DE LA PRODUCCIÓN DE CONJETURAS A LA DEMOSTRACIÓN EN UN CONTEXTO DE GEOMETRÍA SINTÉTICA – ANALÍTICA: EL CASO DE LA CIRCUNFERENCIA

DIEGO JHOHAN DÍAZ OSPINA - 0637405

DENISE DE GREY ZULUAGA DUQUE - 0639234

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

FEBRERO DE 2013

DE LA PRODUCCIÓN DE CONJETURAS A LA DEMOSTRACIÓN EN UN CONTEXTO DE GEOMETRÍA SINTÉTICA – ANALÍTICA: EL CASO DE LA CIRCUNFERENCIA

DIEGO JHOHAN DÍAZ OSPINA - 0637405

DENISE DE GREY ZULUAGA DUQUE - 0639234

Lic. JORGE ENRIQUE GALEANO

TUTOR

Mg. EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA

COTUTOR

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

FEBRERO DE 2013

(Espacio para el acta de evaluación del trabajo de grado)

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a ***Dios*** por ayudarnos cada día a cruzar con firmeza el camino de la superación, porque con su aliento hoy hemos logrado uno de los más grandes anhelos.

Agradecemos a nuestras ***familias*** por su apoyo incondicional en la consecución y elaboración de este trabajo y formación inicial profesional.

En particular, a las siguientes personas que nos colaboraron en este proceso:

A nuestro Tutor y profesor ***Jorge Enrique Galeano Cano***, por sus consejos y apreciaciones tan oportunas, además por su liderazgo y paciencia.

A nuestro Co-tutor y profesor ***Edinsson Fernández Mosquera***, por su compromiso y responsabilidad académica, por sus intervenciones y comentarios tan acertados.

A nuestros profesores ***Diego Garzón Castro y Octavio Augusto Pabón***, por el apoyo incondicional y sus excelentes apreciaciones que siempre fueron tan oportunas para nuestro proceso de formación.

A nuestros ***Compañeros*** del seminario de práctica profesional y seminario de trabajo de grado, por sus aportes en las discusiones extensas y enriquecedoras.

A los ***Estudiantes*** de grado once participantes en la investigación, pertenecientes al colegio Fe y Alegría Madre Alberta, por su buena actitud y disposición, agradecemos también a los directivos del colegio, por permitirnos ejecutar las actividades en el colegio.

Denise y Diego

CONTENIDO

LISTA DE ILUSTRACIONES

LISTA DE TABLAS

RESUMEN

En esta indagación se planteó cómo la continuidad entre la producción de conjeturas y la producción de la demostración, conlleva al aprendizaje de la *Geometría Analítica*, particularmente la circunferencia. El marco teórico se organizó a la luz de la teoría de la *Mediación Semiótica* y la teoría de la *Unidad Cognitiva*, que dan fundamentos a las actividades propuestas en la indagación; al igual que la relación entre el método sintético y el método analítico donde se concibe a la geometría cartesiana como una relectura de la geometría euclidiana. La experimentación se realizó con seis estudiantes de grado undécimo en el colegio Fe y Alegría Madre Alberta, y estuvo caracterizada por la *Etnografía educativa* y por el *ciclo didáctico;* fue importante observar, registrar y analizar las producciones de los estudiantes, cuando estos resolvieron las actividades haciendo uso del AGD[1] Cabri Géomètre II Plus, destacándose que los argumentos generados por los estudiantes están fuertemente arraigados a la validación empírica que brinda el AGD.

Palabras claves: Conjetura, Demostración, *Geometría Analítica*, *Instrumento de Mediación Semiótica*, *Unidad Cognitiva*, Problema abierto, Cabri Géomètre II Plus, AGD.

[1] AGD: Ambiente de Geometría Dinámica

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado se inscribe en la intersección entre las líneas de Investigación que existen en el Programa Licenciatura en Matemática y Física, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle, sede Meléndez; la línea de investigación Lenguaje Y Comunicación de Saberes Matemáticos y la Línea de Investigación de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC).

En los últimos años, la comunidad matemática ha centrado su interés en la demostración, especialmente en los argumentos y procesos de razonamiento matemático que emplean los estudiantes cuando se aproximan a la elaboración de una demostración, las reflexiones apuntan a fortalecer aquellos procesos que permiten tener una mejor comprensión de la matemática, algunos de ellos son: argumentar, razonar, proponer, justificar y participar en debates que permitan fortalecer los discursos orales y escritos del estudiante, de esta manera el estudiantes será más consciente de su propio aprendizaje.

Otra cuestión importante que atañe la atención, es destacar la importancia que tiene este tipo de indagaciones alrededor de la demostración para nosotros que somos docentes en formación, y por ello se cree que vale la pena repensar el trabajo que realiza el estudiante alrededor de la demostración en Geometría Analítica, trabajo que debería llevar al estudiante a tomar conciencia acerca de la manera como se abordan los conceptos geométricos en la escuela, no cabe duda que preocupa la falta de un trabajo consiente y significativo en el estudiante, que potencie el aprendizaje en él.

El interés se dirige para que la demostración conlleve al aprendizaje de la *Geometría Analítica* dentro de los enfoques sintético y analítico, para ello, la continuidad entre la producción de una conjetura y su demostración se constituye en un elemento potente para explorar; esto requiere que los argumentos que han construido la conjetura bajo concepciones y creencia de los estudiantes y que han sido validados empíricamente bajo las funciones usadas del AGD Cabri Géomètre II Plus, puedan evolucionar y sean validados bajo la teoría de la *Geometría Analítica* para que estructuren la demostración.

Lograr dicha continuidad depende del trabajo realizado bajo la teoría de la *Unidad Cognitiva*, pues esta reviste en un modelo de continuidad entre ambos procesos bajo el seguimiento de la *actividad argumentativa* como eje transversal entre la conjetura y la demostración; así, cobra un sentido preponderante en este proceso.

Plantear la continuidad cognitiva entre la conjetura y la demostración requiere la integración de un artefacto como Cabri Géomètre II Plus, como un *instrumento de mediación semiótica* que sea introducido por el docente con una intencionalidad didáctica que permita mediar entre el contenido matemático y la actividad; esta mediación asocia el artefacto con una relación semiótica que es doble, porque se puede por un lado relacionarlo con la cultura matemática, debido a que el artefacto ha sido construido y aceptado por la comunidad de matemáticos, haciendo que surjan los signos matemáticos; por otro lado, se relaciona el artefacto con la actividad, en términos en que los signos personales surjan de la solución de las actividades que los estudiantes hacen.

El tipo de actividades que son potentes para la continuidad cognitiva son las que integren *problemas abiertos* porque no sugieren ninguna forma de solución y esto permite que el estudiante pueda darle mayor sentido a sus propias producciones argumentativas. Igualmente, dentro del diseño de las actividades se considera la complementariedad entre el método sintético y el método analítico, basándose en la consideración en que la geometría cartesiana es una lectura algebraica de la geometría euclideana.

El documento se estructuró en seis capítulos desarrollados a lo largo de la indagación: en *el primer capítulo* se presentan los antecedentes, el problema de investigación, los objetivos y la justificación. Además, de aquellos trabajos que permitieron mostrar el panorama de investigación alrededor de la demostración; por un lado, se encuentra la tesis de maestría, *De la conjetura a la demostración deductiva con la mediación de un ambiente de geometría dinámica* de Quintero (2010) y por otro lado, la tesis de maestría titulada, *La enseñanza de las cónicas como lugar geométrico integrando Cabri Géomètre II plus a partir de lo puntual a lo global* de Fernández (2011). También fue importante resaltar los problemas de corte cognitivo que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la *Geometría Analítica*, particularmente los problemas de representación. Todo ello, hace parte de los elementos constitutivos de la indagación.

En el *segundo capítulo* se presentan los fundamentos teóricos, organizados en elementos para la indagación en la demostración, contextualización de la demostración en la escuela, modelo de *Unidad Cognitiva*, teoría de la *Mediación Semiótica* y el contexto de la actividad; su articulación fue importante para el diseño de las actividades.

El *tercer capítulo* está organizado en metodología, caracterización de las actividades y análisis previos, en este capítulo se aprecia que la metodología utilizada en la indagación es la *Etnografía* educativa, la cual es una investigación de corte cualitativo que aporta datos descriptivos sobre los contextos y creencias de los participantes en el escenario educativo que se ha dispuesto para la recolección de los datos. También se aprecia el enfoque denominado *ciclo didáctico*, el cual fue importante para organizar las dos actividades, que son: *Situación problema 1: Construyendo una antena* y *Situación problema 2: Descubriendo Figuras geométricas.*

En el *cuarto capítulo* se aprecia la descripción de la experimentación y la contextualización de la institución en la cual se aplicaron las actividades, en dicha contextualización se considera la reseña histórica, misión, visión, recursos físicos y ubicación. En la descripción de la experimentación se encuentran aquellos elementos que hicieron parte de la organización como: los materiales y espacios usados para el trabajo; estructura de las sesiones de trabajos y recursos usados para la recolección de información, también los resultados de lo que se encontró.

En el *quinto capítulo* se presenta un análisis de los resultados encontrado en la experimentación y por tanto, se ha incluido el diseño de una rejilla de análisis que permite agrupar y organizar la información, de tal manera que a partir de estos resultados, se pueda relacionar el marco teórico y el marco experimental. La rejilla de análisis contiene las siguientes categorías de análisis: *continuidad cognitiva*, *instrumento de mediación semiótica y complementariedad entre el método sintético y el método analítico*, ellas pretenden dar respuestas a los objetivos planteados por la indagación.

En la última parte correspondiente a *Conclusiones y Recomendaciones* se presenta una reflexión de esta indagación, al respecto se estructura en tres partes: 1) sobre los objetivos específicos planteados y el problema de investigación, 2) sobre la articulación de los marcos teóricos y 3) preguntas abiertas que podrán ser tomadas en futuras investigaciones.

CAPÍTULO I

ASPECTOS GENERALES

1.1 ANTECEDENTES

En las últimas décadas, diversas investigaciones (Hershkowitz, 2000; Ministerio de Educación Nacional, 1998; Rico, 1995) sugieren la posibilidad de fortalecer el razonamiento matemático en la escuela porque se considera fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, debido a que mejora distintas capacidades cognitivas en los estudiantes. El proceso de razonamiento se asocia con la comunicación y la resolución de problemas, y por ello, el desarrollo de capacidades cognitivas como justificar, argumentar, explicar y conjeturar, pueden permitir a los estudiantes proporcionar argumentos que justifiquen sus acciones y estrategias en la solución de distintas actividades.

La solución de preguntas del tipo ¿cómo? y ¿por qué? conllevan a que las producciones orales y escritas de los estudiantes brinden la posibilidad de proponer argumentos que fortalezcan la capacidad de desarrollar el pensamiento matemático, un enfoque completamente opuesto al trabajo rutinario de memorización, aplicación de fórmulas y reglas que no representan un valor significativo para el pensamiento matemático de los estudiantes (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

Además, los estudiantes no logran ejemplificar y modelar los conceptos matemáticos de manera tal que su trabajo en el aula sea orientado a la construcción de conocimiento por medio de las producciones de argumentos, y que en la justificación sean capaces de validar sus producciones de acuerdo con una teoría matemática establecida por la comunidad. Todo esto radica en el hecho de la necesidad de un trabajo consolidado alrededor del razonamiento matemático, que beneficie directamente al estudiante en la medida que el razonamiento se relacione con cada una de las actividades que afronta el estudiante en el aula (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

Dentro de los procesos que permiten desarrollar el razonamiento matemático se encuentra la demostración, sin embargo, cuando se quiere establecer en el aula generalmente la experiencia con ese tipo de procesos se resume:

- ✓ Las experiencias demostrativas se transforman en varios ejemplos que sirven para ilustrar la regla o el teorema enunciado.
- ✓ Cuando las nociones son más complejas y delicadas, se buscan ejemplos diferentes para tener una correspondencia con las propiedades diferentes que se quieren rescatar. (Joshua & Dupin, 2005, p. 213)

En efecto, la intervención de la experiencia dentro de la demostración se resume a una de carácter formal, ilusorio y fugaz en el aula; entonces, no hay una producción matemática por parte del estudiante y surgen dificultades cognitivas que no permiten acceder a una mejor comprensión, no sólo de la demostración sino también de la matemática misma; se termina concibiendo la demostración como un producto, como algo ya terminado, presentado al final con el objetivo de cerrar un tema específico, por lo tanto interesa trabajar la demostración, en el sentido en que esta pueda potencializar el aprendizaje de los contenidos matemáticos (Hanna, 2000), es decir, usar la demostración para aprender matemáticas; para esta indagación interesa la *Geometría Analítica*, concretamente la circunferencia.

De acuerdo con lo anterior, la intención de esta indagación se dirige a que la demostración permita potencializar el aprendizaje de la *Geometría Analítica* dentro de los métodos analítico y el sintético; para ello, se pretende establecer la continuidad cognitiva entre la producción de conjeturas y la producción de una demostración, este estudio se hace bajo la teoría de la *Unidad Cognitiva*, debido a que esta teoría reviste un modelo de continuidad entre ambos procesos.

Aproximarse a la construcción de la conjetura requiere para el estudiante la tarea de generar una serie de argumentos que surgen a partir de sus creencias y concepciones para ser validados a través de acciones empíricas que reconozcan la plausibilidad de los argumentos; para permitir la continuidad esperada entre la conjetura y la demostración, esos argumentos que ya han sido usados por la producción de la conjetura y validados a través de acciones empíricas deben evolucionar y ser validados bajo la luz de la teoría, es decir relacionar los argumentos con la teoría de la *Geometría Analítica*, es así como la *actividad argumentativa* cobra un sentido importante en dicha continuidad.

Alcanzar lo anterior requiere de la integración de un artefacto como Cabri Géomètre II Plus (AGD), el cual es concebido como un *instrumento de mediación semiótica* que es introducida por el docente con la intención de solucionar una actividad[2]. *El instrumento de mediación semiótica* tiene la característica importante de generar una doble relación semiótica, por un lado, cuando el artefacto se relaciona con la cultura matemática, en la medida en que el artefacto ha sido construido y aceptado por esta cultura, permite que surjan signos que tienen un significado matemático; por otro lado, si el artefacto se relaciona con la actividad, surgen los signos que son producidos en la solución de ésta, denominados signos personales, que provienen de los discursos que son validados empíricamente.

Es así, como el AGD es un *instrumento de mediación semiótica* importante en la consecución y posterior evolución de los significados personales a los significados matemáticos; los significados personales se asocian a los argumentos que permiten construir una conjetura y por otro lado, los significados matemáticos son los argumentos que permiten producir una demostración. Este proceso debe ser guiado por un experto en la clase (el docente) que permita que esos significados personales evolucionen a significados socialmente aceptados por la clase y posteriormente coincidan con los significados matemáticos.

Como consecuencia, se evidencia cómo el modelo de *Unidad Cognitiva* a partir de la integración de un *instrumento de mediación semiótica* puede generar una continuidad cognitiva entre la conjetura y la demostración, donde los significados personales y los significados matemáticos son asociados al artefacto; que permite mostrar la relación existente entre el modelo de la *Unidad Cognitiva* y la teoría de la *Mediación Semiótica*.

Además, de resaltar el trabajo con la integración de AGD como enriquecedor y motivante para el aprendizaje del estudiante, pues este proporciona nuevas herramientas

[2] La actividad se compone de *problemas abiertos* que van a estar mediados por Cabri Géomètre II Plus dentro de lo que implica la teoría de mediación semiótica, pues esta hace uso de los objetos culturales destacando la potencialidad que tiene el instrumento como mediador.

potentes que apoyan la solución de una actividad de *problemas abiertos*[3] (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Baccaglini-Frank, 2010) tipología de problemas que permiten producir conjeturas, porque crea un ambiente ideal para plantearlas y poder observar los procesos que permiten dar la continuidad entre las conjeturas y demostraciones (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Baccaglini-Frank, 2010; Bartolini Bussi & Mariotti 2008 Boero, 1999; Mariotti 2002, 2006; Pedemonte, 2007).

Las investigaciones (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2009; Quintero, 2010) han mostrado que el AGD se puede integrar como un *instrumento de mediación semiótica* fuertemente vinculado en la elaboración y consecución de trabajos de corte experimental que "han dejado a la luz potenciales resultados que pueden ser puntos de partida para nuevas indagaciones acerca de la manera cómo los estudiantes pueden mejorar sus capacidades cognitivas en la comprensión y aprehensión del saber" (Quintero, 2010, p. 28), la potencialidad de estos resultados se debe a las características dinámicas que presenta el AGD, permitiéndole al estudiante la manipulación directa de las representaciones ejecutables y además fortaleciendo el aprendizaje que lo hace más activo y consciente de sus acciones, en la medida en que controla y modifica sus condiciones (Fernández, 2011).

Los resultados de algunos trabajos investigativos (Fernández, 2011; Itzcovich, 2005; Río-Sánchez, 1989; Velásquez, Memije, Lluck, Moreno & Barragán, 2007) sugieren la existencia de dificultades alrededor del aprendizaje de la *Geometría Analítica*, dificultades de corte cognitivo que han afectado la comprensión del estudiante, pues se le ha dado más sentido a la memorización de reglas y fórmulas, y a la aplicación de éstas en un trabajo repetitivo de algoritmos que no terminan siendo productivos y significativos para el estudiante, entonces el aprendizaje de la *Geometría Analítica* se viene limitando a un formalismo carente de sentido para él que se traduce en:

> "un trabajo rutinario a partir de definiciones, ejemplos, ejercicios y problemas. Es decir, una vez dada la definición de circunferencia y su expresión analítica, se plantean ejercicios en los que a partir de elementos de la circunferencia se encuentra su ecuación y viceversa" (Velásquez, Memije, Lluck, Moreno & Barragán, 2007, p. 263).

[3] Estos son problemas o preguntas que no revelan su respectiva solución como "¿Qué tipo de figura puede ser transformada en…?", contrario a los problemas cerrados de la forma "Demuestre que…" en los cuales se presenta un resultado ya establecido.

Los resultados anteriores, se traduce para los estudiantes en un trabajo en *Geometría Analítica* que se limita a encontrar la relación existente entre la figura geométrica de un objeto y su respectiva representación algebraica, y viceversa; es decir, es una tarea que se reduce a conversiones entre sistema de representaciones semióticas, que en muchas ocasiones constituyen en dificultades de carácter cognitivo para el aprendizaje por parte del estudiante (Duval, 1999). Además, se asocia a este formalismo la memorización de significados y fórmulas carentes de sentido para el estudiante, que puede traer consecuencia en la comprensión de los conceptos de la *Geometría Analítica* que puede dar como resultado dificultades en el desarrollo de habilidades matemáticas como la comunicación, comprensión y visualización (Fernández, 2011; Velásquez, et al, 2007).

Las dificultades en el aprendizaje en *Geometría Analítica* se relacionan con problemas de representación semiótica y además, problemas relacionados con la perdida de significados que afectan la comprensión geométrica del estudiante (Contreras, Contreras & García, 2002), causados por el trabajo netamente algebraico; autores como Fernández (2011) muestran esta dificultad en el aprendizaje en *Geometría Analítica* y "subrayan el tratamiento excesivamente analítico de las cónicas, en tanto resultado de desligar lo *sintético* de lo *analítico* en la mayoría de cursos y libros de texto escolares de *Geometría Analítica*." (Fernández, 2011, p. 25); esto se debe, a que no se reconoce el desarrollo histórico de la *Geometría Analítica*, sobretodo la relación que se puede establecer entre la *Geometría Analítica* y la geometría euclidiana, como una nueva forma de interpretar la geometría euclidiana (Álvarez, 2000). De allí, la importancia de relacionar el método sintético y el método analítico porque puede generar una mejor comprensión del conocimiento geométrico en los estudiantes.

Relacionar el método sintético con el método analítico, es una consideración en esta indagación para superar algunas dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la *Geometría Analítica*, porque se logra un vínculo estrecho entre las propiedades de las figuras geométricas dilucidadas por el método sintético y la conversión de esas propiedades en la parte algebraica ilustrada por el método analítico, logrando con esto que la demostración en *Geometría Analítica* sea significativa para el estudiante y llevando con ello a mejorar el aprendizaje de dicha geometría.

Las siguientes investigaciones muestran el tema de esta discusión, debido a que exponen con una mayor claridad el estado de las indagaciones cercanas al contexto en el cual se viene desarrollando, permitieron dar un acercamiento en términos generales aquellos aspectos necesarios.

1.1.1 Panorama local de trabajos investigativos

En los últimos años, distintas investigaciones en Educación Matemática señalan la importancia del estudio tanto en el campo de la demostración (Baccaglini-Frank, 2010; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Bartolini Bussi & Mariotti 2008; Boero, 1999; Hanna, 2000; Mariotti 2002, 2006; Pedemonte, 2007; Quintero, 2010) como en el aprendizaje de la *Geometría Analítica* en especial las cónicas (Fernández, 2011; Itzcovich, 2005; Rio-Sánchez, 1989; Velásquez, et al, 2007); estos resultados muestran la necesidad de crear ambientes de aprendizaje enriquecidos con problemas significativos mediados por la integración de ambientes de aprendizaje informáticos, debido a que las herramientas proporcionadas por los AGD impactan a los estudiantes y contribuyen al aprendizaje de las matemáticas (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010). Son investigaciones preocupadas por los procesos de conjetura, argumentación y demostración, además van encauzados a mejorar la comprensión del estudiante cuando se ven enfrentados a solucionar problemas en los que se debe dar la continuidad entre el plano experimental y el teórico, de allí, la importancia que reviste es tipo de indagaciones en el aprendizaje de la geometría.

Por un lado, se encuentra el trabajo de investigación titulado *De la conjetura a la demostración deductiva con la mediación de un ambiente de geometría dinámica* de Quintero (2010), del cual es interesante los aspectos que puedan ayudar a contextualizar esta indagación, que permiten destacar cómo a través de la vía experimental se puede encauzar el proceso de la demostración, visto en términos de la existencia de una probable continuidad entre la conjetura y la demostración, continuidad fuertemente amarrada y determinada por el modelo de *Unidad Cognitiva*, es así que:

> Se miran los aspectos más relevantes que de la *Unidad Cognitiva* (UC) pueden permitir trabajar sobre la posibilidad del paso de un nivel pragmático a un nivel teórico en el proceso de la demostración deductiva geométrica. El interés se pone en la necesidad de hacer ciertas observaciones y previsiones acerca de la gestión realizada por el estudiante sobre las continuidades y las diferencias entre los tipos de discurso que se dan durante la transición de lo perceptual a lo teórico (Quintero, 2010, p. 31).

Por otra parte, también se destaca la integración del AGD Cabri Géomètre II Plus en aquellos trabajos que revisten un enfoque experimental, porque el AGD es un mediador entre lo experimental y lo teórico, funciones como *el arrastre* y *la medida* son partícipes en la aproximación de los significados personales a los significados matemáticos, debido a que Cabri Géomètre II Plus es un *instrumento de mediación semiótica* que logra en el estudiante una toma de conciencia en la transformación de los significados personales a significados socialmente compartidos por la clase y luego culturalmente aceptados por la comunidad de matemáticos (Quintero, 2010).

Por otro lado, se encuentra el trabajo de investigación titulado *La enseñanza de las cónicas como lugar geométrico integrando Cabri Géomètre II plus a partir de lo puntual a lo global* de Fernández (2011), el cual se ubica dentro del contexto del aprendizaje de las cónicas vistas como lugares geométricos, con la mediación de Ambientes de Geometría Dinámica como lo es Cabri Géomètre II Plus, con el propósito de diseñar y estudiar una secuencia de situaciones didácticas.

De esta investigación ha sido importante destacar el hecho de que la integración entre el método sintético y analítico "juega un papel importante en la adquisición y desarrollo de habilidades conceptuales y procedimentales por parte de los estudiantes en relación con el aprendizaje de las cónicas" (Fernández, 2011, p. 25), esta visión revela la importancia de reconocer tanto el significado geométrico como la manipulación algebraica asociada al objeto geométrico; para el caso específico de esta indagación, se ha tomado como objeto de aprendizaje la cónica circunferencia dentro de la *Geometría Analítica*.

Lograr que la relación entre el método sintético y analítico sea causa para mejorar la comprensión geométrica y en la implicación de una validación en la demostración para el estudiante, requiere de la integración de un AGD como Cabri Géomètre II Plus, ya que es significativamente importante rescatar su condición dinámica para el estudio de los objetos geométricos y para la validación de propiedades, en la medida en que el AGD reviste un enfoque experimental por medio de su herramienta *arrastre*.

La tesis de Fernández (2011), también sugiere la existencia de dificultades en el aprendizaje de la geometría, cuando el estudiante no realiza una distinción clara entre dibujo y el objeto geométrico representado por dicho dibujo. Son dificultades que han surgido porque al estudiante sólo se le presenta una única forma de representación y a partir de ella no se logra desprender la parte conceptual, por lo tanto no hay una apropiación conceptual de la geometría por parte del estudiante.

> Un ejemplo claro se puede ver en la *Geometría Analítica*. En efecto, allí se tiene una representación algebraica y una representación geométrica de un *mismo* referente (el objeto matemático) y se tiene también un mecanismo que permite transitar de uno a otro sistema de representación. En los casos en que sólo se tiene un sistema de representación, es prácticamente imposible desprender la "parte conceptual" de esa sola representación. Cada representación puede ser interpretada como un modelo del objeto matemático en cuestión. Solo que el acceso al objeto necesariamente pasa por la *integración* de los sistemas de representación (Fernández, 2011, p. 89)

Es así, como se sugiere el hecho de que el estudiante debe trabajar alrededor de varios sistemas de representación o como mínimo dos, como puede ser transitar de un sistema de representación algebraico a un sistema de representación geométrico y viceversa. Lograr el trabajo de estos sistemas de representación es significativo para potenciar el aprendizaje del estudiante en *Geometría Analítica*.

En general los aspectos que se pueden destacar de estas dos investigaciones es que presentan una aproximación contextual local de quienes han trabajo un problema parecido al que suscita interés en esta indagación, al respecto se mencionan los resultados generales que estas indagaciones muestran.

1.1.2 Resultados generales

Ambas investigaciones (Fernández, 2011; Quintero, 2010) revelan puntos importantes para esta indagación, entre ellos se destaca la importancia que brinda la integración de un AGD como Cabri Géomètre II Plus en el acompañamiento de los procesos de validación, procesos que se hallan como respaldo de los argumentos para la continuidad que puede existir entre la producción de una conjetura y producción de una demostración, debido a que el AGD se puede integrar como un *instrumento de mediación semiótica* potente en el aprendizaje de la geometría.

Las condiciones anteriores también son fortalecidas cuando se logre una complementariedad entre el método sintético y el métodos analítico, pues es reveladora de significado y comprensión para el estudiante en la medida en que el estudiante logre convertir las propiedades geométricas suscitadas por el método sintético a propiedades algebraicas respaldas por el método analítico debido a que puede resultar en una fuente que potencializa la comprensión en geometría y la demostración en la validación.

Teniendo presente los aportes encontrados en los trabajos investigativos anteriores, se da la entrada al planteamiento del problema, en el cual se pretende establecer qué se va a investigar y a resolver, y cómo se va hacer, esto significa estructurar el punto central alrededor del cual se teje esta indagación, para luego dar la entrada a los objetivos y a la justificación.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En los últimos años distintas investigaciones (Baccaglini-Frank, 2010; Boero, 1999; Mariotti, 2002, 2006) sugieren la continuidad que puede existir entre la producción de una conjetura y la de su demostración enmarcadas dentro de un contexto de Educación Matemática, es una cuestión que ha sido tratada haciendo uso del modelo de *Unidad Cognitiva* y la integración de AGD como Cabri Géomètre II Plus como *instrumento de mediación semiótica* (Teoría de la *Mediación Semiótica*), en estas aproximaciones se revela como el desarrollo de una conjetura puede ser beneficioso para una posterior prueba.

En esta indagación interesa trabajar la demostración en la *Geometría Analítica* para identificar algunos elementos que permitan establecer la continuidad entre la producción de una conjetura y su demostración, a partir de considerar el modelo de *Unidad Cognitiva* y en reconocer la demostración como un elemento potente que contribuya en el aprendizaje de la *Geometría Analítica*; esta continuidad, se espera lograr con la integración de Cabri Géomètre II Plus como una *instrumento de mediación semiótica* cuyo *potencial semiótico* logra que los estudiantes vinculen los signos personales con los signos matemáticos, pues por un lado, la relación que presenta la herramienta con la actividad ocasiona la aparición de signos personales (que están vinculados con la validación empírica) y por otro lado, la relación de la herramienta con la cultura matemática, conlleva a la aparición de los signos matemáticos, pues la herramienta fue construida con base en la teoría que ha sido socialmente aceptada por la comunidad de matemáticos.

Po otro lado, el aprendizaje en *Geometría Analítica* ha generado controversia en dos sentidos, el primero apunta a que la *Geometría Analítica* es un proceso que se ha ido marginando poco a poco del aula escolar y el segundo problema tiene sus raíces en el aprendizaje, pues el estudiante es sometido a un trabajo rutinario que reviste una intención netamente algebraica y procedimental que no es significativa y productiva, carente de sentido para ellos (Velásquez, et al, 2007); como consecuencia de esto, los alumnos presentan dificultades cognitivas que se revelan porque tiene falencias de pasar de un sistema de representación a otro, de ahí la importancia de establecer un vínculo entre el método sintético y el analítico, porque la continuidad de estos dos métodos puede proveer una mejor comprensión del conocimiento geométrico (Fernández, 2011).

Bajo estas consideraciones se puede entender cómo la demostración en *Geométrica Analítica* puede ser potente en el aprendizaje de la misma y por ello, es que se da paso a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo podemos usar el paso de la conjetura a la demostración en el aprendizaje de la Geometría Analítica, mediante el método analítico-sintético en la circunferencia, en el contexto de la educación media?

El interés se enmarca dentro de la posibilidad de reconocer la continuidad entre la conjetura y la demostración que le permita a los estudiantes aprender conocimiento geométrico, para ello se han diseñado actividades que contemplan *problemas abiertos* integrando un AGD como Cabri Géomètre II Plus como *instrumento de mediación semiótica*, que permite potencializar las actividades heurísticas y poder analizar las producciones de los estudiantes cuando se ven enfrentados a solucionar dichos problemas; estas actividades se establecen dentro de la posibilidad de reconocer la relación y continuidad entre los métodos sintéticos y analíticos de la circunferencia.

Se pretende realizar un seguimiento a las producciones orales y escritas de los estudiantes que surjan en la solución de las actividades con la integración del AGD, para ello se dispuso como dispositivo recolector la *Etnografía* y su relación con la investigación cualitativa, que permita reconocer factores asociados característicos para el proceso de la demostración; y con ello reconocer tanto variables de análisis presupuestas como emergentes al propio diseño que se propone introducir en la secuencia de enseñanza para este caso *ciclo didáctico*.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

- ✓ Caracterizar la continuidad cognitiva en el paso de la conjetura a la demostración, en el aprendizaje de la *Geometría Analítica* a través del método analítico y sintético en la circunferencia, dentro del contexto de la educación media.

1.3.2 Objetivos Específicos

- ✓ Determinar algunos aspectos fundamentales que permitan reconocer la forma cómo el modelo de *Unidad Cognitiva* posibilita la continuidad en el paso de la conjetura a la demostración.

- ✓ Reconocer características necesarias de una propuesta que integre un AGD como instrumento de mediación semiótica en la solución de *problemas abiertos* que involucre la producción de conjeturas y demostraciones con la circunferencia.

- ✓ Establecer algunos componentes que permitan identificar la relación entre los métodos sintético y analítico para el aprendizaje de la geometría en la producción de conjeturas y demostraciones.

1.4. JUSTIFICACIÓN

Dentro de la Educación Matemática se ha visto la necesidad de reflexionar alrededor de la demostración, múltiples investigaciones (Baccaglini-Frank, 2010; Boero, 1999; Hanna, 2000 & Mariotti, 2002, 2006) así lo avalan. En esta indagación ha sido de interés trabajar en la demostración de la *Geometría Analítica*, pues presenta preocupación en dos sentidos; el primer sentido se relaciona con que la demostración en la *Geometría Analítica* se ha ido poco a poco marginado de la escuela, y el segundo está orientado en el aprendizaje de la *Geometría Analítica*, pues el estudiante es sometido a un trabajo rutinario, seguido de memorización de contenidos, reglas y fórmulas que no son significativas para el aprendizaje del estudiante, porque prevalecen los contenidos desde un punto de vista algebraico, sin tener en cuenta la formación de estrategias y procesos (Fernández, 2011; Velásquez, 2007).

Otra cuestión importante que atañe nuestra atención, es el hecho de que nosotros somos docentes en formación, y por ello creemos que vale la pena repensar el trabajo que realiza el estudiante alrededor de la demostración en Geometría Analítica, que lleve a tomar conciencia acerca de la manera como se abordan los conceptos geométricos en la escuela, no cabe duda que preocupa la falta de un trabajo consiente y significativo en el estudiante, que potencie el aprendizaje en él.

Aunque la preocupación de esta indagación no está encaminada a cuestionar la enseñanza de la *Geometría Analítica*, si interesan las consecuencias que son producto de ella, porque cuando en la formación del estudiante prevalecen los contenidos netamente algebraicos, se empieza a evidenciar que los estudiantes no logran encontrar la relación existente entre la representación algebraica (de un mismo objeto matemático) y su respectiva figura geométrica y viceversa, llevando consigo a problemas de representación semiótica (Duval, 1999).

Debido a esto, se ha querido sentar precedente alrededor de la demostración en la *Geometría Analítica*, para que el estudiante pueda generar la continuidad entre la producción de una conjetura y su demostración, llevando esto a un beneficio de aprendizaje geométrico.

En los últimos tiempos, la demostración ha estado en constante reflexión y análisis con el objetivo de examinar la construcción de significados que genera el estudiante cuando se enfrenta a una demostración; es así, como interesa para esta indagación aquellos trabajos que han hecho aportes alrededor de los procesos cognitivos que surgen cuando el estudiante resuelve una demostración. Para ello, se observó algunos investigaciones resultados del *congreso internacional del ICMI study 19 (2009, 2012): Proof and Proving in Mathematics Education*, en el cual se muestran las tendencias que han surgido en torno al estudio de la demostración y la importancia de abordar este tipo de indagaciones dentro de las reflexiones que surjan alrededor del aprendizaje en la educación matemática.

Entre las investigaciones encontradas en el ICMI, la investigación denominada *Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs* (2012), la cual centra la tensión dinámica entre lo empírico y la naturaleza teórica de la matemática. El objetivo es subrayar los elementos de continuidad histórica existentes entre la naturaleza empírica de la matemática, y mostrar que esta naturaleza empírica ofrece posibilidades concretas para que el docente pueda continuar el aprendizaje de la demostración en el salón de clases, es decir que se vislumbra un nuevo horizonte en el que se hace uso de las herramientas computacionales. A partir de este documento se rescata el abordaje de la demostración a través de las herramientas computacionales, para el interés de esta indagación se trata de la integración de Cabri Géomètre II Plus, para ello es fundamental relacionar los argumentos que los estudiantes adquieren de forma empírica con la teoría, en la medida que lo anterior apunte a la producción de la demostración.

Otra de las investigaciones encontradas se denomina, *Analysis of Mathematical proofs: some questions and first answers* (2009), en ella se elabora un análisis de la demostración teniendo presente las siguientes tres funciones principales: la función de analizar la comprobación de su validez, la función de comprender y entender la estrategia de demostración del autor, y finalmente, la función de analizar la apropiación que presenta la demostración en el campo matemático. Esta investigación también sugiere que el proceso de demostrar no sólo incluye la actividad que lleva a la demostración, sino que también incluye la escritura de la demostración misma. Por lo tanto, la hipótesis principal radica en que si el profesor desarrolla la competencia de analizar y anticipar las demostraciones, estaría en la capacidad de ayudar a los estudiantes a superar las dificultades que presentan cuando se enfrentan a solucionar una demostración (Guerrier-Durand & Arsac, 2009). Trabajar la demostración a partir de las funciones de validez, comprensión y de pertinencia en el campo matemático, permite que el estudiante reconozca cuáles son las funciones que existen detrás de una demostración y este reconocimiento le guiará de una mejor manera a la producción de una demostración, en la medida en que el estudiante es más consciente y participe en la escritura de la demostración.

Otras investigaciones (Douek, 2009; Leung, 2009) del ICMI revelaron cómo a través de actividades de conjeturas, construcciones de demostraciones guiadas y el repaso histórico de los pasos que guían la construcción de la demostración, permite que los estudiantes den cuenta de la necesidad de demostrar, todo esto en la medida en que también se generen discusiones en el aula que conlleven a los estudiantes a encontrar razones para validar un enunciado. Por ejemplo, el debatir un enunciado puede acercar a los estudiantes a entender que la producción de un ejemplo puede ser un paso eficaz en la fase exploratoria, pero no es un argumento válido cuando se desea organizar la justificación matemática de una manera general. Todo esto puede conducir al estudiante a entender que algunos registros semióticos son cruciales para la exploración, pero son insuficientes para producir una argumentación adecuada (Douek, 2009). Esto es revelador para el estudiante, pues logra conocer lo complejo que es la producción de argumentos, sus posibles relaciones jerárquicas y su papel en la construcción lógica de la prueba; comprender cuáles son las razones que permiten aproximarse a la construcción de una prueba, son de vital importancia para que el estudiante perciba la necesidad de demostrar y no se quede sólo con la validación empírica que brinda el AGD, todo esto se puede lograr en la medida en que las soluciones de las actividades propuestas en esta indagación sean socializadas, buscando no sólo que los estudiantes argumenten y justifiquen, sino también que el estudiante se apropie de sus respuestas individuales y colectivas, cuando este transite de un significado personal a un significado matemático.

A partir de las investigaciones mostradas en el ICMI (2009, 2012), se muestra la importancia de cuestionar los procesos de aprendizaje del estudiante, cuando este se enfrenta a la solución de una demostración, resaltando con ello el interés existente en la comunidad de la educación matemática por estudiar el aprendizaje de la demostración. Tal interés se refleja en la necesidad de no olvidar la importancia que tiene la demostración en el aula escolar, pues la demostración se relaciona con la formación y la comprensión de la matemática en términos de: argumentar, razonar, proponer, justificar e incluso participar de debates que fortalezcan las capacidades cognitivas del estudiante, en la medida en que él se haga responsable de su propio aprendizaje. Proponer el acercamiento a la demostración por medio de un AGD, hace más dinámico y motivador el aprendizaje del estudiante, así que la comprensión de la demostración se alcanza de una manera más creativa, amena, heurística y enriquecedora, es así que surge la aparición de un sentido preponderante de demostración para el estudiante.

Por otra parte, se hizo un análisis de los resultados obtenidos en las evaluaciones internacionales TIMSS realizadas en el año 2007, la cual "tiene como propósito principal proveer información para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las ciencias, fundamentales para desarrollar competencias relacionadas con la solución de problemas y el razonamiento riguroso y crítico." (Ministerio de Educación Nacional, 2010 p. 21), son evaluaciones estandarizadas que permiten evidenciar el estado de los estudiantes con relación a contenidos y las competencias anteriormente enunciadas, que permiten tomar conciencia sobre decisiones concretas para estrategias de mejoramiento.

Aunque el interés en esta indagación no se relaciona con determinar programas y nuevas políticas que impacten el mejoramiento de la educación y de su enseñanza, son pertinentes este tipo de resultados debido a que se supone que la educación es abierta, incluyente en donde se desea que todos los estudiantes aprendan, por lo cual evidenciar el desempeño de Colombia frente a otros países hace suponer fortalezas o debilidades que haya en el sistema educativo relacionado con el aprendizaje.

Las evaluaciones internacionales TIMSS se hacen cada cuatro años a los estudiantes de grado cuarto y octavo, en las cuales se evalúan por *dominio de contenido* que comprenden: numérico, algebraico, geométrico y datos probabilísticos; y por *dominios cognitivos*: conocer, aplicar y razonar. Para interés de esta indagación la *demostración en Geometría Analítica*, se centró la reflexión con relación al dominio de contenido en el geométrico y en el algebraico, y en el dominio cognitivo en razonar en el cual incluye la capacidad de pensamiento lógico y sistemático en situaciones nuevas y contexto complejo, igualmente se consideró el razonamiento intuitivo e inductivo para los problemas que incluyen regularidades (Ministerio de Educación Nacional, 2010).

Los resultados que arrojaron los desempeños de los estudiantes colombianos del grado octavo en el dominio de contenido geométrico corresponden a un promedio de 371 puntos versus al promedio TIMSS en matemáticas que es de 500; por otro lado, en álgebra corresponde a un promedio de 390 muy por debajo de promedio TIMSS en este contenido, estos resultados sugieren posibles dificultades para resolver problemas que incluyan estos contenido y particularmente tópicos como “patrones, expresiones algebraicas, ecuaciones, fórmulas y funciones, conocimiento y uso de formas geométricas, medición geométrica, ubicación de puntos en un plano cartesiano a través de pares ordenados, movimientos de figuras geométricas” (Ministerio de Educación Nacional, 2010, p. 50); en comparación con el desempeño en otros lugares, Colombia fue muy inferior a ciudades como Taipéi en China que tiene un promedio en esos contenidos correspondiente a 592 y 617 respectivamente.

