si se produjo una comprensión de algunos conocimientos matemáticos implícitos en el pantógrafo y los resaltados en la interacción con los problemas abiertos.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones de este trabajo de investigación, las cuales se esperan sean productivas y puedan servir de punto de partida para posteriores investigaciones. Estas conclusiones se describen principalmente desde el problema de investigación, los objetivos generales y específicos, como también de la articulación de las teorías puestas en escena en relación con los análisis de los resultados en el trabajo de campo conforme a la metodología de estudio de casos.

Como se había dicho en la problemática de investigación, el proceso de la conjetura a la demostración es uno de los procesos más complejos que se pueden observar, se requiere de tiempo y de secuencias didácticas propicias donde el paso de la conjetura a la demostración incida en la mejora de la comprensión de los conocimientos matemáticos en los estudiantes. Para lograr esto los estudiantes, y en especial los profesores, deben tomar conciencia de este proceso e incluirlo en los currículos escolares.

En este trabajo de investigación, a pesar del corto tiempo, se logró observar un proceso de prueba que estuvo sustentada por las argumentaciones presentadas por las estudiantes que dejan ver una continuidad en la exploración, argumentación, producción de una conjetura como lo fue: “las rectas paralelas” y una explicación de la prueba que constituye una base para una aproximación a la demostración. Los resultados de estos análisis son un aporte importante para resaltar el papel de la demostración en el currículo escolar Colombiano y afirma la necesidad de promover esa consciencia demostrativa que aun no es prevista por los estudiantes ni por la mayoría de los profesores, la cual podría permitir la mejora en la comprensión de los conocimientos matemáticos.

Es probable también que de continuar con este tipo de procesos a largo plazo, los estudiantes puedan entrar en una actividad demostrativa minimizando la interacción con el profesor, donde los elementos estén bien estructurados y organizados para una demostración.

- Referente a la pregunta de investigación y los objetivos de investigación

Las posibilidades didácticas en cuanto al proceso de generación de pruebas matemáticas que emergieron de los resultados expuestos en el problema 3, están relacionadas con las necesidades de generar entornos de aprendizaje, que puedan hacer del aula de clase un espacio en el cual se promuevan la aparición de signos matemáticos, que propicien en los estudiantes procesos de indagación, exploración, conjeturación, argumentación, donde los estudiantes puedan generar pensamiento, actitud y discurso matemático que los aproxime a una demostración formal que mejora la comprensión de los conocimientos matemáticos llevados al aula de clase.

La aproximación a una demostración, que permita el surgimiento de significados matemáticos adecuados para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se puede dar en la implementación de secuencias de problemas abiertos, los cuales permiten integrar instrumentos como el pantógrafo de Scheiner, para la apropiación de conocimientos matemáticos en este caso en relación a las propiedades de la transformación de homotecia. Esto se evidenció en las producciones de las estudiantes, explicaciones, actitudes, gestos, expresiones, entre otros, que permitieron avanzar en el desarrollo del proceso de prueba, donde al final las estudiantes expresaban con más claridad los términos matemáticos implícitos como por ejemplo, cuando se referían a la razón de homotecia y centro de homotecia.

En referencia al segundo objetivo específico, el diseño y la experimentación de la secuencia de problemas abiertos permitió describiry determinar de manera particular el proceso que se desarrolló en las estudiantes de noveno grado a través de la interacción de la secuencia, el pantógrafo y el profesor que se manifestaron en la producción de una conjetura y su prueba.

Como un aporte en la fase de diseño de secuencias, se debe analizar primero el potencial semiótico del instrumento, para que de esta manera participen elementos esenciales a la hora de formular el problema y organizar los momentos de enseñanza que ayudan a establecer los signos personales y matemáticos que se espera produzcan los estudiantes. En este sentido, esta relación se torna compleja en la medida que exige un análisis más cuidadoso con el fin de evitar una mala formulación del enunciado que impida la promoción de signos producidos por los estudiantes en signos matemáticos. Por esta razón en este trabajo no se alcanzaron a observar todos los signos matemáticos esperados por el maestro.

