PROCESO DE ESTUDIO DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS MEDIANTE EL USO DE ALGEBLOKS DESDE LA TAD

GILBERTO RUBIO ESPINOSA
CÓDIGO: 0748932

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2013

PROCES DE ESTUDIO DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS MEDIANTE EL USO DE ALGEBLOKS DESDE LA TAD

GILBERTO RUBIO ESPINOSA
CÓDIGO: 0748932

Proyecto de Grado para optar el título de Licenciado en Matemáticas y Física

Director
ALEXANDER PARRA
Lic. En Matemáticas y Física

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2013

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

TÍTULO DEL TRABAJO:	PROCESO DE ESTUDIO DE APRENDIZAJE DE LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS MEDIANTE EL USO DE ALGEBLOKS DESDE LA TAD
Se trata de:	Proyecto [ ] Informe Final [x]
Director:	Alexander Parra
1er Evaluador:	Jorge Enrique Galeano Cano
2do Evaluador:	María Fernanda Mejía Palomino
Fecha y Hora	Año: 2013 Mes: feb Día: 22 Hora: 6:30 p.m.

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
Gilberto Rubio Espinosa	0748932	3487
//	//	//

EVALUACIÓN

Aprobado	x	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo [ ] 1er Evaluador [ ] 2do Evaluador [ ]

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año: Mes: Día: Hora:

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

FIRMAS:

Parra		MFda. Mejía P.
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

1

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

OBSERVACIONES:	X	RECOMENDACIONES:		RAZÓN DEL DESACUERDO – ALTERNATIVAS:	

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

MARIA FERNANDA
Sugiero revisar el título, porque se usa el término estudio sin un su referente desde la TAD. Tampoco es oportuno agregar siglas en un título.

En el cuerpo del trabajo se presentan algunas sugerencias en relación a redacción, edición, citas y referencias bibliográficas. En particular: se toma una fig, de mi trabajo de grado, citándose de manera inadecuada porque mi primer apellido es Mejía y el año 2004.

En la metodología (1.4) se debe revisar el término del estudio instrumental de casos de tipo cualitativo experimental. Sugiero ampliarlo y hacerlo más evidente en el desarrollo del trabajo, o de lo contrario replantear este tipo de metodología.

Se sugiere que cambie la sigla OM por PM, ya que se determina la praxeología matemática (PM).

Tengo mis dudas frente a determinar que la valencia semiótica es igual a la representación (p. 38, párr. 3). Desde la TAD los objetos ostensivos no son representaciones, pero las representaciones semióticas si son objetos ostensivos, lo que puede hacer es delimitar que los objetos ostensivos de su interés son las representaciones semióticas y los algeblocks.

El nombre del tercer capítulo no corresponde con lo que se presenta, qué se entiende por variable, además en la metodología no se explícita nada al respecto. En el apartado 3.2 no determinan de manera explícita las tareas y las técnicas. De igual manera en el apartado 3.3., se determina una nomenclatura para técnicas pero no se menciona cuál es la técnica. Es importante hacer explícita la praxeología matemática del diseño.

En el apartado 4, no veo el uso de los literales a, b, c, d, e, f en el análisis de las tareas.

En el análisis de los resultados sería conveniente ver las figuras que aparecen en los anexos, además se hace mención de unas tablas que aparecen en los anexos. Esto hace difícil la lectura.

En las conclusiones no veo lo correspondientes a las limitaciones.

JORGE ENRIQUE

1. Considero pertinente hacer ciertas OBSERVACIONES respecto del trabajo entregado:

a. Ajustar el título (y la fecha) del trabajo

b. Dedicar un gran esfuerzo a la forma del texto: márgenes, sangrías, tipos de letra, etc.

c. La redacción de la parte final del trabajo, si bien es difícil de leer, no puede señalarse como errada; sin embargo, la primera parte (el planteamiento del problema, por ejemplo) debe atenderse. Para la segunda parte sugiero pequeños ajustes de forma a los párrafos.

d. En línea con lo anterior, revisar el uso indiscriminado de ciertos conectores en algunos momentos del documento.

e. En ciertos momentos, el tiempo de la narración encuentra dificultades; siendo un trabajo ya terminado deberá predominar el pasado, ciertas formas del presente, etc.

f. El uso de la primera persona debe desaparecer.

g. El análisis previo de la tarea usa ilustraciones "del autor" para mostrar las organizaciones posibles del material, esto no se mantiene en los análisis finales, los cuales remiten a los anexos para ver las ilustraciones "de los estudiantes", considero que debería mantenerse.

h. En línea con lo anterior, la presentación de los análisis debe organizarse un poco; intentar sintetizar si lo que se quiere es no extenderse mucho, pero no acudir a "amontonar" los análisis en busca de tal fin.

i. Las técnicas, y su nomenclatura, siendo un aporte fundamental del trabajo para el estudio de esta propuesta, deben atenderse con más cuidado; por lo menos en dos sentidos: presentarlas lo más pronto posible en el trabajo (el cuadro que las sintetiza solo aparece al final), y respetando lo anterior, establecer claramente su génesis, es decir, declarar si son fruto del análisis que se hizo (si surgen en lo preliminar o en los análisis finales), o si son categorías teóricas de otro autor.

j. Presentar las cosas que no funcionan en un trabajo, me parece es adecuado, da evidencia de la seriedad del autor, pero se debe tener una mirada más crítica para su explicación, por ejemplo, la distinción ecuación/igualdad que se presenta en trabajo tiene un cierto carácter "extraño", lo cual se verifica en los resultados. En este y otros momentos, no es que los estudiantes "no sepan" es que los expusimos a un elemento muy complejo de nuestra "ecología".

Hay en los análisis finales unas recomendaciones para el trabajo del maestro y otras para los posibles ajustes futuros a las tareas propuestas, esto debería presentarse de forma independiente en la parte final del trabajo.

		Mqtda. Mejía P.
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

2

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

Universidad del Valle

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente describala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Proceso de Estudio de Aprendizaje de la Factorización de Polinomios mediante el Uso de Algebloks desde la TAD.

Autores:

Nombre: Gilberto Rubio Espinosa. Firma:
C.C. 1143837255

Nombre: Firma:
C.C.

Nombre: Firma:
C.C.

Fecha: 27/ago/2013

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

AGRADECIMIENTOS

A mi director Alexander Parra, por todo el apoyo y esfuerzo dedicado y orientación, por su gran personalidad pasiva y humilde de dirigir y sugerir. A mis dos evaluadores, Jorge E. Galeano y María Fernanda Mejía por sus aportes, correcciones y observaciones en el desarrollo del trabajo.

A los estudiantes del grado 8-1, al profesor José Riquet y a todas las directivas del Colegio Parroquial Santiago Apóstol, especialmente a Yolanda Betancourt y Carlos Alberto Quintero, por toda su generosa participación y apoyo en la aplicación de las actividades.

A mis compañeras Lina Paredes, Alexandra Contreras y Tatiana Llanos por su colaboración voluntaria en el desarrollo y aplicación de las actividades.

A todos mis profesores y compañeros de la Universidad del Valle por haber enseñado y orientado en mi formación profesional.

A mi familia por todo el apoyo afectivo durante mi carrera y formación profesional.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

Este trabajo aborda la enseñanza y aprendizaje de la factorización de polinomios a través del uso de manipulativos. Se realiza un análisis general de los materiales manipulativos, su importancia, aportes y limitaciones. Posteriormente se centra principalmente en las características de los Algebloks, un material manipulativo usado principalmente para la enseñanza del álgebra. La metodología que se empleará es un estudio de caso de tipo cualitativo. Se desarrollará en tres fases. La primera se encarga del análisis e identificación de variables y diseño de tareas, la segunda consiste en su aplicación y por último, en el análisis de los resultados.

Palabras claves: Factorización, Álgebra, Algebloks, Materiales Manipulativos y polinomios.

INTRODUCCIÓN

Generalmente en las clases de matemáticas pueden predominar clases magistrales, aunque hoy en día se siguen dando en la mayoría de las clases, donde el profesor explica en la mejor forma que puede los conceptos requeridos, ilustra varios ejemplos y al final se dejan unos cuantos ejercicios para que el estudiante practique con el fin de entender lo que ya se había explicado en las clases. Pero esta realidad comenzó a cambiar alrededor de los años 70 en donde los profesores de matemáticas comienzan a agruparse en asociaciones, publicar revistas sobre didácticas e investigación e implementar nuevas estrategias para mejorar las clases, Arrieta (1998). Este autor afirma:

> Las orientaciones metodológicas hacen referencia a la conveniencia de que las clases sean menos magistrales y más activas, que se contextualice lo más posible la enseñanza de la Matemática y que el juego y el uso de material, además de motivador para el alumno, tiene un efecto referenciador en el que un alumno puede apoyarse para la comprensión de un concepto abstracto. (p.108)

De esta manera, se observa la necesidad de un cambio en la forma de desarrollar las clases de matemáticas, incluyendo la idea de clases mas activas, es decir, con más significado para los estudiantes.

Por otro lado, tenemos muchas dificultades y/o reclamos de los estudiantes con las matemáticas sobre su abstracción o poca utilidad en la vida cotidiana. La mayoría no les encuentran un sentido de aplicación a las matemáticas que aprenden. El profesor Gómez J (s.f) de la Universidad Pedagógica Nacional afirma que el mundo de la escuela es totalmente distinto al mundo de la vida. La Escuela ha creado un sistema de supervivencia en la misma escuela pero que no tiene relación con la ciencia y la vida.

Gómez J (s.f) menciona que es importante una hibridación de saberes, es decir, una relación de los saberes entre sí. Afirma que el proceso educativo debe iniciarse desde los resultados culturales y psicológicos que el estudiante posee, y por lo tanto se debe desechar la creencia de un conocimiento tradicional, es decir, un conocimiento auténtico e independiente, y que por ejemplo, los casos de factorización, las moles o las sociedades precolombinas no tienen ninguna relación ni con los problemas políticos y sociales del país ni con el proyecto de vida del estudiante, salvo que sólo interesa que dicho “conocimiento” sea un prerrequisito para ingresar a la universidad. Es pertinente preguntarse, ¿Qué tipo de educación necesitan los jóvenes? ¿Qué tipo de educación matemática se requiere?

Teniendo en cuenta estas preguntas, unos de los primeros cambios para favorecer las clases de matemáticas se da al implementar materiales manipulativos, donde se debe tener en cuenta las cuestiones didácticas de dicho material y las formas en que se aplican dentro de la clase. Este trabajo se centra en el aprendizaje de la factorización de polinomios al usar materiales manipulativos, teniendo como caso particular los Algebloks.

En relación con la estructura de este trabajo, consta de 4 capítulos. En el primer capítulo, se describen los aspectos generales de la investigación. En primer lugar se describe el planteamiento del problema donde se concluye con la pregunta de investigación. Posteriormente, se describe la justificación y antecedentes, resaltando las ventajas que tiene la inclusión de materiales manipulativos en la enseñanza y mostrando trabajos de investigación que anteceden a la enseñanza y aprendizaje del álgebra con materiales manipulativos. Luego, se plantean los objetivos específicos y generales de este trabajo. Finalmente, se describe la metodología que se utilizará en este trabajo para analizar los aspectos descritos en el planteamiento del problema.