En cuanto al promedio en el dominio cognitivo: razonar tiene un promedio de 416 en Colombia, lo cual también es significativamente inferior con respecto al promedio de TIMSS (promedio es de 500); lo que significa que el nivel en Colombia con relación al promedio de TIMSS en el dominio cognitivo para razonar es relativamente inferior en comparación con otros lugares que obtuvieron un promedio correspondiente a 579 en países como Singapur y 557 en ciudades como Hong Kong en China; esto sugiere que los estudiantes presentan dificultades en la resolución de problemas matemáticos rutinarios y no rutinarios, y en el proceso de razonamiento, las capacidades de los estudiantes para analizar, indagar, resolver problemas y justificar determinados planteamientos, representan dificultades para los estudiantes.

Las evaluaciones internacionales TIMSS, permiten conocer los promedios de los resultados de los estudiantes en los contenidos y el dominio cognitivo en grado octavo, aunque *Geometría Analítica* corresponde a un contenido que se enseña en grado décimo interesa el desempeño de los estudiantes en grados anteriores para saber cuáles son las herramientas conceptuales y procedimentales que tienen para afrontar distintos problemas rutinarios y no rutinarios en grados posteriores¸ concretamente estos resultados permiten:

> Establecer relaciones entre los resultados de los estudiantes y las características de los sistemas educativos nacionales, así como entre éstos y las diversas variables escolares y extraescolares que afectan dichos resultados. Estos hallazgos son fundamentales para identificar aquellos contextos en los cuales los estudiantes aprenden mejor (Ministerio de Educación Nacional, 2010 p. 25)

De esta manera, se puede sugerir que estos resultados muestran por un lado como es la diferencia de desempeño entre los estudiantes occidentales y orientales, de los cual algunos documentos (J. Laborde & C. Laborde, Con las nuevas tecnologías, los niños mismos reconstruyen los conocimientos matemáticos, 9 de Agosto de 2012) sugieren que se debe a la filosofía de enseñanza debido a que los estudiantes orientales tienen una formación de trabajar, practicar y hacer lo que el docente siempre les pide opuesta a la de los estudiantes occidentales, además que el nivel social de los docentes es más alta de manera tal que les confieren un reconocimiento especial por su labor y un mayor estatus.

Por otro lado, estos resultados también pueden ser tomadas como reflexión para resaltar la importancia de fortalecer tanto la comprensión en geometría y álgebra, como la de trabajar sobre el desarrollo del proceso de razonamiento en los estudiantes; estos elementos dependen de un trabajo significativo que realice el estudiante en la solución de problemas, al tener presente la demostración y buscando que esta sea significativa y potenciadora de conocimiento geométrico en el estudiante.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

En el desarrollo del marco teórico se pretende ofrecer aproximaciones conceptuales que permitan hacer un análisis y dar respuesta al problema de indagación, para ello se muestran dos enfoques teóricos que se complementan; por un lado, la *teoría de la Unidad Cognitiva* que reviste un modelo de continuidad cognitiva entre el proceso de producción de conjeturas y el proceso de producción de una demostración, permitiendo analizar e interpretar esta relación, haciendo uso de ciertas actividades que involucren la solución de *problemas abiertos* para potencializar dicho proceso; por otro lado, *la teoría de la mediación semiótica* que nos permite usar los artefactos culturales como mediadores semióticos, en este caso es el programa Cabri Géomètre II Plus que permite aprovechar las potencialidades semióticas de integrar un instrumento como mediador.

De igual forma, este proceso de producción de conjeturas y su respectiva demostración, debe estar relacionado con una teoría, al respecto, el conocimiento particular es la *Geometría Analítica* especialmente el objeto geométrico circunferencia; para ello, se hace un abordaje histórico de los acontecimientos más importantes que permitieron el surgimiento de la *Geometría Analítica*, que permita reconocer la continuidad entre la geometría euclidiana y la geometría cartesiana en términos de una nueva interpretación por parte de Descartes a *Los Elementos* de Euclides, esto permite considerar una posible relación entre los métodos de solución característicos de cada geometría que abre la posibilidad de reconocer una continuidad y complementariedad en sus trabajos para poder ser explorados en la solución *de problemas abiertos* en *Geometría Analítica*.

Además, se han documentado a partir de distintas investigaciones las dificultades que hay en torno del aprendizaje de la *Geometría Analítica*, sobretodo interesan las dificultades de los estudiantes a nivel cognitivo: por un lado, la deficiencia en la conversión entre los distintos registros de representación semiótica, como el algebraico, gráfico y verbal.

2.1 ELEMENTOS PARA EL DISCURSO EN LA DEMOSTRACIÓN

Distintas investigaciones en el campo de la educación matemática señalan que el aprendizaje y la enseñanza de la demostración (Hanna, 2000; Mariotti, 2002, 2006; Quintero, 2010) tiene dificultades; dentro de estas discusiones se tienen tres líneas de investigación (Mariotti, 2006): la primera, de corte institucional, en la cual se pretende indagar cuál es el estado de la demostración en la escuela, la segunda corresponde a las dificultades que tienen los estudiantes frente a la producción de demostraciones y la tercera sobre las distintas intervenciones de enseñanza que permiten superar las dificultades que tienen los estudiantes con relación a la producción de demostraciones.

Se ha mostrado que la experiencia en el aula con la demostración suele presentarse como ilusoria porque se transforma en varios ejemplos que sirven para ilustrar la regla o el teorema, es así como la experiencia con la demostración se convierte en un producto o resultado (Hanna, 2000; Joshua & Dupin, 2005; Mariotti, 2006) y no como la construcción de un proceso que entra a depender de los discursos y las producciones generadas por los estudiantes (Mariotti, 2006).

En este sentido, en esta indagación se pretende encausar la discusión en torno a la segunda línea de investigación que comprende las dificultades y distintas formas de proceder de los estudiantes, para ello conceptos como demostración, conjetura y argumentación deben ser claros para saber en qué estado se encuentran los procesos de los estudiantes.

2.1.1 Demostración[4] y Teorema matemático

Al hablar en un sentido estrictamente matemático la demostración se constituye en un componente principal dentro de la significación de un teorema y tiene sentido es en el momento en que se hace referencia a una teoría, un teorema matemático se asocia con la demostración en términos de la relación que se hace entre un sistema de declaraciones o enunciados, su demostración y la teoría matemática que lo sustenta (Mariotti, 2006); la demostración permite garantizar la relación entre el enunciado y la teoría matemática en la

[4]La demostración es un tipo particular de argumentación en matemáticas, se va a entender como el producto terminado; y la prueba como el proceso que se hace para llegar a construir una demostración.

cual está involucrado, que permita así, dar continuidad al establecimiento del teorema matemático.

2.1.2 Demostración y Argumentación

Dentro de esta indagación, el concepto de demostración se va a entender de una forma más amplia, en el que distintas formas de pensar se pueden describir y clasificar como demostración (Mariotti, 2006); es así como la demostración es un tipo particular de argumentación en matemáticas (Baccaglini-Frank, 2010; Pedemonte, 2007), debido a que se puede comparar la demostración y la argumentación en términos de dos caracterizaciones distintas y complementarias, por un lado, desde una *caracterización funcional* en la cual la argumentación se relaciona con la demostración en términos de finalidad, uso y función dentro de un discurso (Pedemonte, 2007) y por otro lado, en términos de una *caracterización estructural* de la argumentación (Pedemonte, 2007) en donde se relaciona la argumentación con la demostración en términos de estructuración lógica entre los enunciados.

2.1.3 Conjetura y Argumentación

De forma similar y en el mismo plano, conjetura se va a concebir como una tripleta entre un enunciado, un argumento y un sistema de concepciones (Pedemonte, 2007), en donde el sistema de concepciones y la argumentación se constituyen en focos para su producción.

En esta medida la forma como se relacione la argumentación con la conjetura se puede entender en dos sentidos (Pedemonte, 2007) en el caso en que sea una *argumentación constructivista*, en la cual ayuda a construir la conjetura y precede al enunciado; por otro lado, *argumentación estructurante*, en la cual justifica la conjetura y es después del enunciado. En continuidad podemos entonces definir a la argumentación como el proceso que condujo al desarrollo de la conjetura (Baccaglini-Frank, 2010; Pedemonte, 2007).

Al identificar la posición sobre este tipo de nociones admite por un lado sentar postura investigativa, y por el otro, poder darle una continuidad a la caracterización de algunos elementos que ayuden a reconocer la posible continuidad cognitiva para el paso de la conjetura a la demostración, de tal manera que permita potencializar el aprendizaje de la

Geometría Analítica dentro de los métodos analíticos y sintéticos al objeto geométrico circunferencia; para este objetivo, se hace necesario contextualizar la demostración en la escuela como proceso, de tal manera que se puedan identificar las funciones principales y con ellos las subsecuentes dificultades que tienen los estudiantes para producir una demostración y conseguir el aprendizaje, no solo del proceso demostrativo sino del contenido geométrico en el cual se desarrolla.

2.2 CONTEXTUALIZACIÓN DE LA DEMOSTRACIÓN EN LA ESCUELA

Dentro de la contextualización de la demostración en la escuela se pretende manejar dos supuestos que permitan la experimentación del proceso demostrativo: por un lado, se quiere poner de manifiesto la potencialidad que tiene el proceso demostrativo como un posible detonante en la internalización de conocimientos geométricos (Hanna, 2000) y por otro la noción de *Unidad Cognitiva* que posibilita la continuidad entre el proceso de construcción de una conjetura y su respectiva prueba.

2.2.1 Funciones de la demostración

Dentro de los procesos que potencializan la comprensión en matemáticas, el uso de la demostración parece ser uno de ellos (Hanna, 2000): es importante destacar el rol preponderante que se le asocia como estímulo y promotor de la comprensión[5] en matemáticas, y es en esta vía en donde se debe encontrar la forma de incentivar el proceso de la demostración en la escuela, como lo plantea Hanna (2010) “en el aula el papel clave de la demostración es la promoción de la comprensión matemática, y por lo tanto nuestro reto más importante es encontrar formas más eficaces de utilizar la demostración para este fin.[6]"

En este sentido, la demostración debe adquirir un nuevo enfoque dentro del aprendizaje que permita encontrar caminos más acertados en su acción en la escuela, es así que cuando el estudiante se ve enfrentado a una demostración es importante que él aprenda a ver no solo la verdad del enunciado, sino también las razones del por qué, Hanna (2000) lo plantea en esta vía:

[5] Comprensión se va a entender en términos de internalización, véase en la sección 2.4 Teoría de Mediación semiótica, página 40.
[6]Versión libre de la traducción del documento.

> Esto significa que la mejor demostración es una que ayude a comprender el significado del teorema que está siendo demostrado: a ver no sólo que es cierto, sino también por qué es así. Por supuesto que tal demostración es más convincente y más propensa a conducir a nuevos descubrimientos. (Hanna, G. 2001, p. 4).

Dentro de estas características se pueden identificar las distintas funciones (Hanna, 2000; Mariotti, 2002, 2006) que tiene la demostración; estas corresponden a la verificación, exploración, sistematización, descubrimiento y construcción, que se evidencian dependiendo del uso que se quiera hacer. No obstante, dentro de la enseñanza escolar las funciones significativas corresponden a *la función de aceptación y la función de explicación* (Hanna, 2000) que se le asocian a la demostración:

- ♣ *Función de aceptación:* relacionada con la verdad de la proposición, se reconoce como lo aceptable ante la comunidad matemática, lo cual exige una validación matemática basada en un marco teórico. (Hana, 2000; Mariotti, 2006)
- ♣ *Función de explicación:* relacionada con el por qué es verdad la proposición, contempla la comprensión que se tenga de la demostración a nivel semántico. (Hana, 2000; Mariotti, 2006)

Es necesario que estas dos funciones de la demostración, se hagan evidentes en el salón de clases y los estudiantes sean conscientes de este carácter explicativo y de aceptación para no seguir concibiendo la demostración de manera esquemática y reproductiva, y más como un proceso en pro de la comprensión en las matemáticas.

Estas mismas investigaciones (Hanna, 2000; Mariotti, 2002, 2006) señalan que los estudiantes presentan serias dificultades que se relacionan con dos de las funciones de la demostración que pueden ser exploradas en el aula, dentro del proceso de producción de demostraciones.

2.2.2 Dificultades de los estudiantes en la producción de la demostración

Dentro de las dificultades asociadas a la producción de una demostración por parte de los estudiantes, se reconocen como fundamentales las relacionadas con la falta de conciencia de las funciones de la demostración dentro de la escuela que representan el quehacer matemático.

Surgen entonces las dificultades relacionadas con la *función de aceptación*, que corresponde a la confusión entre *la validación matemática*[7] y *la validación empírica*[8] (Mariotti, 2006), el conflicto en el reconocimiento de un marco teórico bajo el cual debe ser construida la demostración en relación con la experiencia empírica de los hechos, de esta forma lo explica Mariotti (2006).

> La dificultad surge del control de la compleja relación entre la validación matemática, basada en el marco de un sistema teórico y la validación del sentido común, basada en la verificación empírica (hechos frente a las consecuencias lógicas). No sólo los alumnos más jóvenes, sino también a los estudiantes de la escuela secundaria y la universidad no parecen ser capaces de dar respuestas adecuadas matemáticamente. (Mariotti, 2006, p. 179)

La siguiente dificultad que se encuentra en la misma vía y se constituye en un problema fundamental, corresponde a la falta de flexibilidad entre las dos funciones de la demostración en el aula, la *función de explicación* y la *función de aceptación*, lograr identificar las relaciones de manera consciente entre una función de la demostración y la otra, representa un verdadero reto para el estudiante, comprender que puede pasar de un nivel intuitivo en donde la verdad está en términos de la significación de los enunciados que constituyen la demostración y que en consecuencia debe comenzar a construir relaciones lógicas que le permitan validar la cadena de enunciados en términos formales (Mariotti, 2002), constituyen en la dificultad principal que existe en la producción de una demostración por parte de los estudiantes.

Para hacer menos evidente esta diferencia se han propuesto distintos modelos que permitan superar la dificultades en el aprendizaje de la demostración; uno de ellos constituye el modelo de *Unidad Cognitiva* que permite integrar los procesos de razonamiento matemático usados en la producción de conjeturas hacia la producción de demostraciones; es así como empieza a tener sentido establecer una continuidad entre el proceso de producir una conjetura y su demostración

2.3 ENFOQUE DE LA UNIDAD COGNITIVA

El modelo de *Unidad Cognitiva* permite analizar e interpretar las respectivas relaciones en la producción de una demostración en el campo de la educación matemática;

[7] Estructuración lógica de los enunciados bajo una teoría matemática establecida.
[8] Estructuración de los enunciados bajo hechos basados en el sentido común (creencias o percepciones).

al respecto, diversas investigaciones (Baccaglini-Frank, 2010; Bartolini Bussi & Mariotti 2008; Boero, 1999; Mariotti 2002, 2006; Pedemonte, 2007) sugieren la posible continuidad cognitiva que puede existir entre la conjetura y la demostración, para ello, aunque son conscientes de sus diferencias, les interesa centrarse en la continuidad de manera tal que se puedan utilizar los procesos argumentativos asociados a la producción de la conjetura en la producción de una demostración; de esta manera, la *Unidad Cognitiva* es usada como un modelo que permite interpretar y analizar la relación entre las producciones de conjeturas y de demostraciones (Baccaglini-Frank, 2010; Mariotti, 2002, 2006).

Estos estudios indican que la *actividad argumentativa*[9] en la producción de conjetura y demostración cobra un sentido decisivo para la continuidad, de manera que los argumentos que han sido usados para la justificación de la plausibilidad en la producción de los enunciados en la conjetura puedan ser usados en la producción de la demostración, de acuerdo a un modelo teórico lógico que los valide y estructuren. Esto lo indica claramente Baccaglini-Frank (2010) cuando cita:

> Durante la producción de la conjetura, el estudiante progresivamente resuelve su/sus declaraciones a través de una intensa *actividad argumentativa* funcionalmente entremezclada con la justificación de la plausibilidad de su/sus opciones: durante la etapa posterior de la prueba, los estudiantes vinculan su proceso con una forma coherente, organizando algunas de las justificaciones ("argumentos") producidos durante la construcción del enunciado de acuerdo con una cadena lógica. (Boero, Garuti y Mariotti, 1996 citado en Baccaglini-Frank, 2010, p. 3)

El modelo de la *Unidad Cognitiva* es considerado como un instrumento de análisis de la relación entre la generación de una conjetura y de una demostración, permite poner en evidencia las potencialidades de ciertas actividades con respecto a la iniciación de los estudiantes en la demostración (Mariotti, 2002). Estas actividades deben incluir la solución de *problemas abiertos* debido que su estructura y forma permite fomentar la generación de conjeturas por parte de los estudiantes (Baccaglini-Frank, 2010)

En la ilustración 1 se muestra como la teoría de la *Unidad Cognitiva* modela la continuidad entre la producción de una conjetura y la demostración, de tal forma que se evidencien cómo los elementos constitutivos de la conjetura evolucionan para convertirse

[9] Se va a entender como la acción discursiva oral o escrita en la que la argumentación es una justificación racional de un enunciado.

en la demostración, cómo progresa la validación y el lugar que ocupa los *problemas abiertos* en este enfoque teórico.

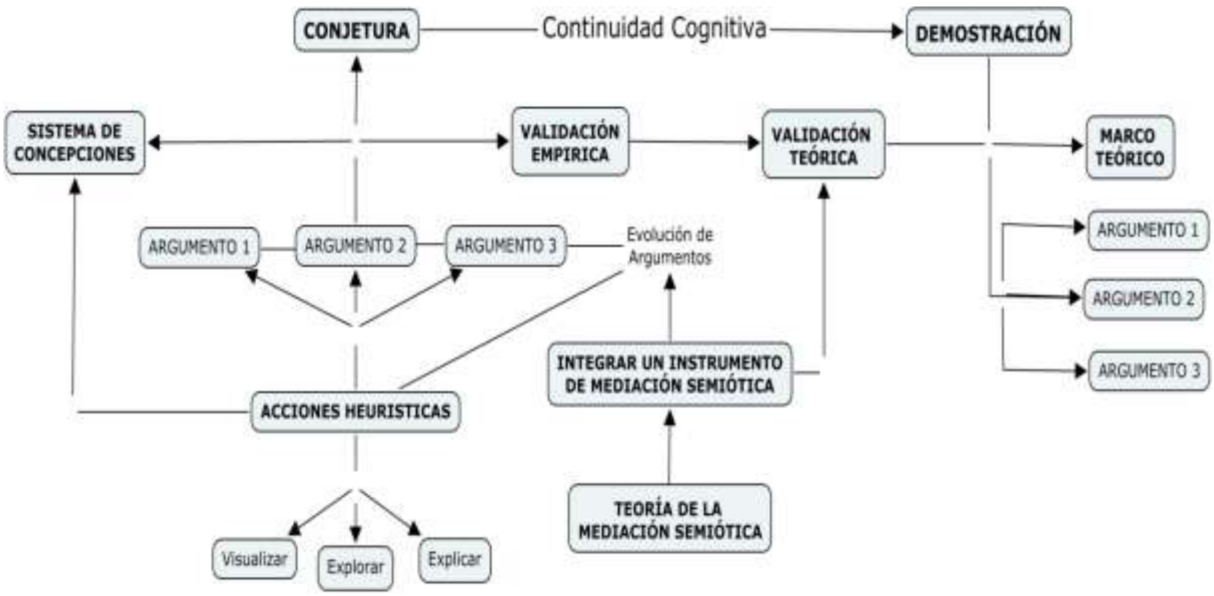


Ilustración 1 Elementos del enfoque de la *Unidad Cognitiva*

En los siguientes apartados se va hacer una descripción de las características de los *problemas abiertos* como actividades que incentivan la producción de conjeturas en el trabajo de solución por parte de los estudiantes.

2.3.1 Caracterización de *problemas abiertos*

Los *problemas abiertos* tienen como característica principal el hecho de que no revelan su solución al estudiante, de igual forma son enunciados cortos que tienen distintos métodos de solución (Baccaglini-Frank, 2010). En general se pueden describir como se presenta en la Tabla 1:

PROBLEMAS ABIERTOS	
Enunciado	Característica semántica: Es una simple descripción de un enunciado.
	Característica sintáctica: La instrucción es corta.
Proceso de solución	No sugiere ningún método de solución, ni la propia solución
Objetivo	Encontrar el hecho y las hipótesis que justifiquen dicho hecho.
Definición	Solicitud genérica para un enunciado sobre las relaciones entre los elementos de la configuración o propiedades de la configuración.
Preguntas como	¿La configuración se asume cuando…? ¿Qué relación se puede encontrar entre…? ¿Qué figura puede ser transformada en…?

Tabla 1 Caracterización de los *problemas abiertos*

Esta caracterización de los *problemas abiertos* permite hacer una relación con el modelo de la *Unidad Cognitiva*, que ayuda a reconocer la importancia didáctica de *problemas abiertos*, debido a que al no sugerir ningún método en la solución puede fomentar en el estudiante la curiosidad por encontrar la solución y darle un sentido propio a su proceso de argumentación bajo sus producciones individuales.

2.3.2 La relación de los *problemas abiertos* y el modelo de la UC

El estudiante al verse involucrado en la búsqueda de la solución a un *problema abierto*, desarrolla una compleja *actividad argumentativa* basada en acciones heurísticas y justificaciones de la verosimilitud de sus opciones, que le permiten producir una conjetura con respecto a un sistema de concepciones, al continuar con el proceso de justificación formal que se debe hacer en la producción de la demostración, el estudiante debe organizar los enlaces que han surgido de la generación de conjeturas sobre los elementos vinculados a un marco teórico que le permite construir declaraciones de acuerdo a una cadena lógica; al unir la actividad de producción de la conjetura con el de la teoría, esta acción proporciona un marco intelectual que favorece la continuidad entre la argumentación y la demostración (Mariotti, 2002).

Es importante que los distintos argumentos generados en la producción de conjeturas tengan como marco de referencia un sistema teórico que permite poder relacionar la demostración (Mariotti, 2002), este tipo de referencia constituyen en una dificultad para los estudiantes, porque encontrar los vínculos entre el sistema de concepciones con los cuales ha sido creado el enunciado de la conjetura con relación a un tema y los elementos teóricos que hacen parte de una construcción más formal, representa serias dificultades debido a que estos vínculos entre lo empírico y lo teórico no suelen ser evidente para los estudiantes.

Es por esto que los hechos empíricos que surgen con la experimentación dentro de la *actividad argumentativa*, requieren ser introducidos en un marco teórico, debido a que "**no hay demostración sin teoría**" (Mariotti, 2002, p. 137), para ello la noción de *instrumento de mediación semiótica* permite vincular de una manera más adecuada la experiencia y la teoría.

2.4 TEORÍA DE LA MEDIACIÓN SEMIÓTICA

Al ser el hombre un ser sociable por naturaleza y un producto social, la interacción que tiene con su entorno se constituye en un medio fundamental por el cual el ser humano desarrolla sus potencialidades cognitivas, esto desde una perspectiva socio-histórica cultural, como la de Lev Vigotsky, cobra vital importancia debido a que constituye toda una teoría del aprendizaje que es consciente del contexto sociocultural en el cual el sujeto está inmerso.

Desde este enfoque, el desarrollo cognitivo es consecuencia de la interacción entre el sujeto con lo social y cultural, e interpreta el funcionamiento cognitivo de los artefactos como elementos en el aprendizaje (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2009). Esto constituye para el sujeto en una experiencia netamente social que está dirigida por procesos semióticos porque, por un lado, con la integración de la noción de *Zona de Desarrollo Próximo* lo que se pretende es reconocer la práctica colaborativa en el aula de experiencias compartidas, que ayuden al sujeto a potencializar su desarrollo a través de la guía de alguien que posee más capacidades, y por otro, al tener en cuenta el proceso de *internalización* lo que se hace es reconocer como el sujeto aprende por medio de la transformación de los estímulos dados por las herramientas técnicas hacia los signos que se producen internamente.

Estas nociones permite reconocer el desarrollo de potencialidades cognitivas a través de la *mediación* de artefactos culturales que son experimentados por medio de signos o herramientas psicológicas que producen los estímulos artificiales (herramientas técnicas), que son internalizadas para convertirse en herramientas psicológicas que juegan un papel crucial en la *Zona de Desarrollo Próximo*. Es así, como se identifican dos tipos de herramientas, una que está orientada *externamente* denominada herramienta técnica, y otra orientada *internamente* llamada herramienta psicológica.

En la Tabla 2 se representan las características principales de cada tipo de herramienta.

	Herramienta técnica	*Herramienta psicológica*
Orientación	Externamente	Internamente
Característica	Permite la modificación del entorno o del medio ambiente.	Hace uso de la inteligencia y es un medio interno de control.
Función	Vivencial	Reflexiva

Ejemplo	Artefacto[10]	Signo[11]

Tabla 2 Características de las herramientas según TMS[12]

Dentro de este enfoque el uso de los artefactos culturales en la actividad humana constituye uno de los principales ejes (uso social de la herramienta dentro de la actividad), las herramientas técnicas (artefactos) son internalizadas para convertirse en signos, es esto lo que se constituye como mediador, en esta propuesta de indagación interesa la *mediación semiótica* que se conforma en un tipo particular de mediación, entre la herramienta y el signo, en donde los procesos semióticos son los que dirigen la resolución de una actividad, y además interesa hacer explícito, dentro del campo de la educación matemática, cómo este tipo de herramientas permiten mediar entre los sistemas de signos personales y el contenido matemático.

Una herramienta técnica se convierte en un *instrumento de mediación semiótica* cuando es usada por el docente con un intencionalidad didáctica a través de una actividad diseñada que permita mediar el contenido matemático, esto es mediar entre los signos personales y los signos matemáticos; para que los artefactos tengan este carácter, debe existir una intencionalidad explicita por parte del docente, del contenido matemático que desea mediar y de la intervención con la actividad que se quiere gestionar (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

2.4.1 Potencial semiótico del artefacto

Al considerar un artefacto como un *instrumento de mediación semiótica*, comprende dos relaciones importantes por analizar, por un lado, la relación de la herramienta con los signos personales, signos que surgen en la solución de una actividad por parte del estudiante y son *signos personales o contingentes*; y la relación de la herramienta con los signos matemáticos, *signos asociados a lo culturalmente aceptado* ante la comunidad de matemáticos, todo ello es reconocido como *potencial semiótico* del artefacto, el cual permite considerar los procesos semióticos asociados a la solución de la actividad y los signos culturalmente aceptados.

[10] Se entiende de la forma más general, como producto que ha sido diseñado y construido por el hombre. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008)
[11] Se entiende de la forma más general, como medio semióticos de objetivación. (Mariotti, 2009)
[12] TMS se entiende por teoría de mediación semiótica

La potencialidad está en reconocer esta polisemia del artefacto (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) porque es la que permite explorar su uso dentro del diseño y solución de la actividad, en la interacción de la clase, esto se puede evidenciar en la Ilustración 2.

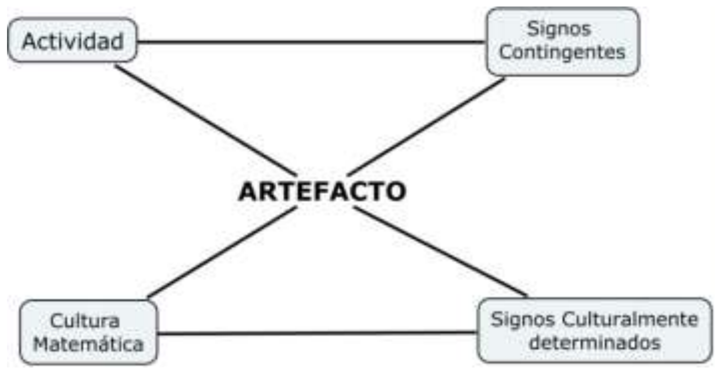


Ilustración 2 Polisemia del artefacto (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, p. 753)

Los estudiantes dan unos significados propios y tratan con la guía intencional del docente de acercarse a los significados matemáticos, en tanto que ellos produzcan significados personales, estos se pueden entender como argumentos que permiten ir construyendo la conjetura, esos significados son consecuencia de sus discursos que se van constituyendo en significados matemáticos que surgen de lo que es culturalmente aceptado, el mismo uso del artefacto como *instrumento de mediación semiótica* permite ir modificando los argumentos que son usados para la producción de la conjetura (los significados personales), en enunciados que estén coordinados con la teoría dentro del proceso de la demostración (significados matemáticos) y así poder reconocer la continuidad entre la producción de conjetura y la demostración. En la ilustración 3 se muestra las relaciones establecidas cuando una herramienta es integrada como *mediador semiótico*.

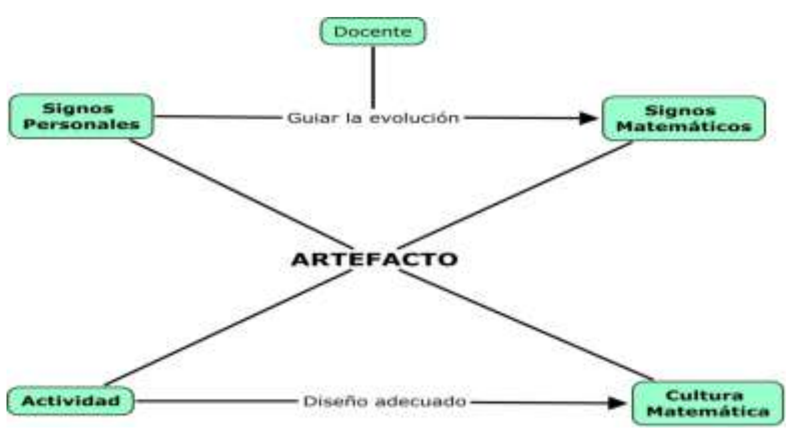


Ilustración 3 Elementos en la integración de un artefacto como Mediador Semiótico

Para tener una relación más explícita entre los dos enfoques teóricos que se han tratado hasta el momento, en la ilustración 4 se sugiere en qué punto intervienen el artefacto para hacer que evolucionen los argumentos usados en la producción de conjeturas que son entendidos como signos personales a argumentos que estructuran la producción de una demostración, que son denominados signos matemáticos como se muestra a continuación:

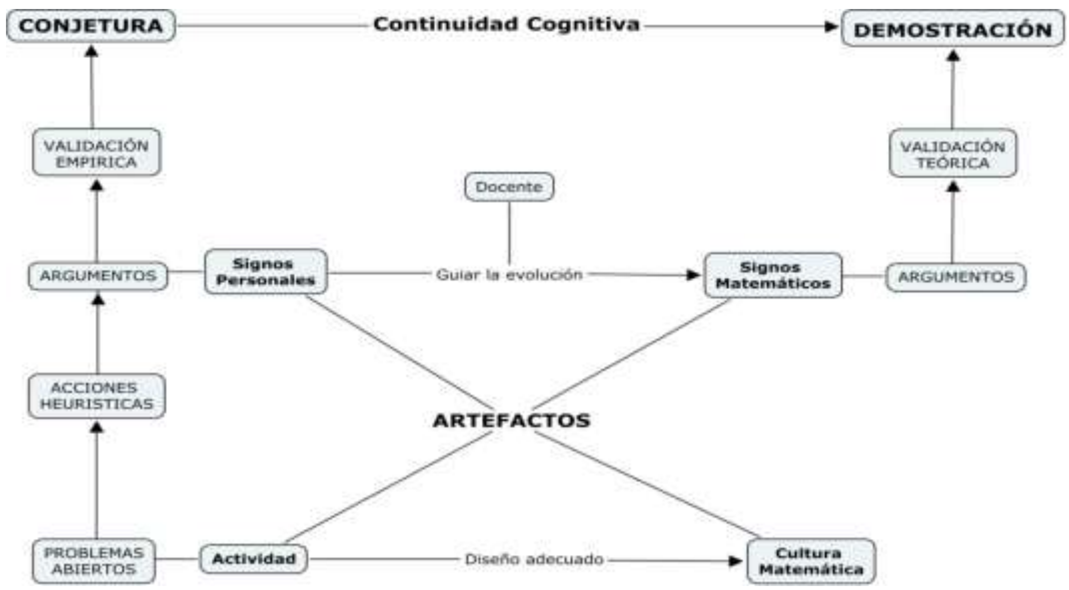


Ilustración 4 Relación entre la *Teoría de la Unidad Cognitiva* y la *Teoría de la Mediación semiótica.*

La relación entre la Teoría de la Unidad Cognitiva y la Teoría de la Mediación semiótica permite considerar.

2.4.2 El papel del docente

La característica principal al integrar un artefacto como *mediador semiótico* está dada porque existe en medio una intención didáctica por parte del docente, esto permite ayudar a crear significados dentro de la clase para que el estudiante aprenda un conocimiento matemático (Bartolini Bussi & Mariotti 2008; Mariotti 2009), el artefacto por sí solo no hace mucho, lo que se constituye ya en la mediación semiótica es cuando el docente le imprime una intencionalidad didáctica en medio de una cultura, es decir un uso social del artefacto que podría ser la clase de matemáticas.

El uso que le da el docente al artefacto se convierte en un uso social dentro de la clase y se empieza a ver que ese artefacto sirve para evocar conocimiento matemático en los estudiantes; de igual forma, el usuario le puede imprimir al artefacto diferentes intencionalidades, entonces los artefactos son utilizados por los estudiantes logrando transformarlo para el uso que se desee, en este caso se vuelve eficiente si es usado para la geometría.

Al considerar el *potencial semiótico del artefacto* y ser consciente de los procesos semióticos asociados, el docente puede guiar a los estudiantes a vincular los significados personales, que están asociados con el uso del artefacto en respuesta a las actividades, a los significados matemáticos que son reconocidos por el experto, así se reconoce también al docente como un mediador semiótico (Mariotti, 2009).

La forma de guiar a los estudiantes se hace dentro de una estructura de secuencia de enseñanza que permite considerar y explorar los procesos semióticos asociados a la integración de un artefacto como mediador semiótico, para ello se debe considerar una tipología de instancias que permite clasificar los momentos de las actividades, a saber *ciclo didáctico*, que en esta indagación se va a tener en cuenta como herramienta metodológica para organizar las distintas actividades que se les propongan a los estudiantes.

2.4.3 Ciclo didáctico

El *Ciclo didáctico* se reconoce como una estructura de la secuencia de enseñanza para guiar a los estudiantes (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) en el cual se tienen en cuenta tres momentos relacionados con la integración de distinto tipos de actividades: actividades con el artefacto, actividades que permitan la producción individual de signos y actividades que permitan la producción colectiva de signos, en las que el docente ayude al estudiante a transformar los significados personales asociados con la solución de la actividad a significados matemáticos asociados con la cultura matemática.

- ♣ *Actividades con los artefactos:* Se enfrentan a tareas que deben ser desarrolladas con el artefacto que permiten promover la aparición de signos específicos relacionados con el uso del artefacto y sus herramientas particulares.

- ♣ *Producción individual de signos*: en esta instancia los estudiantes se dedican de forma individual a actividades semióticas[13], sobre todo las relacionadas con la producción escrita sobre las experiencias y reflexiones que se han tenido en el

[13] Las actividades semióticas se dividen en dos tipos, dependiendo de las producciones que se pidan, *producción individual de signos* y *producción colectivas de signos*.

desarrollo de la actividad, aquí es importante destacar que se requiere una contribución personal por parte del estudiante y en consecuencia producir textos escritos y los signos gráficos, de tal forma que permita separarse de la contingencia de la acción situada. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008)

- *Producción colectiva de signos:* Este momento permite formular explícitamente el tema de discusión, en este caso se tienen en cuenta discusiones colectivas particulares, que se reconocen como discusiones matemáticas, en las cuales el maestro sugiere como núcleo director los procesos semióticos que van a permitir guiar el avance de los significados personales adquiridos a significados matemáticos; en esta instancia se evidencia el rol principal del profesor en la medida en que ayude a la evolución de los signos para convertirse en signos matemáticos, considerando las contribuciones de los estudiantes y explorando las potencialidades semióticas del artefacto.(Bartolini Bussi & Mariotti, 2008)

En la ilustración 5, se muestra las relaciones de las fases que constituyen el *ciclo didáctico* como eje organizador de la secuencia de enseñanza. En la siguiente sección se hace una descripción del contexto de la actividad en donde se muestra aspectos particulares relacionados con el *potencial semiótico del artefacto* escogido y el contenido matemático para ser mediado.

Ilustración 5 Caracterización del *Ciclo didáctico*

2.5 CONTEXTO DE LA ACTIVIDAD

Dentro de las consideraciones que se deben tener en cuenta para usar un artefacto como *mediador semiótico* se debe tener presente el tipo de artefacto y su *potencial semiótico*, de igual forma caracterizar el conocimiento geométrico que pretende ser mediado, esto con el fin que en el diseño metodológico de las actividades se reconozca el conocimiento geométrico y las potencialidades del AGD.

2.5.1 La Integración Del AGD Cabri Géomètre II Plus

Distintas investigaciones sugieren que la integración de Ambientes de Geometría dinámica, AGD, se constituyen en contextos de enseñanza potentes para solucionar problemas geométricos (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Hanna, 2000; Mariotti, 2006), que permiten contribuir al desarrollo del razonamiento geométrico y de igual manera a una cultura de la demostración.

Investigaciones como la de Hanna (2000) señalan que la integración de los AGD permite considerar dinámicas de exploración matemática distintas que dan un nuevo enfoque a las prácticas en el aula, porque llevan plantear y probar las conjetura de una forma más fácil.

Dentro de esta indagación, la integración del AGD Cabri Géomètre II Plus se va a reconocer como un *instrumento de mediación semiótica* (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Baccaglini- Frank, 2010; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2006, 2009), pues el uso de funciones que tiene este AGD tales como *primitivas, macros*, herramientas de exploración como el *arrastre*, pueden ser circunstancialmente aprovechadas por el docente de manera intencional para el desarrollo de significados personales, hacia significados matemáticos por parte del estudiante dentro de la solución de una actividad; la coordinación de las distintas funciones de este AGD hacen que se integre de esta forma particular y que puedan considerarse los procesos semióticos asociados a la evolución de significados.

2.5.1.1 Tipología de significados asociados al AGD Cabri Géomètre II plus

La tipología de signos asociados con la integración del AGD Cabri Géomètre II Plus como un *instrumento de mediación semiótica*, está relacionado con los significados personales que insinúa la idea de cómo emerge la dependencia del movimiento como una experiencia real que tenga el estudiante; por otro lado, los significados matemáticos que sugiere las ideas de dependencia lógica en una proposición matemática, la posible demostración en coordinación con la teoría (Mariotti, 2006).

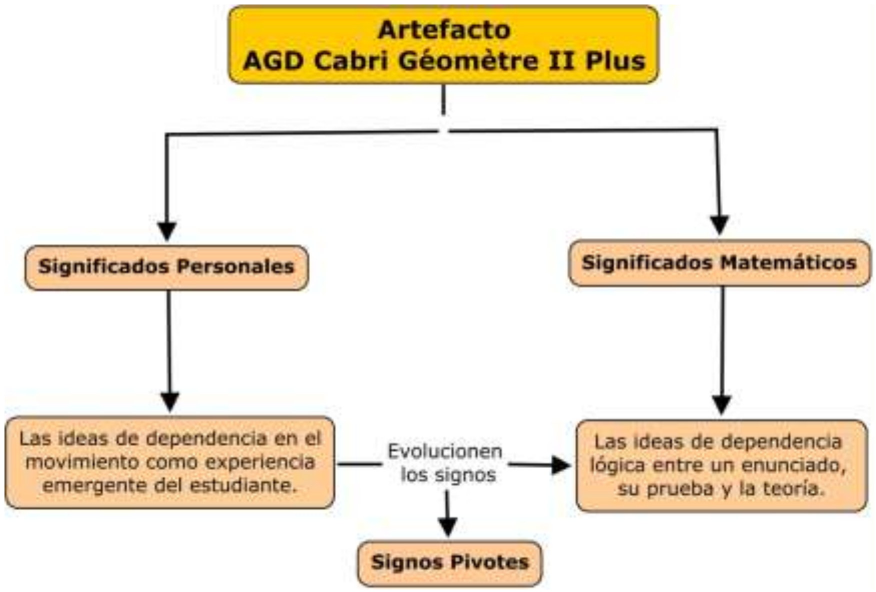


Ilustración 6 Tipología de signos en la integración de un AGD

Este tipo de significados asociados a la integración de *instrumentos como mediadores semióticos*, permite poner en relieve los procesos semióticos asociados a la solución de actividades cuando se integren este tipo de herramientas y la potencialidad que surge, la propiedad de dinamismo caracterizada como la función de *arrastre*.

2.5.1.2 Función de arrastre en el AGD

Investigaciones como la de Baccaglini-Frank & Mariotti (2010) sugieren que la práctica es relativa a la experiencia común (dibujo o cálculo), mientras que la teoría es relativa a la teoría geométrica incorporada en el software (Cabri Géomètre II Plus), y representada por los fenómenos observables en la pantalla y comandos disponibles. Estos fenómenos están sujetos al panorama que proporciona la modalidad *arrastre* que permite interpretar la exploración en términos de dependencia lógica, necesaria e importante dentro del trabajo que se hace con un AGD y sobretodo bajo el modelo de la *Unidad Cognitiva*. Con un AGD las figuras dejan su estado estático para convertirse en figuras exploradas de una manera dinámica por medio de la función *arrastre* (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010), este *arrastre* puede hacerse a través del ratón y a partir de este podemos generar dos movimientos distintos en las figuras, un movimiento directo y uno indirecto.

- *Movimiento directo:* hace alusión al movimiento de un punto base[14], el cual está sujeto directamente a la construcción de la figura, este se desplaza por medio del *arrastre* que se hace directamente sobre él a lo largo de la pantalla del ordenador. (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010)
- *Movimiento indirecto:* es el movimiento de un punto que depende del movimiento que realiza el punto base, aquí se relacionan dos movimientos al mismo tiempo. (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010)

Estos dos tipos de movimientos generan la consecuencia de una trayectoria[15] o un camino por parte del *arrastre* de un objeto; las características de un AGD desempeñan un papel importante en la generación de una demostración y ayudan a vincular la premisa con la conclusión de la conjetura de manera deductiva, aportando elementos para la prueba (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010); de esta manera la trayectoria y las propiedades geométricas que se pueden identificar con la función *arrastre*, desempeñan un papel importante en la producción de una demostración y su relación con la conjetura.