Aunque las teorías descritas en el marco teórico no describen la manera de cómo elegir un problema abierto, la caracterización dada de ellos en este marco, permitió identificar, seleccionar y adaptar situaciones de problemas abiertos, que brindaron una herramienta esencial para la producción de pensamiento y discurso matemático relacionado con las transformaciones geométricas. De esta manera, surgieron significados personales que lograron conectarse con significados matemáticos implícitos en el pantógrafo de Scheiner, con ayuda del profesor, como se evidenció en el problema No 3. Aunque no se llegó a cumplir con todas las expectativas esperadas por el maestro y a pesar que se presentó una ruptura en el problema No. 4, en general la secuencia deja ver que emergieron varios signos matemáticos en relación al uso del pantógrafo que están representadas en las propiedades de homotecia observadas por las estudiantes como: lados paralelos, lados proporcionales, ángulos correspondientes iguales, como también la de figuras semejantes. Esto muestra que de hacer un mejor análisis a la secuencia y la formulación de los problemas abiertos puede llegarse a observar un proceso estructurado del paso de la conjetura a la demostración, eficaz para el aprendizaje de los estudiantes mediante la inclusión del pantógrafo como instrumento de mediación semiótica. La gestión del profesor se valora en la medida de lograr hacer emerger y aprovechar ese signo relacionado con el funcionamiento del pantógrafo y del problema mismo en un signo matemático reconocido y aceptado por las estudiantes al realizar la prueba de este, como se evidenció en el problema No. 3.

En este sentido, los problemas abiertos en este trabajo de investigación aunque no estaban directamente relacionados con llegar a una demostración, dejaron ver que con el solo cumplimiento de realizar el problema las estudiantes exploraron y encontraron propiedades que se relacionan con el funcionamiento del pantógrafo donde nacen los significados personales, que permiten que el profesor los guie para convertirlos en signos matemáticos, es decir se da un instante donde se identifica que es el momento adecuado para iniciar un proceso demostrativo. Es probable de que al mejorar los enunciados de los problemas abiertos donde el procedimiento y el resultado este estrechamente relacionado con una demostración, es decir que el mismo problema exija una demostración pueda atraer a los estudiantes y motive para que estos participen en la producción de signos que se puedan convertir en signos matemáticos mediante el proceso demostrativo. Por lo tanto, se deja como un incentivo para nuevos aportes en este sentido,tener en cuenta la formulación de problemas abiertos resaltando el potencial semiótico del instrumento y la función del profesor como mediador para evidenciar procesos demostrativos emergentes en el aula de clase y que conlleven a mejorar la comprensión de los conocimientos matemáticos.

Se observa también que los problemas abiertos, no necesariamente deben especificar o pedir una demostración en el enunciado, pero si es importante que esta se relacione implícitamente con la pregunta, es decir, en la medida que el estudiante a través de la exploración o la búsqueda de solución del problema pueda observar o encontrar características que pueden estar relacionados con los signos matemáticos esperados. En este caso los problemas abiertos diseñados en este trabajo de investigación presentaron dificultades en la interpretación del enunciado del problema, como en el caso del problema No. 1, la actuación del profesor en este sentido con respecto al enunciado del problema, se presentó en la intervención de la explicación del problema, puesto que las estudiantes no sabían cómo proceder, esto tal vez se relaciona con el hecho de que era el primer problema con el cual se enfrentaban las estudiantes, puesto que en los otros problemas siguientes no tuvieron tanta dificultad en interpretar el enunciado. El primer problema con que inician las estudiantes es muy importante, puesto que da luz o una visión de la intención del profesor en relación al cómo proceder de las estudiantes y las acciones que el profesor espera a futuro de ellas mismas.

- En relación a los mediadores semióticos

En síntesis, en la experimentación con el pantógrafo como instrumento de mediación semiótica permitió observar que las estudiantes participaron animadamente a lo largo de la secuencia, a pesar que su participación fue voluntaria y sin ninguna presión académica. Esto conduce a pensar que este tipo de instrumentos resultan interesantes para las estudiantes y muestra un grado de motivación para el aprendizaje de conocimientos matemáticos, donde las estudiantes están dispuestas a manifestar procesos cognitivos que resultan importantes para la construcción del conocimiento y para fijar bases que ayuden a mejorar las formas de incluir estas experimentaciones en el currículo escolar. Esto se evidenció en el interés de las estudiantes por resolver los problemas siguientes, es decir, al principio en el primer problema las estudiantes no estaban familiarizadas con los problemas abiertos pero después de la solución del primer problema, las estudiantes participaron animadamente en la solución de los siguientes problemas.