En el segundo capítulo, se describe el Marco Teórico en el que se soporta este trabajo, resaltando los conceptos claves que tendrán importancia y reconocimiento en el desarrollo del trabajo. En el Tercer capítulo, que se titula “Identificación de Variables”, se describe el material manipulativo denominado “Algebloks” en relación con los conceptos descritos en el Marco Teórico. De esta manera, se identifica y sitúa los Algebloks como un objeto Ostensivo. Luego, se describe la estructura y construcción del Diseño de Tareas teniendo en cuenta el Marco Teórico. En el cuarto capítulo se describen los resultados obtenidos en la aplicación del Diseño de Tareas propuesto a los estudiantes de grado octavo. Se realiza un análisis por cada Tarea aplicada y luego un análisis general que conlleva a responder la pregunta de investigación.

Posteriormente, se describen las conclusiones de este trabajo y, luego, se muestran las referencias consultadas. Finalmente, se muestran los Anexos, que incluye las tareas que los estudiantes desarrollaron e imágenes fotográficas que muestran información relevante para el análisis de resultados.

1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

Este primer capítulo se aborda en cuatro partes. En primer lugar, se describe el planteamiento del problema del trabajo. En éste se identifica la pregunta de investigación. Luego, se muestra la justificación y antecedentes, haciendo evidente la influencia de materiales manipulativos en clases de matemáticas. En la tercera parte se mencionan los objetivos del trabajo y finalmente el diseño metodológico con el cual se lleva a cabo el desarrollo del trabajo.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

El planteamiento del problema se aborda en tres fases que pretenden caracterizarlo desde lo general hasta lo particular, planteando el problema a través de la pregunta de investigación. De esta manera, se comienza enunciando algunas dificultades que se presentan en el aprendizaje del álgebra, mostrando ejemplos de “errores” comunes que surgen. Luego, se da una mirada sobre el aprendizaje del álgebra y la factorización con el uso de materiales manipulativos. Se listan algunos ejemplos y se caracterizan sus potencialidades y limitaciones. Y finalmente, para llegar a lo más particular, se abordan las características del proceso que se realiza con el material manipulativo junto con el la pregunta del problema que será objeto de estudio en este trabajo, denominado: Algebloks. (**Ver fig.1**)

1.1.1 Dificultades y errores en el aprendizaje del Álgebra.

En esta fase se identifican algunas dificultades y errores que se observan en el proceso de aprendizaje del álgebra de los estudiantes desde las investigaciones de varios autores. El objetivo de esta fase consiste en identificar dificultades y errores que caractericen y orienten hacia la pregunta de investigación.

Primero, es necesario aclarar la diferencia errores y dificultades. “Los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación”, (Socas, 2007, c.p, Matz, 1980, p.33). En cambio, las “dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores”, (Socas, 2007, p.31).

Ahora bien, se entiende por factorización al proceso de convertir la expresión algebraica al producto de otras expresiones algebraicas (Camargo y et al. 2002, p. 139). Abordaremos esta definición de factorización para este trabajo porque va de la mano con el tipo de actividades que se pretende diseñar.

Existe una preocupación constante de varios docentes de matemáticas cuando asumen la enseñanza de la "factorización". Morales y Sepúlveda (2006) afirman que la factorización es un tema del curso algebraico que más dificultad causa a los estudiantes. Los autores también afirman dos posibles causas de esta dificultad:

- Porque el reconocimiento del tipo de expresión algebraica ya implica dificultades asociadas con la utilización de números, letras y signos de operación para conformarlas, así como por la noción de variable.
- Porque aun conociendo los diferentes métodos no saben cuál de ellos utilizar en un determinado momento. (p.1)

Se puede inferir que los llamados "casos de factorización", como aparecen en algunos libros de texto, pueden confundir a los estudiantes y no saber qué método usar. Así mismo, las "letras" que son usadas para manipular expresiones algebraicas son desde un inicio una dificultad para los estudiantes.

De la misma manera, en el trabajo de Socas (1989) identifica cuatro tópicos de dificultades que complementan la afirmación sobre las dificultades en los cursos de álgebra:

1. Dificultades debidas a la naturaleza del tema algebraico dentro del contexto de las matemáticas.
2. Dificultades que surgen de los procesos del desarrollo cognitivo de los alumnos y de la estructura y organización de sus experiencias.
3. Dificultades atribuibles a la naturaleza .del currículo, a la organización de las lecciones y a los métodos de .enseñanza usados.
4. Dificultades debidas a actitudes afectivas y no racionales hacia el álgebra (p. 91)

Los cuatro tópicos anteriores abordan dificultades desde varios aspectos. Se resaltan los tópicos uno y dos como las dificultades que aportan argumentos para el planteamiento del problema.

Además, Socas, Camacho y Hernández (1998, p.82,83), caracterizan tres causas principales de los errores que se presentan en el aprendizaje del álgebra, y, a su vez, los clasifican de esta forma:

- Errores que tienen su origen en un obstáculo.
- Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.
  a. Errores del Álgebra que tienen su origen en la Aritmética.
  b. Errores de procedimiento.
  c. Errores del Álgebra debido a las características propias del lenguaje algebraico.
- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

Por otro lado, en la investigación sobre experiencias de aula sobre los errores comunes que surgen en los procesos algebraicos en los estudiantes Castellanos y Obando (2010, p.12) plantean los siguientes tipos:

- $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
- $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$
- $(\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} + \mathbf{6}\boldsymbol{xb}$
- $(\mathbf{3}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = \mathbf{9} + \boldsymbol{b}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2} * \mathbf{3} + \mathbf{2}$

Estos tipos de errores se obtuvieron del análisis de datos del estudio de casos particulares que realizaron Castellanos y Obando (2010). Tales errores se consideran debido a la generalización incorrecta de propiedades aritméticas, Castellanos y Obando (2010). Por tanto, estos tipos de errores evidencian dificultades en el aprendizaje del álgebra, y posteriormente, al aprendizaje de nuevos conceptos y procedimientos matemáticos, como la factorización de polinomios, que requieren de la claridad cognitiva de dichos conocimientos previos.

Estos autores identifican las posibles causas de los errores algebraicos que los estudiantes realizan en ejercicios que se les propone resolver:

- Datos mal utilizados.
- Interpretación incorrecta del lenguaje.
- Empleo incorrecto de propiedades y definiciones.
- Errores al operar algebraicamente.
- No verificación de resultados parciales o totales.
- Errores lógicos.
- Errores técnicos (p.12)

Además, en el XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011, acerca de las dificultades en el razonamiento algebraico, afirman que: "Los Errores de cálculo y uso incorrecto de fórmulas o procedimiento**,** no son dificultades en álgebra, son problemas que se quedaron sin corregir en la aritmética", (p.10). Por tanto, al igual que afirman Castellanos y Obando (2010), existe un tipo de dificultad proveniente de las dificultades en conceptos previos al Álgebra. Sin embargo, a nivel general, en el XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011, se encontró que la gran mayoría de errores encontrados se asocian a: "los contenidos de las tareas presentadas y de los procesos generalización algebraica que se pretendan tratar", (p.11). Por tanto, se resalta la influencia que tienen los tipos de tareas propuestos a los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra.

Finalmente, teniendo en cuenta lo anterior, se observa que existe una problemática o dificultad en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra en la factorización de polinomios. A continuación se muestra la segunda fase del desarrollo de la problemática.

1.1.2 Características del uso de materiales manipulativos en el aprendizaje del álgebra.

En esta fase se abordan algunas investigaciones sobre la enseñanza del álgebra con el uso de materiales manipulativos y sus resultados. Se destacan algunos materiales manipulativos usados y los resultados obtenidos. Se muestran algunas características que surgen en su enseñanza y se identifican algunos métodos de enseñanza. Aborda la propuesta de la enseñanza del Álgebra desde la Geometría.

Este trabajo incluye el manejo entre objetos geométricos con objetos algebraicos que puede lograrse por medio del uso de materiales manipulativos, es decir, entre dos tipos de registros que se dan en la enseñanza de las matemáticas. Este concepto es ampliado en el Marco Teórico.

Se entiende como material manipulativo a aquellos materiales que los estudiantes pueden coger, palpar, visualizar, manipular, oler; con el fin de desarrollar una actividad académica dentro del aula de clase. Esta definición cabe dentro del concepto de **Objetos Ostensivos**, definidos en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la cual hará parte del Marco Teórico de este trabajo.

Existen diversos materiales manipulativos usados para la enseñanza del Álgebra, entre ellos encontramos el Puzzle Algebraico, los bloques Multibásicos de Dienes, Lab Gear, Algebloks, Algebra Tiles y Las regletas de Cuisenaire.

Sin embargo, se debe tener claridad en que el material manipulativo no puede por sí mismo enseñar a los estudiantes conceptos y habilidades matemáticas. El material manipulativo no se puede convertir en el objeto de estudio. Debe ser un medio que permita desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje, en este caso, de la factorización de polinomios. Hernández, Muñoz, Palarea, Ruano y Socas (2008) lo confirman:

> Se da la siguiente paradoja: para el profesor el material es considerado como un control semántico del objeto matemático, sin embargo, para el alumno, se convierte en un objeto de enseñanza y, por tanto, no es un modelo correcto y no permite el control esperado. (p.120).

En este sentido, se tiene la investigación de Hernández, Muñoz, Palarea, Ruano y Socas (2008), donde utilizaron el Puzzle Algebraio, en una de sus conclusiones afirman que:

> El papel de la representación del Puzzle se mantiene independientemente de su utilización física, es decir, el alumno abandona rápidamente su utilización manipulativa, sin embargo, mantiene su manipulación mental. De este modo, cumple su papel de representación del objeto matemático y no se convierte en el fin mismo del aprendizaje, (p.142).

Es decir, **los Algebloks no se convertirán en el objeto de estudio de los estudiantes, si no que a través de su manipulación inducida por alguna tarea específica producirán significados que concluirán en conceptos matemáticos**. Luego, el aporte de esta fase al planteamiento del problema es observar si a través de los Algebloks se mantiene la independencia de la "manipulación mental" del estudiante cuando éstos no están presentes al resolver un tipo de problema algebraico, al igual que se dio con el Puzzle Algebraico.

Aunque en el Marco Teórico se precisan los conceptos de aprendizaje y enseñanza, por ahora interesa mencionar que los Algebloks no posibilitarán un aprendizaje matemático sin antes existir una actividad diseñada y dirigida.

Por otro lado, los motivos para establecer y proponer una enseñanza de la factorización en términos geométricos, específicamente, en materiales manipulativos de tipo geométrico por los estudiantes, pueden ser diversos. Uno de ellos es debido a que en las escuelas no suelen ser usados materiales manipulativos para la enseñanza de matemáticas ni tampoco suele hacerse una relación con la geometría, sabiendo que el álgebra se inicia a partir de la geometría (Vallejo 2009). Vallejo (2009), que propone enseñar el álgebra con el modelo del área tomando como ejemplo al autor Al-Khwarizmi, afirma:

> Esto nos lleva a reflexionar si como docentes, y conociendo las dificultades de nuestros alumnos para el tratamiento de identidades y ecuaciones algebraicas, no sería bueno comenzar su enseñanza de una “manera elemental”, al modo de Al-Khwarizmi, con los aportes que hasta aquí mencionamos, desarrollando la posibilidad de un trabajo simultáneo en dos marcos, geométrico y algebraico, e incorporando el modelo de área bajo distintas representaciones. Sabemos que la modelización material y gráfica tiene sus limitaciones, pero justamente resulta interesante que los mismos alumnos las descubran y reconozcan la potencialidad del lenguaje del álgebra para sortearlas. (p. 151)

De esta manera, Vallejo (2009) intenta mostrar una nueva posibilidad de enseñar la factorización de polinomios en relación con lo geométrico, en este caso, con el modelo de área que plantean en su investigación, donde se utilizan figuras geométricas. Pero, en este trabajo se identifica un aspecto diferente: la enseñanza de la factorización de polinomios usando materiales manipulativos que, en el caso de los Algebloks, se conforma por figuras geométricas.