La función *arrastre* puede permitir interpretar la dependencia del movimiento en el AGD en términos de relaciones lógicas y así evidenciar la relación entre la premisa y la conclusión de la conjetura; el uso de la función *arrastre* del AGD es potente en este sentido, permite hallar una relación entre las propiedades geométricas que caracterizan a la figura y las que se pueden observar a través de la pantalla, "En otras palabras, el sujeto tiene que ser capaz de transformar los datos perceptuales en una relación condicional entre lo que será como la premisa y la conclusión de la declaración de una conjetura (Mariotti, 2006), una tarea que no es en absoluto trivial" (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010, p. 229).

Dentro de estas mismas investigaciones se ha hecho un análisis a las distintas modalidades de *arrastre* que tiene el AGD Cabri Géomètre II Plus para los estudiantes,

[14]Es un punto libre o semi-libre dentro de la tipología dada por Baccaglini Frank & Mariotti, (2010), la característica principal es que se deja arrastrar por cualquier lado de la pantalla o sobre el objeto que está asociado.

[15] Un conjunto continúo de puntos en el plano con la propiedad siguiente: cuando el arrastre del punto base coincide con cualquier punto de la trayectoria. (Baccaglini Frank & Mariotti, 2010)

porque podrían fomentar y enriquecer el proceso de vinculación entre la realización de una conjetura y su demostración.

2.5.1.3 Modalidades de arrastre

Las modalidades de *arrastre* corresponden a una tipología de la forma como la función *arrastre* es usada (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010), estas modalidades son significativas dentro de la solución de actividades en las cuales se pretende solucionar *problemas abiertos* relacionados con el contenido de *Geometría Analítica*, en particular la noción de circunferencia, debido a que las distintas modalidades de *arrastre* permiten explorar y visualizar distintas propiedades características de la circunferencia, logrando generar conjeturas; dentro de las modalidades de *arrastre* se encuentra el *arrastre* vago (wandering/random dragging), el *arrastre* mantenido (maintaining dragging), el *arrastre* con traza activa (dragging with trace activated) y el *arrastre* de prueba (dragging test) (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010).

- ♣ La modalidad de wandering/random dragging, es entendida como un *arrastre* al azar o de manera causal, es decir, mover un punto a lo largo de la pantalla buscando observar alguna regularidad, pero sin tener en consideración una idea concreta en mente.
- ♣ La modalidad *maintaining dragging* hace alusión a la realización de un *arrastre* continuo de un punto base, buscando evidenciar el mantenimiento probable de una cierta propiedad geométrica sobre una figura.
- ♣ La modalidad *dragging with trace activated*, da la posibilidad que un punto base sea arrastrado a lo largo de la pantalla del ordenador con traza activada[16].
- ♣ La modalidad *dragging test*, consiste en una prueba de *arrastre* que se hace a los puntos base de una figura, para ver si esta mantiene sus propiedades, es decir que esta modalidad de *arrastre* es la que da la posibilidad de probar la formulación de una conjetura, hacer una nueva construcción o redefinir un punto, a partir de comprobar que la figura bajo la modalidad de *arrastre* conserve sus propiedades (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010).

[16]Función de Cabri Géomètre II Plus que permite hacer visible la trayectoria de un objeto en sus desplazamientos a lo largo de la pantalla del ordenador.

Cada una de estas modalidades de *arrastre* están en función de apoyar el trabajo que se hace con los AGD en *problemas abiertos* de geometría, la exploración dinámica sobre este tipo de problemas puede ayudar a la creación de juicios temporales sobre propiedades que las figura mantengan y con ello la posibilidad de construir conjeturas basadas en esta exploración; estás modalidades de *arrastre* permiten hacer un seguimiento de los argumentos que han sido usados para la producción de la conjetura y los argumentos que permitan generar una demostración, como medios que sugieran la validación matemática de los resultados de los argumentos empíricos dadas en las exploraciones dinámicas.

El contenido geométrico que se pretende desarrollar en la solución de las actividades con *problemas abiertos* corresponde a la *Geometría Analítica*, en particular la circunferencia. A continuación se hace una descripción del desarrollo histórico y epistemológico de la *Geometría Analítica*, la relación entre el método sintético y analítico, las dificultades en el aprendizaje de la *Geometría Analítica*.

2.5.2 El Contenido: La *Geometría Analítica*

El desarrollo de la *Geometría Analítica* tiene sus inicios con René Descartes y contempla una nueva forma de interpretar la geometría euclidiana en términos no solo algebraicos, sino que su importancia reside en el reconocimiento de la diferencia entre magnitud y número, esta reflexión nos permite identificar elementos propios de su génesis para un tratamiento más adecuado dentro del diseño y desarrollo de las distintas actividades; para ello, se pretende realizar una reflexión del desarrollo histórico que permitió el surgimiento de la *Geometría Analítica*, la relación entre el método sintético y el método analítico que constituyen en una herramienta potente para su aprendizaje y las distintas dificultades en el aprendizaje de este conocimiento de corte cognitivo y didáctico.

Este abordaje se hace con el fin de situar la indagación dentro de una teoría matemática que permita a los signos matemáticos tener un campo de conocimiento específico como lo es la *Geometría Analítica* y poder reconocer las dificultades que los estudiantes tienen para su aprendizaje y cómo una visión más amplia en el desarrollo histórico de la *Geometría Analítica* nos puede permitir reconocer la complementariedad de lo que se reconoce como método sintético y método analítico como herramienta potente para su aprendizaje (Contreras, Contreras & García, 2002).

2.5.2.1 Aproximación histórica-epistemológica al desarrollo de la Geometría Analítica

En el desarrollo histórico de la *Geometría Analítica* se destaca como principal autor a René Descartes (1596 - 1650), dentro de sus obras más destacadas en matemáticas *la Géométrie* (1637) en la cual “uno de sus objetivos es el de extender los preceptos constructivos de modo que sean aceptadas en la geometría muchas de las "curvas mecánicas" excluidas de la geometría euclidiana.” (Álvarez, 2000, p. 16), no obstante, su objetivo se extiende más allá en términos de una nueva interpretación de *Los Elementos* de Euclides, que le imprimen una lectura algebraica a esta geometría (Álvarez, 2000).

Es confusa quizás esta interpretación del trabajo hecho por Descartes, considerando que en *Los Elementos* de Euclides hay una clara distinción entre las magnitudes geométricas y las magnitudes aritméticas, no por nada Euclides hace un tratamiento separado de cada una en sus libros, su obra “constituyen un conjunto hábilmente estructurado cuyo objetivo es el de proporcionar un tratado completo de las magnitudes geométricas y aritméticas.” (Álvarez, 2000, p. 19); Descartes por su parte intenta establecer hábilmente una integración entre estas dos distinciones hecha por Euclides.

> Descartes descubre un tratado que establece el fundamento de la tradicional división de las dos disciplinas clásicas de la matemática: aritmética y geometría, y también establece el tratamiento preciso para cada una de ellas. Pero Descartes encuentra también en este texto la clave que permitirá tratarlas, pese a su naturaleza distinta, bajo una nueva visión que hará posible su integración. (Álvarez, 2000, p. 18)

Dentro de los preconceptos que le permitieron a Descartes llegar a este tipo de resultados se encuentra los desarrollos elaborados por Viète quien descubre operaciones algebraicas que puedan tener un carácter puramente formal, para ello Viète define una *logística speciosa* que establece reglas para las cinco operaciones, “se trata ahora de definir primero las reglas de operación y de caracterizar a las cantidades que las satisfacen.” (Álvarez, 2000, p. 35).

Viète con esta *logística speciosa* que procede por medio de formas o elementos alfabéticos, estable las operaciones geométricas de forma explícita definida en los elementos de Euclides; es así como Viète crea “un sistema de álgebra simbólica basado únicamente en operaciones y en la homogeneidad” (Álvarez, 2000, p. 36); dejando de lado voluntariamente el carácter ontológico de los elementos que la conforman, permitiendo establecer operaciones más formales.

Sin embargo, al respecto Descartes establece un supuesto que hace darle un giro rotundo a la forma como se interpreta las operaciones algebraicas; para ellos sugiere que *"Todos los problemas geométricos pueden ser reducidos fácilmente a términos tales que no sea necesario posteriormente para construirlos sino conocer la longitud de algunas líneas*." (Álvarez, 2000, p. 36), esto significa que todas las magnitudes geométricas pueden ser representadas por segmentos, lo que permite hacer un tratamiento homogéneo a las magnitudes geométricas que antes eran tratadas de manera heterogéneas.

Esto es lo que constituye el objetivo cartesiano y, a su vez, la interpretación algebraica de la geometría "el estudio de las magnitudes continuas, es susceptible de un tratamiento unitario a través de una *forma* por medio de la cual todas ellas puedan ser representadas, haciendo posible así el manejo de una forma abstracta de la magnitud geométrica." (Álvarez, 2000, p. 37) la cual se constituye en el segmento.

No obstante, la justificación para incluir el álgebra en la solución de problemas geométricos todavía no está satisfecha con la implementación del segmento como representación de las magnitudes geométricas para la solución de las operaciones; para esta justificación Descartes usa el álgebra para la construcción de problemas, esto significa que las condiciones para resolver un problema están dadas por las raíces de las soluciones, esto lo reconoce Descartes en Viète por la posibilidad que le da el álgebra en reconocer las cantidades conocidas y desconocidas, poder relacionarlas de forma tal que permitan construir el problema y encontrar la forma de expresar en una misma cantidad de dos maneras, esto lo cita Álvarez (2000) claramente:

> Es la propiedad del álgebra incluir en una sola expresión tanto las cantidades conocidas como las cantidades desconocidas lo que permite, ante un problema geométrico, considerar todas las líneas o segmentos necesarios para su construcción, tanto a aquellas cuya longitud es conocida como a aquellas para las cuales es desconocida y a partir de este momento se debe recorrer la dificultad según el orden que muestra de la manera más natural cómo es que dependen unas de otras [las líneas o los segmentos que son necesarios para la construcción del problema] hasta encontrar el modo de expresar una misma cantidad de dos maneras. (Álvarez, 2000, p. 42-43)

Aunque Descartes reconoce el valor de las construcciones geométricas su interés se centra en la determinación y solución de las ecuaciones algebraicas que lo reducen; dentro de los problemas que se pueden identificar en las bases teóricas dadas por Descartes se pueden distinguir de dos tipos (Wussing, 1998):

- ♣ *Problemas determinados:* la resolución de ecuaciones algebraicas se hace por medio de una construcción geométrica, esto significa que se puede establecer tantas ecuaciones como líneas buscadas.
- ♣ *Problemas indeterminados:* Se traduce a la construcción de lugares geométricos, en este caso se tienen más ecuaciones que líneas buscadas.

Junto con este trabajo en los métodos analíticos y solución a los problemas, la teoría de cónicas se constituyen en bases conceptuales para el desarrollo de la *Geometría Analítica;* Apolonio y su libro de las *Cónicas* se estructuran como otra de las bases que usó Descartes para la construcción de su tratado *la Géométrie,* que se evidencian en la solución que le da al Problema de Pappus característico entre sus resultados.

En la misma época y de forma independiente Pierre de Fermat (1601 - 1665), con su pequeño tratado *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introducción a los Lugares Planos y Sólidos[17]), también presenta contribuciones para el posterior desarrollo de la *Geometría Analítica,* entre sus resultados se encuentra que su tratado fue mucho mejor sistematizado para el tratamiento a las cónicas (Wussing, 1998) que en la misma obra de Descartes; el objetivo de Fermat se centra en demostrar la identidad de un lugar geométrico definido por una ecuación algebraica con curvas ya conocidas, y para ello reconoce todas las curvas de segundo orden como cónicas (Wussing, 1998).

Tanto los trabajos de Descartes como los de Fermat tomaron, acompasadamente, los dos aspectos complementarios de la *Geometría Analítica*, estudiando ecuaciones a través del significado de las curvas y estudiando curvas definidas por ecuaciones; aunque no se puede hablar de una *Geometría Analítica* consolidada en esa época, no hay ninguna duda de que los aportes que hicieron Fermat y Descartes al desarrollo de ésta, fueron decisivos en la configuración y posterior evolución.

[17] Fermat adopta la terminología antigua en la cual lugares geométricos planos se refiere a rectas y círculo, lugares sólidos: parábola, hipérbola, elipse y lugares lineales: todas las demás líneas

Actualmente, dentro de los preconceptos que se reconocen, a saber: geometría elemental, trigonometría plana y álgebra constituyen en saberes claves para el aprendizaje (Lehman, 2000) por parte de los estudiantes de la *Geometría Analítica*; además, se concibe dos problemas fundamentales de la *Geometría Analítica*, que son características propias del trabajo en esta área:

1. Dada una ecuación hallar el lugar geométrico que la represente
2. Dado un lugar geométrico[18] definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

Estas características constituyen el quehacer en esta área, y se resumen a conversiones entre sistemas de representación semiótica desde una representación algebraica (ecuación) a una representación verbal (lugar geométrico), y viceversa (véase en la sección 2.5.2.3 D*ificultades en el aprendizaje en Geometría Analítica,* página 57*).*

Para el caso de esta indagación, el objeto de *Geometría Analítica* que se pretende desarrollar constituye la circunferencia, interesa por ser la segunda línea más familiar para los estudiantes que se conoce en los estudios dados en *Geometría Analítica* (Lehman, 2000) y una de las formas más familiares en su desarrollo; para este caso, la circunferencia se entiende como:

> El lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano. El punto fijo se llama centro de la circunferencia, y la distancia constante se llama radio. (Lehman, 2000, p. 99)

Dentro de los elementos que se van a desarrollar de la circunferencia están la cuerda, el diámetro, el radio, circunferencias tangentes internas, mediatrices de cuerdas, centro, constituyen en elementos que se pretenden incorporar dentro del aprendizaje de la circunferencia.

Sin embargo, la continua diferenciación que se ha hecho sobre el trabajo posterior en la geometría euclidiana y la *Geometría Analítica* hizo que en los modelos curriculares se trataran de forma separada y con objetivos de enseñanza completamente distintos; no obstante, varias investigaciones (Contreras, A. et al. 2002; Itzcovich, 2005)

---

[18]Lugar geométrico de una ecuación de dos variables es una línea recta o curva, que contiene todos los puntos, y solo ellos, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada.

destacan que aunque existe distinción entre sus métodos de solución es potente para el aprendizaje de la geometría el considerar la continuidad y complementariedad entre los dos métodos característicos uno al otro.

2.5.2.2 Relaciones entre el método sintético y el método analítico

Dentro de la escuela es conocida la distinción entre el método sintético y el método analítico, esto se puede atribuir al hecho que el primero constituye en lo que hoy se reconoce como geometría euclidiana considerada como elemental para ser enseñada en los primeros grados; en cuanto al segundo, hace parte de la geometría cartesiana o analítica que se imparte en los cursos avanzados de secundaria, muy acorde con el desarrollo histórico de cómo estas geometrías han surgido y quizás por eso su organización en el currículo (Contreras, A. et al. 2002).

No obstante, esta concepción no tiene que ser un impedimento para poder dilucidar una relación entre estos métodos tan potentes en el quehacer en la geometría; en relación con su significado se puede establecer que el método sintético propio de la geometría euclidiana se caracteriza por "La síntesis (que) consiste en la composición de elementos dados para obtener elementos del conjunto." (Contreras, A et al. 2002. p. 2); y el método analítico perteneciente a la geometría cartesiana, en la cual se reconoce un sentido de invención, "análisis se entiende la descomposición de la materia objeto de estudio para conocer con mayor facilidad cada una de sus partes." (Contreras, A. et al. 2002. p. 2).

Identificar esta relación permite superar posibles dificultades que se puedan generar en el aprendizaje de la *Geometría Analítica*; y sobretodo en el momento de relacionarlo con la demostración y su relación con la circunferencia, describir características generales de esta hipótesis planteada por Contreras, A. et al. (2002) podría ser un elemento que permita superar dificultades de corte cognitivo en el aprendizaje de la *Geometría Analítica*.

La continuidad que se puede establecer entre dichas técnicas se hace en términos de la consideración que con el método sintético es posible dilucidar el componente geométrico característico de las propiedades de la figura geométrica de forma significativa, y con el método analítico la posibilidad de la conversión de esas propiedades geométricas en términos algebraicos que permita el uso de cálculos algorítmicos para su solución.

> Efectivamente es apelando a ciertas expresiones algebraicas –que identifican las relaciones que se ponen en juego- que se podrá dar cuenta de las condiciones de posibilidad de la construcción, de la validez de los construido, de la cantidad de soluciones. El álgebra aparece entonces como un instrumento que modeliza la actividad geométrica y, en ese sentido no la "pierde de vista". (Itzcovich, 2005, p. 86)

Está relación se da en la medida en que se desarrolle un camino heurístico por intermedio de los procesos de construcción de figuras geométricas que ayuden a relacionar el componente geométrico que en muchas ocasiones por hacer caso a los cálculos algebraicos se pierde con el uso del método sintético, y permiten reconocer el sentido geométrico, pero de igual forma el álgebra permite validar de cierta manera la posibilidad de la construcción; es así, como el interés no debe ser en torno a focalizar el aprendizaje en alguno de los dos métodos característicos de la geometría, el potencial se encuentra es en explorar la relación y continuidad como medio para reconocer que cada método puede ofrecer en el aprendizaje de la demostración en geometría fuentes de validación distintas para encontrar las mismas soluciones.

La posible complementariedad entre esto dos métodos sugieren una relación entre la Geometría sintética y la analítica, que bajo el modelo de *Unidad Cognitiva* que tenemos se pueden considerar dos momentos para ser analizados. Momento inicial que se van hacer actividades en torno a la Geometría sintética y Momento final, actividades relacionadas con la Geometría analítica. Todo esto con el final de mantenerse en el mismo marco teórico.

Así mismo, es necesario reconocer algunas dificultades que pueden surgir en el aprendizaje de la geometría analítica y con ello identificar las aproximaciones cognitivas que permiten caracterizar los imprevistos en el aula.

2.5.2.3 Dificultades Cognitivas en el aprendizaje en Geometría Analítica

Dentro de las dificultades que se pueden establecer en el aprendizaje de la *Geometría Analítica*, se reconocen aproximaciones de corte cognitivo en las cuales se intenta relacionar los problemas de conversión que tienen los estudiantes en el momento de trasladarse entre diferentes registro de representación semiótico (Duval, 1999), se encuentran también las ideas previas que tienen sobre las representaciones y construcciones de la circunferencia (Rio - Sánchez, 1989).

Dentro de la aproximación cognitiva se hace necesario indagar sobre los distintos modos de funcionamiento cognitivo necesarios para la comprensión que se encuentran involucrado dentro de las producciones en la actividad matemática, esto se debe:

> La actividad matemática es un tipo de actividad que, a pesar de su universalidad cultural, a pesar de su carácter puramente intelectual, supone una manera de pensar que no es nada espontánea para la gran mayoría de alumnos y de adultos. Necesita modos de funcionamiento cognitivos que requieren la movilización de sistemas específicos de representación semiótica. Su integración a la arquitectura cognitiva de los sujetos es la condición absolutamente necesaria para poder comprender en matemáticas (Duval, 1999, p. 24)

Sin embargo, al ser estos sistemas de representación semiótica particulares en matemática, debido a la característica esencial de los objetos matemáticos, no hay otro medio para acceder a ellos si no es por su representación semiótica, pues no se puede confundir la representación semiótica con el objeto matemático, porque cada representación semiótica ofrece una significancia particular con respecto al objeto matemático representado, esta representación semiótica ofrece una complementariedad descriptiva de las características propias del objeto matemático; es por esto que se presentan serias dificultades de corte cognitivo a la hora de la comprensión en matemática, es así como surge el siguiente interrogante:

> ¿Cómo puede aprender un estudiante a no confundir un objeto matemático con la representación particular que de acceso (por ejemplo, un número y su escritura, una figura y la situación representada, grafos y su función), si para acceder a los objetos matemáticos representados no hay más que representaciones semióticas para manipular? (Duval, 1999, p. 28)

Ahora bien, los registros se pueden clasificar desde dos perspectivas que movilizan las matemáticas: por una lado, encontramos los registros plurifuncionales que son los que se utilizan bajo una variedad de tratamiento, típicos de los dominios de la vida en sociedad; y los registros monofuncionales que son de un solo tratamiento. Por el otro lado, se encuentran los registros de tipo discursivos que son las que utilizan una lengua y los registros no discursivos que son los que muestran formas o configuraciones de formas.

De igual manera, se tienen dos tipos de operación dentro de los sistemas de representación semiótica; la de *tratamiento* que hace alusión a los distintos tipos de registro dentro de un mismo sistema de representación semiótico y la de *conversión* que es el cambio de sistema de representación semiótico para un registro.

Al hacer el análisis de los sistemas de representación semiótica que son característicos en el aprendizaje del objeto de estudio de esta indagación, se encuentra entonces que dentro de la *Geometría Analítica* se pueden enunciar tres dificultades de orden cognitivo:

- ✓ Conversión de una representación plurifuncional de tipo discursivo como lo es el lenguaje natural a una de tipo plurifuncional no discursiva como lo son las figuras geométricas. (Pasar de lenguaje natural a figuras geométricas siempre en doble sentido)

- ✓ Conversión de una representación plurifuncional de tipo discursivo como lo es lenguaje natural a una representación monofuncional de tipo discursivo sistema de escritura algebraica. (Pasar de lenguaje natural a una representación de tipo algebraica.)

- ✓ Conversión de una representación monofuncional de tipo discursivo como lo es el sistema de escritura algebraica a una representación monofuncional de tipo no discursiva como lo es los gráficos cartesianos. (Pasar de la representación algebraica a la representación cartesiana)

Es así, como en la actividad matemática aparecen diversas dificultades que se pueden generar alrededor de los sistemas de representación semiótica por causa de su heterogeneidad, y el pasaje de una forma de representación a otra, deben ser tomados en cuenta en el momento de la enseñanza de cualquier contenido, pues los procesos que deben ser considerados para la comprensión y el aprendizaje son más complejos de lo que comúnmente se reconoce y constituyen en formas de pensamiento particulares por el sujeto.

Por otro lado, se encuentra que los estudiantes desarrollan ideas previas en torno a los contenidos, esta expresión hace alusión a ideas correctas o erróneas que tienen los estudiantes (Rio Sánchez, 1989), debido a que es importante identificar cuáles son los errores y dificultades que tienen los estudiantes cuando se ven enfrentados a los conocimientos matemáticos. Si bien, el interés se encuentra alrededor del objeto de estudio la circunferencia y cómo esta se deriva de la sección cónica elipse[19], por lo tanto, el análisis de las ideas previas que se van a obtener se sugiere se derivan directamente de la elipse.

Algunas investigaciones (Rio-Sánchez, 1989) sugieren que los estudiantes tiene una representación mental físicamente correcta, pues la mayoría de ellos considera que un óvalo y una circunferencia achatada representan una elipse, pero también rechazan el hecho de que dos circunferencias secantes de igual radio lo sean (Rio-Sánchez, 1989); otra cuestión importante es que los alumnos consideran que una elipse se puede dibujar empleando sólo la regla y el compás, dificultad que proviene de no comprender la construcción.

Si hablamos en términos de lo que es correcto o no, se puede decir que un óvalo no representa una elipse, pero si una circunferencia achatada, otra idea previa que muestran los estudiantes es que la gran mayoría "define la elipse como una curva plana, cerrada y simétrica, en la que sus puntos no equidistan del centro, definición esencialmente descriptiva que no caracteriza a las elipses" (Rio-Sánchez, 1989, p. 65), consecuencia de ello, es la percepción física que presentan los alumnos quedándose corta la interiorización del concepto matemático de elipse; sumada a estas ideas surgen descripciones físicas como que los huevos de gallina tienen forma de elipsoide o los melones forma de elipse (Rio-Sánchez, 1989), lo anterior deja entrever el poco análisis crítico que exhiben los estudiantes a la hora de enfrentar dicho concepto geométrico, ya que se presenta una confusión entre las formas planas y las espaciales, y por ende no hay una comprensión del concepto de elipse.

Para finalizar, el desarrollo de este marco teórico va a permitir dar bases sólidas para esta indagación, por lo cual los elementos en los cuales se van hacer mayor énfasis en el análisis corresponden al modelo de Unidad Cognitiva, el Cabri Géomètre II Plus como instrumento de mediación semítica y la complementariedad entre el método sintético y el método analítico. Esto constituye en categorías importantes en las que se debe hacer seguimiento en la experiencia y analizar la concordancia con la teoría.

[19] Toda circunferencia es una elipse, cuando los focos de la elipse coinciden esto es que el valor de la excentricidad sea igual a cero; pero no toda elipse es una circunferencia, porque la elipse no cumple la propiedad en la que todos los puntos equidisten de un punto central fijo.

CAPITULO III

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS PREVIOS

En el desarrollo del presente capítulo se pretende realizar un acercamiento a la caracterización del tipo de metodología que se va a desarrollar en esta indagación; esta es de corte cualitativo y su base está en la *Etnografía*, la cual aporta datos descriptivos sobre los contextos y creencias de los participantes en el escenario educativo que se ha dispuesto para la recolección de los datos.

Para el desarrollo de la clase, se fue consecuente con el enfoque teórico, por ello, las actividades propuestas se inscribieron dentro de lo que se concibe como *ciclo didáctico* el cual permite integrar distintas actividades con objetivos característicos que permitan desarrollar los distintos componentes del proceso semiótico y sus resultados.

Para el diseño de actividades, se presentan los distintos criterios que vinculan el enfoque teórico y el metodológico para la creación de las actividades; para esta indagación, se llevaron a cabo dos actividades: *situación problema 1: Construyendo una antena* y *Situación problema 2: Descubriendo Figuras geométricas*, cada una intenta cumplir la estructura del *ciclo didáctico* y con aspectos que permitieran al estudiante por una parte generar *esquemas de uso* del AGD y por otra, familiarizarse con formas discursivas particulares, tanto orales como escritas que exige el mismo modelo de *Unidad Cognitiva*.

De igual forma, se hace una descripción general de las actividades que contempla el propósito y los contenidos matemáticos previos que deben manejar los estudiantes, además, se realizan análisis previos de las tres actividades que permitan tener en cuenta los resultados esperados y determinar hacia dónde se debe direccionar cada una de las soluciones de las actividades y los distintos discursos que surgen en la dinámica del aula; es decir, tener caracterizadas unas soluciones esperadas por parte de los estudiantes.

3.1 METODOLOGÍA

En la metodología se consideraron dos elementos para proceder en la experimentación: la investigación cualitativa, en este caso la *etnografía*, y el *ciclo didáctico* como organizador de la secuencia de enseñanza; en los apartados siguientes se describen cada uno de ellos, y las relaciones existentes entre cada uno de ellos.

En la *etnografía* se parte de una reseña histórica, luego se describe sus características principales y después se destaca la importancia metodológica que tiene la *Etnografía* en los intereses de esta indagación.

En el *ciclo didáctico* se considera su importancia como organizador de las actividades de aula propuestas a los estudiantes.

3.1.1 La Etnografía

En las últimas décadas empezó a tomar mayor auge la investigación educativa, y es a finales de los setenta y los ochenta que surge el uso de las e*tnografía*s y la implementación de diseños cualitativos en general, que le apuestan a dicha investigación educativa. La oposición a la implementación de los diseños cualitativos no se hizo esperar, pues su principal obstáculo tiene sus raíces en el positivismo caracterizado por englobar teorías como el conductismo, que pretendían en la investigación educativa tener presente que las relaciones entre las distintas variables podían ser controladas y medidas con facilidad en condiciones de predicción y replicabilidad a través de la medida cuantitativa.

Como oposición ante esta concepción cuantitativa de investigación, surgió la teoría crítica social, la cual era una respuesta alternativa que no tenía su base en la observación de los sujetos desde un enfoque conductista, su argumento estaba a favor de una investigación que se caracterizara por la reflexión y el análisis acerca de la manera cómo sucede la obtención de datos y la producción de significados dados a distintos objetos, por lo tanto podría ser útil, según Hammserley, Angus, Erickson, y Woods:

> […] indagar cómo los distintos actores humanos construyen y reconstruyen la realidad social mediante la interacción con los restantes miembros de su comunidad y para ello será indispensable tener en cuenta la interpretación que ellos mismos realizan de los porqués y para qués de sus acciones y de la situación en general. (1977, 1986, 1987 como se cita en Goetz & LeCompte, 1988).

La teoría crítica social sienta sus bases argumentativas en el no desligamiento del contexto social en el que sucede la interacción de los individuos, predominando sus puntos de vista y los significados otorgados y atribuidos a los distintos objetos que ellos mismos reflejan como producto de la interacción con el otro (Goetz & LeCompte, 1988). Por lo tanto, una de las alternativas teóricas que recogieron esta nueva interpretación e investigación de la realidad social fue la *etnografía*, que se caracterizó por intentar construir y describir las características de las variables y fenómenos, con el objetivo de perfeccionar o validar constructos entre estos fenómenos observados en escenarios distintos (Goetz & LeCompte, 1988).

Ya inmersos en el ámbito escolar y para los intereses propios de esta indagación, se destaca la importancia que toma la metodología cualitativa, pues dentro de esta "los investigadores cualitativos son sensibles a los efectos que ellos mismos causan sobre las personas que son objeto de su estudio" (Taylor & Bogdan, 1996, p. 20), es así que dicha metodología permite que el investigador le imprima una intención al escenario educativo que pretende indagar, intención que estuvo caracterizada por la aplicación de dos actividades que son potentes, y que llevaban el propósito de suscitar la continuidad entre la producción de una conjetura y la producción de su respectiva demostración. De allí que la metodología empleada sea la etnografía educativa, pues las acciones, los argumentos generados por los estudiantes y los procesos cognitivos asociados a la solución de esas actividades son datos descriptivos que se pretendían recoger, registrar y analizar, a raíz de los objetivos propuestos en esta indagación.

La etnografía educativa no solo imprime una intención, sino que también considera a los estudiantes como sujetos activos de la investigación, pues ellos están dotados de conocimientos previos y creencias culturales dentro de un entorno social (como lo es el escenario escolar), además, los estudiantes son activos en la medida en que son responsables de sus acciones y sus comportamientos en la solución de actividades.

La etnografía educativa se caracteriza por su dimensión práctica, y apoya fuertemente los procesos de reflexión y crítica para el mejoramiento del aprendizaje, de ahí que esta investigación etnográfica sea el punto de partida para mejorar el aprendizaje de la demostración en *Geometría Analítica*, en la medida en que se superen las dificultades relacionadas con problemas de conversión entre registros de representación semiótica.

Dada esta dimensión práctica, resulta ventajosa la investigación etnográfica en la reflexión continúa de los educadores respecto a los fenómenos estudiados por éste, pues a partir de esta dimensión se logra la relación con la teoría, que conlleve a la reconstrucción social, como consecuencia de ello, las "[…] etnografías no deben quedarse exclusivamente en su dimensión descriptiva, sino que, como modalidad de investigación educativa que son, deben coadyuvar también a sugerir alternativas, teóricas, prácticas, que conlleven a una intervención pedagógica mejor" (Goetz & LeCompte, 1988, p. 17).

La metodología cualitativa de esta indagación puede ayudar a que se den alternativas teóricas y prácticas que permitan sugerir y superar las dificultades mencionadas alrededor del aprendizaje de la demostración de *Geometría Analítica*, por eso, el aporte que revela dicha investigación es primordial para reconocer los distintos argumentos que son utilizados por los estudiantes cuando pretenden generar una prueba a partir de una conjetura, para ello es interesante revelar la continuidad cognitiva existente entre la producción de una conjetura y la producción de una demostración. Alcanzar esta continuidad no sólo depende del aporte generado por el modelo de *Unidad Cognitiva*, sino que también depende de dos factores más: por un lado, la ayuda del docente, debido a que él es el experto que permite guiar los discursos del estudiante, en la medida en que él proponga discusiones colectivas que conlleven a crear interacción entre ellos, es decir, buscar que los estudiantes confronten y establezcan acuerdos entre los distintos argumentos que se generan, con el objetivo de que los argumentos logren evolucionar desde lo empírico hacia lo teórico, y que por tanto, sean argumentos relacionado con una teoría geométrica. Por otro lado, la integración de un AGD como Cabri Géomètre II Plus, porque se reconoce como un instrumento de mediación semiótica potente en el trabajo que realiza el estudiante en la solución de *problemas abiertos*, cuando éste transite de la producción de una argumento empírico a la producción de una argumento teórico, todo esto, soportado por la potente función *arrastre* y el *potencial semiótico* del artefacto.

3.1.2 Ciclo didáctico

El *ciclo didáctico* permite estructurar la secuencia de enseñanza, proporcionando un marco tanto para el diseño como para el análisis de las distintas actividades puestas en acción en el escenario educativo (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2009); la tipología de actividades que caracteriza el *ciclo didáctico* se relacionan con los tipos de signos asociados: *actividades con el artefacto, actividades que permitan la producción de signos individuales y actividades que permitan la producción de signos colectivos*. La relación entre los tres momentos nunca supone una linealidad pero si una interrelación mutua y cíclica, se constituye en una forma de organizar la enseñanza en el aula, y se puede evidenciar de manera consecutiva y reiterada en una misma actividad. (Véase en sección 2.4.3)

Tanto el *ciclo didáctico* como la *etnografía* son aspectos metodológicos a considerar en esta indagación para ser consecuentes con los objetivos, debido a que el interés se centra en el estudiante y en sus producciones asociadas a las soluciones de actividades puestas en acto, se hace necesario identificar y describir las relaciones entre la *etnografía* como metodología cualitativa y el *ciclo didáctico* como organizador en la enseñanza en el aula; cabe resaltar que el objetivo de este trabajo de indagación no se relaciona con el papel del docente ni la forma más conveniente de organizar la clase; no obstante, el *ciclo didáctico* permite organizar y analizar los momentos de producción de los estudiantes. A continuación se hace una descripción de la relación entre el *ciclo didáctico* y la *etnografía*.

3.1.3 La etnografía y el ciclo didáctico

La *etnografía* y el *ciclo didáctico* representan el desarrollo metodológico de la indagación, para ello se hace necesario reflexionar en torno a las relaciones existentes entre ambas vertientes; para la *etnografía* educativa es importante resaltar el trabajo que realiza el estudiante en el aula, pues este es producto del contexto en el que se desenvuelve, por lo tanto los comportamientos y los discursos que el estudiante revele, son producto de la interacción con el otro. En ese orden de ideas el estudiante es activo en la investigación, pues llega a ella con conocimientos previos y no es ajeno al entorno cultural en el que desarrolla sus actividades, sus discursos y sus argumentos. Por otra parte, el *ciclo didáctico* se caracteriza por ser la forma de secuenciar la enseñanza que permite tener en consideración tiempos de interacción con las actividades, actividades en la producción individual y actividades en la producción colectiva, permitiendo que el *ciclo didáctico* pueda estructurar una propuesta de enseñanza, por medio del diseño y el análisis de las actividades que se le presentan al estudiante.

La relación existente en la *etnografía* y el *ciclo didáctico*, se puede considerar que para ambos la producción del estudiante es un eje transversal, tanto las individuales como las colectivas, y los argumentos que conlleven a la solución de un problema. Para ambas vertientes las discusiones colectivas son esenciales en dicha producción, la cual está arraigada a la intención de avanzar de los significados personales a los significados matemáticos, pues es en la relación con el otro en donde se realzan los argumentos y se afianzan los pensamientos, sobre todo cuando en esta indagación se pretende mostrar un acercamiento a la continuidad existente entre la producción de una conjetura y su demostración, de tal manera que genere conocimiento de *Geometría Analítica*.

Ambos enfoques apuntan a revisar el trabajo en el aula, en la medida en que proponen recoger datos que permitan analizar lo que sucede en ella, para posteriormente generar propuestas de enseñanza que permitan intervenir en ella de una mejor manera; la e*tnografía* por su parte permite la recolección, registro y análisis de la información y el *ciclo didáctico* proporciona la forma de estructurar tiempos en la enseñanza en el aula. En la ilustración 7 se muestra la relación entre la *etnografía* y el *ciclo didáctico*, la *etnografía* como proceso transversal y de fondo al *ciclo didáctico* que permite poner de manifiesto sus relaciones.

Ilustración 7 Relación entre la *etnografía* y el *ciclo didáctico*

3.2 CARACTERIZACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Dentro de la caracterización de las actividades se hace una descripción de los criterios de diseño, las características generales que estructuran las actividades y la relación que cada una de las actividades tiene con las etapas del *ciclo didáctico*.

3.2.1 Criterios de diseño de las actividades

Las actividades que se diseñaron tuvieron en cuenta que el estudiante no estaba familiarizado con la solución de *problemas abiertos*, debido a que él no ve la necesidad de describir y justificar relaciones en matemáticas, por ello se consideraron actividades previas que tengan elementos procedimentales y conceptuales que permitan darle solución a la actividad en la cual intervino el *problema abierto*, es decir, familiarizar al estudiante con formas discursivas particulares, tanto orales como escritas que exigen el modelo de *Unidad Cognitiva*.

Se pretende reconocer los distintos argumentos que pueden ser usados en la producción de una conjetura y que, con la ayuda del docente, estos argumentos evolucionen y se estructuren de manera lógica para producir una demostración. Las distintas modalidades de *arrastre* constituyen una forma en que los argumentos empíricos puedan ser validados matemáticamente dentro de un marco teórico, justificar los pasos, producir enunciados y conclusiones de la experiencia, constituyen algunos aspectos que se les exige a los estudiantes y que hacen parte de las producciones escritas individuales, en la socialización se pretenden que esas producciones se relacionen de forma clara con la teoría.

De igual manera se considera las relaciones y complementariedades entre el método analítico y el método sintético como herramienta potente para la solución de problemas geométricos, y su validación ante la solución; se pretende que dentro de las fases que tengan las actividades se considere un espacio tanto para la solución de preguntas por el método analítico; de tal manera que sean exploradas en dos momentos, uno correspondiente con cada geometría.

Con relación a los contenidos, la situación problema 1 permite recordar propiedades de una circunferencia, ecuación de una circunferencia, ecuación de una recta, mediatriz, punto de intersección entre dos rectas, sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas; y la situación problema 2 tiene contenidos como ecuación de una circunferencia, cuerda, punto medio, operaciones entre fracciones, casos de factorización, estructura de la demostración deductiva. Con cada una de las actividades, el estudiante tiene la oportunidad de argumentar en dos marcos teóricos el de geometría euclidiana y el de geometría algebraica.

Se diseñaron dos actividades que se estructuran en distintas partes, cada una de estas situaciones responde a los criterios de diseño expuestos en la Tabla 3:

CRITERIOS	PRÓPOSITOS DE APRENDIZAJE	GESTIÓN
1	Generar *esquemas de uso* de las distintas funciones del AGD Cabri Géomètre II Plus.	
2	Acciones heurísticas y construcciones geométricas que ayuden a proponer conjeturas iniciales.	Producciones individuales
		Socialización de resultados
3	Soluciones por medio del método sintético, prueba de las conjeturas iniciales, reducir a representaciones geométricas.	Producciones individuales
		Socialización de resultados
4	Soluciones por medio del método analítico, prueba de las conjeturas iniciales, reducir a representaciones algebraicas	Producciones individuales
		Socialización de resultados
5	Socialización, comparación y validación de los resultados de forma general	

Tabla 3. Criterios del diseño de las actividades

3.2.1 Descripción de las actividades

Dentro de las actividades que se consideraron para desarrollar en el marco del *ciclo didáctico* se encuentran las siguientes *situación problema 1: Construyendo una antena* y *Situación problema 2: Descubriendo Figuras geométricas.* En la tabla 4, se hace una descripción de la estructura, los propósitos y los conocimientos previos de cada actividad.

ACTIVIDAD	ESTRUCTURA	PROPÒSITO	CONOCIMIENTOS PREVIOS
Situación problema 1: Construyendo una antena	Se dividió en cuatro partes parte inicial, Parte I, Parte II y Parte III, cada una pretende contribuir en la búsqueda de un punto "Antena" que estuviera a la misma distancia de otros tres puntos A, B y C considerados como "los pueblos" que eran puntos fijos; en geometría esto significa encontrar el centro de la circunferencia que pasa por tres puntos	Promover discursos individuales y colectivos característicos del modelo de la *Unidad Cognitiva*, en los que los estudiantes justifiquen sus acciones y se familiaricen con los conocimientos previos para la actividad que involucra el problema abierto.	Propiedades de una circunferencia, Ecuación de una circunferencia, Ecuación de una recta, Mediatriz, Punto de intersección de dos rectas: sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, Estructura de la demostración.
	Se estructuró en tres partes: Parte I, Parte II y Parte III, cada una pretende contribuir en la	Construcción de la conjetura y su prueba a partir de las relaciones entre los métodos	Ecuación de una circunferencia, Cuerda, Punto medio, Coordenadas,

Situación problema 2: Descubriendo Figuras geométricas	solución de la búsqueda del lugar geométrico que forman los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia que tienen uno de sus extremos como punto en común; en la parte I se presenta el problema abierto y las otras dos partes constituyen en ayudas para la solución del problema propuesto.	sintético y analítico.	Operaciones entre fracciones, Casos de factorización, Estructura de la demostración deductiva

Tabla 4. Descripción General de las Actividades

En las siguientes tablas se presentan cada de una de las dos actividades que fueron puestas en acto con los estudiantes; en cada actividad se presentó el objetivo, el contenido de la actividad y las preguntas que pretendían registrar lo vivenciado por los estudiantes.