De esta manera, el pantógrafo como instrumento de mediación semiótica permitió enlazar conocimientos previos de los estudiantes que se manifestaron a través de los signos producidos por los estudiantes con signos matemáticos implícitos en el pantógrafo como la homotecia y la semejanza entre las figurastrazadas y transformadas por el pantógrafo. De hecho la organización y la estructura del pantógrafo influyó en la activación de procesos de exploración de varias alternativas para encontrar la solución adecuada al problema planteado, que muchas veces llevó a la producción de conjeturas, que fueron aceptadas o rechazadas después de su verificación y también a las conjeturas donde se observó una actividad demostrativa para validación de las mismas.

En el mismo sentido, el papel del profesor como mediador semiótico es fundamental para mediar los conocimientos previos de las estudiantes y los conocimientos propios de la cultura matemática y de esta manera conducirlos a entrar en una actividad demostrativa por medio de su inclusión en el problema mismo. En relación a la gestión docente como mediador de la cultura matemática, algunas veces se produjeron dificultades durante la secuencia, es decir, existieron momentos en los que el profesor debió influir para aprovechar y actuar de forma más precisa sobre momentos que hubiesen generado procesos importantes para analizar, pero no se dieron. Esto conlleva analizar y pensar la importancia de preparar a los maestros a este tipo de entornos que proporcionan una herramienta vital para explotar procesos de razonamiento, como son los que conducen a una actividad demostrativa y en el manejo de instrumentos que actúen como mediadores semióticos. Por lo tanto, se hace reiterativo formar a los profesores en este tipo de entornos que pueden ocurrir en un instante y donde se puede generar mejoras en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, como también capacitar a los profesores en la forma de incorporar instrumentos que pueden ser concebidos como instrumentos de mediación semiótica, su utilización en el aula de clase y como estos influyen en la construcción del conocimiento.

- Referente al proceso de aproximación a la demostración y la articulación de las teorías previstas.

El proceso de conjetura y demostración se hace fundamental en las aulas de clase, como un proceso que ayuda a mejorar los procesos de razonamiento y de construcción del conocimiento, esto debe tenerse en cuenta para valorar la inclusión de este en el currículo escolar, no solo en grados superiores sino que se hace importante incluirlo desde los primeros grados escolares, para que se pueda avanzar en términos teóricos, puesto que los estudiantes comprenderán mejor los conocimientos desde sus inicios escolares y podrán avanzar en procesos más complejos que favorecen el desarrollo del pensamiento matemático y por ende del razonamiento matemático.

Se resalta que aunque las estudiantes no lograron llegar a una demostración formal, se presentó una prueba aceptada por las estudiantes y por el maestro en el aula de clase, como en el problema 3, que da inicio a introducir el proceso de la demostración para la comprensión de conocimientos matemáticos. Aunque este tipo de prueba no se dio a través de una secuencia lógica de argumentos, si permitió probar que los lados de la figura eran paralelos, al verificar por medio de la medida de ángulos que los ángulos alternos internos son iguales. Esto nos lleva a analizar que el sentido de la demostración si es importante y juega un papel crucial a la hora de crear y construir conocimiento, puesto que las estudiantes se muestran más activas y más atentas a seguir el proceso demostrativo.

Las estudiantes siguieron procesos de exploración- conjetura-argumentación-prueba como en el caso del problema 3, a pesar de que no produjeron todos los signos esperados, se logró llegar a una prueba que da paso a una aproximación a la demostración, pues las estudiantes estaban conscientes y activas de que debían justificar sus argumentos con elementos válidos dentro de la teoría. Cabe mencionar que la teoría se hace indispensable y uno de las mayores dificultades en el avance hacia la demostración es que la teoría y los conocimientos previos no están bien fundamentados en las estudiantes. Pero aun así las estudiantes lograron obtener y afianzar sus conocimientos en relación a la transformación de homotecia y a la semejanza de figuras geométricas. Se resalta entonces el papel importante de los procesos demostrativos para la comprensión de los conocimientos matemáticos y su inclusión fundamental en el aula de clase.