Sin embargo, se conocen varias investigaciones que apoyan el logro positivo en el aprendizaje de procesos algebraicos de los estudiantes al usar materiales manipulativos. Estas investigaciones se nombran en la Justificación y los antecedentes de este trabajo.

Otro aspecto a favor de la implementación de materiales manipulativos que surge en el aula en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la factorización consiste en la actitud que el estudiante toma frente a la clase. Arrieta (1998) afirma que tal actitud con la clase, es una actitud con más interés, en la cual se ha generado una estimulación favorable del estudiante hacia la clase**.** Sin embargo, se debe tener en cuenta que no en todas las ocasiones un material manipulativo debe ser interesante para el estudiante. Desde luego, las reacciones de los estudiantes dependen de la forma en que se implementa el material manipulativo en la clase por parte del profesor.

Para concluir, se destacan en esta fase dos aspectos importantes que ayudan a identificar la pregunta de investigación:

- Los materiales manipulativos se pueden convertir en un obstáculo cuando se convierten en el objeto de estudio.
- Las reacciones de los estudiantes, como poco interés, pueden afectar el proceso de enseñanza y aprendizaje, y a su vez, este tipo de reacción depende de cómo es introducido el material manipulativo en las actividades en el aula.

1.1.3 Consideraciones y características del uso del material manipulativo denominado Algebloks.

Esta tercera fase muestra resultados obtenidos en algunas investigaciones y características de los **Algebloks**, un material manipulativo que consta de bloques geométricos. Teniendo en cuenta las dos fases anteriores, finalmente se plantea la pregunta de investigación.

Cardoso y Hernández (2009) desarrollaron una investigación sobre el desarrollo de pensamiento algebraico a través del uso de Algeblocks en estudiantes de segundo grado de secundaria. Su metodología de investigación fue de tipo evaluativa y descriptiva, ayudándose de una pre-prueba, post-prueba y un cuestionario.

Estos autores afirman que los resultados fueron favorables en el aprendizaje de los estudiantes, además, los mismos estudiantes plantearon que los algeblocks los hacían sentir menos aburridos y entender mejor.

Cardoso y Hernández (2009) afirman que **“**los algeblocks favorecieron la compresión del álgebra en el segundo grado de secundaria. Los estudiantes, a través de su manipulación, lograron acceder de un conocimiento concreto (modelo geométrico a través de los algeblocks) a un conocimiento abstracto representación algebraica)” (p.1)

Si embargo, esta investigación muestra el resultado favorable en el pensamiento algebraico, pero nos dice poco acerca del aprendizaje de la factorización de polinomios. La investigación se centra en lograr representaciones algebraicas a través de representaciones concretas.

Consecuentemente, como se mencionó anteriormente, factorización es inversa a la multiplicación, la cual consiste en expresar una expresión algebraica, en este caso un polinomio, en productos de otras expresiones algebraicas, es decir, otros polinomios, siendo ambos polinomios equivalentes. Expresar esta equivalencia requiere de ciertas competencias matemáticas, las cuales son distintas al expresar una equivalencia de polinomios con los Algebloks. Por tanto, desde esta investigación no se puede afirmar si los Algebloks permiten, bajo un diseño de tareas, favorecer el aprendizaje de la factorización.

Por otro lado, la propuesta metodológica de trabajo con los Algebloks está planteada para el desarrollo del aprendizaje de la factorización de polinomios de grado dos. Así lo muestran Picciotto y Wah (1994) en su libro de texto “Algebra”, donde plantean actividades que a partir de la manipulación de los Algebloks posibilita el aprendizaje del álgebra.

Un tipo de actividad es, por ejemplo, el enunciado donde se le pide al estudiante encontrar una expresión equivalente a x^2+5x+6 usando los Algebloks. El estudiante llegará a la conclusión que una expresión algebraica equivalente es $(x+2)(x+3)$, la cual puede representar (la noción de representar se precisa en el Marco Teórico) un rectángulo de largo $(x+2)$ y ancho $(x+3)$. Este tipo de actividad es un prototipo que predomina en la propuesta de Picciotto y Wah.

En una mirada general de la propuesta no se observa o identifica en el uso de los Algebloks si el estudiante puede factorizar polinomios como x^3+8 ; x^5-1 y x^7-x^3+3. Piccioto y Wah (1994) plantean actividades hasta con polinomios de grado n=3 y propone factorizar otros polinomios de grado n>3 donde no se deben usar los Algebloks. Pero, desde estas actividades no se puede afirmar si los estudiantes logran factorizar este tipo de polinomios, es decir, las habilidades adquiridas por el estudiante a través de las actividades desarrolladas en la manipulación con los Algebloks no garantizan que el estudiante tenga habilidades para factorizar otro tipo de polinomios, los cuales no se pueden realizar con el uso de Algebloks.

Se podría inferir que con los Algebloks no se desarrolla una técnica para factorizar polinomios de grado mayor e igual a 3, aunque intentan hacerlo por medio de las actividades planteadas con polinomios de grado n=2 y n=3.

A partir de las características mostradas en las tres fases, el problema se identifica y muestra a través de la siguiente pregunta:

¿De qué manera el uso de los Algebloks, posibilita o limita el estudio de la factorización de polinomios de grado mayor o igual a tres?

1.2. JUSTIFICACIÓN Y ANTECEDENTES.

1.2.1 Justificación.

La importancia de este trabajo se resalta en dos aspectos fundamentales a la reflexión que se establece en relación con la enseñanza y aprendizaje del álgebra. El primero hace énfasis a las ventajas del uso de materiales manipulativos como medio para generar un ambiente en clase de matemáticas más activo y experimental. El segundo se relaciona con la necesidad de la enseñanza de la factorización de polinomios desde los Estándares de Competencias en Matemáticas que se establecen a nivel nacional, resaltando de manera positiva la implementación con los manipulativos en el aula, caracterizando los alcances y limitaciones de estos.

1.2.1.1 Las potencialidades que presentan los materiales manipulativos en la clase de matemáticas.

Observamos que el uso de un material manipulativo puede despertar el interés en el estudiante, y es aquí donde se constituye el primer paso dentro del diseño adecuado de una situación con intenciones didácticas, en una clase que se espera sea exitosa, ya que se ha logrado captar la atención del estudiante. Sin embargo, se deja claro que no siempre es así, por eso se dice “puede despertar interés”. En un segundo momento, se tendrá en cuenta los aspectos didácticos, es decir, la forma en que dicho material debe usarse para lograr que el estudiante comprenda lo que queremos, dejando claro en que el material manipulativo no se puede convertir en el objeto de estudio, como se mencionó anteriormente. Este es uno de los primeros aspectos que destacan la importancia de este trabajo.

Hernández y etal. (2008) afirman:

> Los currículos actuales de Canarias en Educación Primaria y en Educación Secundaria Obligatoria, proponen el uso de materiales manipulativos para la enseñanza de las Matemáticas en general, y del Álgebra en particular, siguiendo la línea de los estándares del NCTM (1989 y 2000). (p.116)

Esta afirmación está a favor del uso de materiales como los Algebloks, ya que pueden entrar en la categoría de material manipulativo. Un material manipulativo ayuda a establecer una clase activa donde el estudiante no será un agente pasivo que se dedica a escuchar todo lo que el profesor le dice.

Interiorizar un concepto es un proceso de aprendizaje complejo, Lovell (1977) afirma: “los conceptos parecen proceder de las percepciones, del contacto real con los objetos y situaciones vitales de experiencias sufridas y de distintas clases de acciones realizadas”, (p.25-26). También lo reafirman Morales y Sepúlveda (2006, c.p. Duval, 2004):

> Los conceptos se van construyendo mediante acciones que impliquen el uso de diferentes representaciones ya sea de los conceptos mismos, de los elementos asociados a ellos o de los objetos matemáticos, así como la manipulación de éstas para promover una articulación coherente entre ellos y sus representaciones, (p.1).

Aunque, para Duval (2004) los materiales manipulativos no pueden representar objetos matemáticos, visto desde la TAD, éstos si son una forma de representación (como se amplía en el Marco Teórico). Así, estas afirmaciones de los dos párrafos anteriores ponen en evidencia que al usar materiales manipulativos se pueden alcanzar percepciones en los estudiantes, que más tarde se convertirán en los conceptos. Además, los materiales manipulativos se convierten en formas de representación de objetos algebraicos. En el caso de la factorización de polinomios, el material ayuda a recrear una experiencia con objetos tangibles en donde el estudiante tendrá que establecer la relación de los bloques geométricos que manipula y las representaciones algebraicas que se pueden abstraer.

Por otro lado, Hernández y etal. Ofrecen cinco afirmaciones que destacan a favor el uso de los materiales manipulativos para la enseñanza del álgebra:

> 1. Facilitan la manipulación y conceptualización del símbolo y de la cantidad desconocida o general.
>
> 2. Proporcionan una interpretación geométrica a símbolos y operaciones.
>
> 3. Mejoran el discurso de la clase de Álgebra: por una parte, los alumnos reflexionan y discuten sobre el objeto matemático y, por otra, si la metodología que acompaña al material es la adecuada, permiten que cada alumno construya el aprendizaje a su ritmo (el profesor dirige, pero la enseñanza es individualizada, por esto es muy importante el diseño de las actividades que acompañan al material).
> 4. Facilitan las conversiones entre el lenguaje algebraico y el natural.

> 5. La manipulación de varias representaciones por el alumnado le permite construir imágenes adecuadas de un objeto matemático. (p.118)

En otro orden de ideas, como observamos en la descripción de la problemática, una de las inquietudes puntuales a resolver en este trabajo es analizar si el estudiante puede adquirir habilidades para factorizar cualquier polinomio por medio de su interacción con Algebloks, especialmente, polinomios de grado mayor a 3. Castellanos y Obando (2009, c.p, Charnay R) afirma:

> Considerar el error no como una falta o una insuficiencia sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomas conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos, los docentes a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos, (p.1).

Finalmente, este trabajo brinda una mirada más contextualizada sobre el uso o aplicabilidad de la factorización de polinomios, en este caso, en un ambiente con materiales manipulativos. El estudiante puede establecer un vínculo entre las expresiones algebraicas con representaciones de tipo geométrico. Esto conlleva a que el Álgebra se muestre con un sentido menos abstracto para el estudiante. Sin embargo, el contexto no solo puede ser un ambiente geométrico, más bien, contextualizar la geometría con aplicaciones en el mundo real, es decir, en la resolución de problemas o tipos de tareas cotidianos donde sea necesaria la aplicación de procedimientos matemáticos.