SITUACIÓN PROBLEMA 1

-Construyendo una antena-

COLEGIO FE Y ALEGRÍA **UNIVERSIDAD DEL VALLE**

ESTUDIANTE: Dirigido a estudiantes de educación media.

PROFESORES: Diego Jhohan Díaz y Denise Zuluaga Duque

OBJETIVO: Identificar las formas de hallar el centro de una circunferencia dada, de manera sintética y analítica.

CONTENIDOS: Ecuación de una circunferencia, Ecuación de una recta, Mediatriz, Punto de intersección de dos rectas: sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Una empresa de telecomunicaciones necesita instalar una antena de control para satisfacer el servicio a tres pueblos A, B y C, para ello la los ingenieros requieren que la antena esté a la misma distancia de los tres pueblos para mantener un buen servicio. ¿En qué lugar debo poner la antena para que esta conserve la misma distancia a los tres pueblos?

Parte I

1. Diríjase a la carpeta ANTENA 1 en el escritorio, abre el archivo herramientas ANTENA1.men, luego das clic en la barra de menú, archivo, abrir, sale un cuadro de diálogo y buscas en el escritorio en la carpeta ANTENA 1, el archivo ANTENA 1.fig y le das clic en abrir.
2. Identifica los puntos fijos y los puntos móviles.
3. Explica las distintas formas de resolver el problema que has intentado y si estas te han servido para encontrar la solución. Produce distintos enunciado que generalicen tus resultados en cada caso.
    a. Explica paso a paso tu procedimiento
    b. Escribe tus conclusiones

Parte II

Escribe tus respuestas de forma clara

1. ¿Qué figura geométrica tiene como propiedad que todos sus puntos equidistan de un punto central?
2. ¿Cómo construir esta figura de tal forma que los tres pueblos sean puntos sobre este objeto? Describe el paso a paso de esta construcción
3. ¿Por qué esta construcción funciona? Justifica lo hecho en el punto tres
4. Si los pueblos A, B y C tuvieran otra configuración, no colineales, este procedimiento funcionaria ¿por qué?
5. Escribe tus conclusiones, ¿qué relaciones encuentras?

Parte III

1. **1.** Dirígete a la carpeta ANTENA 2 en el escritorio, abre el archivo herramientas ANTENA2.men, luego das clic en la barra de menú, archivo, abrir, sale un cuadro de diálogo y buscas en el escritorio en la carpeta ANTENA 2, el archivo ANTENA 2.fig y le das clic en abrir
2. **2.** ¿Cuál diferencia tiene con el anterior archivo entregado?
3. **3.** Para este problema ten en cuenta la Parte I para resolver el problema de los tres Pueblos A, B y C ¿cómo podrías hallar las coordenadas del punto antena de tal forma que se cumpla el requisito dado por el ingeniero?
   - **a.** Identifique los objetos básicos
   - **b.** Encuentra las ecuaciones de estos objetos básicos
   - **c.** Describe paso a paso la forma como podrías encontrar la coordenadas del punto antena. Ayúdate con la tabla.

Nombre del objeto básico	**Procedimiento para obtener la ecuación**	**Ecuación**

4. **4.** Escribe tus conclusiones en las que se evidencien las relaciones entre los objetos básicos

Tabla 5 Situación problema 1: Construyendo una antena

SITUACIÓN PROBLEMA 2

Descubriendo Figuras Geométricas

COLEGIO FÉ Y ALEGRIA **UNIVERSIDAD DEL VALLE**

ESTUDIANTE: Dirigido a estudiantes de la educación media.

PROFESORES: Diego Jhohan Díaz y Denise Zuluaga Duque

OBJETIVO: Identificar y justificar la figura que se establece con los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia que tienen un extremo como punto en común.

Parte I

Problema abierto

¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia que tienen uno de sus extremos como punto común?

Parte II

1. **1.** Dirígete a la carpeta lg 1 en el escritorio, abre el archivo herramientas lg 1.men, luego das clic en la barra de menú, archivo, abrir, sale un cuadro de diálogo y buscas en el escritorio la carpeta lg 1, el archivo lg 1.fig y le das clic en abrir.
2. **2.** Identifica los objetos que puedes arrastrar, descríbelos ¿cuál es la variación que vez sobre ellos?

3. Si mueves B, ¿qué configuración forma el punto M cuando mueves B? ¿Puedes identificar alguna figura? describe el procedimiento paso a paso y justifica tu respuesta 4. ¿Por qué crees que tu figura es la correcta? 5. ¿Has un enunciado que generalice los resultados encontrados? **Para socializar** 6. ¿Qué relación encuentras entre este procedimiento y el enunciado del problema? 7. ¿Qué puedes decir de las propiedades de las cuerdas con relación a los elementos básicos de la circunferencia? 8. ¿Qué figura se forma con el punto medio de la cuerda a medida que vas arrastrando el punto B? 9. ¿Cómo harías para mostrar que esa es la figura correcta?, -- **Parte III** 1. Dirígete a la carpeta lg 2 en el escritorio, abre el archivo herramientas lg 2.men, luego das clic en la barra de menú, archivo, abrir, sale un cuadrado de diálogo y buscas en el escritorio, la carpeta lg 2, el archivo lg 2.fig y le das clic en abrir. 2. La circunferencia C tiene por ecuación $(x-2)^2+y^2=2^2$, la cuerda AB de la circunferencia C tiene como punto medio M. 3. ¿Puedes obtener la ecuación del lugar geométrico del punto medio de la cuerda M cuando mueves B sobre el objeto circunferencia? 4. ¿Cómo lo harías? describe y justifica tu respuesta **Para socializar** ¿Encontraste los mismos resultados en las tres fases de la actividad? Describe tu experiencia, con ¿cuál fase lograste resultados más acertados?

Tabla 6 Situación problema 2: Descubriendo Figuras geométricas.

3.2.3 Las actividades y el *ciclo didáctico*

Para identificar como se relacionan estas actividades dentro del *ciclo didáctico* se hace la tabla 7 que permite asociar cada momento del ciclo con la forma como se estructuraron las actividades.

CICLO DIDÁCTICO / **ACTIVIDADES**		**ARTEFACTO**	**PRODUCCIÓN INDIVIDUAL**	**PRODUCCIÓN COLECTIVA**
	PARTE INICIAL	El estudiante debe hacer sus primeras exploraciones con las distintas funciones que ofrece el AGD		
S	**PARTE I**	Surgen objetos básicos, puntos libres, puntos semi-libres y las funciones del AGD que se pueden usar en las soluciones de algunas de las preguntas.	Se le ofrece una Cabri figura[20], se pretende que el estudiante encuentre la construcción que le permita reconocer en qué lugar deben ubicar el punto antena y describir los pasos de la	Socializar las distintas construcciones, el procedimiento y el reconocimiento de los objetos matemáticos están en juego y sus propiedades que permitan justificar la pertinencia de la

[20]Corresponde a un archivo hecho en el programa Cabri Géomètre II Plus

I T U A C I O N P R O B L E M A I			construcción.	construcción.
	PARTE II	Evolucionan los significados personales a significados matemáticos relacionados con la circunferencia como objeto geométrico.	Se sigue trabajando con la misma Cabri figura. Se reconoce la figura geométrica que se puede relacionar con dicha construcción. Se hacen descripciones escritas sobre la utilidad de la construcción y su potencialidad dentro de distintas configuraciones. Conjeturar sobre los resultados obtenidos.	Socializar los resultados que le permitan al estudiante reconocer la forma de construir una circunferencia que pase por tres puntos, las relaciones que hay entre los objetos iniciales: puntos y los objetos finales: circunferencia, reconocer elementos y propiedades de la circunferencia. Probar la conjetura.
	PARTE III	Los signos matemáticos cambian a un contexto de geometría analítica con ayuda de las funciones de cabri.	Se les ofrece una segunda Cabri Figura. Al cambiar el sistema de representación a coordenadas cartesianas; se pretenden que usen los resultados de la Parte I y la Parte II para encontrar relaciones en términos de variables y ecuaciones, además se hace que los estudiantes ubiquen los resultados en una tabla que permita organizar los datos en la obtención de las ecuaciones.	Socializar los resultados y los procedimientos para hallar las ecuaciones de los distintos objetos básicos que permitan encontrar las coordenadas del punto antena. Comparar los procedimientos elaborados por las dos formas -sintética y analítica- y con ello analizar las relaciones, continuidad y potencialidad de las dos formas. Realizar un enunciado de las propiedades y relaciones entre los elementos de la circunferencia.
S I T U A C I O N P R O	**PARTE I**	El estudiante debe construir distintas representaciones del enunciado, haciendo uso de las herramientas y herramientas de exploración que tiene el AGD.	Analizar los resultados y producir conjeturas sobre la posible figura que se forma según el enunciado. Usar las distintas modalidades de *arrastre* para validar la conjetura. Registrar resultados por parte de los estudiantes.	Socializar los resultados de forma que se identifique la representación gráfica del problema, la figura geométrica que forman los puntos medios, y la posible forma de probar que esta figura es la correcta.
	PARTE II	Reconocer los objetos básicos, puntos libres, puntos semi-libre, puntos fijos y las funciones de exploración que permitan reconocer la solución del enunciado.	Se les ofrece una Cabri figura con la configuración dada en la Parte I. La figura que ha sido dada permite manipular algunos de sus elementos que ayudan a reconocer que tipo de figura se forma con los puntos medios de las cuerdas de	Socializar los resultados, reconocer cual es la figura que se forma con los puntos medios de las cuerdas, cuales son las propiedades de las cuerdas de tal forma que le ayuden a justificar la figura encontrada usando nociones precisas relacionadas con la teoría geométrica.

B L E M A			la circunferencia. Los estudiantes deben justificar y hacer un enunciado sobre los resultados.	
I I	**PARTE III**	Verificar si las funciones usadas para las soluciones dadas en la anterior parte pueden ser potencialmente exploradas y transformadas a signos matemáticos en este contexto.	Se les ofrece una segunda Cabri figura, el sistema de referencia es el plano cartesiano. El estudiante debe obtener la ecuación que representa la figura que se forma con los puntos medios de las cuerdas. Se solicitan producciones escritas en donde se evidencien las justificaciones, enunciados generales y conclusiones de la experiencia.	Socializar los resultados obtenidos, y llegar a una forma de probar los resultados aceptados por la clase y el profesor, encontrar las funcionalidades de las dos vías para resolver los problemas geométricos y sus asociaciones. Encontrar el enunciado que generalice los resultados y probarlo.

Tabla 7 Relación entre las actividades y el *ciclo didáctico*

3.2.4 Objetivos de las actividades

Las actividades tienen como objetivo construir elementos alrededor de una estructura de la demostración, se pretende que los estudiantes reconozcan las hipótesis y tesis asociadas con cada problema, igualmente con la puesta en acción del problema abierto se quiere que el estudiante construya una conjetura que dé respuesta a este problema. Con relación a los contenidos construidos por los estudiantes, se pretende que identifica la circunferencia y sus propiedades igualmente la descripción algebraica que los respalde.

En general, con la puesta en acción de estas actividades se quiere enfocar hacia la argumentación y justificación de los estudiantes de las distintas soluciones dadas, y la posibilidad de construir herramientas funcionales para la demostración, hacer que los signos personales evolucionen a signos matemáticos que de acuerdo a una estructura deductiva (estructura de P entonces Q en donde halla relacionado una hipótesis y tesis como condicionante), que se explica en términos de movimiento y dependencia que es asociada con la función arrastre del instrumento.

En la siguiente sección se realizan los análisis previos que constituyen en una fase predictiva de lo que posiblemente puede suceder en la experimentación y de esta forma controlar el proceso de intervención en el aula.

3.3 ANÁLISIS PREVIOS DE LAS ACTIVIDADES

En este apartado se desarrolla un análisis previo de las actividades en donde se referencia lo que se espera que los estudiante solucionen en cada una de las partes de la actividad, esto con el fin de identificar los signos personales y los signos matemáticos que cada una de las preguntas de las actividades sugieren y poder predecir lo sucedido en la experimentación.

3.3.1 Situación problema 1: Construyendo una antena

Parte Inicial

En esta parte se pretende que el estudiante encuentre la ubicación del punto antena a través de la exploración de distintos funciones y herramientas de exploración.

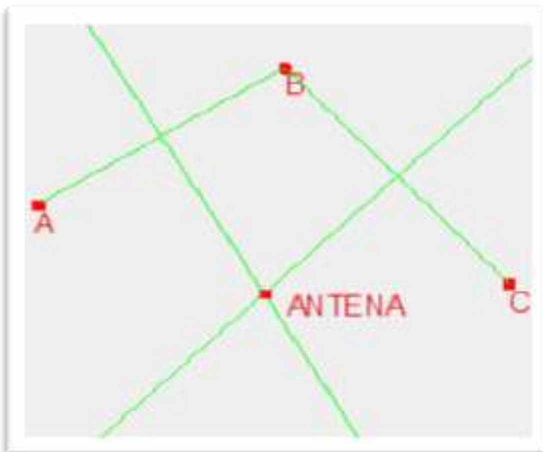


Ilustración 8 Solución esperada parte inicial Situación problema 1

Parte I

Pregunta	Solución esperada
2	Puntos fijos: los pueblos, punto A, B y C Puntos móviles: El punto ANTENA
3	Funciones del programa Cabri Géomètre II Plus ♣ *Segmento*: para trazar la distancia entre dos puntos. ♣ *Distancia*: medir la distancia entre dos puntos para saber en qué lugar se debe ubicar el punto antena ♣ *Arrastre*: para poder mover el punto móvil y aproximar en qué lugar debería ir este punto. ♣ *Mediatriz*: esta recta de una cuerda de la circunferencia pasa por el centro de la circunferencia. ♣ *Punto de intersección*: sirve para hallar el lugar exacto del punto antena y se encuentra por la intersección de dos mediatrices de las cuerdas.
	a. – Exploración: Se hacen *segmentos* desde el punto antena a los puntos A, B y C, se miden esas *distancias* e intenta mover el punto antena de tal forma que se pueda

4	confirmar la propiedad "el punto antena debe estar a igual distancia de los pueblos A, B y C. Se reconoce que el punto antena puede ser el punto medio entre el segmento $\overline{AC}$, y los segmentos $\overline{AP_{Ant}}, \overline{BP_{Ant}}$ y $\overline{CP_{Ant}}$ que son radios de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C y de centro el punto antena, Sin embargo esta opción es débil debido a que es difícil mover el punto antena de tal forma que todos los tres valores de las distancia sean iguales, a lo más dos. La construcción para hallar el punto antena corresponde. - Trazo el *segmento* $\overline{AB}$y $\overline{BC}$ - Encuentro la *mediatriz* (ya sea por construcción o por la macro) de $\overline{AB}$ y la denoto por l - Encuentro la *mediatriz* (ya sea por construcción o por la macro) de $\overline{BC}$ y la denoto por m - Encuentro el *punto de intersección* entre las mediatrices l y m, y lo denoto como P - *Redefino* en punto antena sobre el punto P, y este cumplen la propiedad que los puntos A, B y C están a la misma distancia de P.
	b. – Los segmentos $\overline{AP_{Ant}}, \overline{BP_{Ant}}$ y $\overline{CP_{Ant}}$ son radios de la circunferencia con centro en el punto antena y radio hasta cualquiera de los puntos A, B o C. – Dados tres puntos puedo encontrar una circunferencia que pase por estos puntos. - Las mediatrices de las cuerdas de una circunferencia se interceptan en un punto que corresponde al centro de la circunferencia

Tabla 8 Solución esperada Parte I Situación problema 1

Parte II

Pregunta	Solución esperada
1	La circunferencia
2	Con la construcción encontrada en la Parte I Construcción: La forma para hallar el punto antena corresponde. - Trazo el *segmento* $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ - Encuentro la *mediatriz* (ya sea por construcción o por la macro) de $\overline{AB}$ y la denoto por l - Encuentro la *mediatriz* (ya sea por construcción o por la macro) de $\overline{BC}$ y la denoto por m - Encuentro el *punto de intersección* entre las mediatrices l y m, y lo denoto como P - *Redefino* en punto antena sobre el punto P, y este cumplen la propiedad que los puntos A, B y C están a la misma distancia de P - Trazo la *circunferencia* de centro en el punto P y radio hasta A.
3	✓ Validación empírica: La construcción funciona porque se puede usar la función de *comprobar si un objeto pertenece a otro*, y el programa me dice que A, B y C son puntos sobre objeto de la circunferencia C; y también porque mido la distancia del punto A al punto P, y así sucesivamente con cada punto B y C y me dan distancias iguales. ✓ Validación teórica: Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ tienen la función de ser cuerdas de la circunferencia C, entonces por teorema las mediatrices de las cuerdas de una circunferencia pasan por su centro.
4	Si, la construcción funciona para cualquier configuración de puntos no colineales de tres puntos, porque la propiedad de las mediatrices de las cuerdas de la circunferencia se cumple siempre.
5	– Dados tres puntos puedo encontrar una circunferencia que pase por estos puntos. - Las mediatrices de las cuerdas de una circunferencia se intersectan en un punto que corresponde al centro de la circunferencia

Tabla 9 Solución esperada Parte II Situación problema 1

Parte III

<table>
<tr><th>Pregunta</th><th>Solución esperada</th></tr>
<tr><td>2</td><td>Este tiene un marco de referencia distinto, el plano cartesiano aquí se debe trabajar con coordenadas (parejas ordenadas) y ecuaciones.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Objetos básicos.
♣ Recta $\overline{AB}$
♣ Recta $\overline{BC}$
♣ Punto medio del segmento $\overline{AB}$, lo denotamos por M
♣ Punto medio del segmento $\overline{BC}$, lo denotamos por N
♣ Recta mediatriz de $\overline{AB}$ y la denotamos por l
♣ Recta mediatriz de $\overline{BC}$ y la denotamos por s
<table>
<tr><th>Nombre del objeto básico</th><th>Procedimiento para obtener la ecuación</th><th>Ecuación</th></tr>
<tr><td>Recta $\overline{AB}$</td><td>Pendiente:
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{6-1} = \frac{3}{5}$
$y = \frac{3}{5}x + b$

Intercepto
Remplazo $A(1,3)$ en la ecuación anterior.
$3 = \frac{3}{5}(1) + b$
$b = 3 - \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$</td><td>$\mathrm{y} = \frac{3\mathrm{x} + 12}{5}$</td></tr>
<tr><td>Recta $\overline{BC}$</td><td>Pendiente:
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-6}{10-6}$
$= -\frac{5}{4}$
$y = -\frac{5}{4}x + b$

Intercepto
Remplazo $A(6,6)$ en la ecuación anterior.
$6 = -\frac{5}{4}(6) + b$
$b = 6 + \frac{30}{4} = \frac{54}{4}$</td><td>$\mathrm{y} = \frac{-5\mathrm{x} + 54}{4}$</td></tr>
<tr><td>Punto medio M</td><td>$\mathrm{M_x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$

$\mathrm{M}_y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3+6}{2} = \frac{9}{2}$</td><td>$\mathrm{M}\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>Punto Medio N</td><td>$\mathrm{N_x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{6+10}{2} = 8$

$\mathrm{N}_y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$</td><td>$N\left(8, \frac{7}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>Recta Mediatriz l</td><td>Pendiente.</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

	Pasa por M y es perpendicular a $\overline{AB}$	$m_l = -\frac{1}{m_{\overline{AB}}} = -\frac{1}{\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$ $y = -\frac{5}{3}x + b$ Intercepto Remplazo $M\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ en la ecuación anterior. $\frac{9}{2} = -\frac{5}{3}\left(\frac{7}{2}\right) + b$ $b = \frac{9}{2} + \frac{35}{6} = \frac{31}{3}$	$y = \frac{-5x + 31}{3}$
	Recta mediatriz *s* Pasa por N y es perpendicular a $\overline{BC}$	Pendiente. $m_s = -\frac{1}{m_{\overline{BC}}} = -\frac{1}{-\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$ $y = \frac{4}{5}x + b$ Intercepto Remplazo $N\left(8, \frac{7}{2}\right)$en la ecuación anterior. $\frac{7}{2} = \frac{4}{5}(8) + b$ $b = \frac{7}{2} - \frac{32}{5} = -\frac{29}{10}$	$y = \frac{8x + 29}{10}$
	Punto Antena Punto de intersección entre la recta *l* y la recta *s*	Tenemos dos ecuaciones (1) $y = \frac{-5x+31}{3}$ (2) $y = \frac{8x+29}{10}$ Igualando las dos expresiones $\frac{4}{5}x - \frac{29}{10} = -\frac{5}{3}x + \frac{31}{3}$ $\frac{4}{5}x + \frac{5}{3}x = \frac{31}{3} + \frac{29}{10}$ $\frac{12 + 25}{15}x = \frac{310 + 87}{30}$ $x = 5.36$ Remplazando *x* en (2) $y = \frac{4}{5}(5.36) - \frac{29}{10}$ $y = \frac{21.44}{5} - \frac{29}{10}$ $y = 1.39$	$P(5.31, 1.39)$
4	✶ Validación empírica: La construcción funciona porque al obtener las coordenadas del punto antena concuerda con las coordenadas dadas por el programa. ✶ Validación Teórica: Por tres puntos puedo hacer pasar una única circunferencia.		

Tabla 10 Solución esperada Parte III Situación problema 1

3.3.2 Situación problema 2: Descubriendo Figuras geométricas

Parte I

Pregunta	Solución esperada

1	El lugar geométrico es una circunferencia tangente interna a la circunferencia dada, el punto de tangencia corresponde al punto extremo que tienen en común todas las cuerdas del radio.

Tabla 11 Solución esperada Parte I Situación problema 2

Parte II

Pregunta	Solución esperada
2	Puntos fijos: el punto A corresponde a un extremo de la cuerda de la circunferencia C Puntos móviles: el punto B que corresponde al otro extremo de la cuerda de la circunferencia y se mueve a lo largo de la circunferencia C Puntos semi-libres: El punto M corresponde al punto medio de la cuerda de la circunferencia, La posición de M va cambiando en la medida en que se mueva el punto B
3	Una circunferencia tangente interna a la circunferencia C en el punto A.
4	Validación empírica: Porque la traza del punto M cuando muevo el punto B corresponde a una circunferencia, “se ve” que es una circunferencia.
5	Todos los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia que tienen un extremo en común (el punto A) forman una circunferencia.
Socializar	
1	Este procedimiento me da una figura y los pasos que debo seguir sobre ella para poder acercarme a la respuesta; por el contario, en la *Parte I* se queda en la mera interpretación de un enunciado que lo puede hacer perder pues uno no está familiarizado con problemas de este tipo.
2	♣ Las cuerdas son segmentos que interceptan a la circunferencia en dos puntos. ♣ La mediatriz de una cuerda pasa por el centro de una circunferencia. ♣ El diámetro (el radio que está incluido en el diámetro) que pasa por el punto medio de la cuerda de una circunferencia, es perpendicular a esta cuerda. ♣ Los diámetros de la circunferencia también se pueden identificar como cuerdas en donde el punto medio corresponde al centro de la circunferencia.
3	Se forma una circunferencia
4	

Tabla 12 Solución esperada Parte II Situación problema 2

Parte III

Pregunta	Solución esperada
3	Si se puede obtener por un procedimiento analítico
4	Dada la circunferencia $C_1: (x-2)^2 + y^2 = 2^2$ El punto $M \in C'$, además el punto M por ser punto medio de la cuerda $\overline{AB}$ tiene las siguientes coordenadas: El punto $A(0,0)$ y el punto $B(x,y)$ entonces por definición de punto medio $$M_x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+x}{2} = \frac{x}{2}$$ $$M_y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{0+y}{2} = \frac{y}{2}$$ De esta manera, las coordenadas del punto medio corresponden: $M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ Remplazando en C_1, se obtiene lo siguiente: $$(x-2)^2 + y^2 = 2^2$$ $$\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 2^2$$ $$4[(x-1)^2 + y^2] = 2^2$$ $$(x-1)^2 + y^2 = 1^2$$ Esta corresponde a la ecuación de la circunferencia tangente interna en el punto A.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Proceso general de la demostración.

La demostración se realiza en dos sentidos:

Se debe probar.

1. ***“Cualquier punto medio M de la familia de cuerdas $\overline{(AB\imath)}$), con extremo común A, satisface la condición de distancia constante r/2 a un punto fijo (r/2, 0)”***

Sea A un punto de C en el origen de coordenadas, B un punto sobre C en el primer cuadrante. En la cuerda $\overline{AB}$, A: (0 , 0) y el extremo final B satisface las condiciones de la circunferencia C, por tanto, sus coordenadas son B: (X , Y) = (X, $\sqrt{r^2-(X-r)^2}$). Por tanto son las coordenadas de M: = $\left(\frac{X}{2},\frac{Y}{2}\right) = (\frac{X}{2},\frac{\sqrt{r^2-(X-r)^2}}{2})$.

Calculando la distancia d (O´, M) se obtiene sucesivamente.

$$d = \sqrt{\left(\frac{X}{2}-\frac{Y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{r^2-(X-r)^2}}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{X}{2}-\frac{Y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{r^2-(X-r)^2}}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{X}{2}-\frac{Y}{2}\right)^2+\left(\frac{r^2-(X-r)^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{(X-r)^2}{4}+\left(\frac{r^2-(X-r)^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{r^2}{4}}=\frac{r}{2}$$

Efectivamente $\frac{r}{2}$ es un valor constante.

Se debe probar.

2. ***“Todo punto que satisface las condiciones dadas está sobre la circunferencia C´”***

Se trata de mostrar que las coordenadas del punto medio M de las cuerdas satisface la forma canónica (x - h)^2 + (y – k)^2 = r^2 lo que se sigue al reemplazar x e y por $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}$ por $\frac{\sqrt{\mathbf{r^2-(x-r)^2}}}{\mathbf{2}}$; h y k por $\frac{r}{2}$ y 0.
Se obtiene la igualdad $(\frac{r}{2})^2$ = $(\frac{r}{2})^2$.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Socializar</td>
</tr>
<tr>
<td>1</td>
<td>Si, los resultados son iguales en las tres fases, la forma más fácil de hallar la respuesta al ejercicio corresponde a la tercera parte en la cual con la manipulación analítica puedo corroborar lo obtenido por el programa a través de la función “traza” es cierto, por medio de desarrollos más formales.</td>
</tr>
</table>

Tabla 13 Solución esperada Parte III Situación problema 2

Después de los análisis previos de las actividades, en los cuales se describen las respuestas que se esperan de los estudiantes ante las distintas partes de las actividades, a continuación se pretende reseñar el contexto de la institución, la población, elementos que se consideraron para la experimentación y los resultados de las actividades, que contemplan descripciones generales en las cuales se hace mención del resultados que especifican que hicieron los estudiantes en cada actividad, para esto se va a dedicar el Capítulo IV.

CAPÍTULO IV

CONTEXTUALIZACIÓN Y RESULTADOS

En este capítulo se realiza una narración de la experimentación y contextualización de los resultados; para lo cual, se consideró la institución que fue objeto de indagación, se propone una descripción general de elementos como la reseña histórica, misión, visión, recursos físicos y ubicación, que permitieran ofrecer un panorama general del contexto en el cual estaba inmerso el estudiante; de igual forma, se explican características generales de la población la cual fue objeto de observación en esta indagación.

En la descripción de la experimentación, se consideró para la organización: los materiales y espacios usados para el trabajo; estructura de las sesiones de trabajos y recursos usados para la recolección de información; por último, la explicación de lo que se encontró, es decir los resultados, que muestran los distintos momentos de cada una de las actividades puestas en acción, que permitan contestar a los siguientes interrogantes ¿qué se hizo? y ¿cómo se hizo? Estos resultados no tienen en cuenta juicios valorativos que van a ser considerado dentro del *Capítulo V*, bajo las distintas categoría de análisis que se han desarrollado y sus respectivas rejillas de análisis.

4.1 CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INSTITUCIÓN

4.1.1 Características Generales de la Institución

Se considera que el desarrollo cognitivo de los estudiantes se debe a una interacción social y cultural que implica reconocer al estudiante como un sujeto activo en su formación, en la medida en que interactúa con el otro, por ello, es importante dar a conocer algunos aspectos relacionados con el contexto del colegio Fe y Alegría "Madre Alberta.

4.1.1.1 Reseña Histórica Fe y Alegría

El colegio Fe y Alegría "Madre Alberta", está dirigido por el movimiento de Educación Popular integral y de Promoción Social "Fe y Alegría", este movimiento nace en Caracas (Venezuela) en 1955, fundado por el padre José María Vélez como una entidad no gubernamental de solidaridad social, para aunar esfuerzos de la sociedad y el estado en la creación y mantenimiento de servicios educativos y sociales en zonas deprimidas de la ciudad y del campo.

Hoy en día, Fe y Alegría se extiende por más de 13 países latinoamericanos, 1000 centros educativos y cuenta con más de 130.000 mil estudiantes, brindando a niños una educación que los prepara para la vida.

4.1.1.2 Colegio Fe y Alegría "Madre Alberta"

El colegio funciona desde 1979, tiene reconocimiento de la secretaria de educación municipal N° 0737 del 26 junio de 1995 y actualizado el 18 de junio del 2004 con N° 1304. La escuela empezó a funcionar de la mano de las religiosas "Pureza de María" y "Fe y Alegría" en el año de 1973, ubicada inicialmente en una barrio llamado Quiroga y que después recibiría el nombre de Conquistadores.

En 1992 se dio inicio a la formación de adultos en la jornada nocturna en lo que es básica secundaria. A lo largo de todos estos años se ha capacitado a los estudiantes no sólo en lo que representa la básica secundaria, sino también se prepara a los estudiantes para afrontar al mundo laboral; la solidaridad de los estudiantes se destaca por medio de la campaña del "Corazoncito" que se realiza desde 1979 y la "Rifa del Carro de Fe y Alegría" que se realiza desde 1991, ellas son actividades de común acuerdo entre todos los centros de educación de Fe y Alegría, que tienen la intención de recoger fondos para sustentar la educación de los niños de los sectores populares.

4.1.1.3 La misión y la visión del Colegio Fe y Alegría

El colegio Fe y Alegría "Madre Alberta", está dirigido por el movimiento de Educación Popular integral y de Promoción Social "Fe y Alegría", los cuales presentan ideales encaminados a favorecer a los más pobres con el fin de mejorar su educación y poder contribuir en su transformación social, en el objetivo de hacer un mundo más equitativo, más humano para todos. Es un colegio acompañado por la espiritualidad mariana en el modo de educar.

Su modelo de enseñanza va en la dirección de educar hombres y mujeres en el pensamiento crítico ante las situaciones ideológicas que los cobijan, es por eso que la metodología de la institución es "Pensamiento y Conducta inteligente", pues ésta favorece la educación de un ser integral, con sentido crítico y autónomo, siendo agente de cambio y de transformación social.

4.1.1.4 Ubicación geográfica y contexto socioeducativo

El colegio Fe y Alegría "Madre Alberta" está ubicado en la ciudad Santiago de Cali (Colombia), la institución se localiza en el Barrio "La Gran Colombia" de la Comuna 11, en el suroriente de la ciudad, Diagonal 30 N° 32B - 49. Es uno de los 22 barrios que conforman esta comuna y presenta problemas sociales como la delincuencia, vandalismo y drogadicción, el estrato social se encuentra entre uno y dos. Es una institución privada sin ánimo de lucro, aunque hay estudiantes de carácter privado, la mayoría de ellos son beneficiados en el programa de ampliación de Cobertura (que son de estrato 1 y 2) otorgado por el gobierno.

4.1.1.5 Recursos físicos

El colegio Fe y Alegría "Madre Alberta" cuenta con una planta estructural de dos pisos, pequeñas zonas verdes, dos canchas, doce salones, una sala de Informática, una biblioteca, un taller de mecánica y uno de metalistería, pues la modalidad del colegio es promocionar estudiantes en la Educación Media Técnica, la modalidad técnica no sólo abarca metalistería y mecánica, sino también lo relacionado con el comercio.

4.1.2 Características Generales de la Población

Los estudiantes de la institución presentan un estrato socio-económico bajo, correspondiente a estratos uno y dos, la mayoría de ellos son beneficiados en el programa de ampliación de cobertura otorgado por el gobierno; la población que fue sujeto de la experimentación son estudiantes de grado undécimo, las edades oscilaron entre los dieciséis y diecisiete años y participaron un total de seis estudiantes en la investigación.

Se reconoció que a los estudiantes se les enseña los conceptos relacionados con *Geometría Analítica* en el grado decimo, así se puede contemplar en el plan de estudios de la institución; con relación a la integración de tecnologías, ellos manipulan el programa "AutoCAD" que es trabajado en la modalidad de mecánica.

Estas características se tuvieron presentes en los distintos momentos dedicados en las sesiones de trabajo, a recordar elementos relacionados con la *Geometría Analítica* y en desarrollar *esquemas de uso*[21] para el manejo del programa de Cabri Géomètre II Plus presente en la resolución de las actividades.

En los siguientes apartados se hizo una descripción de la experimentación que tuviera en cuenta los recursos prestados a los estudiantes, los recursos usados para la toma de datos, la distribución, el tiempo en las distintas sesiones de trabajo, y los resultados que se obtuvieron en cada aplicación de las actividades.

4.2 LA EXPERIMENTACIÓN

4.2.1 Elementos previos para la experimentación

Los elementos que se consideraron para la organización de la experimentación contemplan: los materiales dados para la realización de las actividades por parte de los estudiantes, el espacio físico y los recursos usados para la recolección de la información.

4.2.1.1 Descripción de los materiales dados

En las sesiones de trabajo se les proporciono a los estudiantes por grupo los siguientes insumos de trabajo:

- ♣ El programa Cabri Géomètre II Plus (Versión 1.2.4.8 2001 - 2003)
- ♣ Un archivo Cabri Géomètre II Plus con su respectiva *barra de herramientas* personalizada.
- ♣ Fotocopias de la actividad
- ♣ Hojas en blanco
- ♣ Lápiz
- ♣ Borrador
- ♣ Sacapuntas

4.2.1.2 Descripción de la ubicación de la experimentación

Las actividades de experimentación se llevaron a cabo en dos espacios del colegio, la sala de informática y un salón de clases. En la sala de informática se hizo uso de dos computadores de mesa para los dos grupos de estudiantes, y un computador portátil con un Video Beam para el docente a cargo; en este espacio se hicieron las dos primeras sesiones

[21]Esquemas de Uso o Esquemas de Uso Social son considerados como invariantes representativas respecto a distintas operaciones en situaciones de actividad con instrumentos. (Santacruz, 2011, pp. 57)

de trabajo, en la ilustración 9 se muestra la distribución en la sala de los estudiantes con respecto al docente.

Ilustración 9 Distribución en la sala de Informática

En el segundo espacio, que corresponde a un salón de clase del colegio se hizo uso de dos computadores portátiles para que los dos grupos de estudiantes trabajaran en ellos, además de hacer uso del tablero acrílico, marcadores y borrador para las explicaciones necesarias en el desarrollo de la actividad, en la ilustración 10 se muestra la distribución de los estudiantes.

Ilustración 10 Distribución en el Salón de clases

4.2.1.3 Recursos usados para la recolección de la información

Para la recolección de la información se utilizó los siguientes elementos:

- ✓ Video grabadora
- ✓ Grabadora de sonido de los portátiles
- ✓ Tableta
- ✓ Hojas de Block
- ✓ Archivos Cabri Géomètre II Plus modificados

La información se recolectó a partir de los archivos de audio y video proporcionados por la cámara de video, la tableta y la grabadora de sonidos de los portátiles; esto permitió registrar los diálogos entre los grupos de estudiantes y las discusiones colectivas durante la socialización de las actividades. Por otro lado, el registro escrito y gráfico lo permitieron las hojas de block y los archivos de Cabri Géomètre II Plus en los que trabajaron los estudiantes; todos estos elementos fueron determinantes para el seguimiento de las producciones orales, escritas y la clase en general.

4.2.2 Estructura de la experimentación

La estructura de la experimentación se dividió en cuatro sesiones de trabajo en el colegio, cada una con una duración aproximada de dos horas. Las actividades exploradas se dividieron en dos partes, como previamente se ha descrito en la sección 3.4, la entrega se hizo sucesivamente por partes, generando esto el tiempo necesario para la producción individual y la socialización de cada instancia. En la tabla 14 se muestra la distribución de las distintas actividades en el tiempo.

SESIÓN	TIEMPO	ACTIVIDAD
1	01:00:00	Parte I de la Situación problema 1
1	00:45:00	Parte II de la Situación problema 1
1	01:45:00	Parte III de la Situación problema 1
2	00:40:00	Parte I de la Situación problema 2
2	00:30:00	Parte II de la Situación problema 2
2	01:00:00	Parte III de la Situación problema 2

Tabla 14 Distribución de las Actividades en el tiempo

Todas las sesiones de trabajo estuvieron marcadas constantemente por las discusiones, las cuales pusieron en consideración los procesos realizados por los estudiantes, con el objetivo de encontrar puntos en común que llevaran certeza de la aparición de los signos personales y matemáticos en los estudiantes, por lo que el debate cobró un lugar importante en la aparición de las consideraciones individuales y colectivas de la clase.

4.2.3 Resultados de la experimentación

En este apartado se desarrolla una descripción de los resultados de las distintas actividades que se pusieron en acción, al respecto se hace una descripción de cada una de las secciones junto con las producciones individuales y las discusiones que tuvieron lugar para su solución.

4.2.3.1 Situación problema 1: Construyendo una antena

Esta situación problema se puso en práctica con el objetivo de que en los estudiantes surgieran formas discursivas particulares, en donde evidenciara la necesidad de justificar sus acciones. Esta situación problema se dividió en dos sesiones de trabajo y estuvo constituida por cuatro partes: parte inicial, parte I, parte II y parte III, se les entregaron dos archivos Cabri Géomètre II Plus (ANTENA1.fig y ANTENA2.fig), y la respectiva barra de herramientas personalizada; en los siguientes apartados se van a describir los resultados obtenidos en cada parte de esta actividad.

4.2.3.1.1 Parte inicial y Parte I

En el archivo Cabri Géomètre II Plus denominado ANTENA 1.fig se les presentó tres puntos fijos A, B y C que representan los pueblos y el punto Antena que era una punto móvil, los estudiantes en esta parte de la situación problema se hicieron en grupos de dos y tres personas, habían presentes cinco estudiantes y dos grupos; ellos comenzaron a explorar la posible solución de cómo ubicar la antena de la forma adecuada y a solucionar las preguntas que se le presentaron en cada actividad, la solución dada por cada grupo se describe en la tabla 15.

	Solución Parte Inicial y Parte I de la Situación problema 1
G R U P O 1	Los estudiantes usaron distintas funciones del programa Cabri Géomètre II Plus, para este caso, se uso la función *segmento* para trazar los tres segmentos que unen a los tres puntos dados y formar el triángulo ABC, usaron la función *punto medio* para cada segmento que formaba el triángulo ABC. Se detuvieron para analizar el punto medio del segmento AC, usaron la función *distancia o longitud* para medir entre este punto medio y los puntos fijos A, B y C, este punto medio cumplía la condición de estar a igual distancia solo para dos de los puntos fijos A y C, se intentó mover pero se dieron cuenta que no se podía por lo cual dejaron de usar esta opción como una respuesta acertada. Buscando en la barra de herramientas, los estudiante intentaron explorar distintas opciones, al respecto, usaron la función *recta perpendicular* para cada uno de los puntos medios que estaba en los lados del triángulo ABC (estas rectas son las mediatrices de cada lado del triángulo ABC), encontraron el punto

	de intersección entre las tres rectas perpendiculares, y usaron la función *distancia o longitud* entre el punto de intersección y los puntos fijos A, B y C encontraron que la condición se cumplía. Los distintos resultados se consignaron de forma escrita, al igual que las demás respuestas de las preguntas propuestas en la actividad. 4.) trazar el area entre los puntos y hallar puntos medios por que si hallamos los puntos medios de los extremos quedaria en interrogante el punto medio. (antena). 3.) Utilizamos, segmentos, linea perpendicular y con estas herramientas hallamos el punto de intercepción, PUNTO MEDIO, DISTANCIA O LONGITUD *Registro escrito Grupo 1*
GRUPO 2	Los estudiantes exploraron distintas funciones del programa Cabri Géomètre II Plus, en un primer momento hicieron un punto sobre el área de trabajo y trazaron tres segmentos desde los puntos fijos A, B y C a este punto, usaron la función *distancia o longitud* para hallar las medidas entre el punto hecho sobre el área de trabajo y los puntos fijos A, B y C, e intentaron arrastrar este punto de tal forma que las medidas que tenían al lado izquierdo de la pantalla coincidieran entre sí, sin embargo, las diferencias entre estos valores se hicieron notar solo en decimales siendo difícil que fueran iguales (entre sí). En un segundo intento, los estudiantes de este grupo trazaron los tres segmentos que formaban el triángulo ABC, e intentaron hacer rectas en distintos puntos para poder encontrar la respuesta, usaron la función de *recta perpendicular* en los tres vértices del triángulo, hallaron el punto de intersección entre estas rectas y utilizando la función *distancia o longitud* encontraron la medida entre este punto de intersección y los distintos vértices, sin embargo, el grupo no obtuvo la construcción adecuada para encontrar el punto antena que cumpliera la condición. Las distintas respuestas de las preguntas se consignaron en un registro escrito. La función que utilizamos en este programa fue prime la recta perpendicular para conocer el punto medio entre los tres pueblos, luego verificamos la distancia con la función "distancia o longitud" * " Lo primero que hicimos fue marcar un punto y mover manualmente hasta tratar de encontrar distancias iguales, luego formamos un triangulo entre los tres pueblos, esto no nos sirvió de a mucho hasta que encontramos ya la opción de recta perpendicular *Registro escrito Grupo 2*

Tabla 15 Resultados de los grupos obtenido en la Parte inicial y I de la situación problema 1

Con respecto a los resultados obtenidos en la fase correspondiente a la socialización, debido a que un solo grupo fue el que obtuvo la construcción que cumpliera la condición para que el punto antena estuviera a igual distancia de los puntos A, B y C, por lo que uno de los estudiantes del grupo 1 pasó al computador, he hizo la construcción paso a paso para mostrarle a los demás estudiantes.