En el caso del problema 4, requería una generalización de las características observadas en las figuras trazadas por el pantógrafo y aunque en este problema la conjetura surgió sin ningún inconveniente como “las figuras son semejantes” en el proceso de probar esta conjetura, se produjo una ruptura cognitiva que no permitió llegar a la demostración. El primer intento que denota un camino hacia la demostración en este problema, se da cuando las estudiantes analizan los triángulos que forma el pantógrafo para buscar herramientas que justifiquen que los triángulos son semejantes, en este momento se da paso a otras conjeturas que representan las propiedades de semejanza como son los ángulos correspondientes congruentes. En el intento por justificar y encontrar los argumentos necesarios para probar dicha conjetura, surgen otras, las cuales obstaculizan el proceso a la demostración, es decir, en busca de elementos para probar la conjetura de figuras semejantes, observan otras como “los ángulos correspondientes iguales” y recuerdan algunos criterios de semejanza, pero al tratar de probar las demás conjeturas carecen de herramientas que las vincule a la continuación del proceso demostrativo. En este momento, el profesor retoma las propiedades encontradas para encaminar a los estudiantes de nuevo hacia la demostración, pero al final las estudiantes no logran enlazar los elementos que tienen ya determinados con lo que necesitan para probar que las figuras son semejantes. Esta ruptura permite en términos de la UC encontrar obstáculos que inciden en el proceso hacia la demostración, puesto que en busca de caracterizaciones que sustenten la explicación de las propiedades geométricas de las figuras tal y como se dibujan en el pantógrafo no tiene en cuenta las propiedades de las figuras al movilizar el pantógrafo, y no pueden describirlas desde las propiedades que marcan una semejanza entre dos figuras.

Como lo explica Mariotti (2002) “las diversas caracterizaciones diferentes a la solución adecuada, ninguna de ellas anclada a una argumentación que ha apoyado la conjetura marca una ruptura entre el proceso de producción de la conjetura y la construcción de la demostración, pero lo más importante es que crea dificultades porque en la ausencia de una caracterización precisa no se sabe lo que tenemos que demostrar”. En este sentido, se inscribe la ruptura observada en el problema 4, puesto que las estudiantes se obstaculizan en el proceso de la demostración porque no tienen una caracterización precisa de lo que se va a probar, aunque intentan relacionar todo lo que ven con las propiedades de semejanza que traían de sus conocimientos previos. También se hace una reflexión en cuanto a la exploración de las propiedades de semejanza que se venían trabajando desde el primer problema abierto, tal vez estas propiedades debieron influir de manera más acertada durante la secuencia para que en el último problema estuvieran más precisas. Esta ruptura de alguna forma contribuye al análisis del diseño de la secuencia de problemas abiertos, para tener en cuenta en futuras investigaciones, este tipo de inconvenientes que pueden enmarcar una dificultad en el camino hacia la demostración.

Se puede resaltar que este tipo de entornos de aprendizaje pueden lograr evidenciar signos producidos por los estudiantes en torno a los problemas abiertos, la interacción con el instrumento de mediación semiótica y por medio de la gestión del profesor, como representante de la cultura matemática, estos signos pueden convertirse en signos matemáticos durante el proceso de la conjetura a la demostración. Cuando un problema abierto es presentado a las estudiantes, el proceso de solución se une al desarrollo de la teoría prevista, en este caso el de transformación de homotecia que proporciona tanto un marco teórico con propiedades geométricas observables, como también de una marco intelectual donde es posible observar una continuidad desde la producción de una conjetura que surge de las propiedades observadas durante la interacción con el instrumento de mediación semiótica y el momento de construcción de una demostración. En este sentido, prevalecen la articulación de los marcos teóricos que permiten en conjunto que pueda evidenciarse el proceso de producción de una conjetura hacia la construcción de su demostración, como un importante aporte donde las estudiantes muestran eficientemente sus capacidades de razonar y sus potencialidades para desarrollar conocimiento matemático y para la comprensión de los mismos.