1.2.1.2 Los estándares básicos de competencias en matemáticas y la factorización de polinomios.

Los estándares básicos de competencias en matemáticas de Colombia del Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006) plantean las pautas que favorecen la enseñanza de matemáticas aplicadas, es decir, con el uso de materiales manipulativos para la resolución de problemas. Estos estándares van más allá de una lista de contenidos que se deban enseñar, estos nos ofrecen unos criterios en los cuales los docentes se deben basar, enfocados a una determinada competencia y aplicación dada.

En los estándares relacionados con el aprendizaje de operaciones entre expresiones algebraicas no se identifica algún límite del grado de los polinomios que se deben aprender a factorizar. Por tanto, es importante que el estudiante factorice polinomios con grado mayores a dos para alcanzar los estándares propuestos y, además, alcanzar los estándares propuestos en grados superiores que tienen como requisito el aprendizaje de la factorización de dichos polinomios.

> “Desarrollar las competencias matemáticas supone organizar procesos de enseñanza y aprendizaje basados en estructuras curriculares dinámicas que se orienten hacia el desarrollo de competencias”, (Men, 2006)

Los estándares MEN (2006) realizan la siguiente afirmación en relación con los recursos didácticos:

> Cada conjunto de recursos, puestos en escena a través de una situación de aprendizaje significativo y comprensivo, permite recrear ciertos elementos estructurales de los conceptos y de los procedimientos que se proponen para que los estudiantes los aprendan y ejerciten y, así, esa situación ayuda a profundizar y consolidar los distintos procesos generales y los distintos tipos de pensamiento matemático. En este sentido, a través de las situaciones, los recursos se hacen mediadores eficaces en la apropiación de conceptos y procedimientos básicos de las matemáticas y en el avance hacia niveles de competencia cada vez más altos. (p.75).

La anterior afirmación muestra como los materiales manipulativos, en este caso los Algebloks **(fig.1)**, pueden convertirse en un medio eficaz para el aprendizaje, particularmente, de la factorización de polinomios.

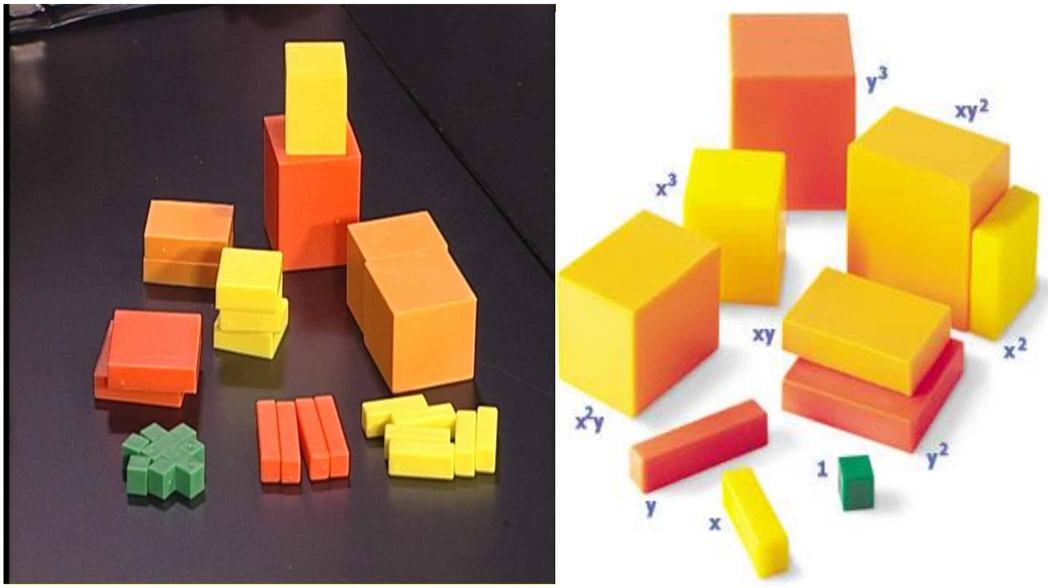


Fig.1 Algebloks que se ofrecen en el mercado.

Por otro lado, es importante resaltar, a modo de observación, que **la palabra "factorización" no aparece escrita en los estándares**. Sin embargo, no significa que los estándares no planteen la enseñanza de la factorización, ésta se muestra de forma implícita, reconociéndose como transformaciones algebraicas o una herramienta matemática usada para resolver problemas en diversos contextos. Esto se puede ver en los dos siguientes estándares del pensamiento variacional y sistema algebraico de los grados 8° y 9° que MEN (2006) afirma:

> "• Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
> • Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada", (p.87).

Para poder alcanzar los dos estándares el estudiante debe factorizar las expresiones algebraicas que aparezcan. Esta afirmación nos justifica el hecho de enseñar la factorización y su importancia para desarrollar satisfactoriamente otros procesos matemáticos, como por ejemplo, al resolver ecuaciones cuadráticas. Estos procesos son vistos por los estándares Men (2006) como:

- Formular y resolver problemas.
- Modelar procesos y fenómenos de la realidad.
- Comunicar.

- Razonar.
- Formular, comparar y elaborar ejercitación de procedimientos y algoritmos.

Ahora bien, en el primer estándar es posible reconocer una relación entre el álgebra y la geometría. Por medio del siguiente ejemplo con geometría analítica podemos observar dicha relación:

El polinomio $x^2 + 5x + 6$ es equivalente al polinomio $(x + 2)(x + 3)$. Del primer polinomio puedo decir que en su representación gráfica (en este caso, el polinomio es una función polinómica de variable ***x***) en R^2 **(fig.2)**, que es una **parábola**, la curva corta al eje ***y*** en *y=6*. También puedo conocer los valores a, b, c del polinomio de la forma $ax^n + bx + c$, y con ellos hallar propiedades gráficas, como la abscisa del vértice de la parábola mediante la fórmula $x = \frac{-b}{2a}$. Así, el vértice de la parábola es el punto $(-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}})$ **(fig.2)**. Del segundo polinomio, al identificarlo como una ecuación igualada a cero, puedo afirmar claramente que los cortes de la parábola con el eje ***x*** son $x = -2\,; x = -3$, es decir, los valores de ***x*** que satisfacen la ecuación. Ahora, ambas expresiones algebraicas son equivalentes, sin embargo en cada una puedo establecer propiedades gráficas diferentes visto como un polinomio o una función real, lo cual está planteado en el estándar.

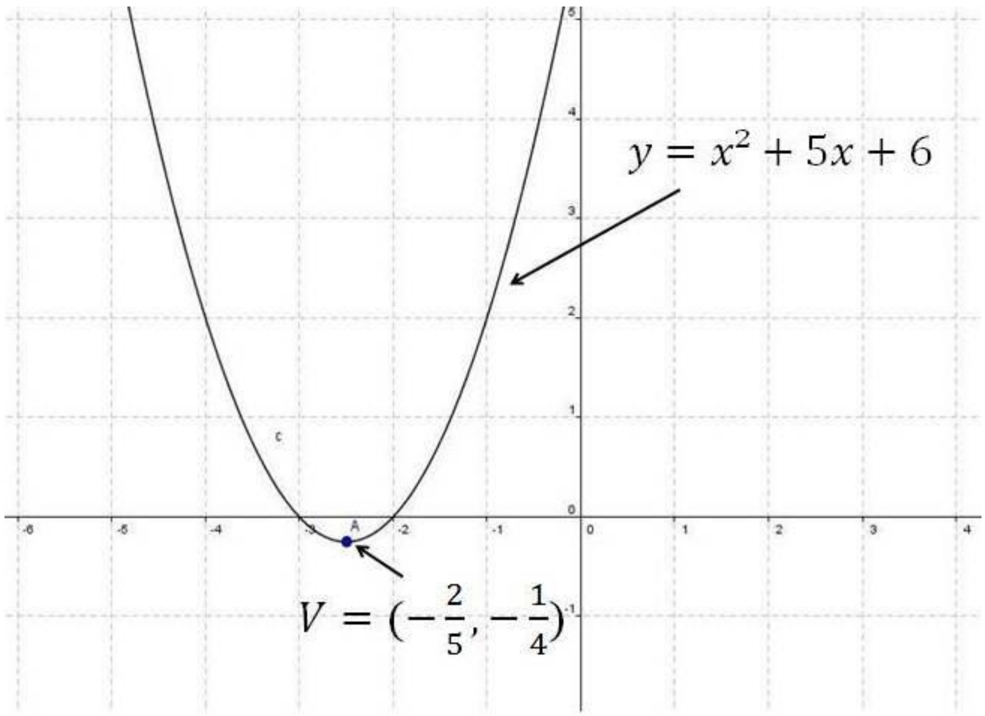


Fig.2 Ejemplo gráfico de polinomio.

Por lo tanto, desde el punto de vista de los Estándares, la factorización de polinomios es un aprendizaje requerido en los estudiantes de la educación básica. La factorización de polinomios posibilita alcanzar los estándares citados anteriormente como un aprendizaje previo para la obtención de nuevos aprendizajes.

Por tanto, se reconoce el esfuerzo por enseñar y aprender los denominados “casos de factorización”, lo que implica darle sentido al objeto matemático para el estudiante en la solución de problemas. Debido a que en el grado 8° no se enseñan los contextos de las funciones reales, obliga a establecer contextos geométricos para la construcción de dichas expresiones algebraicas equivalentes mencionadas en el primer estándar anteriormente.

Además, en los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas MEN (2006) encontramos el siguiente estándar:

- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas (p.86).

Así pues, los contextos geométricos utilizados para la enseñanza y aprendizaje de la factorización de polinomios influencian alcanzar este estándar del pensamiento espacial y sistemas geométricos. El diseño de tareas que incluye este trabajo involucra problemas de aplicación de los conceptos de distancia, área, volumen, a su vez, representados por expresiones algebraicas. Por tanto, el pensamiento geométrico y espacial aparecen involucrados.

1.2.2 Antecedentes:

Como antecedentes se tienen:

En relación al texto escolar "Álgebra" de Picciotto y Wah (1994), se propone o se desarrolla la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra escolar, que contiene diversos tipos de actividades que les plantean a los estudiantes utilizando Algebloks. También contiene actividades sin el uso de ellos. Se manejan contenidos como áreas y volúmenes, perímetros, operaciones con polinomios, factorización, entre otros.

Este libro de texto desarrolla un amplio diseño de tareas interesantes, que serán tomadas en cuenta para el análisis correspondiente, según se menciona en la Metodología. Tales actividades abarcan la mayoría de las temáticas que se requieren para la enseñanza del Álgebra. Entre ellos se nombran las operaciones con polinomios, áreas y volúmenes de figuras geométricas a partir de expresiones algebraicas y factorización de polinomios.

Por otro lado, el trabajo realizado por Vallejo (2009) en la didáctica del área, describe y caracteriza la enseñanza del Álgebra por medio del "modelo del área". Afirma que muchos problemas algebraicos han sido soluciones por medio de métodos geométricos, tal es el caso de la famosa "Cuadratura de la Parábola". Vallejo (2009) realiza un recuento sobre los aspectos históricos del álgebra, donde afirma que tuvo una estrecha relación con la geometría. Vallejo (2009).

Encontramos también las ponencias de Ardila (2009) y Uriel (2009) en el congreso realizado por Asocolme[1], en los que se proponen talleres para desarrollar con los estudiantes. Ambos proponen las actividades con materiales manipulativos (visto en este trabajo como objetos ostensivos) describiendo todos sus aspectos didácticos correspondientes. Afirman que

[1] ASOCOLME: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

los materiales manipulativos permiten aclarar mejor los conceptos tan importantes como los productos notables y la factorización. Ardila y Uriel, (2009).