Las discusiones giraron en torno a las funciones del programa Cabri Géomètre II Plus que se usaban para la construcción, se identificó las funciones correctas y la forma adecuada de usarlas, así como también las respuestas dadas a las preguntas propuestas por esta sección de la actividad.

4.2.3.1.2 Parte II

Para esta parte, los estudiantes siguieron trabajando con el mismo archivo de Cabri Géomètre II Plus, la idea era que reconocieran la figura geométrica asociada a la construcción elaborada en la anterior parte que correspondía a la de una circunferencia. Para este caso, los resultados obtenidos por cada grupo se generalizan en la tabla 16.

<table>
<tr><th></th><th>Solución Parte II de la Situación problema 1</th></tr>
<tr><td>G
R
U
P
O
1</td><td>Los estudiantes identificaron la propiedad principal de la circunferencia la cual corresponde a que todos sus puntos equidistan de un punto central y usaron la función círculo para dibujar y hacer que los tres puntos A, B y C coincidieran con el perímetro de la circunferencia, sin embargo, el método de arrastrar la circunferencia e intentar que coincidieran no funcionó.

Por lo cual el docente insistió en la continuidad de la actividad y la importancia de la construcción hecha en la anterior sección, los estudiantes de este grupo reconocieron el punto antena (o punto medio como ellos lo etiquetaron) como el punto central de la circunferencia y radio hasta algunos de los puntos fijos A, B o C, se obtuvo una circunferencia que cazaba perfectamente en los tres puntos.

2. PRIMERO QUE TODO TENIAMOS QUE UBICAR EL PUNTO CENTRAL ENTRE A, B, C Y ESE PUNTO CENTRAL TOMARLO COMO REFERENCIA PARA TRAZAR ESTE CIRCULO, PARA ELLO UTILIZAMOS, SEGMENTOS PERPENDICULARES, PUNTOS MEDIOS, MEDIDAS O LONGITUDES, CIRCULOS
PROCESO:
• TRAZAMOS SEGMENTOS A, B
• TRAZAMOS SEGMENTOS B, C
• TRAZAMOS SEGMENTOS A, C
• UBICAMOS PUNTO MEDIO ENTRE A, B
• UBICAMOS PUNTO MEDIO ENTRE B, C
• UBICAMOS PUNTO MEDIO ENTRE A, C
• TRAZAMOS UNA PERPENDICULAR ENTRE A, B
• TRAZAMOS OTRA PERPENDICULAR ENTRE B, C
• Y UNA ULTIMA ENTRE A, C
• HALLAMOS UN PUNTO DE INTERSEPCION ENTRE LAS PERPENDICULARES
• HALLAMOS MEDIDAS PARA ESTAR SEGUROS DEL PUNTO MEDIO
• Y POR ULTIMO TRAZAMOS EL CIRCULO</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Registro escrito Grupo 1

Por otra parte, los estudiantes exploraron las distintas opciones de configuración de los puntos (los pueblos), por lo cual se usaron más de tres puntos con los cuales se identificaron dos resultados, primero que los puntos no pueden ser colineales y segundo que con más de tres puntos la construcción no funcionaba, pues no encontraban un punto "central" que cumpliera la propiedad principal de ser circunferencia.

Los distintos resultados de las preguntas se consignaron de forma escrita, en las cuales se describió paso a paso la construcción y se asoció la figura geométrica circunferencia.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

G R U P O 2

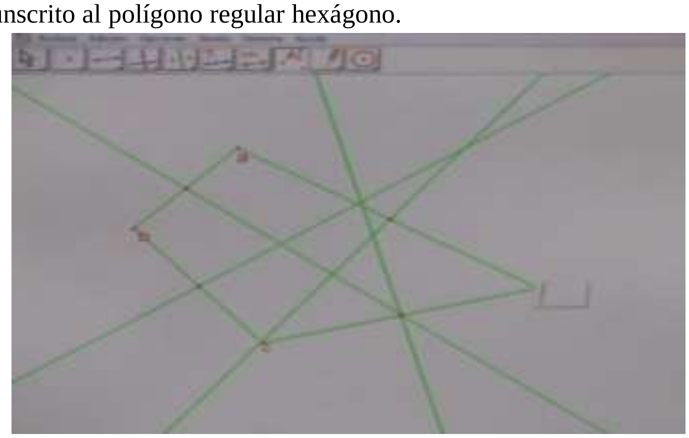
</td>
<td>

En este grupo, los estudiantes hicieron uso de la construcción para poder llegar a ubicar la circunferencia de forma que los puntos A, B y C formaran parte de la circunferencia, al respecto el punto antena fue usado como centro de la circunferencia y radio hasta el punto A.

1. La Figura geometrica que utilizariamos es un circulo, ya que su punto central donde esta ubicada la antena.
2. Le sacamos el radio y esto nos da la mitad del circulo. donde va ubicada la antena, al conocer el radio podremos acomodar el circulo para que toque los puntos A, B, C y la mitad sera la posición de la antena.
3. Realizamos un segmento entre el punto AB, BC, CA; Luego sacamos el punto medio de los segmentos y trazamos lineas perpendiculares entre el segmento y el punto. ; utilizamos el circulo como figura geometrica que abrimos desde el punto central hasta que llegara y tocara todos los puntos.
4. Esta opción funciona ya que se puede conocer de manera muy eficaz cual es el punto de intersección, no importa la distancia entre cada punto solo se necesita que existan 3 o mas.

Registro escrito Grupo 2

En relación a si la construcción funcionaba con otra configuración de puntos, los estudiantes usaron varios puntos para verificar la construcción, sin embargo no llegaron a un resultado acertado; por lo cual, con ayuda del docente se explicó el tipo de polígono que se estaba formando y llegaron a la conclusión, que solo funcionaba la construcción para polígonos regulares, logrando encontrar una circunferencia circunscrito al polígono regular hexágono.



</td>
</tr>
</table>

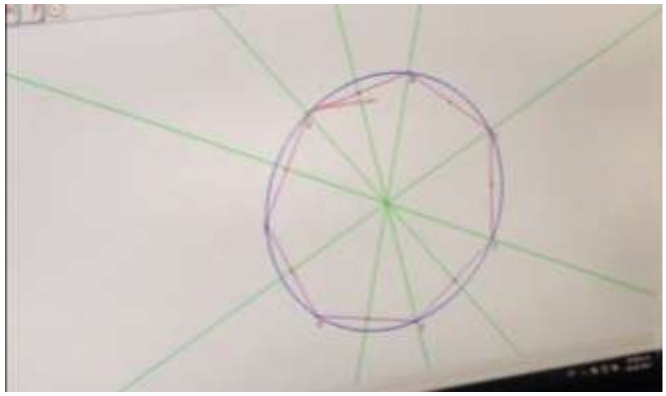
	Registro digital (archivo Cabri) Grupo 2  *Registro digital (archivo Cabri) Grupo 2* Los estudiantes consignaron sus resultados de forma escrita, describiendo el procedimiento para la construcción de la circunferencia, las distintas funciones del programa usadas, y las configuraciones de puntos para las cuales la construcción era pertinente.

Tabla 16 Resultados de los grupos obtenido en la Parte II de la Situación problema 1

En el segundo momento de la actividad se discutieron los resultados con la clase, de tal manera que los estudiantes usaran la construcción para encontrar la circunferencia; igualmente para identificar las razones por las cuales la construcción funciona, para ello, fue necesario reconocer distintos elementos de la circunferencia como cuerdas, centro, radio, diámetro, y los elementos asociados a la construcción como mediatriz, punto de intersección, y en reconocer la relación de la mediatriz con el centro de la circunferencia.

4.2.3.1.3 Parte III

En la tercera parte de esta actividad se dedicó una sesión completa para su solución por la complejidad en los cálculos, se les instaló un archivo de Cabri Géomètre II Plus denominado ANTENA 2.fig que tenía una barra de herramientas personalizada, se describió el proceso para abrir estos dos archivos.

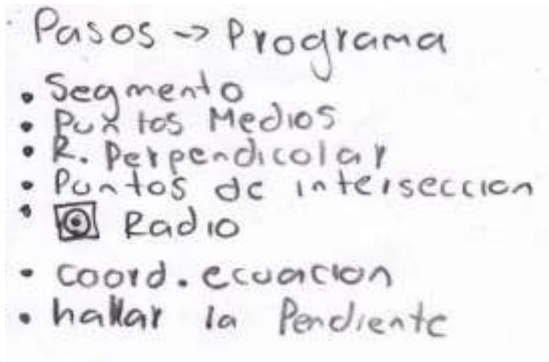
Para este caso, el objetivo se centraba en encontrar la solución con ayuda de la construcción reconocida en la sección anterior e identificar las coordenadas del punto antena, en el transcurso de las sesión hubo varias intervenciones por parte del docente para recordar conocimientos previos como ecuación de la recta punto-pendiente, ecuación del punto medio, relación entre las pendientes de rectas perpendiculares, sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Los resultados por parte de cada grupo se describen en la tabla 17.

	Solución Parte III de la Situación problema 1

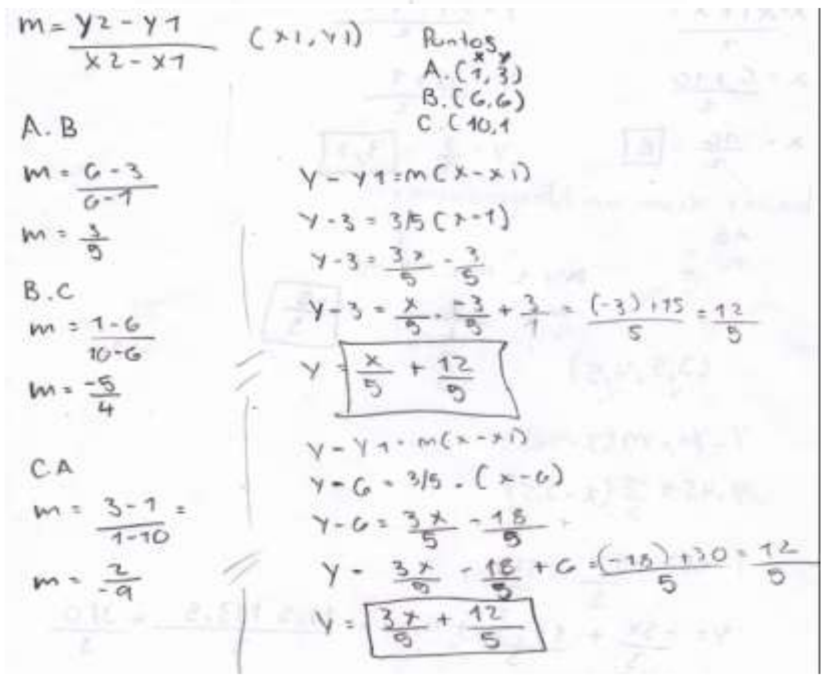
<table>
<tr>
<td>G
R
U
P
O
1</td>
<td>

Para esta parte de la actividad, los estudiantes reconocieron la intervención del plano cartesiano para la solución, identificando las coordenadas como elementos directores. Usando la construcción que se identificó en las partes anteriores de la actividad, los estudiantes describieron las ecuaciones de cada uno de los elementos que intervenían en el paso a paso de la construcción.

Los estudiantes describieron los objetos básicos usados en la construcción, así como el procedimiento para obtener sus respectivas ecuaciones, este proceso estuvo mediado por las intervenciones del docente para ejemplificar el procedimiento para obtener las ecuaciones de los distintos elementos.



Pasos → Programa
- Segmento
- Pun tos Medios
- R. Perpendicolar
- Puntos dc intersección
- Radio
- coord. ecuación
- hallar la Pendiente



$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (x_1, y_1)

Puntos
A. (1, 3)
B. (6, 6)
C. (10, 1

A. B
$m = \frac{6-3}{6-1}$
$m = \frac{3}{5}$

B. C
$m = \frac{1-6}{10-6}$
$m = \frac{-5}{4}$

C. A
$m = \frac{3-1}{1-10} =$
$m = \frac{2}{-9}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 3 = 3/5\,(x-1)$
$y - 3 = \frac{3x}{5} - \frac{3}{5}$
$y - 3 = \frac{x}{5} \cdot \frac{-3}{5} + \frac{3}{1} = \frac{(-3)+15}{5} = \frac{12}{5}$
$y = \boxed{\frac{x}{5} + \frac{12}{5}}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 6 = 3/5 \cdot (x-6)$
$y - 6 = \frac{3x}{5} - \frac{18}{5}$
$y - \frac{3x}{5} - \frac{18}{5} + 6 = \frac{(-18)+30}{5} = \frac{12}{5}$
$y = \boxed{\frac{3x}{5} + \frac{12}{5}}$

Registro escrito Grupo 1

Los estudiantes usaron la función de *coordenadas y ecuación* para hallar la ecuación de los distintos elementos básicos dados por el programa, ellos daban el procedimiento para obtener cada respuesta comparando con los resultados obtenidos por el programa.

Este grupo no registró las coordenadas del punto antena, el procedimiento dado fue incompleto llegando solo a obtener las ecuaciones de las rectas perpendiculares.

</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>

Para esta parte de la actividad, los estudiantes completaron la tabla dada y usaron las funciones del programa Cabri Géomètre II Plus como *coordenadas y ecuación*, y *pendiente* para hallar las ecuaciones de cada uno de los elementos básicos: puntos medios, rectas, rectas perpendiculares y puntos de intersección; consignaron por escrito el procedimiento para obtener cada ecuación y coordenada de tal manera que usaban los resultados dados por el programa Cabri Géomètre II Plus para compararlos. (Debido a que el procedimiento para obtener las ecuaciones es extenso no se hace

</td>
</tr>
</table>

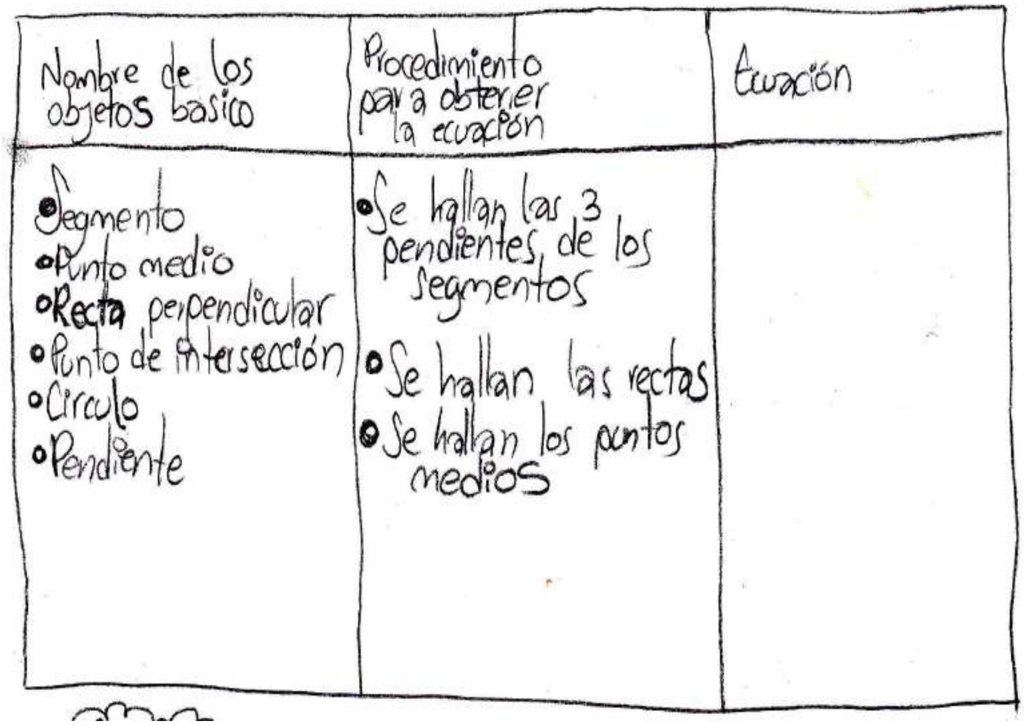
<table>
<tr>
<td>G
R
U
P
O
2</td>
<td>copia de los registros escritos véase anexos)

<table>
<tr><th>Nombre de los objetos basico</th><th>Procedimiento para obtener la ecuación</th><th>Ecuación</th></tr>
<tr><td>• Segmento
• Punto medio
• Recta perpendicular
• Punto de intersección
• Circulo
• Pendiente</td><td>• Se hallan las 3 pendientes, de los segmentos
• Se hallan las rectas
• Se hallan los puntos medios</td><td></td></tr>
</table>
Registro escrito Grupo 2
Los estudiantes tuvieron dificultades en la manipulación aritmética y algebraica de las distintas expresiones. Aun así, este grupo encontró uno de las componentes de las coordenadas del punto antena, se registraron la mayoría de los datos y en el proceso se comparó con los resultados dados por el programa.</td>
</tr>
</table>

Tabla 17 Resultados de los grupos obtenido en la Parte III de la Situación problema 1

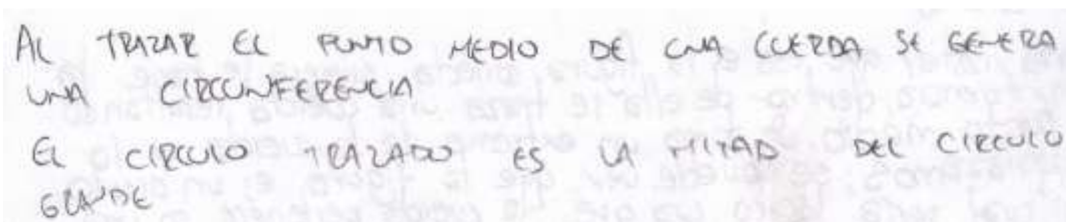
Debido a la extensión de esta sección, la socialización se hizo en términos de verificar lo obtenido de forma escrita con los resultados dados por el programa, se identificaron dificultades para encontrar las ecuaciones de las rectas mediatrices y en consecuencia las coordenadas del punto antena, y la deficiencia de algunas manipulaciones aritméticas de las expresiones, solo el grupo dos culminó el proceso; por el contrario, el grupo uno, no logro llegar a los resultados de forma procedimental.

4.2.3.2 Situación problema 2: Descubriendo Figuras geométricas

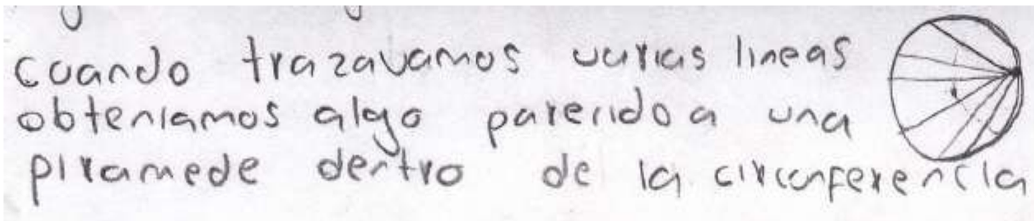
En esta situación problema se puso en acción el *problema abierto*, el objetivo de esta puesta en acción era identificar elementos que intervinieran en la continuidad cognitiva entre la conjetura y la demostración. Esta sección se dividió en tres partes, en la primera se integró el *problema abierto*, en la segunda la solución a preguntas desde el método sintético y en la tercera intervino el plano cartesiano para la solución con el método analítico. Se les entregó dos archivos Cabri Géomètre II Plus lg1.fig y lg2.fig, con su respectiva barra de herramientas personalizada; en los siguientes apartados se van a describir los resultados obtenidos en cada parte de esta actividad.

4.2.3.2.1 Parte I

Se les hizo entrega del enunciado para el *problema abierto* y se les pidió a los estudiantes crear un archivo Cabri para identificar lo que el enunciado les solicitaba y poder construir una posible solución, en la tabla 18 se describen los resultados elaborados por cada grupo.

	Solución Parte I de la Situación problema 2
G R U P O 1	Los estudiantes de este grupo realizaron una circunferencia y distintas cuerdas; en la circunferencia, hallaron los puntos medios de cada cuerda pero no lograban identificar la figura que se formaba. Por lo tanto, el docente intervino y explicó lo que significa que las cuerdas tuvieran un punto extremo en común. Cuando los estudiantes usaron la función *arrastre* sobre uno de los extremos de la cuerda identificaron la figura correspondiente a una circunferencia, usaron la función de traza para comprobar sus resultados. Entre los resultados hallados, los estudiantes afirmaron que la circunferencia obtenida correspondía a la mitad de la circunferencia dada.  AL TRAZAR EL PUNTO MEDIO DE UNA CUERDA SE GENERA UNA CIRCUNFERENCIA EL CIRCULO TRAZADO ES LA MITAD DEL CIRCULO GRANDE *Registro escrito Grupo 1*
G R U P O 2	Los estudiantes de este grupo hicieron la circunferencia y dos cuerdas, cada una con un punto en común como un extremo, hallaron los puntos medios y sugirieron que la figura que formaba los puntos medios de las cuerdas era un triángulo. Sin embargo, al agregar más cuerdas para un total de cinco, lo estudiantes reformularon su respuesta aludiendo a que la figura que se formaba correspondía a una pirámide. ***Docente 2:*** *ahí está hablando de cuerdas* ***Docente 2:*** *de las cuerdas [se hace énfasis en la expresión], plural.* ***Estudiante 2:*** *cuál es el lugar geométrico de los punto medios de las cuerdas, por eso puse dos, de una circunferencia* ***Docente 2:*** *¿pueden ser más o no?* ***Estudiante 2:*** *si, más* ***Estudiante 2:*** *que tienen en uno de sus extremos un punto en común, yo puedo colocar otro segmento o sea otra cuerda, otra vez con el mismo punto en común, porque ese es el punto de intersección aún lado. Yo puedo hacer infinitas cuerdas.* ***Docente 2:*** *la idea es identificar cual es la figura que se forma, primera conjetura se forma un triángulo* ***Estudiante 2:*** *Ahora se ve como una pirámide* ***Docente 2:*** *una pirámide y ¿por qué una pirámide?*

Estudiante 2: *si lo voy a hacer me va ha dar unos quiebres*
Docente 2: *¿unos quiebres?*
Estudiante 2: *si, unos quiebres, si una pirámide*
Docente 2: *si entonces puedes escribir eso.*
Estudiante 2: *ah, si*
Docente 2: *te daría una pirámide*
Estudiante 2: *va unidos rectas [gira el pc noventa grados y muestra lo que ve]*

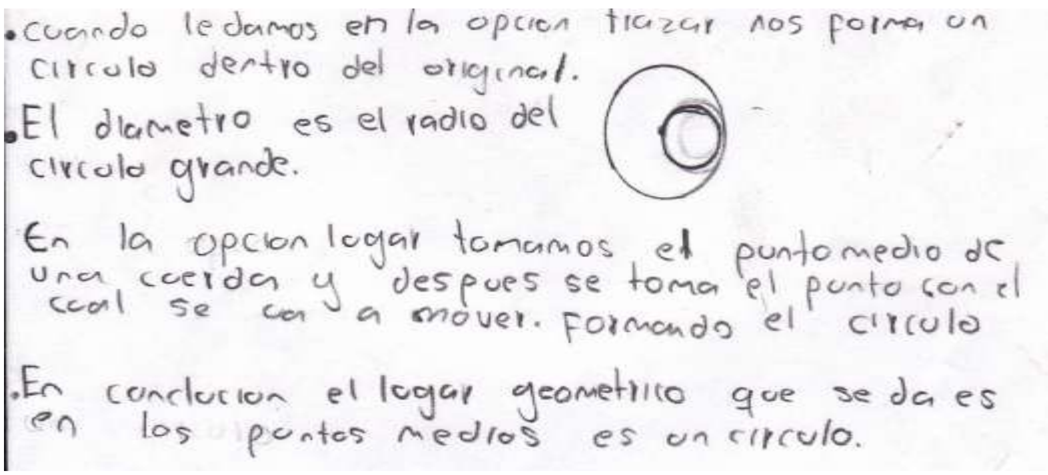

cuando trazavamos varias lineas obteniamos algo parecido a una piramede dentro de la circunferencia

Registro escrito y verbal Grupo 2

Al respecto, el docente hizo una aclaración sobre los distintos tipos de puntos libres y semilibres, al identificar esto, el estudiante arrastró uno de los puntos extremos de una cuerda dando como resultado la figura circunferencia.

Usaron funciones de Cabri Géomètre II Plus como *traza* y *lugar geométrico* para confirmar la figura encontrado.

Relaciones como que el diámetro de la circunferencia obtenida correspondía al radio de la circunferencia dada.


• Cuando le damos en la opcion trazar nos forma un circulo dentro del original.
• El diametro es el radio del circulo grande.
En la opcion lugar tomamos el punto medio de una cuerda y despues se toma el punto con el cual se va a mover. Formando el circulo
. En conclucion el lugar geometrico que se da es en los puntos medios es un circulo.

Registro escrito Grupo 2

Tabla 18 Resultados de los grupos obtenido en la Parte I de la Situación problema 2

Con respecto a la socialización de los resultados, a parte de identificar de forma grupal que los puntos medios de las cuerdas formaban como figura geométrica la circunferencia, se reconoció que la circunferencia obtenida correspondía a la mitad de la circunferencia dada, de igual manera, que el diámetro de la circunferencia obtenida correspondía al radio de la circunferencia dada. Además se discutió sobre las distintas herramientas de Cabri Géomètre II Plus como *traza* y *lugar geométrico* que permiten confirmar si los supuestos sobre la figura eran ciertos.

4.2.3.2.2 Parte II

Para esta segunda parte de la actividad, se les instalo en los computadores previamente un archivo Cabri lg 1.fig en el cual había una representación del *problema abierto*, en este caso se ayudó al estudiante para que identificara algunas propiedades que el *problema abierto* no proporcionaba y justificara la figura geométrica encontrada, los resultados se describen en la tabla 19.

	Solución Parte II de la Situación problema 2
GRUPO 1	Los estudiantes identificaron los distintos puntos móviles y la figura que forma los puntos medios de las cuerdas de la circunferencia, hicieron un enunciado que generalizara las relaciones entre los puntos medios de las cuerdas de la circunferencia y la figura obtenida correspondiente a la circunferencia. Sin embargo, cuando intentaron justificar que esta figura era la correcta, ellos aseguran que es lógico porque las cuerdas hacen parte de una circunferencia. AL TENER UN SEGMENTO AB CON A EN UN PUNTO FIJO Y B MOVIBLE CON UN PUNTO MEDIO "M" Y TENER EL PUNTO "O" COMO MITAD DE CIRCUNFERENCIA. SI ARRASTRAMOS B POR ALREDEDOR DE LA CIRCUNFERENCIA EL PUNTO M FORMARA UN CIRCULO QUE PASARA POR EL PUNTO O Y SERA LA MITAD DE LA CIRCUNFERENCIA GRANDE MI FIGURA ES CORRECTA POR QUE B SE MUEVE EN UNA CIRCUNFERENCIA POR LO TANTO EL PUNTO M (PUNTO MEDIO AB) TIENDE A FORMAR OTRA CIRCUNFERENCIA *Registro escrito Grupo 1* De igual manera, se mostró que la configuración funcionaba para cualquier tamaño de circunferencia. Los resultados se entregaron de forma escrita. 4- Para mostrar que esa es la figura correcta primero se hace la circunferencia, dentro de ella se traza una cuerda resaltando su punto medio. Se toma un extremo de la cuerda y lo desplazamos; se puede ver que la figura es un circulo, lo cual sería lógico ya que la cuerda pertenece a una circunferencia y si se desplaza solo se puede mover por esta. 5- Si, porque solo cambia la circunferencia y la cuerda, no los puntos medios *Registro escrito Grupo 1*
	De igual forma, en este apartado los estudiantes describieron los objetos móviles y la figura que formaba los puntos medios de las cuerdas; la justificación de la razón por la cual se forma esa figura fue dada en términos de que era un lugar geométrico y que esos fueron los resultados arrojados por la figura, además, la forma para mostrar que esa figura era la correcta lo hacían identificando la función de lugar

GRUPO 2	geométrico. 1. los objetos que puedo arrastrar es el B. . Por mas que se cambie de lugar no se sale de la circunferencia y su tamaño varia 2. cuando Muevo B, le damos en opcion figula en el punto medio y el punto con el cual se va a mover y su figura que da es un circulo dentro de la circunferencia. 3. Por que es el lugar geometrico y por que son los resultados que nos arroja el punto medio de la circunferencia *Registro escrito Grupo 2* Los resultados se entregaron de forma escrita.

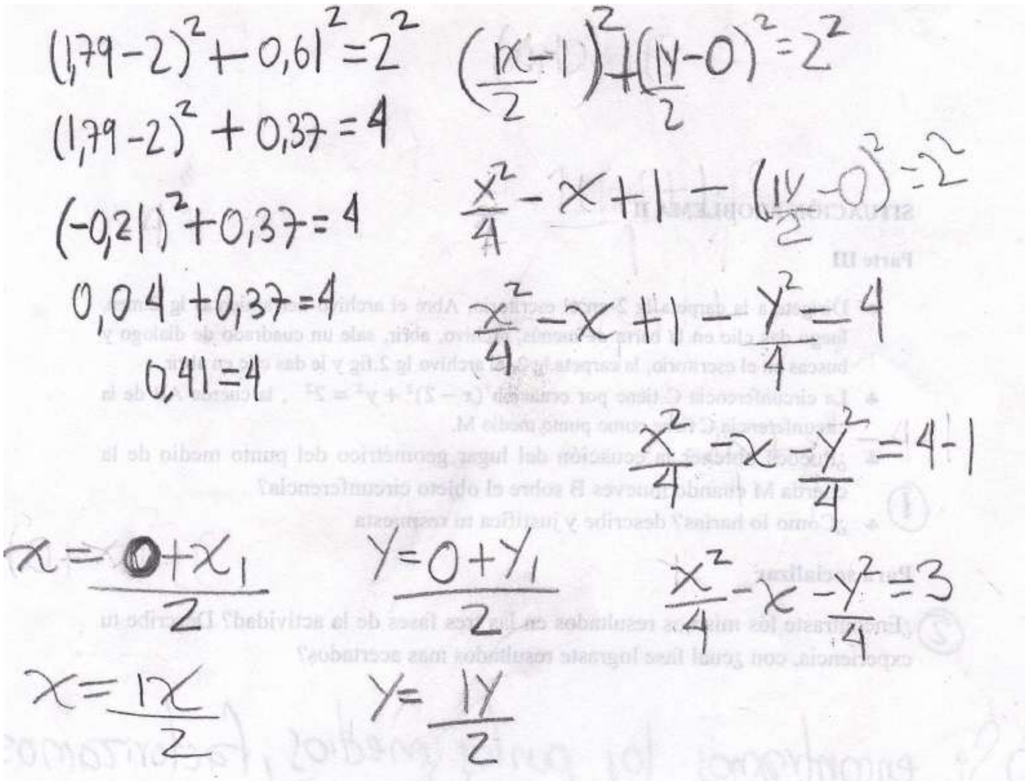
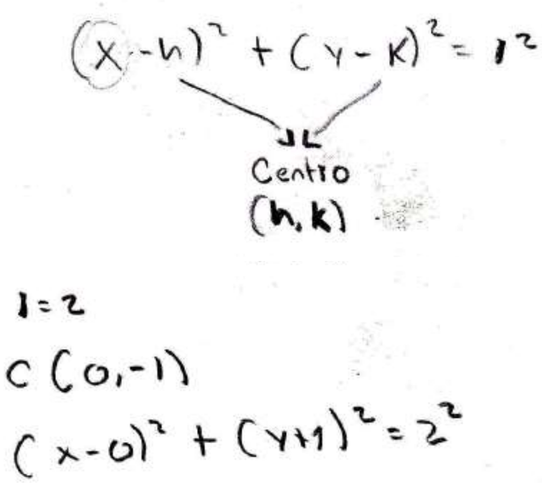
Tabla 19 Resultados de los grupos obtenido en la Parte II de la Situación problema 2

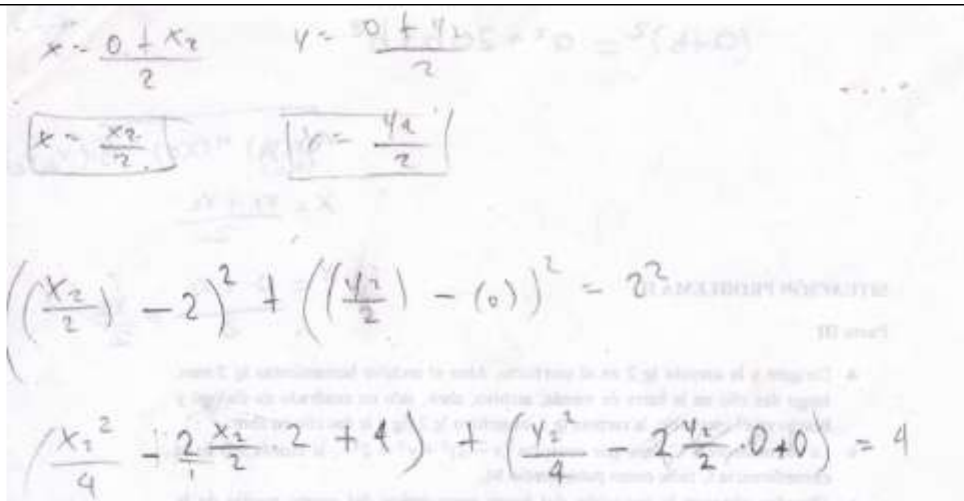
En la socialización de los resultados, se incentivó para que los estudiantes justificaran y mostraran porque la figura obtenida era la correcta, de igual forma se hizo explicito las distintas herramientas de Cabri Géomètre II Plus que podían usar para sus justificaciones. Se discutieron las distintas propiedades de las cuerdas y la relación explícita entre la circunferencia obtenida por los puntos medios de las cuerdas y la circunferencia dada. Además, se tuvieron en cuenta otras circunferencias para mostrar que ese siempre iba a ser el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia.

4.2.3.2.3 Parte III

En esta parte a los estudiantes se les presentó un archivo Cabri lg 2.fig en la cual la figura estaba ubicada de forma conveniente y tenía un sistema de representación cartesiano que les permitiera encontrar la solución, para este caso el objetivo estaba dirigido a encontrar la ecuación del lugar geométrico encontrado, en la tabla 20 se presentan los resultados.

	Solución Parte III de la Situación problema 2
GRUPO 1	Los estudiantes usaron como base la ecuación de la circunferencia dada, además para llegar a la respuesta se ayudaron de la función *coordenadas y ecuación* para obtener la ecuación del lugar geométrico. Con intervención del docente identificaron la forma de las coordenadas del punto medio, debido a que este punto era el que formaba la nueva circunferencia, remplazaron este valor en la ecuación de la circunferencia inicial. Sin embargo, cambiaron el valor del centro en esta ecuación por las coordenadas del centro de la

<table>
<tr><td></td><td>circunferencia obtenida y remplazaron el valor de x y de y, por las coordenadas del punto medio. Hubo dificultades en la manipulación aritmética y algebraica de las expresiones, por lo que la respuesta no coincidía con la dada por el programa.

$(1{,}79-2)^2+0{,}61^2=2^2$ $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\left(\frac{y-0}{2}\right)^2=2^2$
$(1{,}79-2)^2+0{,}37=4$
$(-0{,}21)^2+0{,}37=4$ $\frac{x^2}{4}-x+1+\left(\frac{y-0}{2}\right)^2=2^2$
$0{,}04+0{,}37=4$ $\frac{x^2}{4}-x+1-\frac{y^2}{4}=4$
$0{,}41=4$
$\frac{x^2}{4}-x-\frac{y^2}{4}=4-1$
$x=\frac{0+x_1}{2}$ $y=\frac{0+y_1}{2}$ $\frac{x^2}{4}-x-\frac{y^2}{4}=3$
$x=\frac{1x}{2}$ $y=\frac{1y}{2}$
 Registro escrito Grupo 1 </td></tr>
<tr><td></td><td>En este grupo, se les ayudó a identificar de forma general las coordenadas del punto medio y remplazaron este valor en la ecuación de la circunferencia dada. Igual que en el caso del grupo anterior se identificaron falencias en la manipulación aritmética y algebraica, que evitaban poder llegar a la respuesta, fue el grupo que se acercó de mejor manera a la respuesta, aunque su respuesta tampoco coincidió con la dada por el programa que era lo que lo estudiantes siempre esperaban.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
Centro
(h,k)
$r=2$
$c(0,-1)$
$(x-0)^2+(y+1)^2=2^2$</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>G
R
U
P
O
2</td>
<td>

Registro escrito Grupo 2</td>
</tr>
</table>

Tabla 20 Resultados de los grupos obtenido en la Parte III de la Situación problema 2

Con relación a la socialización, hubo dificultades pues los tiempos no alcanzaron para dicho proceso, por lo cual se decidió recoger todos los registros escritos de esta actividad y darle cierre a la participación de los estudiantes en este proceso, aclarando las posibles ventajas de este tipo de investigaciones en la formación de los estudiantes en la básica secundaria y así como también en la formación de maestros.

Finalmente se puede decir que las actividades en gran parte fueron productivas para los estudiantes, pues aprendieron a argumentar paso a paso la solución de las actividades, esa fue una de las tareas que necesitábamos, ya que era fundamental conocer la manera como los estudiantes iban argumentando las soluciones encontradas, para los estudiantes también fue importante retomar varios de los conceptos de la Geometría Analítica, como segmento, punto medio, distancia, recta perpendicular y paralela, coordenada, circunferencia y punto de intersección, y sobre todo el hecho de hacerlo con la ayuda de un AGD como Cabri Géomètre II Plus, los estudiantes están en el rango categórico de poder identificar una conjetura, como evidentemente sucedió, pero cuando se les pidió el paso de demostrar dicha conjetura, allí se evidencia la no necesidad de la demostración, por una parte porque la responsabilidad de la verdad es dejada al AGD y por otra parte, se puede decir que las preguntas generadas no llevaron a promover esa necesidad de la demostración; en la parte final de las conclusiones se presentan unas preguntas que surgen como resultado de esta indagación y que son promovidas para que sean elaboradas en futuras investigaciones.

CAPITULO V

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el desarrollo del presente capítulo se hace un análisis de los resultados encontrados en la experimentación y consignados en el *Capítulo IV*, para lo cual se hace uso de una rejilla de análisis para agrupar y organizar la información recolectada, de tal manera que se reconozcan las relaciones entre los resultados obtenidos y las categorías de análisis, es decir la relación entre el marco teórico y el marco experimental.

Al respecto se describen las distintas categorías de análisis que han surgido como resultado de la relación entre los objetivos de esta indagación y los enfoques teóricos propuestos, al respecto, las tres categorías de análisis: *continuidad cognitiva, herramienta de mediación semiótica y complementariedad entre el método sintético y el método analítico*.

La rejilla de análisis es un dispositivo de organización y coordinación entre la teoría y lo encontrado de forma experimental, de esta manera, se desprenden de cada categoría de análisis ciertas conclusiones que son retomadas al final como elementos constitutivos de los resultados generales de esta indagación.

5.1 REJILLA DE ANÁLISIS

La rejilla de análisis que se considera para efectos prácticos de esta indagación se pretende construir a través de análisis por actividades, de las cuales solo se va analizar en su totalidad *la situación problema 2*, *la situación problema 1* pretende desarrollar prácticas discursivas particulares que preparan a los estudiantes para justificar y argumentar sus acciones dentro de las soluciones de las actividades, además para recordar los conocimientos previos necesarios para solucionar *la situación problema 2*.

La estructura de la rejilla de análisis contempla los siguientes componentes para el diseño:

- ♣ *Actividad:* nombre de la actividad
- ♣ *Categoría de análisis General:* corresponde a los temas generales que surgen de los distintos enfoques teóricos considerados en el capítulo II que concuerdan con los objetivos planteados de esta indagación.

- *Categoría de análisis Específica:* corresponde a los subtemas de las categorías teóricas generales.
- *Elementos constitutivos:* corresponden a los elementos particulares que surgen de la interpretación del marco teórico.
- *Elementos emergentes:* corresponden a los elementos particulares que surgen de la interpretación del marco experimental, y que no han sido considerados previamente a la aplicación de la experimentación.
- *Producción individual:* en este componente se analizan tanto los *elementos constitutivos* como los *elementos emergentes* en las producciones grupales de los estudiantes (discursos escritos y orales de los grupos).
- *Producción colectiva:* en este componente se analizan los *elementos constitutivos* y los *elementos emergentes* en las producciones colectivas de toda la clase, para este caso la socialización y los registros de las discusiones orales son las consideradas.

Estos componentes conforman la rejilla de análisis; esta estructura responde a una organización de procesos de forma temporal, es decir, se relacionan las categorías de análisis correspondientes al marco teórico con los resultados obtenidos en la experimentación en la etapa de producción individual y en la de producción colectiva que se relaciona con los momentos dados por el *ciclo didáctico*; debido a que en la experimentación se dividió en tiempos de acción, primero la exploración y producción por parte del estudiantes (producciones individuales) en donde se espera el surgimiento de signos personales, y luego la socialización y puesta en común en la clase guiada por el docente (producciones colectivas) en donde se espera el surgimiento de signos matemáticos.