- Recomendaciones generales

La creación de entornos de aprendizaje que hace posible un acercamiento a la demostración donde se incluyan instrumentos de mediación semiótica, debe ser establecido siguiendo una caracterización precisa de los elementos en juego, como son el potencial semiótico del instrumento a utilizar como también la gestión del profesor para la producción de signos que emerjan en la interacción con este y con los participantes en el entorno de aprendizaje. Esto con el fin, de aportar una herramienta esencial para el momento de organización de la enseñanza y donde se pueda tener una mejor visualización de las acciones del profesor y las acciones que se esperan de los estudiantes para observar procesos demostrativos. En este sentido se presentan algunas recomendaciones que pueden dar inicio a problemáticas y futuras investigaciones, para seguir en la formación y complementación de estos entornos de aprendizaje que ayuden a la comprensión de los conocimientos matemáticos.

- En relación con la TMS, el análisis del surgimiento de signos producidos por los estudiantes y las acciones del profesor en la evolución de estos, requieren de la participación de un instrumento que se concibe por el profesor como instrumento de mediación semiótica para permitirle intervenir en el desarrollo de signos personales vinculados estrictamente con el funcionamiento del instrumento hasta su conversión en signos matemáticos reconocidos.

- Se hace necesario hacer un análisis detallado del comportamiento y las acciones del profesor, clasificando las intervenciones producidas por él, para minimizar las dificultades que se presentan en las experiencias particulares de forma imprevista y en las cuales el profesor no interviene de forma adecuada. En este sentido el profesor debe tener claro el papel que juegan los distintos medios semióticos puesto que no solo la construcción de una definición matemática implica la producción de un enunciado y su demostración, sino también los diferentes medios semióticos que apoyan dicha construcción de los conocimientos matemáticos.

- Respecto a la UC, los resultados nos llevan a observar que es necesario tener una conexión entre las conjeturas y lo que se quiere demostrar, lo cual ayuda a tener claridad del proceso que se espera evidenciar y puede permitir esclarecer los momentos de intervención que sirven para interpretar por medio de la UC,el comportamiento del estudianteenla solución deun problema abierto y las posibles dificultades suscitadas porél. Esto también conlleva a tener presente los momentos de ruptura cognitiva, para que en un momento dado se logre la reorganización del ciclo didáctico y se continúe con el proceso demostrativo.

- El análisis del potencial semiótico del instrumento es indispensable y constituye una base para el diseño de secuencias de problemas abiertos siguiendo la estructura del CD que permitan el proceso de conjetura-demostración. En relación con esto, una aproximación a la demostración debe contemplarse en los currículos escolares permitiendo la inclusión de instrumentos de mediación semiótica que permita intervenir en este proceso en conjunto con la construcción de la teoría.

- Se requiere también un análisis de los medios semióticos como los signos no verbales, como los gestos, expresiones entre otros que permitan contribuir a los procesos de evolución de signos ya que estos son los que preceden a los signos verbales en donde se hace énfasis en los análisis.

BIBLIOGRAFÍA

ALVAREZ, C., & SAN FABIAN, J. L. (2012). La elección del estudio de caso en investigación educativa. *Gazeta de antropología*, 28.

ANTONINI, S., & MARTIGNONE, F. (Febrero de 2011). Pantographs for geometrical transformations: An explorative study on argumentation.

ARZARELLO, F., OLIVERO, F., DOMINGO, P., & ROBUTTI, O. (s.f.). Dalle Congetture alle dimostrazioni.Una possibile continuita cognitiva. Dipartimento di Matematica Università di Torino.

BACCAGLINI- FRANK, A. (Septiembre de 2010). Conjecturing in Dynamic Geometry: A model for Conjecture Generation. (Y. Herrera, Trad.).

BALACHEFF, N. (1999). Recuperado el 17 de Julio de 2012, de http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resut2.html.

BALACHEFF, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Universidad de los Andes, Una Empresa Docente.

BARTOLINI, B. M., & MARIOTTI, M. A. (Julio de 1999). Semiotic Mediation: From History to the Mathematics Classroom. (F. P. AssociationStable, Ed.) *For the Learning of Mathematics, 19*(2), 27-35.

BARTOLINI, B. M., & MARIOTTI, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom:Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. 746-783.

BISHOP, A. (1988). *Enculturación Matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Cambridge.

BOERO, P. (1999). Argumentación y demostración: Una relación compleja, productiva e inevitable en las matemáticas y en la educación matemática. *International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*.