La tesis de Mejía (2004) donde nos brinda una mirada de la enseñanza de la factorización usando materiales de tipo tecnológico, como las Calculadoras Graficadoras Algebraicas. Mejía (2004) afirma que para lograr cambios favorables en cualquier aprendizaje al implementar materiales didácticos, se requieren de modificaciones en las actividades de enseñanza y aprendizaje. En este trabajo se muestra cuáles son las formas de factorizar que se dan en el ambiente escolar **(fig.3)**, destacando en su trabajo la factorización con lápiz-papel y calculadoras algebraicas.

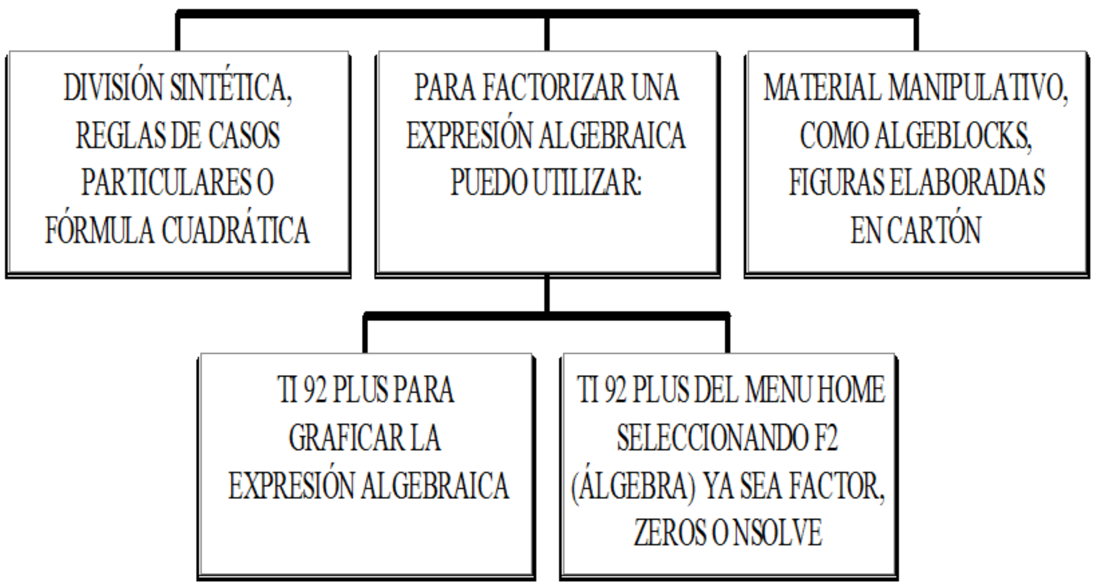


Fig.3 Formas de Factorizar que se enseñan en la Educación Media. Mejía (2004).

Los aportes de Arrieta (1998) destacan la importancia del uso de materiales. Presenta un abanico de posibilidades de materiales manipulativos para implementar, según los diferentes bloques temáticos y la edad de los estudiantes. Entre ellos encontramos el Geoplano y Cabri para la geometría, las balanzas y los relojes dentro de las Medidas, la calculadora y Ábacos dentro de los números, entre otros.

El artículo publicado por Gómez, Mosquera y Soto (2005) sobre "la utilización de una herramienta didáctica para la educación básica denominada La Caja de Polinomios la cual permite el desarrollo del álgebra de polinomios. Esta herramienta fue construida a partir de la idea de homogeneización de polinomios cuadráticos introducida por el matemático árabe Tabit ibn Qurra l-Harrani en el siglo IX”, (p.1).

Ahora bien, en los anteriores antecedentes se destacan el uso de materiales manipulativos en las investigaciones de la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Los estándares en matemáticas promueven este ideal igualmente. Además, se promueve el aprendizaje del álgebra en contextos geométricos.

1.3 OBJETIVOS.

1.3.1 Objetivo General:

Determinar potencialidades y limitaciones didácticas que genera la manipulación de Algebloks en el Diseño de Tareas que involucran factorización de polinomios en estudiantes de grado octavo.

1.3.2 Objetivos Específicos:

Caracterizar los tipos de técnicas que emergen en la resolución de tareas que involucra la factorización de polinomios con grado mayor o igual a tres.

Determinar la valencia instrumental y semiótica asociados con la representación ostensiva de Algebloks.

Determinar la teoría y discurso justificativo de la praxeología que se ve involucrada en la factorización de polinomios con el uso de Algebloks.

1.4 DISEÑO METODOLÓGICO.

La metodología será un estudio instrumental de casos de tipo cualitativo, donde se utilizará la descripción para comprender el estudio de caso.

Este trabajo se desarrollará en tres fases:

1.4.1 Análisis e Identificación de Variables y Diseño de Tareas.

En esta fase del trabajo se identificarán los tipos de tareas y las técnicas que se les plantean a los estudiantes con Algebloks, algunas tareas serán tomadas del libro “Algebra” de Picciotto y Wah (1994), debido a las similitudes de las tareas con el objetivo general de nuestro trabajo. A su vez, se realizará descripciones a-priori que se deriven de estos tipos de tareas identificando posibles técnicas que los estudiantes produzcan, así como posibles dificultades con la representación ostensiva de Algebloks, es decir, la valencia instrumental y semiótica. Los tipos de tareas se analizarán de acuerdo a los conceptos planteados en la TAD. Las técnicas permitirán revisar características del objeto matemático que se está analizando y observar como se ve afectado el aprendizaje de la factorización de polinomios por el tipo de tarea que el estudiante realiza. Se aclara que esta observación hará parte de la última fase, donde se analizarán los resultados de la investigación.

Respecto al diseño de tareas, se planteará una tarea inicial de reconocimiento y manipulación de Algebloks, es decir, la primera tarea tiene como objetivo reconocer la valencia instrumental de los Algebloks, como instrumentos que evocan conceptos geométricos y algebraicos. El diseño de tareas que se les realizará a los estudiantes pretende identificar las variables en el proceso de aprendizaje, teniendo en cuenta tanto actividades que involucran el uso de Algebloks como actividades que no lo requieren. La última tarea pretende caracterizar el tipo de polinomios de grado 3 y mayor que 3 que los estudiantes logran factorizar a través de la manipulación con Algebloks.

En la construcción del caso es importante caracterizar la población del estudio de caso, para comprender mejor cómo se realizará esta fase. Las siguientes preguntas orientan esta necesidad:

¿Con quién lo hago?

El tipo de investigación es un estudio instrumental de casos, por tanto, implica que en este tipo de estudio la selección de los estudiantes funcionará como un instrumento para cumplir con los objetivos planteados en este trabajo. Los estudiantes seleccionados no son el foco de atención, ya que ellos son el instrumento para comprender los aspectos relacionados con la pregunta de investigación. Siendo claro este aspecto, los estudiantes serán del grado octavo-uno del colegio: Fundación Alberto Uribe Urdaneta Colegio Parroquial Santiago Apóstol de la Arquidiócesis de Cali en la ciudad de Cali.

El diseño de tareas se aplicará a 15 de los 25 estudiantes del grado octavo-uno que harán parte del estudio de caso. Dichos estudiantes serán escogidos aleatoriamente. Las condiciones de los estudiantes en cuanto al nivel académico no representan una variable a tener en cuenta, así como los aspectos disciplinarios o su posición personal frente a la matemática

¿Cómo lo hago y en qué tiempo?

Se acordará con la institución los momentos en que se llevará a cabo la aplicación del diseño de tareas propuesto. Esos momentos serán el tiempo en que los estudiantes se encuentren en clase de matemáticas, aunque si hay necesidad de ajustes entonces se planea con anticipación. Se diseñan 5 tareas para aplicarlas en 5 sesiones. Cada tarea tiene un objetivo específico que se relaciona con los objetivos generales y específicos de este trabajo.

Por otro lado, debido al plan de estudio que los colegios arquidiocesanos tienen organizado, el momento adecuado para intervenir se da cuando los estudiantes estén terminando el primer periodo, porque los estudiantes en ese momento inician y están en la posibilidad de reconocer expresiones, y algunos ostensivos. Así pues, el tiempo para la aplicación de los diseños será durante los últimos días de noviembre y comienzos del mes de diciembre. Por este motivo el colegio escogido es Santiago Apóstol, ya que maneja el calendario B propuesto a nivel nacional.

1.4.2 Aplicación del Diseño de Tareas.

En esta segunda fase el objetivo es preciso: llevar los diseños de tareas a su respectiva aplicación en el salón de clases.

1.4.3 Análisis de los resultados.

Teniendo en cuenta los objetivos de este trabajo, en esta fase final, a partir del análisis de los resultados obtenidos en las actividades, se espera identifica las potencialidades y limitaciones que los estudiantes presentaron. Se espera determinar los avances del proceso del estudiante en los momentos que se les plantearon los tipos de tareas que debían realizar y de qué manera influyó en los resultados de las tareas. Identificar las técnicas que se desarrollaron. Finalmente, se analizarán las características que se presentaron en la aplicación de las tareas y así dar una respuesta a la pregunta de investigación.

2 MARCO TEÓRICO

Este trabajo está fundamentado teóricamente desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Se aborda en dos fases. La primera se identifica los aportes de la TAD frente a los significados de algunos términos como lo son la Actividad Matemática, Comprensión, Estudio, Conocimiento, Enseñanza y Aprendizaje. De igual manera, se mencionan las organizaciones y praxeologías matemáticas. Aquí se abordan las definiciones de praxeología puntual y local. Luego, en la segunda fase, se abordan los términos que refieren a Objetos Ostensivos y No Ostensivos, incluyendo la noción de "Representación" que se usará en este trabajo.

2.3 EL MODELO EPISTEMOLÓGICO PROPUESTO POR LA TAD.

Antes, a modo de aclaración, es necesario mencionar que para la TAD el Álgebra es concebida como una herramienta en la Actividad matemática. En este sentido, el tipo álgebra en este trabajo se aborda desde un contexto escolar de la educación media en Colombia, basada en los requisitos curriculares estipulados en los Estándares Básicos de competencias en matemáticas.

La TAD tiene como objeto de investigación de la didáctica la "Actividad Matemática". Se considera a la Actividad Matemática como una construcción social que se realiza en una institución - en comunidad – siguiendo determinados contratos sociales, Bosch (2001). La Didáctica de las Matemáticas estudia "las condiciones de difusión y transmisión del conocimiento matemático" (Bosch, (2001), c.p, Brousseau 1994, p.15), entendiéndose al "conocimiento" como el producto o la cristalización de determinado quehacer humano y queda siempre caracterizado por las actividades por las que surge y por las que permite realizar, Bosch (2001).

De esta manera, la Actividad Matemática surge en un contexto social, que puede ser la institución, en nuestro caso es un "Colegio". Dentro de ella, el "Conocimiento Matemático" se debe reconocer o identificar y tiene sentido dentro de una construcción social. Por tanto, la TAD se permite describir y analizar los tipos de actividades que pueden surgir en un aula, con la guía de un profesor, un programa de estudio y los estudiantes.

De la misma manera, en la implementación con los Algebloks en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la factorización de polinomios, se reconocen e identifican el conocimiento matemático que emergen de los tipos de tareas o actividades que se les propone a los estudiantes resolver con el uso de los Algebloks. Para fundamentar los tipos de tareas se tendrá en cuenta las definiciones y conceptos que enuncia la TAD.