En relación con la *categoría de análisis general* y *la categoría de análisis específico* se constituyen en temas y subtemas respectivamente, que se integran en el marco teórico. Los *elementos constitutivos* al igual que l*os elementos emergentes* son elementos particulares de las categorías de análisis, el primero de ellos consecuencia del marco teórico y el otro del marco experimental; estos componentes responden a la relación entre los objetivos de indagación y el marco teórico propuesto. En la ilustración 11 se muestran las relaciones entre los componentes de la rejilla de análisis.

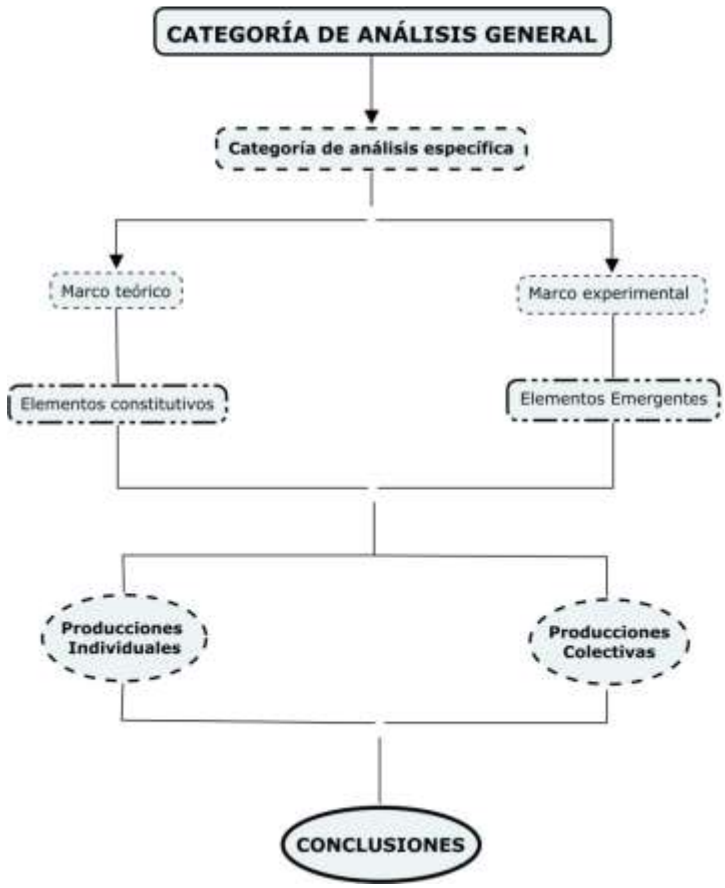


Ilustración 11 Relación entre los componentes de la rejilla de análisis

En los siguientes apartados se realiza una descripción de las distintas categorías de análisis generales, con su correspondiente rejilla de análisis y las conclusiones.

5.2 CATEGORIAS DE ANÁLISIS GENERALES

Las categorías de análisis generales se consideran para organizar y evaluar los resultados dados por la experimentación, estas son: *continuidad cognitiva*, *herramienta de mediación semiótica y complementariedad entre el método sintético y el método analítico.* Cada una de estas categorías responde de manera directa a los objetivos propuestos en esta indagación, y en general intentar caracterizar e identificar la continuidad cognitiva entre la conjetura y la demostración en el aprendizaje de la *Geometría Analítica* en la circunferencia.

La categoría de análisis *Continuidad Cognitiva* pretende evidenciar si hubo producción de conjeturas y si esas conjeturas evolucionaron a una demostración, para ello, se van a tener en cuenta los distintos registros escritos, transcripciones de los registros orales y las construcciones elaboradas en los archivos Cabri; con ello, se pretende determinar algunos elementos fundamentales que posibiliten reconocer cómo funciona el Modelo de *Unidad Cognitiva*.

La categoría de análisis *herramienta de mediación semiótica*, busca identificar la producción de signos personales y de signos matemáticos, y la evolución de un signo a otro, a partir de los distintos registros escritos, las transcripciones de los registros orales y las construcciones elaboradas en los archivos Cabri; de tal manera que permita reconocer algunos elementos necesarios para generar una propuesta que integre un AGD como *instrumento de mediación semiótica* en la solución de *problemas abiertos* que involucren la producción de conjeturas y demostraciones con la circunferencia.

La categoría de análisis *complementariedad entre el método sintético y el método analítico* pretende identificar las soluciones elaboradas por los estudiantes por medio del método analítico y el sintético a través de los distintos registros escritos, transcripciones de los registros orales y las distintas construcciones elaboradas en los archivos Cabri; esto con la finalidad de poder establecer algunos componentes que permitan identificar la relación entre el método sintético y analítico para el aprendizaje de la geometría en la producción de conjeturas y demostraciones.

En la ilustración 12 se muestran las relaciones de las categorías de análisis con los objetivos específicos de esta indagación de tal forma que permita cumplir el objetivo general.

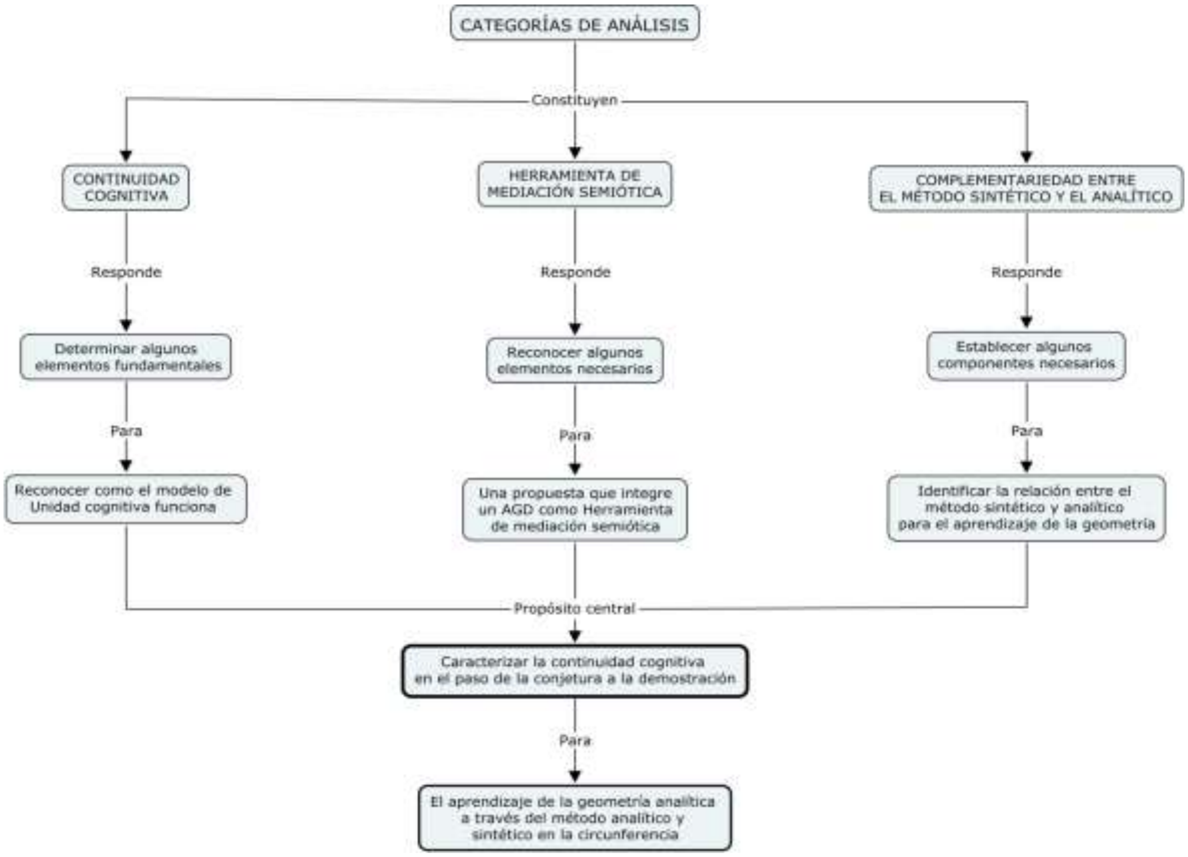


Ilustración 12 Relación entre las categorías de análisis y los objetivos

5.2.1 Continuidad Cognitiva

En esta categoría de análisis se pretende identificar el surgimiento de la *continuidad cognitiva* entre la *producción de una conjetura* y la *producción de su demostración*, para ello, la *actividad argumentativa* es el proceso al cual se le va hacer seguimiento, debido a que los argumentos usados por los estudiantes para la aceptación de los enunciados que generan una conjetura pueden evolucionar, de tal forma que estos argumentos estén de acuerdo con un modelo teórico-lógico que los pueda validar y estructurar, es así como estos argumentos pueden ser potencialmente usados para construir la prueba (Baccaglini – Frank, 2010).

Las categorías de análisis especificas corresponden a la *producción de conjeturas* y la *producción de demostraciones*; los elementos constitutivos para este caso, se vinculan con las definiciones dadas en inicio del capítulo II, a saber, para la conjetura: un enunciado, unos argumentos y un sistema de concepciones (Pedemonte, 2007); con respecto a la demostración: un enunciado, unos argumentos y una teoría matemática (Mariotti, 2006). En la ilustración 13 se muestran las relaciones entre los elementos.

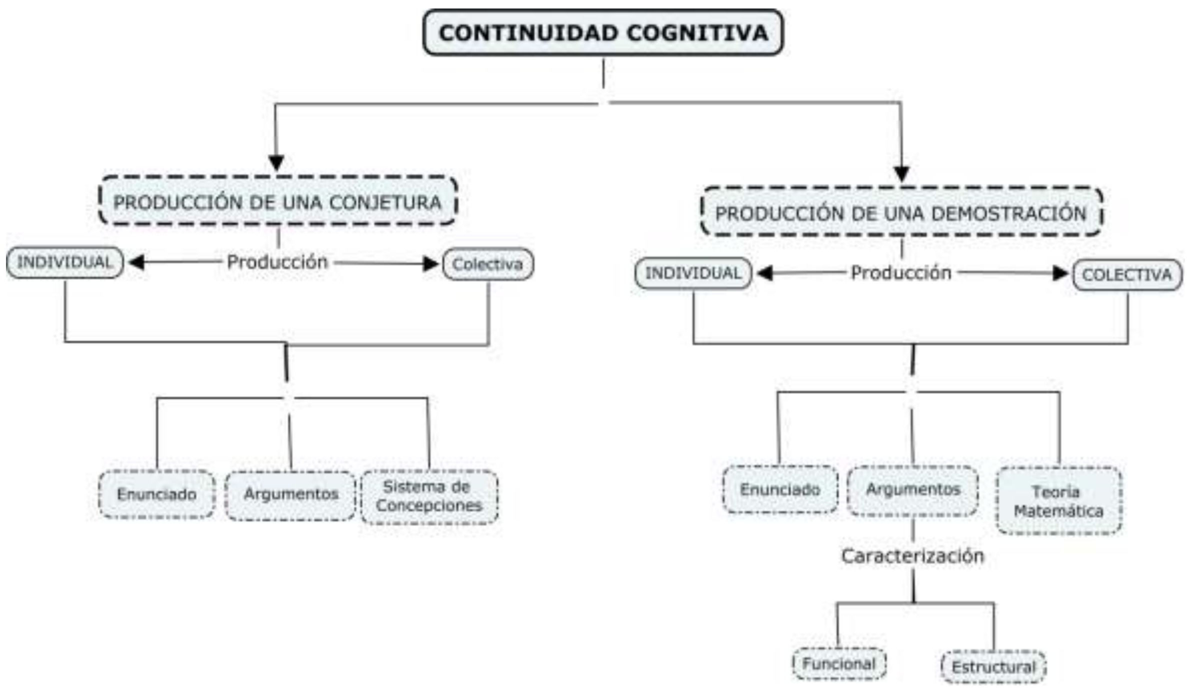
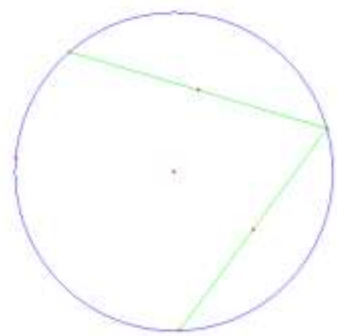


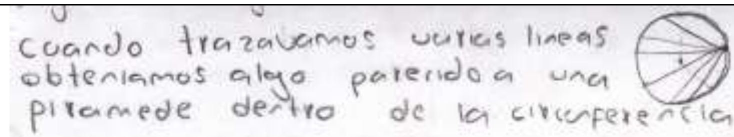
Ilustración 13 Elementos de la Categorías de análisis *Continuidad Cognitiva*

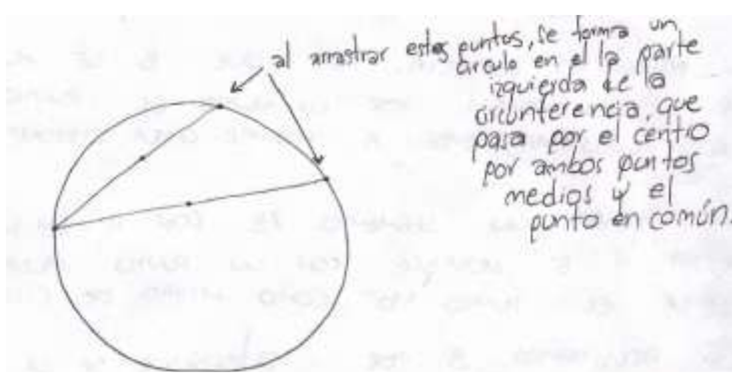
5.2.1.1 Producción de una conjetura

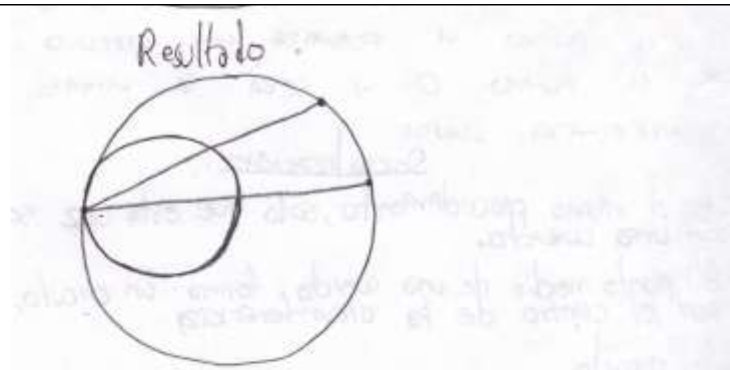
En esta categoría de análisis específica se identifican los elementos constitutivos de una conjetura: enunciado, argumentos y sistema de concepciones asociados a la soluciones de las actividades propuestas. Para este caso, se analiza la *situación problema 2* debido a que es en esta actividad donde se ubicó el *problema abierto*, que según el enfoque de la *Unidad Cognitiva* es una herramienta metodológica crucial para la generación de conjeturas. En la rejilla de análisis de la tabla 21 se hace una descripción de los resultados.

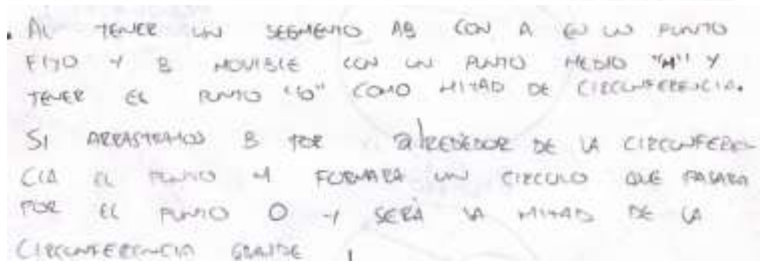
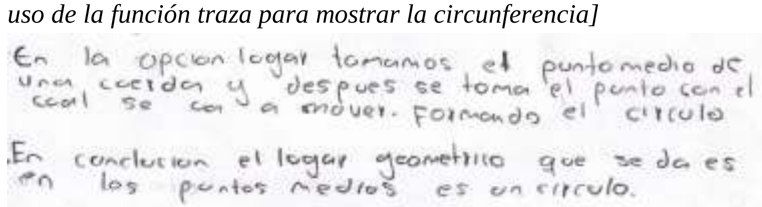
ACTIVIDAD	Situación problema 2: Descubriendo Figuras geométricas	
CATEGORIA DE ANÁLISIS GENERALES	Continuidad Cognitiva	
CATEGORÍA DE ANÁLISIS ESPECIFICA	Producción de una conjetura	
ELEMENTOS CONSTITUTIVOS	Enunciado, argumentos y sistema de concepciones	
ELEMENTOS EMERGENTES	No se reconoció	
PRODUCCIÓN INDIVIDUAL	Enunciado 1	Figura triángulo
	Argumentos1	***Docente 2:*** *¿qué se te ocurre que se pueda formar?*

		Estudiante 2: *un triángulo, yo puedo colocar esto aquí así* ***Estudiante 1.*** *Un triángulo también* ***Docente 2:*** *también un triángulo, recuerden que en Cabri también puedes mover puntos de la circunferencia.* ***Estudiante 1:*** *porque hablan de dos puntos, porque tienen un punto común [señalando en la pantalla el punto común y los dos puntos medios de las cuerdas]*  *Registro Verbal y Gráfico Grupo 2*
	Sistema de concepciones 1	Identifican la representación de un triángulo, como una figura geométrica que pasa por tres puntos que no sean colineales, que se forma por tres segmentos.
	Enunciado 2	Figura una pirámide
	Argumentos 2	***Docente 2:*** *ahí está hablando de cuerdas* ***Docente 2:*** *de las cuerdas [se hace énfasis en la expresión], plural.* ***Estudiante 2:*** *¿cuál es el lugar geométrico de los punto medios de las cuerdas, por eso puse dos, de una circunferencia?* ***Docente 2:*** *¿pueden ser más o no?* ***Estudiante 2:*** *si, más* ***Estudiante 2:*** *que tienen en uno de sus extremos un punto en común, yo puedo colocar otro segmento o sea otra cuerda, otra vez con el mismo punto en común, porque ese es el punto de intersección aún lado. Yo puedo hacer infinitas cuerdas.* ***Docente 2:*** *la idea es identificar cuál es la figura que se forma, primera conjetura: se forma un triángulo* ***Estudiante 2:*** *Ahora se ve como una pirámide* ***Docente 2:*** *una pirámide y ¿por qué una pirámide?* ***Estudiante 2:*** *si lo voy a hacer me va a dar unos quiebres* ***Docente 2:*** *¿unos quiebres?* ***Estudiante 2:*** *si, unos quiebres, si una pirámide* ***Docente 2:*** *si entonces puedes escribir eso.* ***Estudiante 2:*** *ah, si* ***Docente 2:*** *te daría una pirámide* ***Estudiante 2:*** *va unidos con rectas [se refiere a los segmentos que forma los puntos medios de las cuerdas unidos con el punto en común de todas las cuerdas]*

<table>
<tr><td></td><td></td><td>

Registro Verbal y Escrito Grupo 2</td></tr>
<tr><td></td><td>Sistema de concepciones 2</td><td>Asocian la figura a una pirámide, reconocen los cuatro lados que tiene y sus cuatro vértices, y el vértice como el punto común entre las cuerdas.</td></tr>
<tr><td></td><td>Enunciado 3</td><td>El lugar geométrico es un círculo</td></tr>
<tr><td></td><td>Argumentos 3</td><td>Docente 1: ¿Qué se formó ahí? ¿Qué objeto?
Estudiante 1: un círculo
Docente 1: ¿el círculo?
Estudiante 1: hacer con otra con esta de acá, no lo ha marcado este punto
Estudiante 2: da lo mismo, no ve que pasa por lo mismo
Estudiante 1: este es el punto medio
Docente 1: ¿Qué se formó?
Estudiante 1: un círculo
Docente 1: entonces ¿cuál es el lugar geométrico de esos puntos medios dos cuerdas?
Estudiante 1: un círculo
…
Docente 1: ¿ya lo comprobaste con la otra cuerda?
Estudiante 1: ponerle punto medio
Estudiante 2: da lo mismo pasa por, espérame, yo le doy en traza
Docente 1 ¿por qué crees que pasa por el mismo lado?
Estudiante 1: es que no has ubicado el lugar
Estudiante 2: da lo mismo porque uno le da raya y es lo mismo
Estudiante 1: porque tienen el mismo punto en común de partida ¿o qué?
Estudiante 2: así puede ser, ¿no profe?
Estudiante 1: porque tienen el mismo punto en común o que el mismo punto en común da…
Estudiante 2: si puede ser una clave

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>



AL TENER UN SEGMENTO AB CON A EN UN PUNTO FIJO Y B MOVIBLE CON UN PUNTO MEDIO "M" Y TENER EL PUNTO "O" COMO MITAD DE CIRCUNFERENCIA.
SI ARRASTRAMOS B POR ALREDEDOR DE LA CIRCUNFERENCIA EL PUNTO M FORMARA UN CIRCULO QUE PASARA POR EL PUNTO O Y SERÁ LA MITAD DE LA CIRCUNFERENCIA GRANDE.
Registro Verbal y Escrito Grupo 1
Docente 2: entonces escribe eso ahí, el tip es identificar cuáles son los puntos móviles y cuáles son los puntos semilibres y cuáles son los puntos que están sujetos a la construcción para también ayudarse a poder identificar el lugar.
Estudiante 2: este punto está quieto, yo creo que este punto se puede mover
Docente 2: si tu lo mueves ¿lo mueves alrededor de qué?
Estudiante 2: siempre va a ser lo mismo siempre va a coincidir con los otros puntos de las otras cuerdas, siempre siempre
Docente 2: y entonces ahí qué podrías identificar que se forma, sigue manteniendo…
Estudiante 2: otro círculo, ¿no?
Docente 2: no se, ¿cómo podrías encontrarlo? si es eso, primero escriben las de la pirámide porque… y luego escriben las de las otras
Estudiante 2: espérate que yo estoy como… venga aquí necesito
Docente 2: por ahí hay muchas opciones, ¿no?
Estudiante 2: expresión, nombrar, traza en este punto entonces si yo cojo este, con este, trazar algo aquí me da un círculo y ya, otro círculo, con diámetro la mitad de la primera
Estudiante 2: esto no es ningún triángulo lo que va a dar ahí [hacen uso de la función traza para mostrar la circunferencia]

En la opcion logar tomamos el puntomedio de una cuerda y despues se toma el punto con el cual se va a mover. Formando el circulo
En conclucion el logar geometrico que se da es en los puntos medios es un circulo.
Mas adelante:
</td>
</tr>
</table>

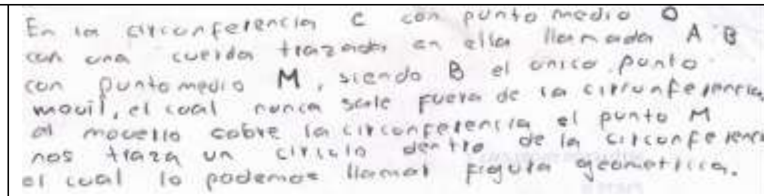
		 En la circunferencia C con punto medio O con una cuerda trazada en ella llamada A B con punto medio M, siendo B el unico punto movil, el cual nunca sale fuera de la circunferencia al moverlo sobre la circunferencia el punto M nos traza un circulo dentro de la circunferencia el cual lo podemos llamar figura geometrica. *Registro Verbal y Escrito Grupo 2*
	Sistema de concepciones 3	Identifican la figura como una circunferencia porque reconocen en el programa Cabri Géomètre II Plus un medio para validar sus enunciados. Reconocen las figuras inscritas. Sin embargo el nombre que le dan es equivocado
PRODUCCIÓN COLECTIVA	Enunciado	El lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia es una circunferencia
	Argumentos	Argumento 1: *las cuerdas que hicimos son cuerdas de la circunferencia por lo tanto al arrastrarse da una circunferencia.* Argumento 2: *es lógico porque está dentro de una circunferencia, las cuerdas.* Argumento 3: *porque las cuerdas tienen el mismo punto en común.* Argumento 4: *al usar la opción traza nos formó un círculo dentro del original.* Argumento 5. *Al usar la opción lugar y nos arroja visualmente la formación de una circunferencia dentro de una circunferencia.*
	Sistema de concepciones	Identifican la figura como una circunferencia porque reconocen en el programa Cabri Géomètre II Plus un medio para validar sus enunciados. Reconocen que los elementos de una circunferencia pueden formar otras figuras inscritas.

Tabla 21 Rejilla de análisis Categoría Producción de una conjetura de la Situación problema 2

Dentro de las distintas conjeturas que hicieron los estudiantes es importante destacar el factor heurístico que provee el AGD Cabri Géomètre II Plus para la exploración, la visualización y el *arrastre*; sus distintas herramientas permitieron al estudiante hacer que evolucionaran sus juicios temporales, pasar de una mirada estática de la figura (como cuando proponían que se formaba un triángulo y una pirámide) a una mirada dinámica (como cuando el estudiante arrastraba un extremo de la cuerda y se formaba la circunferencia), se tiene además que funciones como la *traza* son potentes para dinamizar este proceso, al igual que el desarrollo de esquemas de uso para la función *arrastre* debido a que se evidencia la necesidad de que el *arrastre* sea una acción recurrentemente a ser usada por los estudiantes para la solución de actividades de este tipo.

Por otro lado, la proposición de actividades de tipología *problemas abiertos* son potentes para producir conjeturas, debido a que al no sugerir ningún método en la solución pueden fomentar en el estudiante la curiosidad por encontrar la solución y darle un sentido propio a su proceso de argumentación, bajo sus producciones individuales y su *actividad argumentativa* (Baccaglini - Frank, 2010); para este caso, surgieron tres conjeturas relacionadas con el posible lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de la circunferencia cuando tenían un extremo como punto común: un triángulo, una pirámide y una circunferencia. La última conjetura *El lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia que tienen un extremo como punto en común, es una circunferencia.*

Dentro del proceso, y a partir de los registros escritos, se evidencia la dificultad por parte de los estudiantes en identificar la diferencia entre círculo y circunferencia, es decir en la forma de nombrar el área y el perímetro de la circunferencia, esto puede ser causado por falencias en la formación de los estudiantes en sus anteriores años o porque la versión del AGD Cabri Géomètre II Plus que se usó, la función para hacer circunferencias se denomina círculo y puede causar confusiones en los estudiantes.

5.2.1.2 Producción de una demostración

Para esta categoría de análisis específica los elementos constitutivos son el enunciado, argumentos y la teoría matemática. Dentro de los argumentos reconocidos se identifican dos características: la funcional, que comprende la finalidad, uso y función de la argumentación dentro de la demostración, y la estructural, en términos de estructuración lógica entre los argumentos de la demostración, con ello, se identifica qué tipo de argumento se ve dentro de la demostración. Para este caso, solo se hizo análisis de la *situación problema 2* razón expuesta en la anterior sección. Las rejillas de análisis correspondiente se presentan en la tabla 22:

ACTIVIDAD	Situación problema 2: Descubriendo Figuras geométricas
CATEGORIA DE ANÁLISIS GENERALES	Continuidad Cognitiva
CATEGORÍA DE ANÁLISIS ESPECIFICA	Producción de una demostración
ELEMENTOS CONSTITUTIVOS	Enunciado, argumentos y teoría matemática.
ELEMENTOS EMERGENTES	Ninguno

	Enunciado	No hubo enunciado explícito
PRODUCCIÓN INDIVIDUAL	Argumentos	$\underbrace{(x-h)^2+(y-k)^2}_{\text{Centro } (h,k)}=r^2$ $r=2$ $C(0,-1)$ $(x-0)^2+(y+1)^2=2^2$ $x=\frac{x_1+x_2}{2} \longrightarrow$ Punto Medio $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ $\boxed{x=\frac{x_2}{2}}$ $\boxed{y=\frac{y_2}{2}}$ $\left(\left(\frac{x_2}{2}\right)-2\right)^2+\left(\left(\frac{y_2}{2}\right)-(0)\right)^2=2^2$ $\left(\frac{x_2^2}{4}-\frac{2}{1}\frac{x_2}{2}\cdot 2+4\right)+\left(\frac{y_2^2}{4}-2\frac{y_2}{2}\cdot 0+0\right)=4$ $\frac{x_2^2}{4}-4\frac{x_2}{2}+4+\frac{y_2^2}{4}=4$

		$\frac{x_2^2}{4} - \frac{4x_1}{2} + \frac{y_2^2}{4} = 4-4$ $\frac{x_2^2}{4} - \frac{4x_2}{2} + \frac{y_2^2}{4} = 0.$ $\frac{2x_2^2 - 16x_2}{8} + \frac{y_2^2}{4} = 0$ $\frac{2x_2^2 - 16x_2}{8} = -\frac{y_2^2}{4}$ $2x_2^2 - 16x_2 = -\frac{y_2^2}{4} \cdot 8$ $2x_2^2 - 16x_2 = -\frac{8y_2^2}{4}$ $2x_2^2 - 16x_2 = -2y_2^2$ $2x_2^2 - 16x_2 + 2y_2^2 = 0$ $2(x_2^2 - 8x_2 + y_2^2) = 0$ *Registro Escrito Grupo 2*

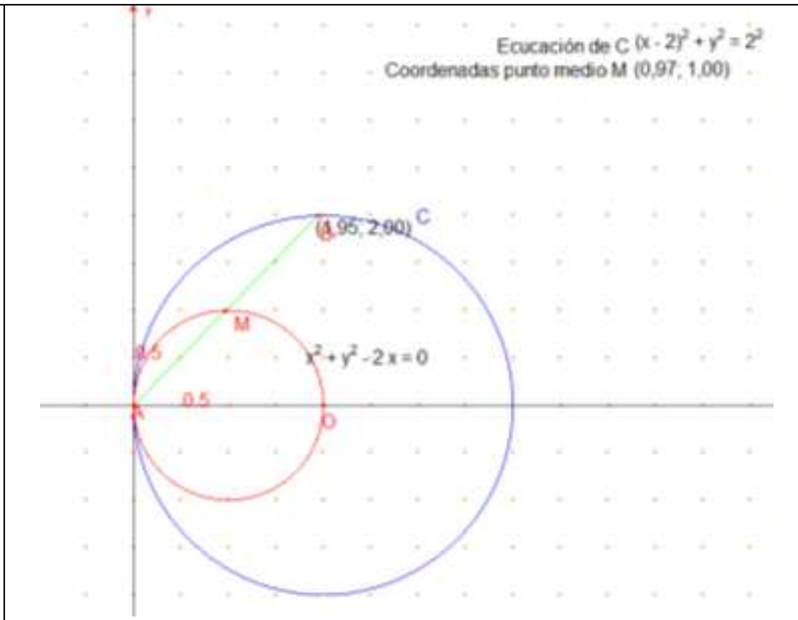
		 *Registro Virtual Grupo 2*
	Teoría matemática	Ecuación de una circunferencia, radio de una circunferencia, centro de una circunferencia, ecuación del punto medio, Propiedad uniforme, Binomio cuadrado perfecto, operaciones básicas de fracciones, propiedad asociativa.
PRODUCCIÓN COLECTIVA	Enunciado	Enunciado 1: *al tener un segmento AB con un punto medio M, con un punto O, dado una circunferencia podemos deducir que si arrastramos B por el rededor de la circunferencia, el punto B me formara un punto que pasara por un punto O, que será la mitad de la circunferencia grande.* *Registro Verbal Grupo 1* Enunciado 2: *en la circunferencia C, con un punto medio O, con una cuerda trazada en ella llamada AB, segmento con punto medio M, siendo E el único punto móvil el cual nunca sale fuera de la circunferencia, al moverlo sobre la circunferencia nos traza un círculo dentro de ella y el cual lo podemos llamar figura geométrica.* *Registro Verbal Grupo 2*
	Argumentos	No hubo una socialización completa de la actividad por la falta de tiempo en la sesión de trabajo.
	Teoría matemática	Ecuación de una circunferencia, radio de una circunferencia, centro de una circunferencia, ecuación del punto medio, Propiedad uniforme, Binomio cuadrado perfecto, operaciones básicas de fracciones, propiedad asociativa.

Tabla 22 Rejilla de análisis Categoría Producción de una Prueba de la Situación problema 2

Con respecto a los resultados encontrados en esta categoría de análisis se evidenciaron falencias en la manipulación algebraica de las expresiones como propiedades y operaciones entre fracciones; con relación a la producción de una demostración de manera completa no se presentó, los estudiantes con ayuda del docente identificaron la relación que había entre las coordenadas del punto medio (móvil) y la ecuación de la circunferencia inicial C, pero no lograron encontrar la ecuación del lugar geométrico; aunque los estudiantes ya identificaban este lugar geométrico como una circunferencia.

Estas dificultades pueden deberse a que los estudiantes tenían deficiencias en la formación de sus conocimientos previos necesarios para la producción de la demostración; la necesidad de tiempos pertinentes que consideren la evolución de este proceso de forma paulatina, de tal manera que permita un mayor exploración por parte de los estudiantes y la socialización de los resultados que sea gestionado por el docente para que ayude a la evolución de los argumentos usados en la conjetura y puedan estructurar la demostración; esto muestra, la necesidad de una mejor gestión por parte del docente para generar un avance acertado de los argumentos, aunque en esta indagación el papel del docente no fue sujeto de observación. Estas son quizás debilidades por las cuales el modelo de *Unidad Cognitiva*, no se ajustó, ni funcionó en esta propuesta; aun así se pueden identificar algunas relaciones entre los argumentos dados y el esquema inicial de demostración planteado; de igual forma referirse al estado de las funciones de la demostración.

Con respecto a los argumentos dados y el esquema inicial de la demostración, se puede sugerir que los argumentos estuvieron estructurando en términos funcionales a la demostración, es decir permitían entender el significado de ese esquema, debido a que si los estudiantes tenía claro que el lugar geométrico era una circunferencia, ya tenían en cuenta la forma de la ecuación que tenían que encontrar; así mismo, al relacionar el punto móvil (punto medio de las cuerdas) que era el que formaba la circunferencia inscrita se logro relacionar la ecuación de coordenadas del punto móvil (punto medio) con la ecuación de la circunferencia C dada inicialmente; sin embargo, identificar una estructura deductiva entre sus premisas y las conclusiones es muy incipiente, pues los estudiante aún no tienen ese esquema condicionante ($P \rightarrow C$) propio de una demostración de carácter lógico-deductivo.

Con relación a las funciones de la demostración, se pueden identificar indicios de cada una de las funciones que se dan en la escuela, función de explicación y función de aceptación: en el caso de la función de explicación, los estudiantes justifican por qué ese era el lugar geométrico que se formaba con los puntos medios de las cuerdas y no otro; para la función de validación se evidenció cómo los estudiantes delegaban la aceptación de los enunciados al AGD Cabri Géomètre II Plus, al usar las funciones *coordenada y ecuación, traza y lugar geométrico* para aceptar los resultados como correctos, en las actividades propuestas el estudiante realizaba los procedimientos en el registro escrito de tal manera que concordaran con lo dado por estas funciones del AGD; no obstante, en la mayoría de las ocasiones no lograban encontrar los mismos resultados, esto sugiere que la evolución de la validación empírica propuesta por el AGD no consiguió llegar a una validación matemática basada en la teoría geométrica, aunque el estudiante intentara con el registro escrito llegar a lo dado en el AGD, se puede considerar como un intento de validación matemática.

En conclusión, para esta actividad la cual consistía en identificar y demostrar cuál era el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas que tienen un extremo como punto en común, de una circunferencia, se mostró que aunque los estudiantes reconocieron que el lugar geométrico correspondía a una circunferencia con la ayuda de la proposición del *problema abierto*, esta tipología de actividades se queda corta en su acción pues no evoca a la necesidad de probar ese lugar geométrico; al proponer otro tipo de pregunta en donde los estudiantes vieran la necesidad de encontrar la ecuación del lugar geométrico, se encontró que los estudiantes hicieron un primer esquema donde reconocieron el vínculo entre el punto medio y la circunferencia dada a través del uso del instrumento como mediador semiótico y sobretodo la función arrastre, pero no llegaron a una demostración del enunciado.

Para este caso, se puede decir con relación a las continuidades asociadas a la continuidad cognitiva entre la conjetura y su demostración, que el modelo no se ajustó; por lo que es necesario centrar más la atención en involucrar al estudiante en una comprensión de una estructura deductiva asociada con el instrumento e igualmente en actividades que recurran a la necesidad de que sus soluciones sean dadas con este tipo de estructura.

Con ello, los resultados de la experimentación sugieren con relación a la continuidad cognitiva entre la producción de conjeturas y su demostración puede ser dado si se tienen en cuenta los aspectos para la puesta en acción del modelo de la *Unidad Cognitiva* sugeridos en la tabla 23:

Relación	Elementos	Características
Actividad – Estudiante	Diseño adecuado de las actividades	Problemas abiertos para producir conjeturas.
		Tipología de preguntas más explicitas para construir la demostración.
Conocimientos – Estudiante	Conocimientos previos	Conocimientos geométricos
		Conocimientos algebraicos
		Conocimiento de Geometría Analítica: Sistema de referencia, ecuación de un punto, punto medio, ecuación de una recta, distancia
AGD – Estudiante	Desarrollar Esquemas de Uso para integrar el AGD	Reconocer las funciones de Cabri Géomètre II Plus importantes: arrastre, traza, las macro, los objetos geométricos, relaciones y lugar geométrico
Docente – Estudiante	Gestión docente	Con las distintas preguntas ayudar a que los argumentos usados para construir la conjetura evolucionen para producir la demostración.

Tabla 23 Aspectos para la continuidad Cognitiva

En la siguiente sección se hace una descripción de la categoría de análisis general *instrumento de Mediación Semiótica*, que permite reconocer la forma cómo funcionó el AGD como apoyo en la evolución de los argumentos desde significados personales a significados matemáticos de manera especifica.

5.2.2 *Instrumento de mediación semiótica*

En esta categoría de análisis general se reconoce al AGD Cabri Géomètre II Plus como *instrumento de mediación semiótica*, en este sentido fue considerado el análisis de la doble relación semiótica, característica esencial de este tipo de instrumentos, por lo cual se tuvieron en cuenta dos categorías de análisis específicas asociadas a esta doble relación con la integración del AGD. Por un lado, *los signos personales* que son resultado de la solución de actividades propuestas por el docente, integrando para este caso el Cabri Géomètre II Plus, por otro lado, *los signos matemáticos* que son consecuencia de lo que está culturalmente aceptado ante la comunidad matemática y asociados a la integración del AGD. El objetivo de integrar el AGD como *instrumento de mediación semiótica* está relacionado con la posibilidad de reconocer los signos personales y hacer que con la orientación del docente estos signos evolucione a signos matemáticos. En la ilustración 14 se describen las relaciones entre los componentes de esta categoría.

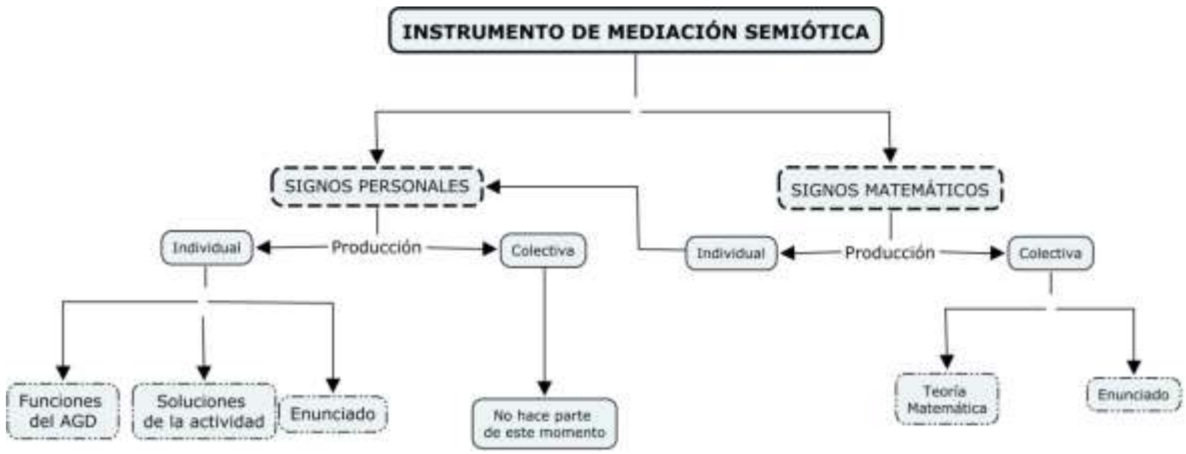


Ilustración 14 Elementos de la Categorías de análisis *Instrumento de mediación semiótica*

5.2.2.1 Signos Personales

En esta categoría de análisis especifica, los elementos constitutivos corresponden a las soluciones de las actividades propuestas dadas por el estudiante, las funciones del AGD que permitían llegar a esas soluciones y el enunciado general, estos elementos tienen su justificación en la medida en que sea interpretada la integración del AGD como un *mediador semiótico*. En tabla 24 se muestra la rejilla de análisis para la *situación problema 2*.