BOERO, P. (1999). Argumentation and mathematical proof:A complex, productive, unavoidable relationship. Italia: Dipartimento di Matematica Università di Genova.

BOERO, P., GARUTI, R., LEMUT, E., & MARIOTTI, M. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* (L. P. Sauvage, Ed.) Grenoble: Université de Montréal.

BUCHBINDER, O., & ORIT, Z. (2011). It this a coincidence? The role of examples in fostering a need for proof. *43*, 269-281. ZDM Mathematics Education.

CAMPOS, A. (2007). *Huellas en los encuentros de geometría y aritmética.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

CAMPOS, E. D. (2006). Ingeniería Didáctica. Costa rica: Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas.

CAÑADAS, M. C., DEULOFEU, J., FIGUEIRAS, L., REID, D., & OLEKSIY, Y. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. *Enseñanza de las ciencias*, 431-434.

CODINA, S., LUPIAÑES, A., & GÓMEZ, J. L. (s.f.). El Razonamiento Matemático: Argumentación y demostración.

COXETER, F. (1971). *Fundamentos de Geometría.* Buenos Aires, Mexico: Editorial (IMUSA-CUILEY, S.A.).

DUVAL, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.*

FISCHBEIN, E. (1999). Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning. 11-50. (K. A. Publishers, Ed.) Educational Studies in Mathematics.

GARTUTI, R., BOERO, P., & LEMUT, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *PME22*.

GODINO, J., & RECIO, A. (2003). Significado de la Demostración en Educación Matemática. *Understanding proof in teaching and learning mathematics*.

HANNA, G. (1997). El valor permanente de la demostración. (A. y. Gutierrez, Ed.) *la matematica e la sua didattica*, 236-252.

HOYOS, V. (2006). Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. *Enseñanza de las ciencias*.

LARIOS, V. (2002). Demostraciones y conjeturas en la escuela media. *Revista electrónica de didáctica de las matemáticas*.

LARIOS, V. (2006). *Demostrar es un problema o el problema es demostar.* ImpresosGuillén, S.A. de C.V.

LIN, F.-L., HSIEH, F.-J., & HANNA, G. (2010). *Estudio ICMI 19: Demostración y prueba en Educación Matematica*. (U. d. Valle, Ed., & B. E, Trad.) Santiago de cali, Colombia.

MARIOTTI, M. A. (1998). La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein. (P. Herbst, Trad.).

MARIOTTI, M. A. (1998). La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein. (P. Herbst, Trad.) *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*.

MARIOTTI, M. A. (2000). Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *44(1/2)*, 25-53. Educational Studies in Mathematics.

MARIOTTI, M. A. (2002). La Preuve en Mathématique. *34*(4).

MARIOTTI, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective:the role of the teacher. *ZDM*, 427-440.

MARIOTTI, M. A. (s.f.). Proof and Proving in Mathematics Education.

MARIOTTI, M. A., & FISCHBEIN, E. (1997). Defining in Classroom Activities. *Springer, 34*(3), 219-248.

MARTÍNEZ, P. C. (2006). El método de estudio de caso estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento & gestión*(20), 165-193.

MEN. (2010). *Informe resultados de Colombia en TIMSS 2007*.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL, M. (1998). Serie de Lineamientos Curriculares. Santafé de Bogotá, Colombia.

P, B., GARUTI, R., & MARIOTTI, M. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures.

PEDEMONTE, B. (1998). Modélisation, preuve et manipulation des variables de situation dans Cabri-Géometre. Mémoire de DEA Grenoble; Université Joseph Fourirer.

PIAGET, J., & GARCÍA, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Mexico, D.F.: Siglo XXi editores, S.A. de C.V.

PRUEBAS SABER 2012. (s.f.). *Pruebas Icfes mejor saber.* Recuperado el 17 de Julio de 2012, de http://www.icfes.gov.co/examenes/pruebas-saber.

QUINTERO, G. (2010). De la Conjetura a la demostración deductica con la mediación de un ambiente de geometría dinámica. *Tesis de Maestria en Educación Matemática*, 207. Santiago de Cali, Colombia.

RAMÍREZ, R. (2009). La noción de mediación semiótica en el enfoque constructivista vygotskiana. *Omnia, 15*(1), 70-81.

SILVER, E. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. *ZDM 95 (2)*, 67-72.