Bosch (2001) afirma:

> La Teoría Antropológica describe la Actividad Matemática y el saber que de ella emerge en términos de organizaciones o praxeologías matemáticas. Una organización matemática es una entidad compuesta por: *tipos de problemas*; *tipos de técnicas* que permiten resolver los tipos de problemas; *tecnologías o discurso* ("logos") que describen y explican las técnicas; una *teoría* que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos. Los tipos de problemas y los tipos de tareas constituyen el "saber-hacer" matemático, mientras que los discursos tecnológicos y teóricos conformarían el "saber" matemático propiamente dicho. (p.16)

De esta manera se definen los conceptos *enseñar* y *aprender* matemáticas como "la actividad de reconstrucción de organizaciones matemáticas para poder utilizarlas en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones. "La enseñanza o tarea docente consiste básicamente en dirigir dicha reconstrucción, mientras que el aprendizaje puede considerarse como el fruto de la reconstrucción, ya sea individual como en grupo" (Bosch, 2001, p.16). El estudio se entiende como el proceso que se realiza para enseñar algo.

Por otro lado, los ***tipos de tareas*** son relativos respecto a las instituciones educativas**.** Luego, se tiene que en una respectiva institución se puede manejar solo un ***tipo de tarea***, que dispone de cierto ***tipo de técnica*** para resolverla, se explica mediante cierto tipo de ***discurso tecnológico*** y se fundamenta bajo cierta ***teoría***. En otras palabras, tomando como caso particular la enseñanza y aprendizaje de la factorización, un tipo de tarea se da cuando se propone al estudiante factorizar polinomios por factor común, siendo la "técnica" aquel método o manera que se lleva a cabo para identificar un factor común en un polinomio. El tipo de tarea consiste específicamente en "factorizar polinomios". Sin embargo, este tipo de tarea no permite resolver problemas, interpretar y explicar situaciones usando la factorización.

De esta manera, el término “comprensión” aparece como un apoyo necesario para dar un valor más importante con respecto al tipo de tareas usadas para el aprendizaje de los estudiantes en cierta actividad matemática. El término “comprensión”, específicamente en la actividad matemática, se entenderá en este trabajo como la posibilidad de producir (o reproducir) un discurso tecnológico y teórico asociado a determinadas actividades de resolución de problemas, (Bosch, 2001).

Desde este punto de vista, el estudiante tendrá que explicar, justificar y dar cuenta del porqué de los resultados obtenidos al resolver un tipo de actividad matemática. De esta manera, se dirá que el estudiante ha “comprendido” cierto conocimiento matemático. El *saber-hacer* (praxis) y el *saber* (logos) debe surgir en los estudiantes para comprender lo que está haciendo, por qué, para qué.

Sin embargo, si existen un único tipo de tareas que no permiten formular, plantear y resolver problemas, ¿cómo puede comprender el estudiante una actividad matemática determinada? Para dar respuesta a esta pregunta, se requieren de técnicas nuevas que inducen a nuevos tipos de tareas, mediante un discurso tecnológico más elaborado.

Bosch (2001) afirma:

> La TAD establece una marcada distinción entre las organizaciones matemáticas puntuales, construidas a partir de un único tipo de problemas, en las que las técnicas se utilizan de manera rígida y el entorno tecnológico acostumbra ser muy pobre, de las organizaciones “locales”, que se obtienen articulando ente sí - por vía de un discurso tecnológico elaborado – distintas organizaciones puntuales. (p.18).

De esta manera, un número mayor de técnicas, mas relacionadas y flexibles entre sí, posibilitan la elaboración de nuevos discursos tecnológicos que darán lugar al planteamiento de nuevos tipos de problemas, que se concertarán en una praxeología local. Es importante aclarar que este trabajo se centrará en el análisis de la praxis de la Praxeología puntal o local con relación a los problemas asociados a la factorización.

Estos nuevos tipos de discursos tecnológicos requieren que sean mejor elaborados, dando lugar a la función explicativa y justificativa. Fonseca y Gascón (2000, c.p, Chevallard, 1999), afirman:

> La *función justificativa,* que asegura que cada técnica sirve para lo que ha de servir y da el resultado que debe dar) está *por encima de la función explicativa,* que debería aclarar *por qué* la técnica es correcta, pertinente y eficaz). Este fenómeno tiene relación con el hecho de que en cada institución**,** para cada tipo de tareas, se tiende a privilegiar una única técnica que es considerada en la institución como “la manera evidente e incuestionable de resolver las tareas del tipo de tareas inicial”. Estas técnicas nuevas pueden llegar a asumir un carácter *autotecnológico* en la institución, (p.1).

Del párrafo anterior, se destaca una característica importante: las técnicas que se usan para resolver los tipos de tareas deben ser analizadas con el fin de conocer sus limitaciones y, además, poder encontrar nuevas técnicas que posibiliten avanzar en los tipos de tareas y posteriormente evolucionar a una praxeología local, donde se abarcan la función justificativa y explicativa. Desde esta praxeología local, los tipos de tareas permiten plantear y revisar problemas, explicar, comentar, justificar; estos nuevos tipos de tareas posibilitan al estudiante abarcar un aprendizaje más elaborado y comprensivo.

Además, es importante mencionar que en este trabajo la frase “comprender un concepto” se aborda de una forma diferente, desde el punto de vista de la TAD. Bosch (2001) afirma:

> La unidad elemental de análisis de la actividad matemática no es el concepto sino la organización matemática o praxeología. El estudio de lo que se considera como “comprensión de un concepto” en una institución dada y para un tipo de sujetos dado requiere la explicación de las actividades (es decir, de las praxeologías). (p.18).

Así pues, en este trabajo no se intentará que el estudiante aprenda el concepto de factorización mediante la manipulación de los Algebloks, es decir, la unidad de análisis no es el concepto de factorización, sino, que el estudiante comprenda la factorización a través de los tipos de actividades que se desarrollan dentro de la organización matemática que se trabaja, es decir, la actividad de reconstrucción de organizaciones matemáticas para poder utilizarlas en nuevas situaciones o actividades y bajo distintas condiciones (con o sin uso de Algebloks), comprendiendo el *saber-hacer* y el *saber*, que involucran los aspectos que implican la praxeología. El estudiante requiere de la explicación de las actividades que involucran Algebloks para llegar a la comprensión de la factorización de polinomios.

Finalmente, en este trabajo se involucran estos fundamentos mencionados en este marco teórico con el fin de analizar los tipos de tareas que se les propone a los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la factorización, tanto usando los Algebloks como sin usarlos.

2.4 OBJETOS OSTENSIVOS Y NO OSTENSIVOS Y EL CONCEPTO "REPRESENTACIÓN".

Lo escrito, lo verbal, lo gráfico, lo material son tipos de registros que se dan en la actividad matemática. Desde el punto de vista de la TAD, los tipos de registros no se diferencian en cuanto su "valor" en el trabajo de las matemáticas, esto es, tan importante es lo gráfico como lo verbal, o como lo material. Los tipos de registros deben articularse entre sí reconociendo que cada uno es tan importante como el otro.

Ahora bien, los distintos elementos que componen las praxeologías matemáticas PM (tipos de tareas, tipos de técnicas, discurso tecnológico y teorías) están hechos de Objetos Ostensivos y Objetos No-ostensivos. (Bosch, 2001).

Bosch (2001) afirma:

> Los Objetos Ostensivos (del latín "ostendere", presentar con insistencia) son aquellos objetos que se perciben: se ven, se tocan, se oyen, etc. Son, en definitiva, los objetos materiales o los objetos dotados de cierta materialidad como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos, etc. Para utilizar una expresión general, hablaremos de la "manipulación" de los objetos Ostensivos aunque los ostensivos en cuestión sean escrituras, gráficos, gestos o discursos.
> Los Objetos No-ostensivos son entonces todos aquellos objetos que existen institucionalmente, en el sentido en el que se les atribuye una determinada existencia, pero que no se pueden percibir ni mostrar por sí mismos: las ideas, los conceptos, las creencias, etc. Lo que si se pueden es "invocar" o "evocar" mediante la manipulación de ciertos objetos Ostensivos apropiados. (p.19)

Consecuentemente, teniendo en cuenta las anteriores definiciones, se establece una dualidad en cuanto si un objeto es Ostensivo no podrá ser al mismo tiempo un no-ostensivo. Además, los objetos no-ostensivos surgen a partir de la manipulación de objetos ostensivos, aunque guiada y controlada por objetos no-ostensivos. A este tipo de coexistencia se le denomina "dialéctica de lo ostensivo", (Bosch, 2001). Por lo anterior, se define que los Algebloks son objetos ostensivos y los conceptos matemáticos propiamente dicho hacen parte de los objetos no-ostensivos. Ahora, las escrituras de expresiones algebraicas o gráficas de figuras geométricas hacen parte de los objetos ostensivos y "representan" a los objetos no-ostensivos. Bosch (2001) afirma: "los conceptos surgen de la manipulación de ostensivos dentro de determinadas organizaciones matemáticas", (p.20). Así pues, se llega a que los Algebloks, objetos ostensivos, representen a objetos no-ostensivos y viceversa.

Además, en algunos tipos de tareas que incluyen la manipulación con Algebloks, éstos, como objetos ostensivos, representaran variables matemáticas e igualdad de expresiones algebraicas polinómicas, como objetos no-ostensivos. Esta hipótesis se apoya en la coexistencia entre objetos ostensivos y no-ostensivos. Bosch (2001) dice: "no existe manipulación ostensiva (una escritura o un discurso) que sea consecuencia directa de una supuesta "posesión" o "adquisición" de un no-ostensivo (una noción o un concepto), (p.20).

Por otro lado, se ha mencionado el concepto "representación", el cual dentro de la TAD se entenderá como "**Valencia Semiótica**" de los instrumentos ostensivos. Se denomina Valencia Semiótica a la función de los objetos ostensivos de "invocar" o "evocar" los objetos no-ostensivos, retomando la idea que los ostensivos son los *signos* de otros objetos, generalmente no-ostensivos, a los cuales representan, Bosch (2001).

Además, los objetos ostensivos no siempre representan objetos no-ostensivos, sino a un grupo de ostensivos y no-ostensivos vinculados a determinadas actividades matemáticas. Por ejemplo, un bloque de Algebloks puede representar el grafo "x^3", que en determinado tipo de tarea, puede representar a su vez el concepto de *volumen* de un cubo. "x^3" es un objeto ostensivo, ya que es un tipo de escritura; y *volumen*, es un objeto no-ostensivo, ya que hace parte de un concepto matemático, en este caso, geométrico.

Por tanto, como afirma Bosch (2001): "los ostensivos no "poseen" un significado, sino que, al ser manipulados, *producen* significado evocando otras organizaciones matemáticas", (p.21). De esta manera, a través de los tipos de tareas propuestos con la manipulación de Algebloks, que requerirán de tipos de técnicas para resolverlos, se espera *produzcan* significados en torno a conceptos matemáticos, teniendo en cuenta los cuatro componentes de la PM (tipos de tareas, tipos de técnicas, discurso tecnológico y teoría), llegando a una comprensión matemática. De esta manera, podemos decir que los Algebloks pueden llegar a inducir una PM o praxeología, ya que es un objeto ostensivo, y así formará parte de los tipos de tareas y técnicas que emergerán en las actividades matemáticas, es decir, *saber-hacer*.