ACTIVIDAD	Situación problema 2: Descubriendo Figuras geométricas	
CATEGORIA DE ANÁLISIS GENERALES	*Instrumento de mediación semiótica*	
CATEGORÍA DE ANÁLISIS ESPECIFICA	Signos Personales	
ELEMENTOS CONSTITUTIVOS	Función del AGD, solución de la actividad y enunciado	
ELEMENTOS EMERGENTES	No se reconoció	
PRODUCCIÓN INDIVIDUAL	Funciones del AGD	Las funciones que fueron usadas por los estudiantes corresponden a la función *arrastre*, la función *traza* y la función *lugar geométrico,* asociada la función *coordenadas y ecuación.* Función de *arrastre* ***Estudiante 1:*** *¿cuáles son…las que puedo arrastrar?* ***Estudiante 2:*** *el B no más, el M no se mueve el A tampoco, el O tampoco y el C, que es el círculo, tampoco.*

1. los objetos que puedo arrastrar es el B.
2. Por mas que se cambie de lugar no se sale de la circunferencia y su tamaño varia

Registro Verbal y Escrito Grupo 2

Función *traza*

Docente 2: *las opciones que se les ocurrieron ¿las escribieron?*

Estudiante 2: *eso se llama traza, esa es la propiedad traza por ese punto por ahí, él es que va a pasar aquí va a pasar por la mitad de todas las cuerdas, ¿si ves?*

Estudiante 2: *si pilla va a pasar, ¿ve? ¿lo ve? deja la marca*

Docente 1: *bien muchachos exploren ¿qué se formó ahí?*

Docente 2: *escriben la primera y la segunda conjetura que les dio*

Estudiante 2: *entonces, que pues a ver… si yo saco la mitad otro círculo pequeño aquí*

Docente 1: *entonces van escribiendo los pasos, que ya lo comparaste con la otra*

Estudiante 2: *hay hombre, ¿por qué se borró?*

Registro Verbal Grupo 2

Función Lugar Geométrico

Estudiante 2: *la opción lugar*

Docente 2: *¿cómo funcionaba?*

Estudiante 1: *la opción lugar tomamos el punto medio*

Estudiante 2: *el punto medio de una cuerda donde coinciden todas, después se toma el punto por el cual se va a mover al dar clic ahí me va a aparecer de una.*

Docente 2: *ustedes ¿creen que eso se puede hacer en otra circunferencia? ¿va a pasar lo mismo o solo en esa?*

Estudiante 1: *ese círculo no lo podemos mover*

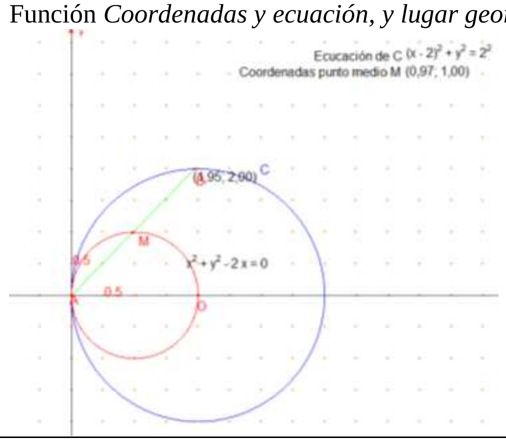
Docente 2: *¿Cuál? el círculo si, si mueven este, bueno ya terminaron de escribir los resultados y escriban la conclusión general*

Estudiante 1: *una conclusión*

Estudiante 2: *el lugar geométrico es un círculo*

Registro Verbal Grupo 2

Función *Coordenadas y ecuación, y lugar geométrico*



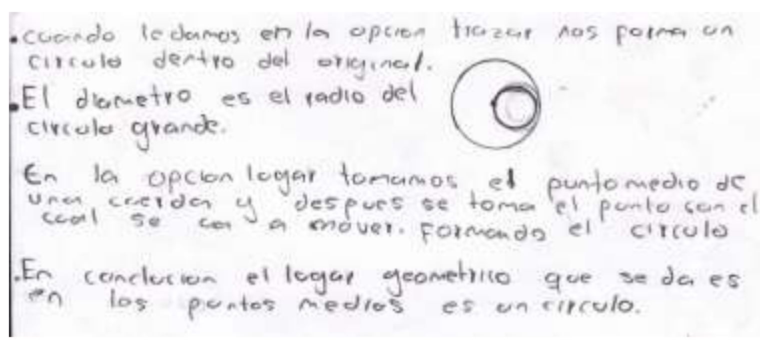
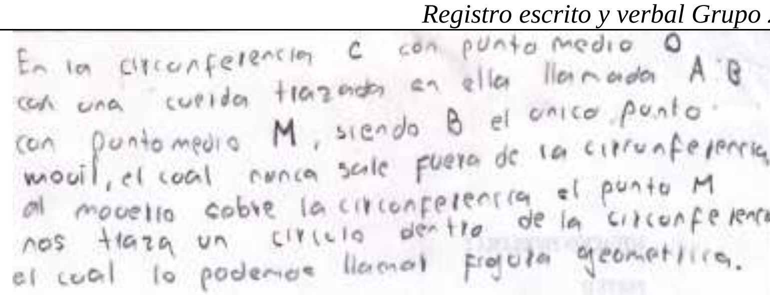
		Registro Verba y Virtual Grupo 2
	Solución de la actividad	***Estudiante 1:*** *¿cuáles son…las que puedo arrastrar?* ***Estudiante 2:*** *el B no más, el M no se mueve el A tampoco, el O tampoco y el C que es el círculo tampoco* ***Estudiante 1:*** *dice identificar las que podas arrastrar y descríbelas…la variación que va sobre ellas la circunferencia* ***Estudiante 2:*** *es una unidad que se hace más grande y más corta* ***Estudiante 1:*** *pero esta no se pasa de la circunferencia* ***Estudiante 1:*** *porque es una cuerda, identifica los objetos que puedes arrastrar y escribe cuál es la variación que ves sobre ellos* ***Estudiante 2:*** *la variación que veo sobre ellos es que siempre por más que se muevan nunca va a salir de esa circunferencia y por la variación del tamaño de la cuerda* ***Estudiante 1:*** *si mueves B ¿qué configuración forma el punto M? cuando mueves B ¿puedes identificar alguna figura?* ***Estudiante 2:*** *es un círculo otra vez, espérate debe ser un círculo vamos a ver, es un círculo, vea!* ***Estudiante 1:*** *¿qué opción fue que le diste otra vez?* ***Estudiante 2:*** *figura* ***Estudiante 1:*** *¿qué configuración forma el punto M cuando es O? puedes identificarlo con la figura* ***Estudiante 2:*** *mira, ve ni la letra se va, ve* ***Estudiante 1:*** *dice, ¿por qué crees que la figura es la correcta?* ***Estudiante 2:*** *porque es la, el lugar geométrico, no es el lugar geométrico.* ***Estudiante 1:*** *porque ahí están los resultados que nos arrojan el punto medio de la circunferencia*  •cuando le damos en la opcion trazar nos forma un circulo dentro del original. •El diametro es el radio del circulo grande. En la opcion lugar tomamos el punto medio de una cuerda y despues se toma el punto con el cual se va a mover. Formando el circulo .En conclucion el lugar geometrico que se da es en los puntos medios es un circulo. *Registro escrito y verbal Grupo 2*
	Enunciado	 En la circunferencia C con punto medio O con una cuerda trazada en ella llamada A B con punto medio M, siendo B el unico punto movil, el cual nunca sale fuera de la circunferencia al movello sobre la circunferencia el punto M nos traza un circulo dentro de la circunferencia el cual lo podemos llamar figura geometrica. *Registro Escrito Grupo 2*
PRODUCCIÓN COLECTIVA	Por su definición, esta tipología de signos surge en la producción individual de los estudiantes.	

Tabla 24 Rejilla de análisis Categoría Signos Personales de la Situación problema 2

En los resultados hallados se encontró que las funciones empleadas por los estudiantes fueron las funciones *arrastre*, *traza*, *lugar geométrico y coordenadas y ecuación;* cada una con la misma finalidad pero modalidad distinta de uso. La función *arrastre* fue usada en términos de movimiento directo sobre el punto B, extremo de la cuerda que podía ser movido sobre la circunferencia inicial; modalidades de *arrastre* como *arrastre* con traza activa fueron las primeras opciones usadas por los estudiantes; es decir, al realizar un movimiento directo sobre el punto B (extremo de la cuerda de la circunferencia inicial), el punto M (Punto medio de la cuerda AB) estaba haciendo un movimiento indirecto con traza activa. Por último, después de explorar distintas funciones dadas por el AGD la función *lugar geométrico* le permitió a los estudiantes corroborar lo dado por el *arrastre* con traza activa, debido a que evidenciaron que con esta última la figura no se les borraba y se les mantenía para poder usar sobre esta figura otro tipo de funciones.

Estas funciones les permitieron determinar que el lugar geométrico era un circunferencia en la medida que fueron arrastrando el punto B sobre la circunferencia inicial, esta validación estuvo sujeta al instrumento y se puede asociar que este fue el surgimiento de una estructura condicionante para poder determinar cuáles eran los elementos iniciales y los elementos finales, producto de ello son los argumentos producidos pues están arraigados a lo dado por el AGD. Los estudiantes revelaron la conjetura esperada, dicha conjetura consistió en determinar que el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia que tienen un punto en común, es una circunferencia.

Esto evidencia el factor fundamental que tiene la función arrastre de la figura para poder describir el movimiento en términos de estructura condicionante, y describir en términos de hipótesis y tesis.

5.2.2.2 Signos Matemáticos

Con respecto a ésta categoría de análisis específica, se consideran como elementos constitutivos: signos personales, teoría matemática y enunciado. En este caso se reconoce a los significados personales anteriores como elementos constitutivos, porque se evidencian como elementos característicos asociado a la solución de la actividad y surgen en la producción individual del estudiante al discutir en el escenario escolar (socialización); el objetivo es que evolucionen esos signos personales a signos matemáticos, las discusiones dadas en la clase que se reconocen como discursos matemáticos, de allí que los otros elementos que se han considerado sean la teoría matemática y el enunciado asociado. En la tabla 25 se encuentra los análisis relacionados con la *situación problema 2*.

ACTIVIDAD	Situación problema 2: Descubriendo Figuras geométricas	
CATEGORIA DE ANÁLISIS GENERALES	*Instrumento de mediación semiótica*	
CATEGORÍA DE ANÁLISIS ESPECIFICA	Signos Matemáticos	
ELEMENTOS CONSTITUTIVOS	Significado personal, teoría matemática y Enunciado	
ELEMENTOS EMERGENTES	No se reconoció	
PRODUCCIÓN INDIVIDUAL	Significado Personal	En la circunferencia C con punto Medio O con una cuerda trazada en ella llamada A B con punto medio M, siendo B el unico punto movil, el cual nunca sale fuera de la circunferencia al movello sobre la circunferencia el punto M nos traza un circulo dentro de la circunferencia el cual lo podemos llamar figura geometrica. *Registro escrito Grupo 2*
PRODUCCIÓN COLECTIVA	Teoría matemática	Punto Medio, Ecuación de una circunferencia, Lugar geométrico.
	Enunciado	*Punto Medio* $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ —> Punto Medio $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ $x = \frac{0 + x_2}{2}$ $y = \frac{0 + y_2}{2}$ $\boxed{x = \frac{x_2}{2}}$ $\boxed{y = \frac{y_2}{2}}$ *Registro escrito Grupo 2* *Ecuación de una circunferencia*

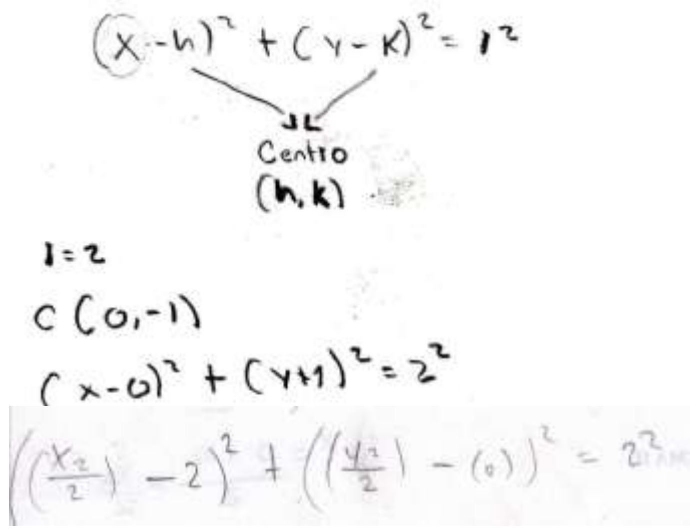
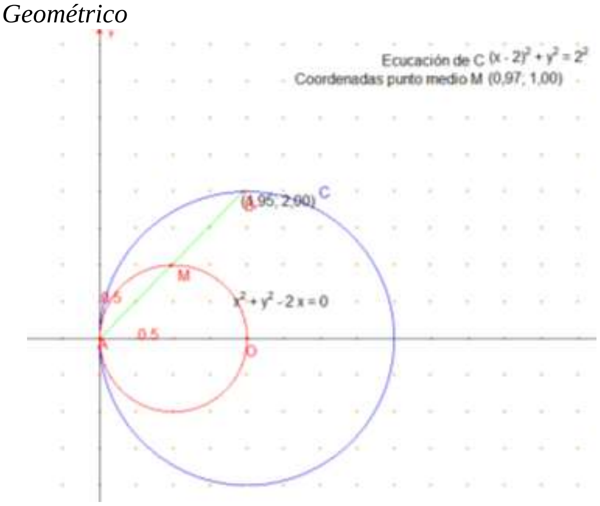
		 *Registro escrito Grupo 2* *Lugar Geométrico*  *Registro virtual Grupo 2*

Tabla 25 Rejilla de análisis Categoría Signos Matemáticos de la Situación problema 2

Dentro de los signos que evolucionaron, se evidenció el de punto medio que en un inicio se refería a la "mitad de un segmento" y ahora se transformó en lo que correspondía a la ecuación del punto medio dentro de la situación. En cuanto a la ecuación de una circunferencia, se identifico en un inicio que el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia que tienen un extremo como punto en común, era una circunferencia; para este caso, se realizó una primera aproximación para poder obtener esta ecuación con ayuda de elementos teóricos como la ecuación canónica de una circunferencia, y funciones del AGD como la función de *lugar geométrico y coordenadas y ecuación*; aunque los estudiantes no pudieron comprobar algebraicamente la ecuación de la circunferencia, se puede sugerir que lograron identificar el elemento inicial: el punto medio y el elemento final: la circunferencia, elementos necesarios para poder describir una estructura deductiva en el enunciado del problema, sin embargo la relación de condicionante no fue específica para los estudiantes, pero la función de *lugar geométrico* permitió de cierta manera reconocer estas relaciones.

Para terminar, se puede afirmar que la integración de una herramienta como Cabri Géomètre II Plus si puede ayudar en la consecución y determinación de significados personales y posiblemente a la evolución a significados matemáticos, pero por si sólo el AGD no lleva al estudiante a relacionar esos argumentos producidos en las acciones empíricas con argumentos relacionados con la teoría de la *Geometría Analítica*; es necesario por un lado, que el estudiante sienta la necesidad de dar el paso hacia la demostración y específicamente a justificar por qué sus construcciones y sus resultados son ciertos, precisamente esta fue una de las premisas que se pudieron mostrar en esta indagación; por otro lado, un diseño de actividades que aunque le de al estudiante la oportunidad de realizar distintas acciones heurísticas, el proceso lo pueda dirigir hacia la producción de una demostración.

Por último, una gestión docente adecuada que permita tener la oportunidad de que en la socialización las preguntas elaboradas por el docente sean tan acertadas que los estudiantes consigan el objetivo de que sus signos personales evolucionen a los signos matemáticos, para este caso, no se aprecia una evolución en su totalidad de los signos personales (que provienen de los discursos que son validados empíricamente) hacia los signos matemáticos producidos cuando el artefacto es relacionado con la cultura matemática, debido a que el surgimiento de signos matemáticos necesita un seguimiento y un proceso que lleve mayor tiempo, y que sea de manera paulatina.

Algunos elementos necesarios para una propuesta que integre un AGD como *instrumento de mediación semiótica* en la solución de *problemas abiertos* que involucre la producción de conjeturas y demostraciones con la circunferencia, son los sugeridos en la tabla 26:

RELACIÓN	ELEMENTOS	CARACTERÍSTICA
Actividad –Estudiante	Diseño de las actividades	*problemas abiertos* para producir conjeturas

		Preguntas explicita que permitan construir elementos para producir la demostración.
AGD – Estudiante	Desarrollar esquemas de uso del AGD	Reconocer las distintas funciones de Géomètre II Plus para un uso eficiente dentro de la solución de actividades, sobretodo la función arrastre como elemento crucial para sugerir una estructura lógico-deductiva en los estudiantes.
AGD – Actividad	Potencial semiótico del artefacto	Relacionar de forma directa los significados personales asociados a la solución de la actividad con los significados matemáticos resultado de lo que es matemáticamente aceptado
Docente-estudiante	Evolución de los significados	Reconocer la evolución de los significados personales a significados matemáticos, permita estructurar la demostración basados en elementos previos que han sido usados para la construcción de la conjetura
Docente – Estudiante	Gestión docente	Sugerir al estudiante de la necesidad de la demostración, a partir de mostrarle que no es suficiente con validar la conjetura con el AGD, se debe estructurar a la luz de la teoría
		Generar el espacio para la socialización de los discursos orales y escritos que produce el estudiante, con ello el estudiante es más consiente en elaboración de la demostración.

Tabla 26 Aspecto para integrar una AGD como instrumento de mediación semiótica

En el siguiente apartado se continua con la tercera categoría de análisis general propuesta en los análisis que corresponde a *la complementariedad entre el método sintético y el método analítico*, que permite reconocer la relación entre estos dos métodos y su potencialidad para el aprendizaje en *Geometría Analítica*.

5.2.3 Complementariedad entre el método sintético y el método analítico

Para esta categoría de análisis se quiere identificar la complementariedad entre el método sintético y el método analítico considerado en las distintas partes de las actividades; para ello, con respecto al método sintético se pretende mostrar el componente geométrico característico de las propiedades de la figura geométrica de manera clara, y con el método analítico, la posibilidad de la conversión de esas propiedades geométricas en términos algebraicos que permita el uso de cálculos algorítmicos para su solución. En la ilustración 15 se identifica las relaciones entre los elementos de esta categoría.

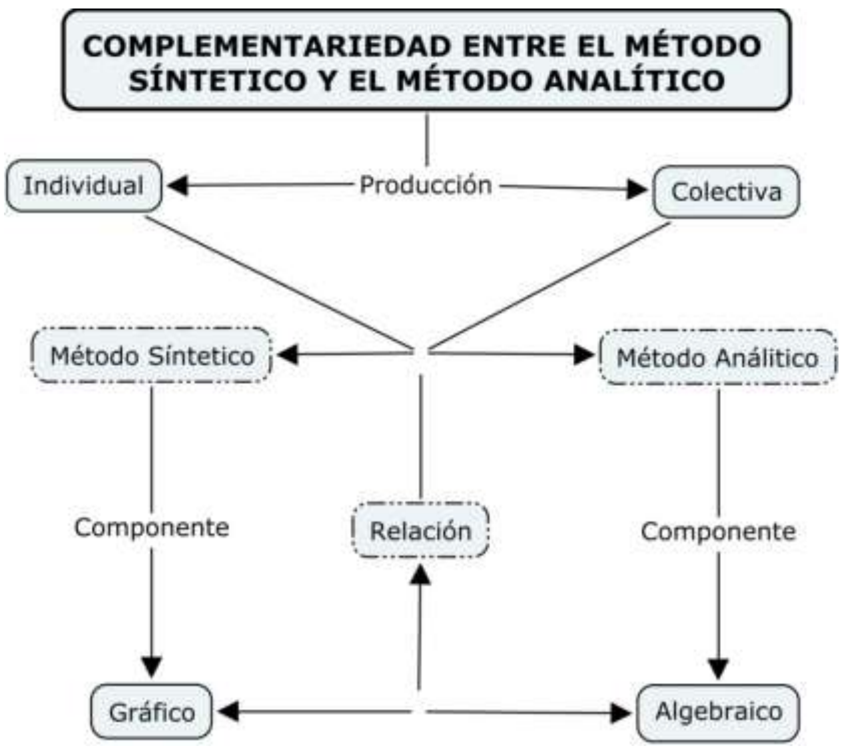
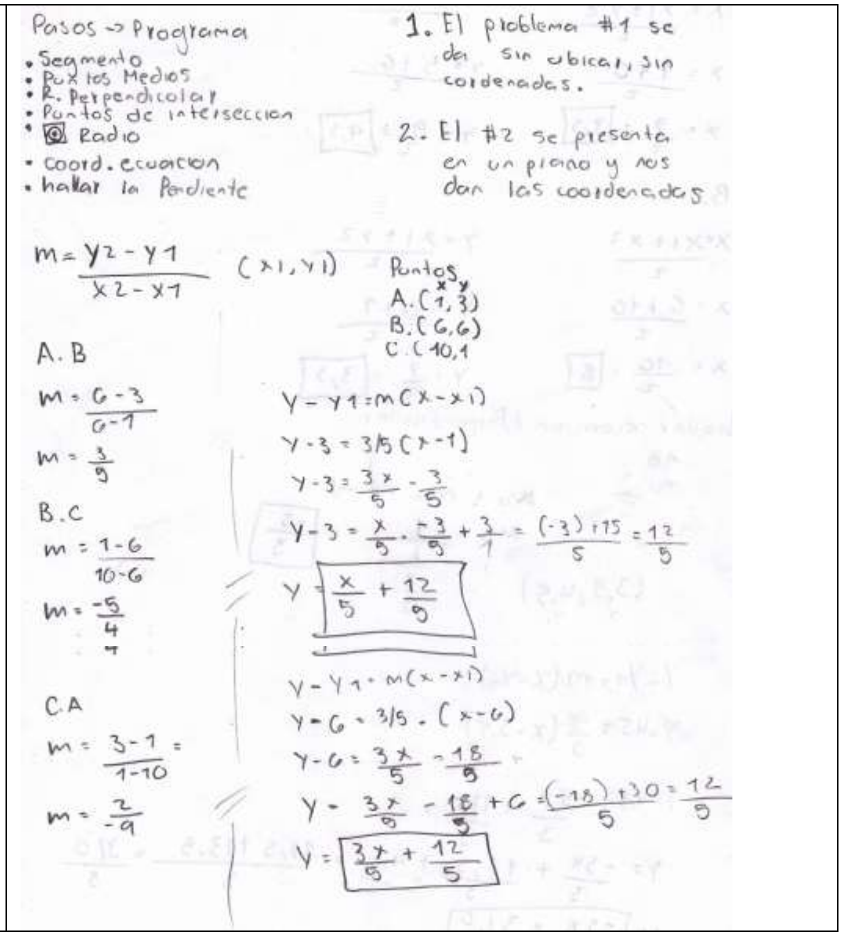


Ilustración 15 Elementos de la Categorías de análisis *Complementariedad entre el Método sintético y el Método analítico*

Para esta categoría de análisis se describen las relaciones de dos de las actividades propuestas: *Situación problema 1* y *Situación problema* 2; si bien, aunque la última actividad no fue objeto de análisis en la categoría *continuidad cognitiva* porque uno de los criterios era incluir la actividad que tuviera la tipología particular de *problemas abiertos*; no niega tampoco, que usar el método sintético y el método analítico muestra una relación potente que sugiere, puede ser rica en explorar en contextos en los que intervengan procesos demostrativos.

En la tabla 27 se muestra la rejilla de análisis de la categoría de análisis complementariedad entre el método sintético y el método analítico de *la situación problema 1*

<table>
<tr><td>ACTIVIDAD</td><td colspan="2">Situación problema 1: Construyendo una antena</td></tr>
<tr><td>CATEGORIA DE ANÁLISIS GENERALES</td><td colspan="2">Complementariedad entre el método sintético y el método analítico</td></tr>
<tr><td>CATEGORÍA DE ANÁLISIS ESPECIFICA</td><td colspan="2">No se presentó</td></tr>
<tr><td>ELEMENTOS CONSTITUTIVOS</td><td colspan="2">Relación, Método sintético y el método analítico</td></tr>
<tr><td>ELEMENTOS EMERGENTES</td><td colspan="2">Método sintético: Componente geométrico y Método analítico: Componente algebraico</td></tr>
<tr><td>PRODUCCIÓN INDIVIDUAL GRUPO 1</td><td>Método sintético</td><td>2. PRIMERO QUE TODO TENIAMOS QUE UBICAR EL PUNTO CENTRAL ENTRE A, B, C Y ESE PUNTO CENTRAL TOMARLO COMO REFERENCIA PARA TRAZAR ESTE CIRCULO, PARA ELLO UTILIZAMOS, SEGMENTOS PERPENDICULARES, PUNT MEDIOS, MEDIDAS O LONGITUDES, CIRCULOS
Proceso:
• TRAZAMOS SEGMENTOS A, B
• TRAZAMOS SEGMENTOS B, C
• TRAZAMOS SEGMENTOS A, C
• UBICAMOS PUNTO MEDIO ENTRE A, B
• UBICAMOS PUNTO MEDIO ENTRE B, C
• UBICAMOS PUNTO MEDIO ENTRE A, C
• TRAZAMOS UNA PERPENDICULAR ENTRE A, B
• TRAZAMOS OTRA PERPENDICULAR ENTRE B, C
• Y UNA ULTIMA ENTRE A, C
• HALLAMOS UN PUNTO DE INTERSEPCION ENTRE LAS PERPENDICULARES
• HALLAMOS MEDIDAS PARA ESTAR SEGUROS DEL PUNTO MEDIO
• Y POR ULTIMO TRAZAMOS EL CIRCULO
Registro escrito Grupo 1</td></tr>
</table>

	Método analítico	

Pasos → Programa
- Segmento
- Pto los Medios
- R. Perpendicular
- Puntos de intersección
- ⊚ Radio
- coord. ecuación
- hallar la Pendiente

1. El problema #1 se da sin ubicar, sin cordenadas.

2. El #2 se presenta en un plano y nos dan las coordenadas

$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$ (x1, y1)

Puntos
A. (1, 3)
B. (6, 6)
C. (10, 1

A. B

$m = \frac{6-3}{6-1}$

$m = \frac{3}{5}$

B. C

$m = \frac{1-6}{10-6}$

$m = \frac{-5}{4}$

C. A

$m = \frac{3-1}{1-10} =$

$m = \frac{2}{-9}$

$y - y1 = m(x - x1)$

$y - 3 = 3/5 (x - 1)$

$y - 3 = \frac{3x}{5} - \frac{3}{5}$

$y - 3 = \frac{x}{5} \cdot \frac{-3}{5} + \frac{3}{1} = \frac{(-3)+15}{5} = \frac{12}{5}$

$y = \boxed{\frac{x}{5} + \frac{12}{5}}$

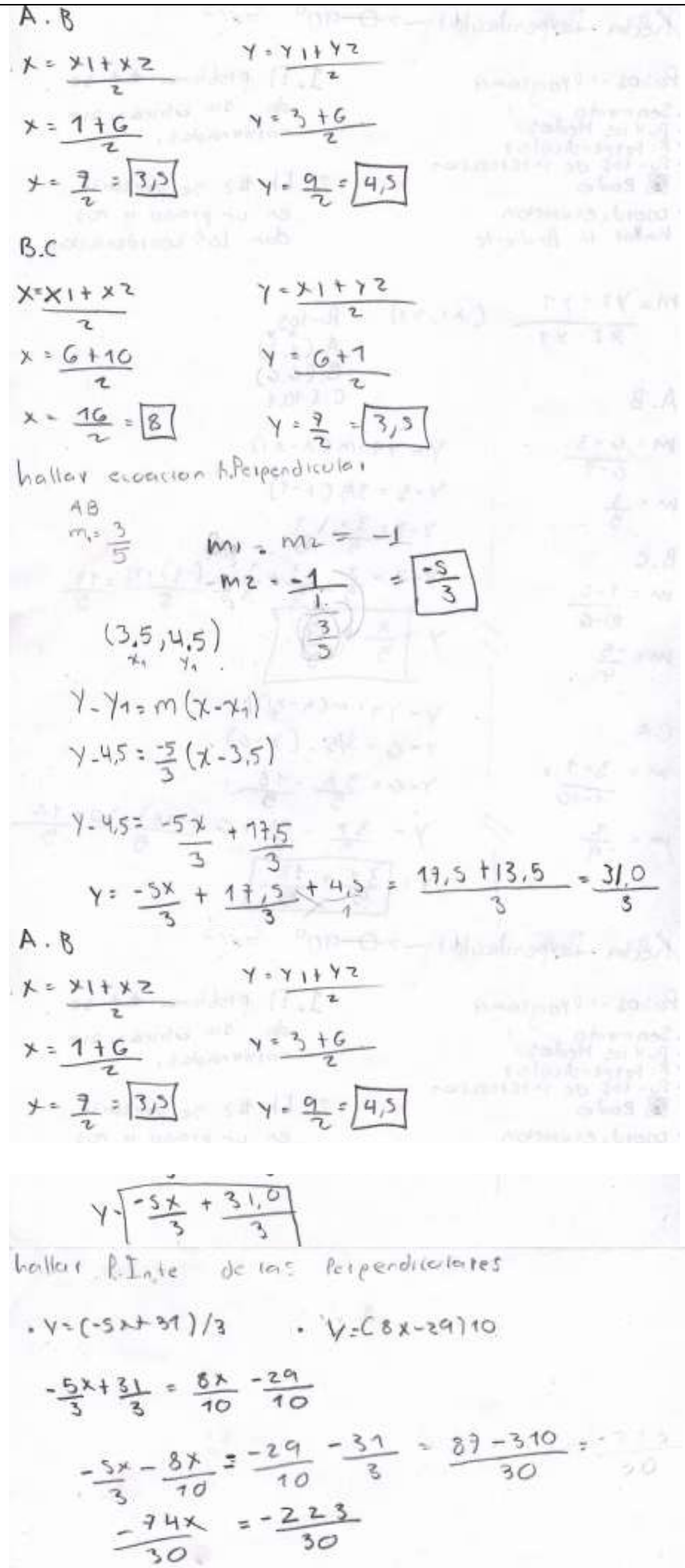
$y - y1 = m(x - x1)$

$y - 6 = 3/5 \cdot (x - 6)$

$y - 6 = \frac{3x}{5} - \frac{18}{5}$

$y = \frac{3x}{5} - \frac{18}{5} + 6 = \frac{(-18)+30}{5} = \frac{12}{5}$

$y = \boxed{\frac{3x}{5} + \frac{12}{5}}$

		 *Registro escrito Grupo 1*
	Relación	En la solución a través del método sintético, en donde no existía un referente cartesiano, el estudiante tuvo la oportunidad de hacer una exploración más libre que le permitió reconocer la construcción asociada

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>al problema propuesto; esto le ayudó cuando hizo uso de las representaciones algebraicas de las expresiones, los pasos que siguió este grupo se relacionaba con recrear lo hecho en el método sintético pero convirtiéndolo en una representación algebraica de los elementos. Aunque por este medio no se llegó a la respuesta, debido a que los resultados sugieren deficiencias en la manipulación algebraica, sobre todo en lo relacionado con los sistemas de ecuaciones, ayudó a los estudiantes vincularan otra forma de corroborar lo encontrado.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">PRODUCCIÓN INDIVIDUAL GRUPO 2</td>
<td>Método sintético</td>
<td>3. Realizamos un segmento entre el punto AB, BC, RA; Luego sacamos el punto medio de los segmentos y trazamos lineas perpendiculares entre el segmento y el punto. ; utilizamos el circulo como figura geometrica que abrimos desde el punto central hasta que llegara y tocara todos los puntos.

Registro escrito Grupos 2

<table>
<tr><td>Nombre de los objetos basico</td><td>Procedimiento para obtener la ecuación</td><td>Ecuación</td></tr>
<tr><td>• Segmento
• Punto medio
• Recta perpendicular
• Punto de intersección
• Circulo
• Pendiente</td><td>• Se hallan las 3 pendientes, de los segmentos
• Se hallan las rectas
• Se hallan los puntos medios</td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Método analítico</td>
<td>fórmula
$m = mab = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$
$mab = \frac{6-3}{6-1}$
$mab = \frac{3}{5}$
$mbc = \frac{1-6}{10-6}$
$mbc = \frac{-5}{4}$
$mca = \frac{1-3}{10-1}$
$mca = \frac{-2}{9}$

Recta ab
$y - 3 = \frac{3}{5}(x-1)$
$y - 3 = \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}$
$y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{5} + 3$
$y = \frac{3}{5}x + \frac{12}{5}$

recta bc
$y - 6 = \frac{-5}{4}(x-6)$
$y - 6 = -\frac{5}{4}x + \frac{\cancel{30}^{15}}{\cancel{4}_{2}}$
$y = \frac{-5}{4}x + \frac{15}{2} + 6$
$y = \frac{-5}{4}x + \frac{27}{2}$</td>
</tr>
</table>

Recta ca

$y-3=-\frac{2}{9}(x-1)$ $\qquad x=$

$y-3=\frac{-2}{9}x+\frac{2}{9}$

$y=\frac{-2}{9}x+\frac{2}{9}+3$

$\boxed{y=\frac{-2x}{9}+\frac{29}{9}}$

Fórmula

$x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$

ab

$x=\frac{1+6}{2} \qquad y=\frac{3+6}{2}$

$x=\frac{7}{2}=3.5 \qquad y=\frac{9}{2}=4.5$

bc

$x=\frac{6+10}{2} \qquad y=\frac{6+1}{2}$

$x=\frac{16}{2} \qquad y=\frac{7}{2}$

$x=8 \qquad y=3.5$

ca

$x=\frac{10+1}{2} \qquad y=\frac{3+1}{2}$

$x=\frac{11}{2} \qquad y=\frac{4}{2}$

$x=5.5 \qquad y=2$

Cab

$\frac{3}{5}\cdot m_2=-1$

$m_2=\frac{-1}{\frac{3}{5}}$

$m_2=\frac{-5}{3}=-1,67$

Cbc

$-\frac{5}{4}\cdot m_2=-1$

$m_2=\frac{-1}{\frac{-5}{4}}$

$m_2=\frac{4}{5}=0,80$

cca

$m_2=\frac{-1}{\frac{-2}{9}}$

$m_2=\frac{9}{2}=4,50$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-4,50=-1,67(x-3,50)$

$y-4,50=-1,67x+5,84$

$y=-1,67x+5,84+4,50$

$y=-1,67x+10,34$

$y-\frac{7}{2}=-\frac{5}{3}\left(x-\frac{9}{2}\right)$

$y-\frac{7}{2}=\frac{-5}{3}x+\frac{45}{6}$

$y=\frac{-5}{3}x+\frac{45}{6}+\frac{7}{2}$

$y=\frac{-5}{3}x+\frac{31}{3}$

$\left(\frac{-5}{3}x+\frac{31}{3}\right)=\left(\frac{8}{10}x-\frac{29}{10}\right)$

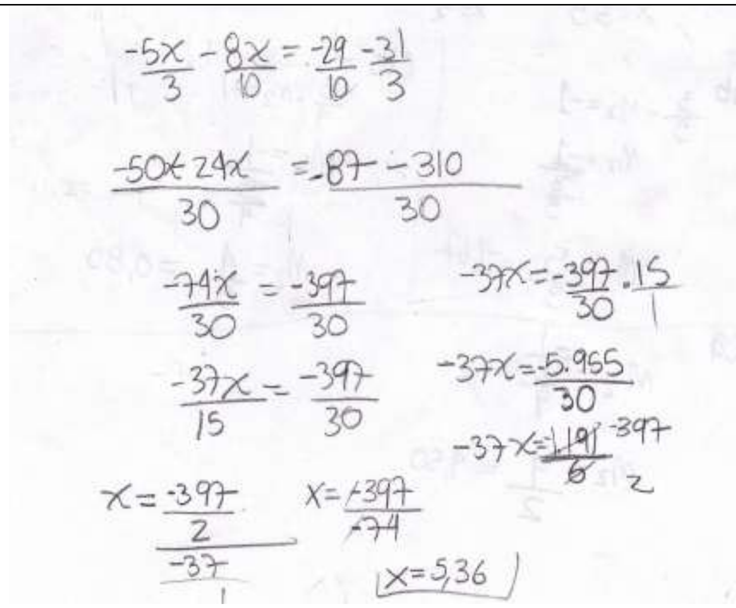
		 $\frac{-5x}{3} - \frac{8x}{10} = \frac{-29}{10} - \frac{31}{3}$ $\frac{-50x + 24x}{30} = \frac{-87 - 310}{30}$ $\frac{-74x}{30} = \frac{-397}{30}$ $\quad -37x = \frac{-397}{30} \cdot \frac{15}{1}$ $\frac{-37x}{15} = \frac{-397}{30}$ $\quad -37x = \frac{-5.955}{30}$ $-37x = \frac{1191}{6} \frac{-397}{2}$ $x = \frac{\frac{-397}{2}}{-37}$ $\quad x = \frac{-397}{-74}$ $x = 5{,}36$ *Registro escrito Grupo 2*
	Relación	Aunque en este grupo la descripción del procedimiento para obtener el punto antena está menos completa con respecto al otro grupo, se evidencia la eficiencia que se tiene para hacer los cálculos y el proceso algorítmico, el orden para identificar las ecuaciones de los elementos básicos, después de haber comprendido la construcción.

Tabla 27 Rejilla de análisis Categoría Complementariedad entre el método sintético y analítico de la Situación problema 1

Los resultados de esta categoría de análisis sugieren la complementariedad entre el método analítico y el sintético, se mostró cómo por medio del método sintético las propiedades geométricas de los elementos sirven para hacer la construcción y encontrar el todo, esto significa que se logró identificar en los estudiantes una fase de síntesis, una composición de los elementos para obtener los elementos del conjunto, en este caso hacer la construcción; con este método, las propiedades geométricas de los elementos se hacen evidentes para poder hacer la construcción. Por otro lado, al convertir estas propiedades geométricas encontradas en el método sintético en términos algebraicos y reconstruir de esta forma el procedimiento sintético para el método analítico, se evidenció un fase de análisis en la cual se descomponen los elementos en sus partes, es así como esto se convierte en una herramienta importante que se pueden introducir en la enseñanza de la *Geometría Analítica*.

En relación con la interpretación del componente geométrico propio del método sintético en términos algebraicos propio del método analítico, se debe a que se entiende la geometría cartesiana como una lectura algebraica de la geometría euclidiana, relación muy rica para ser explorada porque permite incluir las operaciones entre registro de representación como elemento transversal entre los dos métodos, es decir la conversión entre registros de representación semiótica.

En este caso, para el proceso de conversión entre un registro de representación gráfica y algebraica no fue del todo satisfactorio, esto puede ser causado por las debilidades que se evidenciaron que presentan los estudiantes en los conocimientos previos en *Geometría Analítica* como también en la manipulación algebraica y aritmética; la complementariedad entre los dos métodos es eficiente en la medida en que el trabajo entre los dos tipos de registros de representación semiótica sea algo conocido y constante para los estudiantes, se mostró que tanto el análisis como la síntesis fueron fases presentes en el desarrollo del trabajo en los estudiantes, además se evidenció debilidades de tratamiento en los registros de representación algebraicas.

Tanto un método como el otro, permiten al estudiante estar atento al seguimiento del proceso de construcción de su solución y demostración, el AGD para este caso se comporta como un vínculo directo, que permite verificar si lo encontrado tiene cierto nivel de aceptabilidad, el estudiante le delega pues la responsabilidad de verdad al AGD; es importante que el método analítico sea usado como una herramienta que no pierda de vista la forma como se ha dado la solución por medio del método sintético (componente geométrico). En la tabla 28 se muestra el análisis elaborado para la *situación problema 2*

ACTIVIDAD	Situación problema 2: Descubriendo Figuras geométricas	
CATEGORIA DE ANÁLISIS GENERALES	Complementariedad entre el método sintético y el método analítico	
CATEGORÍA DE ANÁLISIS ESPECIFICA	No se identifica	
ELEMENTOS CONSTITUTIVOS	Relación, Método sintético y el método analítico	
ELEMENTOS EMERGENTES	Método sintético: Componente geométrico y Método analítico: Componente algebraico	
PRODUCCIÓN INDIVIDUAL GRUPO 1	Método sintético	No hubo un uso como tal de este método, solo se logró construir el enunciado, pero no se hizo una construcción de los pasos, de tal forma que no dejara de hacer referencia a las herramientas del AGD como forma para validar sus enunciados

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td>AL TENER UN SEGMENTO AB CON A EN UN PUNTO FIJO Y B MOVIBLE CON UN PUNTO MEDIO "M" Y TENER EL PUNTO "O" COMO MITAD DE CIRCUNFERENCIA.
SI ARRASTRAMOS B POR ALREDEDOR DE LA CIRCUNFERENCIA EL PUNTO M FORMARA UN CIRCULO QUE PASARA POR EL PUNTO O Y SERÁ LA MITAD DE LA CIRCUNFERENCIA GRANDE
Registro escrito Grupo 1</td></tr>
<tr><td>Método analítico</td><td>Al igual que en el anterior no hubo una demostración completa por este método, ni se identificaron los elementos que se necesitaban para llegar a la solución.
$(1{,}79-2)^2+0{,}61^2=2^2$
$(1{,}79-2)^2+0{,}37=4$
$(-0{,}21)^2+0{,}37=4$
$0{,}04+0{,}37=4$
$0{,}41=4$
$\left(\frac{1x}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1y}{2}-0\right)^2=2^2$
$\frac{x^2}{4}-x+1-\left(\frac{1y}{2}-0\right)^2=2^2$
$\frac{x^2}{4}-x+1-\frac{y^2}{4}=4$
$\frac{x^2}{4}-x-\frac{y^2}{4}=4-1$
$x=\frac{0+x_1}{2}$ $\quad y=\frac{0+y_1}{2}$ $\quad \frac{x^2}{4}-x-\frac{y^2}{4}=3$
$x=\frac{1x}{2}$ $\quad y=\frac{1y}{2}$
Registro escrito Grupo 1</td></tr>
<tr><td>Relación</td><td>Para este caso no se logró establecer un vínculo entre el método sintético y el método analítico, debido a que las soluciones por ambos métodos son complejas y difíciles de obtener, si no han tenido una previa apropiación de la noción de lugar geométrico; sin embargo, se lograron identificar en ambos procesos elementos iniciales como los puntos medios, las cuerdas y la circunferencia inicial, al igual que elementos finales como la circunferencia producto del lugar geométrico que pueden sugerir una relación entre ambos métodos.</td></tr>
<tr><td></td><td>Método sintético</td><td>No hubo un uso de este método, solo se logró construir el enunciado, pero no se hizo una construcción de los pasos de tal forma que no dejara de hacer referencia a las herramientas del AGD, como forma para validar sus enunciados</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="3">PRODUCCIÓN INDIVIDUAL GRUPO 2</td>
<td></td>
<td>Enunciado 1: en la circunferencia C con un punto medio O con una cuerda trazada en ella llamada AB segmento con punto medio M siendo E el único punto móvil el cual nunca sale fuera de la circunferencia al moverlo sobre la circunferencia nos traza un círculo dentro de ella y el cual lo podemos llamar figura geométrico.
Registro verbal Grupo 2</td>
</tr>
<tr>
<td>Método analítico</td>
<td>$\frac{x_2^2}{4} - \frac{4x_1}{2} + \frac{y_2^2}{4} = 4 - 4$
$\frac{x_2^2}{4} - \frac{4x_2}{2} + \frac{y_2^2}{4} = 0.$
$\frac{2x_2^2 - 16x_2}{8} + \frac{y_2^2}{4} = 0$
$\frac{2x_2^2 - 16x_2}{8} = -\frac{y_2^2}{4}$
$2x_2^2 - 16x_2 = -\frac{y_2^2}{4} \cdot 8$
$2x_2^2 - 16x_2 = -\frac{8y_2^2}{4}$
$2x_2^2 - 16x_2 = -2y_2^2$
$2x_2^2 - 16x_2 + 2y_2^2 = 0$
$2(x_2^2 - 8x_2 + y_2^2) = 0$
Registro Escrito Grupo 2</td>
</tr>
<tr>
<td>Relación</td>
<td>Con relación a este grupo, aunque de igual forma se evidencia deficiencia en la solución por medio del método sintético, esta parte permitió al estudiante identificar elementos iniciales y finales para ser usados en la solución por el método analítico, y poder convertirlos en términos algebraicos. De igual manera, no se logro un uso completo de</td>
</tr>
</table>

		cada uno de los métodos.