De igual manera, Los Algebloks pueden llegar a ser un instrumento de la actividad matemática, como una herramienta que puede representar una noción o concepto matemático mediante una “adecuación” efectiva en la actividad matemática. Esto se puede afirmar, ya que según la TAD, además de atribuir una Valencia Semiótica a los objetos ostensivos, también se atribuye una “**Valencia Instrumental**” que se refiere a la capacidad de los sistemas ostensivos para integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas y teóricas, Bosch (2001). De esta manera, cuando los ostensivos hacen parte de las organizaciones matemáticas, se consideran como instrumentos de la actividad matemática.

Finalmente, podemos afirmar nuevamente que los Algebloks son objetos ostensivos (que representan objetos ostensivos, como los polinomios escritos en lápiz y papel, y objetos no ostensivos, como el concepto de área y volumen) que funcionan como un instrumento en la actividad matemática, formando parte de una praxeología que, a través de su manipulación en un tipo de tarea, se espera permita la coexistencia entre ostensivos y no-ostensivos produciendo significados para la comprensión de nuevos conceptos matemáticos a través de nuevos tipos de técnicas, logrando así construir nuevas praxeologías, es decir, el aprendizaje de conocimientos matemáticos.

3 ALGEBLOKS EN EL MARCO DE LA TAD.

En esta fase se destacan los aspectos matemáticos relevantes que presentan la estructura de los Algebloks en relación a conceptos algebraicos, como por ejemplo: Constante, Variable, Dimensión, entre otros.

Inicialmente, se describe cómo están estructurados los Algebloks. Seguidamente, se establece una relación entre la estructura de los Algebloks y los conceptos utilizados en el Marco Teórico. Luego, se realiza un análisis de algunos tipos de actividades que proponen otros autores en relación con los conceptos de la TAD. Finalmente, se muestra el diseño de tareas.

3.1 OBJETOS OSTENSIVOS, NO OSTESIVOS, ESTRUCTURA Y VARIABLES ALGEBRAICAS DE LOS ALGEBLOKS.

Como se mencionó anteriormente, el concepto de representación alude a la noción de “valencia instrumental” de los ostensivos para invocar o evocar a los no ostensivos. Así pues, los Algebloks están conformados por diversos bloques de diferentes tamaños. Los bloques que conforman los Algebloks son objetos ostensivos, ya que se pueden manipular, palpar, tienen color. Los grafos trazados en papel a los que denominamos polinomios son objetos ostensivos, ya que hacen parte de la escritura. En este caso, existen bloques y/o conjuntos de bloques que “representan” a polinomios, es decir, objetos ostensivos que representan otros objetos ostensivos y a su vez, evocan a objetos no ostensivos, en este caso, a lo que se entiende como polinomio, un tipo de expresión algebraica.

Los objetos no ostensivos hacen referencia a los conceptos que se pueden evocar a través de los ostensivos. En actividades con Algebloks en este trabajo lo objetos no ostensivos son los conceptos de área, volumen, dimensión, polinomio, factorización, expresión algebraica, ecuaciones, identidad.

A través del siguiente el ejemplo, definiremos la base de partida como hipótesis en la cual se identifican los conceptos involucrados en la TAD con relación a las tareas con Algebloks:

Organizamos ciertos bloques de manera que formen un rectángulo. De esta manera, podemos preguntarnos sobre cuál es el área del rectángulo. Así pues, emergen los conceptos de *rectángulo* y *área* como objetos no ostensivos, que son evocados por Algebloks como objetos ostensivos. Posteriormente, escribimos un polinomio que represente el área del rectángulo. Así pues, emerge ahora el concepto de *polinomio* como objeto no ostensivo, que es un tipo de expresión algebraica, que es representado de forma escrita, es decir, un objeto ostensivo.

Por tanto, a través del diseño de tareas, se puede llegar a validar la hipótesis planteada en el anterior ejemplo, es decir, poder afirmar que los Algebloks pueden describirse como objetos ostensivos que presentan una valencia instrumental, que pueden evocar objetos no ostensivos.

Ahora bien, teniendo en cuenta lo anterior, a continuación se describe la estructura y las variables algebraicas de los Algebloks.

Hernández y etal. (2008) afirman que el material manipulativo denominado Algebloks:

> Está diseñado para que el estudiante desarrolle conceptos matemáticos desde una perspectiva constructivista. Mediante el uso de dichas piezas, los estudiantes exploran y conceptualizan las nociones básicas de Preálgebra y Álgebra, pueden crear reglas en forma inductiva, es decir, van de lo concreto a lo abstracto. Con este material se pueden trabajar las operaciones básicas con números enteros (adición, sustracción, multiplicación y división), adición, sustracción, multiplicación, división y factorización de polinomios, traducción de expresiones lingüísticas a expresiones matemáticas, resolución de ecuaciones lineales, de inecuaciones y de sistemas de ecuaciones lineales de dos variables.(p.131)

Los Algebloks están formados por piezas o bloques que pueden representar las variables $\boldsymbol{x, y, x^2, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^3, y^3}$, así como las unidades. Las medidas aritméticas de todos bloques se pensaron de tal forma que sean inconmensurables. Es decir, las medidas de “$\boldsymbol{x}$” y “$\boldsymbol{y}$” dadas en centímetros de los dos bloques no se pueden expresar como un múltiplo de un entero de la otra o, dicho de otro modo,$\boldsymbol{x = ay}$, donde $\boldsymbol{a}$ no es un número entero. Pero, estas medidas aritméticas no interesan para el desarrollo de este trabajo.

Los Algebloks están formados por:

a. Dos largos "prismas" de madera u otro material. La medida de dichos prismas pueden variar según las necesidades. El primer prisma es de color verde y el segundo amarillo. (**Ver fig.4**) Los colores ayudarán a ubicar y caracterizar más fácil el bloque con sus variables algebraicas que representan. Ahora bien, se acepta el hecho de que los prismas (**fig.4**) representaran dos "longitudes" desconocidas, ya que estos bloques representan distancias desconocidas de una dimensión (se entenderá por dimensión como aquellas distancias que me facilitan determinar el largo, ancho y altura de un objeto). El prisma de color verde (**fig.4**) representará una longitud desconocida para cual se usará la representación ostensiva "escrita" "$\boldsymbol{x}$". Para el prisma amarillo, al igual que con el prisma verde, (**fig.4**) se usará "$\boldsymbol{y}$".

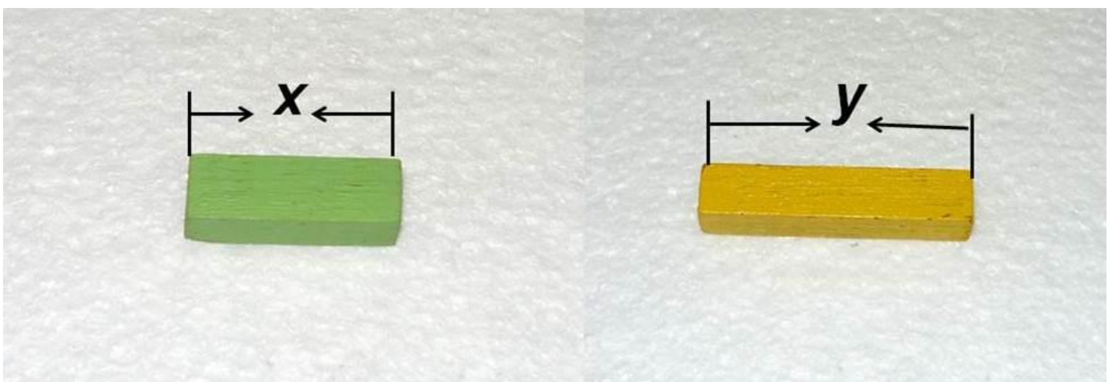


Fig4: Bloques Algebloks: Una dimensión.

b. Diversas "superficies" de madera u otro material que tendrán las siguientes características: la primera es un cuadrado de color verde, la segunda es un cuadrado de color amarillo, la tercera es un rectángulo de color amarillo y la cuarta es un cuadrado de color negro (**Ver fig.4**). La altura de estas superficies se puede considerar despreciable o no se tiene en cuenta, debido a que estos bloques representan superficies de dos dimensiones, es decir, las superficies (**fig.4**) representaran cuatro "áreas" desconocidas. Más adelante se argumentan estos conceptos de manera más detallada.

Los prismas (**fig.4**) nos permiten hallar el área de las superficies (**fig.5**) en función de las dos variables "$\boldsymbol{x}$" y "$\boldsymbol{y}$". De esta manera, el área del cuadrado verde es "$\boldsymbol{x}^2$", el área del cuadrado amarillo es "$\boldsymbol{y}^2$", el área del rectángulo amarillo es "$\boldsymbol{xy}$" y, como se identificará más adelante, el área del cuadrado negro está dada por la expresión $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2$.

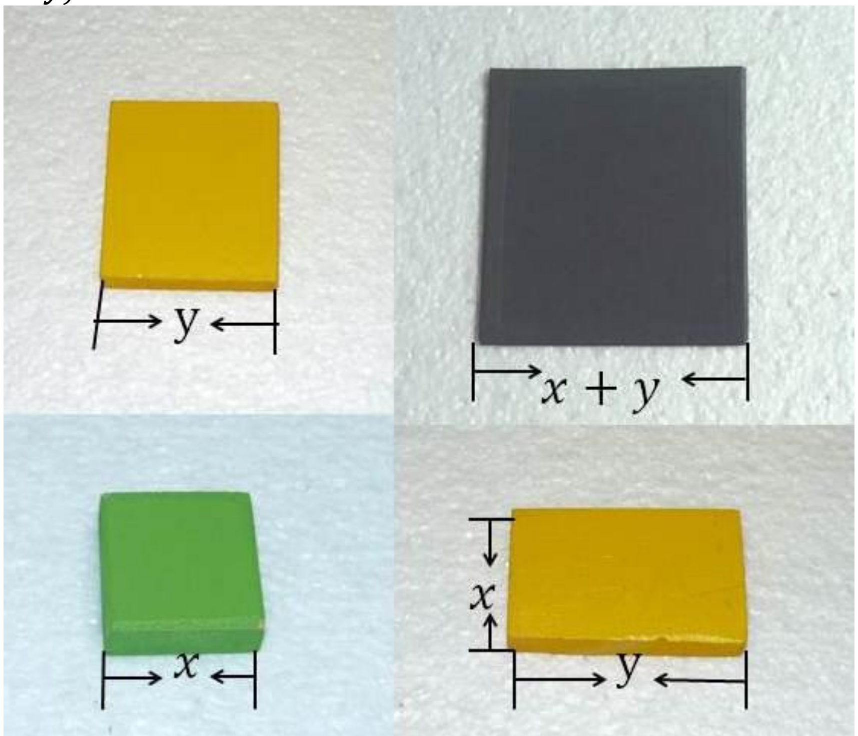


Fig.5 Bloques Algebloks: Dos dimensiones.

En la (**fig.6**) se puede observar la relación en tamaño de las bloques que aluden a objetos de una y dos dimensiones.