Tabla 28 Rejilla de análisis Categoría Complementariedad entre el método sintético y analítico de la Situación problema 2

Los resultados que se determinaron a través de esta categoría de análisis sobre la *situación problema 2,* muestran dificultades en el momento de intentar ofrecer la solución por medio del método sintético a la actividad propuesta "encontrar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas que tienen un punto extremo como punto en común de una circunferencia", argumentos como "*las cuerdas que hicimos son cuerdas de la circunferencia por lo tanto al arrastrarse da una circunferencia", "es lógico porque está dentro de una circunferencia las cuerdas"* y " *porque las cuerdas tienen el mismo punto en común"*, son algunas de la razones dadas para justificar la obtención de la circunferencia; otra tipología de argumentos, asociada al uso de las herramientas del AGD es "*al usar la opción traza nos formó un círculo dentro del original"* y *"Al usar la opción lugar y nos arroja visualmente la formación de una circunferencia dentro de una circunferencia"*, muestran como el estudiante delega la función de validación al AGD de sus acciones.

Sobre los enunciados propuestos en el método sintético muestran cómo los estudiantes intentan identificar hipótesis y tesis en sus enunciados, estructura netamente deductiva que fue potente para ser usada en la solución del método analítico, debido a que ayudó a identificar los elementos iniciales y los finales para saber hacia dónde se deben dirigir los argumentos; sin embargo, para los estudiantes no fue claro la estructura deductiva entre los elementos y usaban otro tipo de terminología para asociarla; en este sentido, la posibilidad de conversión entre los distintos sistemas de representación semiótico a saber grafico propio del sintético y algebraico propio del analítico, solo se dio en términos de los elementos iniciales y finales (punto medio y circunferencia final), pues como no hubo una solución completa por medio de cada método no se identificaron conversiones de otro tipo en la actividad. Igualmente se pierde la relación con las propiedades geométrica de la figura porque se centran en una manipulación algebraica de las expresiones quedándose en problemas de tratamiento entre las representaciones de este tipo.

Es preciso aclarar que la solución de esta situación problema por medio del método analítico y sintético constituye en un verdadero reto intelectual para el estudiante, debido a que requiere que la noción de lugar geométrico sea muy clara para permitirles identificar la dependencia entre los elementos en juego; aun así, con orientación del docente en la solución por medio del método analítico, se logró identificar la ecuación principal y la forma como las coordenadas del punto medio se relacionaban con está, pero no se logró encontrar la ecuación de lugar geométrico, sabiendo que era una circunferencia.

Por lo tanto, se puede sugerir que es posible identificar una relación entre el método sintético y el método analítico, esto en términos de poder reconocer las relaciones entre los elementos geométricos y trascribirlas en términos algebraicos (conversión entre registros de representación semiótico), el objetivo es mantener un trabajo conjunto entre los dos métodos que permita ir y venir de uno al otro. Es probable que la tipología de actividades, que en el caso de la *situación problema 1* se relaciona con problemas de construcción, por el contrario, la *situación problema 2* con problemas de lugar geométrico, puedan ser una de las causantes de la dificultad para reconocer la potencialidad de la complementariedad entre estos dos métodos; al respecto se sugieren los elementos propuestos en la tabla 29 como decisivos en el momento de usar este tipo de herramientas:

RELACIÓN	ELEMENTOS	CARACTERÍSTICAS
Actividad – Estudiante	Tipología de situaciones	Situaciones problemas de construcción
		Situaciones problema de lugar geométrico
Docente – Estudiante	Tiempos necesarios para la exploración	Establecer de forma explicita los enunciados en términos de condicionante relacionar hipótesis con tesis.
Docente – Estudiante	Operaciones entre los registros de representación semiótica	Conversión y tratamiento como elementos cruciales para la complementariedad entre los dos métodos

Tabla 29 Aspectos para la complementariedad entre el método sintético y el analítico

En un balance general se puede decir que el propósito de incluir el modelo de Unidad Cognitiva permitió reconocer cómo es posible hacer uso de los argumentos que construyen la conjetura para ser utilizados en la demostración; estos argumentos fueron resultados de la solución del problema abierto que resultó ser una herramienta didáctica potente para ello, por otra parte al continuar hacia la construcción de la demostración se evidencio dificultades por parte de los estudiantes en justificar y argumentar de acuerdo a una estructura deductiva, para ello se justifica en términos de la necesidad de usar las ideas de dependencia en el movimiento en términos de condicionantes, y poder traducirlas en dependencia lógica relacionando el enunciado con la teoría. Si bien, aunque el instrumento cumplió su cometido de mediador semiótico pues ayudo no solo a proporcionar la solución a las actividades sino que evoco a los estudiantes a conocimientos geométricos, se hace necesario una mayor exploración de las funciones del instrumento que puedan sugerir en el estudiantes ideas de dependencia lógica, esto con el fin de poder estructura de una mejor manera los enunciados con la teoría.

Aunque la propuesta estuvo en medio de la geometría euclideana y la geometría analítica, en términos de entender la geometría analítica como una lectura algebraica de la geometría euclideana, se evidenció la potencialidad de usar esta geometría para identificar tanto el componente geométrico como el algebraica en cada momento que se puso en acción la construcción de la conjetura y su respectiva demostración; aunque se evidenció que los problemas de construcción son más potentes en comparación con los problemas de lugar geométrico para un primer acercamiento a la demostración, debido a que su estructura permite que el estudiante pueda involucrarse en la construcción y ser él quien elija las posibles soluciones.

En general este tipo de indagaciones son potentes para la formación de los docentes porque permite darle un nuevo enfoque a las clases de matemáticas, igualmente ayudan a que procesos como el de razonamiento se puedan desarrollar de otra forma y hacer seguimiento desde otra mirada; enseñar a demostrar no es una tarea pero si es necesaria para que el estudiante comprende el quehacer de la misma disciplina, reconocer en los procesos de justificación y argumentación elementos cruciales para dar inició a esta fase de reconocimiento de la importancia de la demostración en el aula, pueden ser en una primer panorama para dar salida a la solución de la enseñanza de la demostración en el aula; igualmente al involucrar un instrumento como mediador semiótico permite darle un enfoque más dinamizador y con ambientes de aprendizaje distintos a los estudiantes.

En el *Capítulo VI*, se hacen *las conclusiones y las recomendaciones* que fueron consecuencia de esta indagación, bajo la relación entre el marco teórico y el marco experimental que permita dar respuesta a los objetivos y problema planteado.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En esta sección se van a presentar las *conclusiones y recomendaciones* que son consecuencia de la reflexión en esta indagación, estás se estructuran en tres partes: en primer lugar se da respuesta directa a los objetivos específicos planteados y al problema de indagación que suscita esta investigación, en segundo lugar se muestra la forma cómo se articularon los marcos teóricos y en tercer lugar, se dejan preguntas abiertas que podrán mejorar esta investigación.

1) Sobre *los objetivos específicos y el problema de indagación*

Con relación a los objetivos específicos, cada una de las categoría de análisis generales ha sido diseñada de tal forma que permita dar respuesta directa a los objetivos específicos; la categoría de análisis general *continuidad cognitiva* intenta determinar algunos características que permitan reconocer la forma cómo el modelo de *Unidad Cognitiva* puede referenciar el paso de la conjetura a la demostración, dando respuesta al *primer objetivo específico.*

El modelo de *Unidad Cognitiva* sugiere la posible continuidad cognitiva que puede existir entre la conjetura y la demostración que permite analizar e interpretar las respectivas relaciones que se pueden presentar, prestando más atención a sus similitudes que en las diferencias propias de estos tipos de argumentaciones (Bartolini Bussi & Mariotti 2008; Mariotti 2002, 2006; Pedemonte, 2007).

Asociado, este modelo se propone como la *actividad argumentativa* en la producción de conjeturas y demostraciones cobra un sentido decisivo para la continuidad, de tal manera que los argumentos que han sido usados para la justificación de la plausibilidad en la producción de los enunciados en la conjetura puedan ser usados en la producción de la demostración, de acuerdo a un modelo teórico lógico que los valide y estructuren.

De acuerdo con lo anterior, dentro del análisis que se hizo para la *situación problema 2*, se reconoce que no hubo una relación directa entre la conjetura y la demostración para poder decir que hay una continuidad cognitiva, pues no se hizo una demostración completa ni se consideró una estructura lógico-deductiva entre los distintos enunciados propuestos.

Sin embargo, se puede sugerir que hubo un esquema inicial de demostración muy pertinente y que se puede relacionar con los argumentos dados para la conjetura en términos funcionales, es decir permitían entender el significado del esquema de la demostración, porque al ser conscientes los estudiantes que el lugar geométrico correspondía a una circunferencia, esto sugería como era la forma de la ecuación; y al relacionar el punto medio que formaba la circunferencia inscrita en la circunferencia dada C, se identificó las ecuaciones de la coordenada del punto medio con la ecuación de la circunferencia dada inicialmente, la circunferencia C.

En la misma vía, y con relación a las funciones de la demostración, se pueden identificar las funciones propias dadas en los escenarios escolares, que corresponde a la función de explicación y a la función de validación; con relación a la función de validación, los estudiantes delegaban la aceptación al AGD Cabri Géomètre II Plus, al usar las funciones *coordenada y ecuación, traza y lugar geométrico* para aceptar los resultados como correctos y realizaban los procedimientos en el registro escrito de tal manera que concordaran con lo dados por estas funciones del AGD.

Lo anterior muestra que aunque no se consiguió llegar a una validación matemática, porque los hechos mostrados por el AGD (validación empírica) no se lograron estructurar como consecuencias lógicas desde la teoría de la geometría (validación matemática) debido a que los estudiantes no tienen un esquema deductivo de la forma $P \rightarrow Q$; al intentar hacer que los procedimientos del registro escrito coincidieran con lo mostrado en las funciones del AGD, se puede sugerir como un intento acertado de validación matemática, pues intentaban seguir la teoría geométrica respectiva.

Con relación a la potencialidad del tipo de actividades propuestas para este caso los *problemas abiertos,* se puede reconocer que aunque son problemas potentes para producir la conjetura como lo indica la teoría, esta tipología de problemas no son suficientes para dar el paso hacia la demostración, una de las dificultades por la cual no se presentó el paso de la conjetura hacia la demostración, y por lo que el modelo de *Unidad Cognitiva* no se ajustó, ni funcionó en esta propuesta.

Igualmente, los resultados experimentales sugieren que una gestión del docente más activa que permita concientizar al maestro de su papel frente al aula como dinamizador en la evolución de la *actividad argumentativa* que promueva el paso de la conjetura a la demostración, son aspectos que deben ser considerados en una próxima propuesta que integre el modelo de *Unidad Cognitiva* como organizador e instrumento de análisis.

Dificultades como que los estudiantes tengan debilidades en sus conocimientos previos en geometría analítica y en la manipulación aritmética y algebraica de las expresiones, son razones asociadas a la deficiencia para el paso de la conjetura a la demostración. Además, de la necesidad de tiempos pertinentes que consideren la evolución de este proceso de forma paulatina, de tal manera que permita un mayor exploración por parte de los estudiantes y una socialización efectiva de los resultados.

En general, se puede reconocer algunas características para que el modelo de *Unidad Cognitiva* sea usado de forma más eficiente en una próxima propuesta de indagación.

1. Un diseño adecuado que integre *problemas abiertos* y otra tipología de preguntas más explicitas que ayuden al estudiante a construir elementos decisivos para hacer la demostración de la conjetura.

2. La consideración de los conocimientos previos necesarios para la solución de las actividades, los asociados a la construcción del conocimiento geométrico y algebraico.

3. La necesidad de reconocer las distintas funciones de Cabri Géomètre II Plus para un uso eficiente dentro de la solución de actividades, es decir desarrollar esquemas de uso suficientes para la integración del AGD y la confrontación con una estructura deductiva de los enunciados.

4. La gestión del docente para dirigir la clase y ayudar a que los argumentos usados en la conjetura evolucionen de tal manera que permitan construir la demostración, de acuerdo a un modelo axiomático.

Con relación al *segundo objetivo específico*, que permite reconocer algunos aspectos necesarios de una propuesta que integre un AGD como instrumento *de mediación semiótica* en la solución de *problemas abiertos* que involucre la producción de conjeturas y demostraciones con la circunferencia, la segunda categoría de análisis general es la que responde a este objetivo.

La herramienta técnica que se integró fue el AGD Cabri Géomètre II Plus como un *instrumento de mediación semiótica*, se cataloga de esta forma por dos aspectos, en primer lugar porque cuando es usada por el docente con una *intencionalidad didáctica* a través de una actividad previamente diseñada que permita mediar el contenido matemático, esto es mediar entre los significados personales y los significados matemáticos.

En segundo lugar, este proceso de mediación comprende dos relaciones importantes por analizar, por un lado, la relación del instrumento con los signos personales que son signos que surgen en la solución de una actividad; y la relación del instrumento con los signos matemáticos que son signos asociados a lo culturalmente aceptado ante la comunidad de matemáticos, esto es el *potencial semiótico* del artefacto.

Debido a que el interés de la presente indagación no gira entorno a la gestión docente, interesa identificar cómo fue el estado del proceso de mediación para la evolución entre los significados personales y los significados matemáticos; al respecto, se evidenció la evolución del significado personal de punto medio que en un inicio se refería a la "mitad de un segmento" y que luego se transformó en el lugar geométrico generado por el punto medio que se representa por la ecuación que arroja el AGD cuando se le solicita por medio de la herramienta "Coordenadas y ecuación", esto es la ecuación de las coordenadas del punto medio.

Igualmente se evidenció como el significado personal de lo que era el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia era una circunferencia; y poder asociarla a la forma de la ecuación de una circunferencia. Esto fue consecuencia del uso de funciones del AGD como *traza*, *arrastre*, *lugar geométrico y coordenadas y ecuación*, que lograron con las acciones heurísticas promover la exploración por medio del AGD; sin embargo la obtención de la demostración no fue un hecho.

La integración de una *instrumento como mediador semiótico* permite tener en consideración distintas formas de encontrar argumentos para construir la conjetura, esto es encontrar significados personales asociados con la exploración de dependencia del movimiento que permitan producir juicios temporales que puedan construir las conjeturas;

no obstante, el paso de estos significados personales a significados matemáticos que sean argumentos que formen la demostración bajo una estructura lógico deductiva, no se evidenció, esto se puede deber a que los estudiantes no estaban familiarizados con este tipo de estructuras axiomáticas y a falencias en la gestión docente, esto porque el AGD por si sólo no lleva al estudiante a relacionar esos argumentos producidos en las acciones empíricas a argumentos relacionados con la teoría de la *Geometría Analítica.*

Es necesario que en la socialización de las preguntas elaboradas por el docente sean tan acertadas que los estudiantes consigan el objetivo de que sus signos personales evolucionen a los signos matemáticos, para este caso, no se aprecia una evolución en su totalidad de los signos personales (que provienen de los discursos que son validados empíricamente) hacia los signos matemáticos producidos cuando el artefacto es relacionado con la cultura matemática, debido a que el surgimiento de signos matemáticos necesita un seguimiento y un proceso que lleve mayor tiempo, y que sea de manera paulatina.

Algunos elementos necesarios para una propuesta que integre un AGD como *instrumento de mediación semiótica* en la solución de *problemas abiertos* que involucre la producción de conjeturas y demostraciones con la circunferencia, son:

1. Un diseño adecuado de las actividades que integre *problemas abiertos* para producir conjeturas, y otra tipología de preguntas más explicitas que ayuden al estudiante a construir elementos decisivos para hacer la demostración de la conjetura.

2. La necesidad de reconocer las distintas funciones de Cabri Géomètre II Plus para un uso eficiente dentro de la solución de actividades de este tipo, es decir desarrollar esquemas de uso suficientes para la integración del AGD.

3. Identificar el *potencial semiótico* del artefacto, esto es, relacionar de forma directa los significados personales asociados a la solución de la actividad con los significados matemáticos resultado de lo que es matemáticamente aceptado; este reconocimiento es un elemento decisivo en el momento del diseño de la actividades y de la tipología de funciones del AGD que se deben integrar en el estudiante.

4. Reconocer la evolución de los significados personales a significados matemáticos, de manera tal que en la gestión del docente se tenga en cuenta este aspecto

que permita estructurar la demostración basados en elementos previos que han sido usados para la construcción de la conjetura.

5. Lograr que el estudiante, durante la solución de la actividad, sienta la necesidad de demostrar; para ello es necesario, por un lado, proponer preguntas decisivas que cuestionen la necesidad de la demostración, en la medida en que le muestren al estudiante que no es suficiente con validar la conjetura a partir del AGD, sino que es necesario dar el paso hacia la demostración y, por otro lado, lo fundamental que es la labor realizada por el docente, pues él debe generar el espacio para la socialización de los discursos orales y escritos que produce el estudiante, con ello el estudiante es más consiente en elaboración de la demostración.

Con relación al *tercer objetivo específico* que corresponde a establecer algunos componentes que permitan identificar la relación entre el método sintético y el método analítico para el aprendizaje de la geometría en la producción de conjeturas y demostraciones, la tercera categoría de análisis general que relaciona los dos métodos permite sugerir algunos aspectos.

Aunque existe una distinción muy clara entre estos dos métodos el sintético y el analítico, no solo por los tiempos en los cuales se dio su desarrollo histórico, sino también por las características propias de cada método: síntesis y análisis respectivamente, además de la forma en que se ha organizado en el currículo; no niega tampoco la posibilidad de un relación entre los dos que puedan convertirse en una herramienta efectiva para el aprendizaje de la *Geometría Analítica.*

La complementariedad que se puede establecer entre estos métodos sugiere que con el método sintético es posible mostrar el componente gráfico que corresponden a las propiedades geométricas de las figuras, y con el método analítico la posibilidad de mostrar el componente algebraico, la relación se establece con la posibilidad de la conversión de esas propiedades geométricas en términos algebraicos que permita el uso de cálculos algorítmicos para su solución, pero que al mismo tiempo no pierda de vista las características geométricas asociadas.

Dentro de los resultados experimentales, se identifica que la complementariedad entre los dos métodos se evidenció de mejor manera en el análisis de la *situación problema*

1 en comparación con el análisis de la *situación problema 2.* Con relación a lo obtenido en la primera, se logró mostrar una fase de síntesis y de análisis propia de cada uno de los métodos en cada fase de la actividad, esto permitió que los estudiantes al hacer la fase de síntesis y llegar al conjunto de la construcción tuvieran en cuenta los objetos geométricos y sus propiedad, igualmente en el momento de pasar a la segunda fase de análisis hicieran uso de estas herramientas geométricas y reconstruyeran el proceso encontrando sus partes.

Con relación a la segunda actividad, debido a que no se logró evidenciar una culminación en la solución a través de los dos métodos ya sea el sintético o el analítico, no se puede plantear una relación explicita; aun así, los estudiantes lograron identificar la hipótesis y la tesis en sus enunciados, aunque la estructura de sus enunciados no correspondía a una del tipo deductiva en donde se evidenciara el condicionante para ello usaban otro tipo de terminología.

Las distintas soluciones mostraron que en el método analítico se pierde la relación con las propiedades geométricas de la figura porque se centran en una manipulación algebraica de las expresiones quedándose en problemas de tratamiento entre las representaciones semióticas de este tipo.

Tanto en un método como en el otro, permiten al estudiante estar atento al seguimiento del proceso de construcción de su solución y a la demostración, el AGD para este caso se comporta como un vínculo directo, que permite verificar si lo encontrado tiene cierto nivel de aceptabilidad, el estudiante le delega pues la responsabilidad de verdad al AGD; es importante que el método analítico sea usado como una herramienta que no pierda de vista la forma como se ha dado la solución por medio del método sintético, es así como se sugiere que estos dos métodos se relacionan como medios de comprobación de que las soluciones encontradas han sido acertadas o tienen un cierto nivel de validación.

Dentro de las dificultades que se evidenciaron en el proceso, se encuentran las de conversión y tratamiento entre los registros de representación semiótica, debido a que el método sintético permite identificar el componente gráfico y el método analítico sugiere el componente algebraico, la conversión de un registro a otro implica no solo que los estudiantes tengan conocimientos previos relacionados con la *Geometría Analítica*, también que el trabajo entre los dos tipos de registros sea algo conocido y constante para los estudiantes; además dificultades de tratamiento sobre los registros de representación semiótica del tipo algebraicos: esto es la manipulación algebraica y la aritmética representaron todo un reto en los estudiantes.

Por lo tanto, se puede identificar una complementariedad entre el método sintético y el método analítico, esto en términos de poder reconocer las relaciones entre los elementos geométricos y convertirlos en términos algebraicos, es así como se sugieren los siguientes componentes para ser usados este tipo de herramientas dentro del proceso demostrativo:

1. Identificar la tipología de situaciones ya sean situaciones problemas de construcción o de lugar geométrico, porque los resultados sugieren que son más potentes las primeras con relación a las segundas; aunque, este resultado puede estar asociado a deficiencias en el diseño de la situación problema que involucraba encontrar el lugar geométrico y la falta de hacer reconocer por parte de los estudiante esta noción.

2. Considerar los tiempos necesarios para la exploración de la solución por cada método, de tal manera que el estudiante establezca de forma explícita los enunciados en términos de condicionante para poder relacionar la hipótesis con la tesis, para hacer que el estudiante tenga claro hacia dónde debe dirigirse y cuál es la estructura lógica asociada.

3. Reconocer las operaciones entre los registros de representación semióticos a saber conversión y tratamiento como elementos cruciales que deben ser considerados en la gestión docente al usar la complementariedad entre los métodos sintéticos y analíticos dentro de las actividades propuestas como herramienta para el aprendizaje de *Geometría Analítica.*

Los aspectos que se describieron para cada objetivo específico corresponden en mecanismos relacionados para dar respuesta al problema de investigación, esto de cierta manera delimita el problema de investigación, y permiten precisar el estudio y el alcance de la investigación.

Con relación al *problema de indagación* que tiene como interrogante *¿Cómo podemos usar el paso de la conjetura a la demostración en el aprendizaje de la Geometría Analítica, mediante el método analítico-sintético en la circunferencia?*, a modo de iniciativa se propone la siguiente respuesta.

Los resultados sugieren que el modelo más acertado es el de *Unidad Cognitiva*, debido a que permite tener como eje transversal entre la producción de la conjetura y de la demostración la *actividad argumentativa*, acción rica en explorar por intermedio de la integración de un AGD como *herramienta de mediación semiótica* porque permite la evolución de los argumentos de forma parcial de significados personales a significados matemáticos, en tipología de actividades en donde se integre *problemas abiertos* y actividades que involucren la complementariedad entre el método sintético y analítico.

La *actividad argumentativa* surge como el elemento al cual se le debe hacer seguimiento para que se del paso de la conjetura a la demostración, esto implica que al integrar el AGD como *herramienta de mediación semiótica* se consideren a los significados personales como argumentos que construyan la conjetura y al evolucionar estos significados, se transformen en significados matemáticos que permitan producir y estructura la demostración.

No obstante, esta evolución no se da de forma espontánea, requiere de un diseño adecuado que integre *problemas abiertos* y actividades que tenga preguntas específicas que permitan una evolución de los significados; de igual forma, la complementariedad entre el método sintético y el método analítico constituyen en otro elemento potente para el diseño de las situaciones problemas, porque constituye en una herramienta que promueve la identificación de los elementos geométricos y algebraicos asociados a la figura geométrica y propios de cada método.

La gestión del docente, también constituye en un eje central en la continuidad debido a que en la socialización es el encargado de ayudar a que los significados personales evolucionen a significados matemáticas, y que la estructura lógica coincida con lo que la teoría de la geometría propone; aunque es más común evidenciar la función de explicación de la demostración, por el contrario la función de validación de la demostración es más compleja y requiere de un acompañamiento del docente para que no se quede en una mera validación empírica sujeta a los hechos que ofrece el AGD en respuesta al activar una función determinada.

Los anteriores aspectos sugieren que la forma para usar el paso de la conjetura a la demostración que permita un aprendizaje de la *Geometría Analítica*, se puede hacer por medio de una intensa *actividad argumentativa* porque promueve la continuidad cognitiva entre la conjetura y la demostración, y al integrar el AGD como *instrumento de mediación semiótica* ayuda a que los estudiantes exploren, surjan y evolucionen los significados personales a los significados matemáticos, en contextos de actividades donde intervenga *problemas abiertos* y actividades que incluyan la complementariedad entre el método sintético y analítico.

2) Sobre *la articulación entre los marcos teóricos*

Sobre la articulación entre los marcos teóricos se tuvo en cuenta dos enfoques teóricos principales que corresponden a la *Teoría de la Unidad Cognitiva* y la *Teoría de la Mediación semiótica.*

Con relación a la *Teoría de la Unidad Cognitiva* (Baccaglini-Frank, 2010; Bartolini Bussi & Mariotti 2008; Boero, 1999; Mariotti 2002, 2006; Pedemonte, 2007), es un modelo que permite analizar e interpretar las relaciones entre los argumentos que se producen al hacer una conjetura y los argumentos que se usan para hacer una demostración, la *Unidad Cognitiva* es considerada como un instrumento de análisis entre estas relaciones y permite reconocer en la *actividad argumentativa* el medio por el cual los argumentos sean el eje transversal de análisis (Baccaglini-Frank, 2010; Mariotti, 2002, 2006).

Para que los argumentos que han sido usados en producir la conjetura surjan y evolucionen a los argumentos que estructuren la demostración, se requiere integrar una herramienta técnica como *instrumento de mediación semiótica* (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2009), para este caso el AGD resulte ser un recurso potente, no solo por las dinámicas de exploración que proporciona para la solución de las actividades (Hanna, 2000), sino también porque obedece a una estructura axiomática de la geometría.

Al considerarse el AGD como una *instrumento de mediación semiótica,* se tienen en cuenta dos aspectos cruciales para su integración, por una parte la intencionalidad didáctica que le imprima el docente para su uso como mediador entre el contenido y la actividad; y por otro lado, el *potencial semiótico* que corresponde a la doble relación semiótica que tiene la herramienta con la actividad y la cultura matemática, y el surgimiento de procesos semióticos asociados (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

El AGD contribuye a formar contextos de enseñanza potentes para solucionar problemas geométricos (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Hanna, 2000; Mariotti, 2006), que permiten favorecer el desarrollo del razonamiento geométrico y de igual manera a una cultura de la demostración; sin embargo, este tipo de herramienta por si solo no configura un recurso, requiere no solo ser una *herramientas de mediación semiótica*, sino también que el estudiante tenga ciertos esquemas de uso, o que en el proceso se construyan estos esquemas; para este caso, esquemas de uso sobre las funciones del AGD para este caso Cabri Géomètre II Plus .

Este tipo de esquemas de uso permite que las funciones del AGD como el *arrastre* pueda ser interpretada la exploración en términos de dependencia lógica entre los elementos que conforman la figura geométrica (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010), permitiendo que la evolución entre los significados personales y los significados matemáticos puedan estructurar la demostración no solo en términos de explicación si no de validación de los argumentos que la conjuguen.

Asociado a ello, se encuentra el diseño de las actividades que contemple una tipología particular de problemas denominados *problemas abiertos* que permiten una mayor libertad en la exploración, no sugieren un único método de solución y hacen que la responsabilidad de la solución resida en las producciones propias de los estudiantes, esto crea la posibilidad de una intensa *actividad argumentativa* por parte de los estudiantes (Baccaglini-Frank, 2010).

Las distintas perspectivas teóricas sugieren que los *problemas abiertos* constituyen en elementos potentes para producir conjeturas (Baccaglini-Frank, 2010); asociado a este se integró en el diseño de las situaciones problemas la complementariedad entre los dos métodos característicos de la geometría: el método sintético propio de la geometría euclideana y el método analítico propio de la geometría cartesiana.

La relación entre estos dos métodos se relaciona por el hecho que el objetivo de la geometría cartesiana va más allá de incorporar un nueva forma de solucionar problemas por medio de la solución de ecuaciones algebraicas; su objetivo se extiende más allá, en términos de una nueva interpretación de *Los Elementos* de Euclides, que le imprimen una lectura algebraica a esta geometría (Álvarez, 2000).

El método sintético muestra los elementos de carácter geométrico en los cuales es la síntesis la que dirige la solución, que consiste en que a partir de las partes de los elementos se constituya el conjunto; para el caso del método analítico se evidencia los elementos algebraicos, el análisis es el sentido que dirige este método y consiste en que a partir de la descomposición de los elementos del conjunto que se pueda conocer con mayor facilidad cada una de sus partes.

Al reconocer esta relación entre las dos geometrías, se sugiere complementarios (Contreras, Contreras, & García, 2002; Itzcovich, 2005) los dos métodos en dos aspectos principales por un lado como una herramientas de validación que sugieren como por formas distintas se puede llegar a una misma respuesta para los estudiantes (Itzcovich, 2005), y por otro lado como con el método analítico se puede reconstruir lo hecho por medio del método sintético a través de una lectura algebraica de la geometría que surge del método sintético; esto presupone el manejo de dos registro de representación semiótica a saber algebraico y gráfico y asociada las dos operaciones entre estos registros conversión y tratamiento.

Tanto la conversión como el tratamiento constituyen en actividades matemáticas complejos que pueden representar dificultades de tipo cognitivo para el aprendizaje en matemáticas de los estudiantes (Duval, 1999), debido a que los registros de representación semiótica son los únicos medios para acceder a los objetos matemáticos y cada representación ofrece un significado particular; al respecto para que emerja un aprendizaje se requiere la manipulación mínima de dos registros de representación semiótica.

Es por ello, que el uso de los dos métodos constituye en una herramienta eficiente para el aprendizaje en *Geometría Analítica*, porque se conserva dos sistemas de representación semióticos el algebraico y el grafico, conjuntamente que permite incorporar las distintas operaciones entre los registros semióticos como medio de complementariedad entre los dos métodos.

Esto muestra entonces como se articular los dos enfoque teóricos principales *Teoría de la Unidad Cognitiva* y *Teoría de la Mediación semiótica*, junto con *problemas abiertos, complementariedad entre el método sintético y el método analítico y las operaciones entre registros de representación semiótica.*

3) Sobre *las preguntas abiertas que suscitaron para mejorar esta indagación*

En el siguiente apartado se describen cuatro preguntas que surgieron en la presente indagación:

1. En cuanto a la función de validación y en el momento de aceptar la validez de los argumentos que estructuran tanto la conjetura como la demostración, se pudo apreciar un fuerte vínculo en delegar la aceptación al AGD Cabri Géomètre II Plus, esto se reconoce como una validación empírica, al dar el paso hacia la validación matemática resulta ser todo un reto para el estudiante, esto es una cuestión relacionado propiamente a la gestión del docente, pues es él quien debe propiciar la evolución de los argumentos de tal forma que se es estructuren y validan de acuerdo a una teoría geométrica; aunque la enseñanza no es objeto de indagación en esta tesis, si surgió en la reflexión la siguiente pregunta: ¿Cuáles es la tipología de preguntas que debería proporcionar el docente para suscitar en los estudiantes la necesidad de la evolución de la validación empírica a una validación teórica o matemática de los argumentos que estructuren la demostración?

2. Otro cuestiones que suscitaron en la misma vía de la gestión del docente, está relacionado con el discurso que el docente debe manejar previamente para poner en práctica el modelo de la *Unidad Cognitiva* y los elementos asociados, al respecto se sugiere ¿Qué tipo de prácticas discursivas le exige el modelo de unidad cognitiva a los docentes cuando se integra un AGD Cabri Géomètre II Plus como instrumento de mediación semiótica en la solución de *problemas abiertos* en geometría analítica?

3. Con relación a la integración del AGD como *herramienta de mediación semiótica*, es necesario que el estudiante tenga un desarrollo previamente de esquemas de uso de algunas de las funciones sobretodo el *arrastre* para que se conviertan en innatas en el trabajo con este tipo de ambientes, al respecto surge el interrogante ¿Qué tipo de *esquemas de usos* son necesarios previamente a la integración de una AGD como herramienta de mediación semiótica para el paso de la conjetura a la demostración?

4. Con relación al diseño de las actividades, es evidente que es un proceso complejo, aunque se mostró que la tipología de *problemas abiertos* son potentes para producir conjeturas, no fueron suficientes para poder sugerir propuestas en la demostración y mucho menos una estructura lógico deductiva entre los enunciados (hipótesis y tesis),

para ello, se sugiere la siguiente pregunta, ¿qué tipo de problema se pueden incluir dentro de una propuesta de actividades que permita el paso de la conjetura a la demostración?

Finalmente, esta indagación tuvo como objeto sugerir aspectos en relación con el razonamiento matemático y la *actividad argumentativa* que permita construir demostraciones a partir de la conjetura en *Geometría Analítica*, integrando un AGD como *instrumento de mediación semiótica*, en la solución de actividades que estén conformadas con *problemas abiertos*, y la complementariedad entre el método sintético y analítico.

La experiencia alrededor de esta práctica nos permitió conocer mejor el entorno del aula, y evidenciar como algunas estrategias pueden contribuir al desarrollo del razonamiento matemático en pro de que se aprenda y fortalezca el pensamiento matemático, este tipo de modelos como el de la Unidad Cognitiva provee de elementos para analizar e interpretar las relaciones entre un posible continuidad o ruptura desde la conjetura hacia la demostración.

Estrategias como la de integrar un instrumento como mediador semiótico permiten poner de manifiesto procesos semióticos que en ocasiones pasan desapercibidos y son potentes para el aprendizaje de conocimiento matemático, la intencionalidad siempre se encuentra alrededor de que el estudiante sea el agente que se encargue de construir su propio conocimiento y el docente como dinamizador para hacer que sus concepciones evolucionen de acuerdo con la teoría matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, C. (2000). Descartes, Lector de Euclides. En C. Álvarez, & R. Martínez, (Coords.), Descartes y la Ciencia del Siglo XVII (pp. 15 – 68). México D.F., México: Siglo Veintiuno Editores.

Arzarello, F; Bartolini Bussi, M; Leung, A; Mariotti, M & Stevenson, I. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs. En *ICMI Proof and Proving in Mathematics Education*. *Springer*, Canada: Toronto. 1-471

Contreras, A; Contreras, M. & García, M. (2002). Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. *Relime*. Granada, España. 5 (2), 111-132

Baccaglini-Frank, A. (2010) *Conjecturing in dynamic geometry a model for conjecture generation through maintaining dragging*. UMI. Italia, 1-423

Baccaglini Frank, A & Mariotti, M. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *Springer*, 15, 225-253

Bartolini Bussi, M. & Mariotti, M. (2008), *Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective.* In L.English, M.

Bartolini Bussi, M; Jones, R; Lesh, & D. Tirosh (Eds.). Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ (pp. 746-805).

Boero, P. (1999) Argumentación y Demostración: Una Relación Compleja, Productiva, e Inevitable en las matemáticas. Recuperado el día 13 de diciemb.re de 2011 del sitio web http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeES.html

Douek, N. (2009). Approaching proof in school: from guided conjecturing and proving to a story of proof construction. En ICMI Proof and Proving in Mathematics Education.1, *Springer*, Taiwan. 1-262.

Duval, R. (1999). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Traducido por: M. Vega (2001) Cali, Colombia: Universidad del Valle

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II plus*. (Tesis de Maestría no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Goetz, J & LeCompte, M. (1988). *Etnografía* y diseño cualitativo en investigación educativa. En Morata, S.A. (Ed) y Ballesteros, A (Trads.). Madrid, España (Trabajo original publicado en 1984).

Guerrier-Durand, V. & Arsac. G (2009). Analysis of mathematical proofs: some questions and first answers. En ICMI Proof and Proving in Mathematics Education. 1, Springer, Taiwan. 1-262.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. Educational Studies in Mathematics 44. Holanda, 5–23

Hernández, V. S. (2002). La Geometría Analítica de Descartes y Fermat: ¿y Apolonio?. *En apuntes de historia de las matemáticas.* 1 (1), 32–45. Recuperado el día 16 de septiembre de 2011 de http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-4-analitica.pdf

Hershkowitz, R. (2000). Acerca del Razonamiento en geometría. *En PMME-UNISON*. Recuperado el día 6 de agosto de 2012 de http://www.euclides.org/menu/articles/article104.htm

Itzcovich, H. (2005). Relaciones entre construcciones geométricas y el álgebra en Iniciación al estudio didáctico de la geometría: De las construcciones a las demostraciones. Libros del zorzal, Buenos Aires: Argentina. p. 85-101

Joshua, S. & Dupin, J. (2005). La transposición didáctica. En Introducción a la Didáctica de las ciencias y la Matemática (pp. 185-214). Buenos Aires: Colihue

Mariotti, M. (2002). La preuve en mathématique [Mathematical proof]. *En ZDM*, 34 (4). Recuperado el día 13 de diciembre de 2011 del sitio web http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm024a5.pdf

Mariotti, M (2006). *Proof and Proving in Mathematics Education.* En Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. A. Gutiérrez, P. Boero (eds.) (pp. 173–204) .the Netherlands: Sense Publishers.

Mariotti, M. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective the role of the teacher. *ZDM Mathematics Education journal*, 41, 427–440.

Ministerio Nacional de Educación. (2010) Serie de lineamientos curriculares: Matemáticas. Bogotá, Colombia: MEN

Ministerio de Educación Nacional (2010). ICFES evaluaciones internacionales. Resultados de Colombia en TIMSS 2007. Bogotá, Colombia

Ministerio de Educación Nacional. (1998) *Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y fundamentales*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio. Disponible en Internet en: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Pedemonte, B. (2007). ¿*How can the relationship between argumentation and Proof be analysed*. Educational Studies in Mathematics, 66, 23-41.

Quintero, G. (2010). *De la conjetura a la demostración deductiva con la mediación de un ambiente de geometría dinámica*. (Tesis de Maestría no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Quintero, R. (2001). La invención de Fermat de la *Geometría Analítica*. Miscelánea Matemática, 34, 43–58. Recuperado el día 16 de septiembre de 2011 de http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/quintero.pdf

Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. Revista EMA 1995, 1(1), 4-24. Recuperado el día 15 de agosto de 2012 de http://funes.uniandes.edu.co/984/1/1_Rico1995Consideraciones_RevEMA.pdf

Río-Sánchez, J. del. (1996). *Lugares geométricos. Cónicas, Madrid, España: Editorial Síntesis*

Río-Sánchez, J. del. (1989). *Ideas previas en Matemáticas: una investigación sobre las cónicas*. Studia Pedagogía, revista de Ciencias de la Educación, (21), p. 61-81.

Santacruz, M. (2011). *Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un AGD: El caso de la rotación en educación primaria.* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Taylor, S & Bogdan, R. (1996). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Barcelona: PAIDOS.

Velásquez, S; Apreza, E; Lluck, D; Moreno, M. Y Valdez, G. (2007). La *Geometría Analítica*: ¿Cómo presentarla de manera interesante para los alumnos de la educación media superior?. En C. Dolores Flores, G. Martínez; R. M. Farfán; C. Carrillo; I. López y C. Navarro (Eds.). Matemática educativa: algunos aspectos de la socio epistemología y la visualización en el aula. Editorial Díaz de Santos. México

Wussing, H. (1998). *La revolución científica: Geometría Analítica y Técnicas de cálculo*. En Lecciones de historia de las matemáticas (p. 117-134). Siglo XXI Madrid: España.