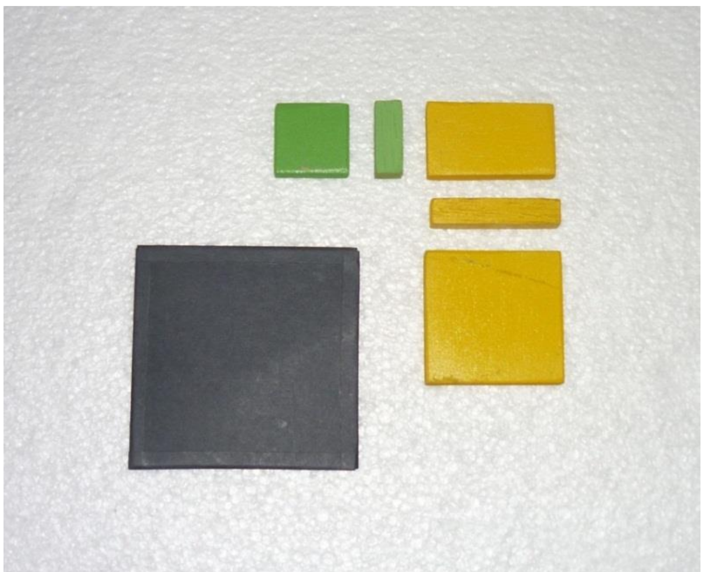


Fig.6 Bloques Algebloks: Una y dos dimensiones.

c. Diversas figuras sólidas de madera u otro material, como cartón paja. Tres cubos de color verde, amarillo y negro de diferente tamaño. Dos tipos de prismas, uno de color amarillo y el otro de color verde (**Ver fig.7**). Estos bloques representan objetos de tres dimensiones (**fig.7**) que a su vez representarán diversos "volúmenes" desconocidos.

Ahora bien, las áreas de las superficies (**fig.5**) nos permite hallar el área de los volúmenes en función de las variables "$\boldsymbol{x}$" y "$\boldsymbol{y}$". De esta manera, diremos que el cubo verde tiene un volumen de $\boldsymbol{x}^3$, el cubo amarillo de $\boldsymbol{y}^3$, el prisma verde de $\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}$, el prisma amarillo de $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^2$ y, finalmente, el cubo negro tiene un volumen dado por la expresión $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^3$.

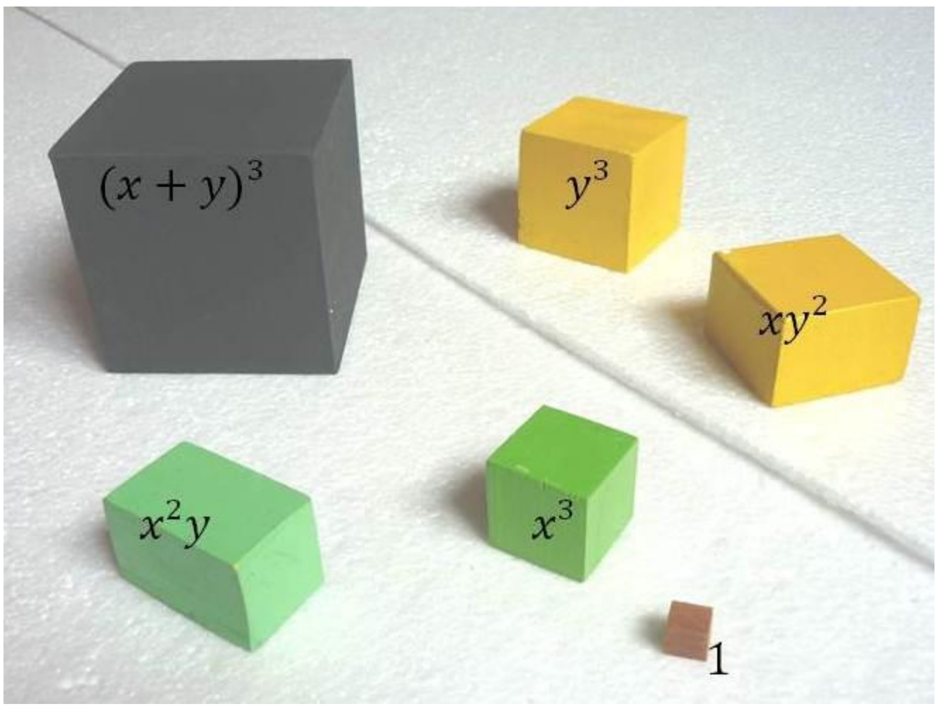


Fig.7 Bloques Algebloks: Tres dimensiones.

d. Un cubo pequeño de color café, que representará la constante de unidad, es decir, el valor numérico equivalente a "1". El bloque unidad juega un papel importante en la solución de tareas con Algebloks en cuanto a su valencia instrumental y semiótica. El tamaño de este cubo es ligeramente pequeño comparado al de los demás (**Ver fig.8**).

Fig.8 Piezas Algebloks: La constante unidad.

En la descripción anterior se han identificado las representaciones algebraicas de dichos bloques de Algebloks. La cantidad de bloques necesarios para formar el Material Manipulativo, que en este caso, son objetos ostensivos, es relativa y dependerá del tipo de tarea propuesto.

3.2 TIPOS DE TAREAS Y TÉCNICAS PROPUESTOS CON ALGEBLOKS.

La constante y la dimensión.

Dentro de todos los bloques de Algebloks existe un bloque que representa la constante, en este caso su valor numérico es la unidad. Para observar cómo se muestra y se desenvuelve la constante en las actividades con los Algebloks, analicemos el siguiente ejemplo de Picciotto y Wah (1994, p.30):

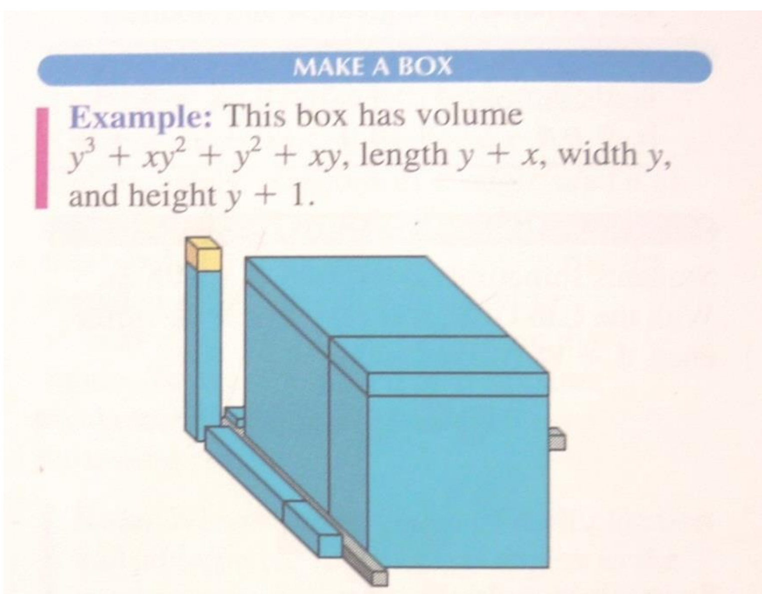


Fig.9 Ejemplo de actividad de Picciotto: Volumen.

La definición de "Volumen" que Picciotto y Wah (1994) plantean en el libro es "The Volume of a solid is the number of unit de cubes it would take to build it", (p.30).

La definición está basada en la cantidad de "unidades". En los Albebloks, el cubo que representa la unidad "1" es el de menor tamaño (**fig.8**). La técnica que se pretende estimular al estudiante para hallar el volumen de cierta cantidad de bloques, es formar una "caja", de tal forma que podamos determinar las dimensiones largo, ancho y alto en función de las variables "$\boldsymbol{x}$" y "$\boldsymbol{y}$". De esta manera podemos obtener el volumen de la caja al multiplicar sus tres dimensiones.

En el ejemplo de la **(fig.9)**, se observan 4 bloques que forman una caja de dimensiones $(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})$, $(\boldsymbol{y})$, $(\boldsymbol{y}+\mathbf{1})$, siendo el largo, ancho y altura respectivamente. De los 4 bloques, dos de ellos ($\boldsymbol{xy}$ y $\boldsymbol{y}^2$**,** los dos bloques ubicados en la parte superior de la caja) hacen parte de la representación de áreas desconocidas, es decir, bloques de dos dimensiones, pero en este caso, se identifican como bloques de tres dimensiones, donde el espesor o altura de dichos bloques es tenido en cuenta y cuyo valor es la constante unidad "1". Esto nos lleva a identificar detalladamente de qué manera o en qué tipo de actividades está interactuando la "constante", representada por el cubo de menor tamaño, en relación con las variables. También, en qué tipo actividades los bloques que representan áreas pasan a representar volúmenes, esto es, determinar la valencia semiótica que emerge en cada tipo de tareas.

Así pues, lo relevante en este ejemplo es observar cómo interactúan objetos que representan tres dimensiones y dos dimensiones. Pero más aún, ¿cuántas dimensiones posee el cubo que representa la constante de unidad? Es decir, cómo surge la valencia instrumental en el tipo de tarea propuesto. Al intentar responder esta pregunta, el pensamiento más trivial es que el cubo constante no presenta dimensiones. Pero en el ejemplo de la (**fig.9**), es necesario que el cubo tenga una medida, la cual es 1. Por este motivo, la altura de la caja es $\boldsymbol{y}+\mathbf{1}$, ya que la altura del bloque inferior ($\boldsymbol{y}^3$) es la variable "y", y la altura del cubo constante es "1". Así pues, la altura total es la suma de ambas medidas. En este caso, parece que el cubo aparece como un objeto de tres dimensiones. Por tanto, en este tipo de tarea el cubo constante funciona como un instrumento en la actividad de tres dimensiones, esto es la valencia instrumental. Lo mismo sucede con los dos bloques superiores de la caja que representan a $\boldsymbol{xy}$ y $\boldsymbol{y}^2$**,** es decir, figuras de dos dimensiones. Sin embargo, en el momento de hallar el volumen total de la caja, parece necesario que estos dos bloques tengan una altura, la cual es "1" (observar en la fig.8 que la altura de estos bloques coincide "visualmente" con la altura del cubo amarillo) y por tanto, en este caso, estos dos bloques son identificados como bloques de tres dimensiones. Finalmente, dependiendo del tipo de tarea, emerge un tipo de técnica donde la valencia instrumental de los bloques es cambiante, y a su vez, su valencia semiótica. En el momento que el bloque es identificado como objeto de tres dimensiones, está evocando un *volumen*, ya que se tiene en cuenta el largo, ancho y la altura.

En este análisis se destaca la importancia que juega el papel de la constante en los Algebloks y su necesidad de construir un "bloque" que la represente. Además, el cubo constante nos conduce a identificar una técnica específica en el momento de realizar "actividades" con el uso de Algebloks. Por tanto, el tipo de tarea propuesto es construir una "caja" con ciertos bloques de tal manera que se pueda hallar el volumen. Pero esto conduce a desarrollar una técnica y tener en cuenta la valencia instrumental y semiótica de los bloques, en donde de alguna manera, se puede afirmar que el estudiante estará factorizando la expresión polinómica que se muestra al inicio del ejemplo de la (**fig.9**), ya que a través de la técnica desarrollada en la manipulación de los Algebloks, el estudiante puede relacionar la equivalencia o *identidad* que existe entre el polinomio y el producto de las tres dimensiones (largo, ancho y alto) que expresan el volumen de la caja, y por tanto concluir que la expresión polinómica es equivalente al producto de los tres polinomios así:

$$\boldsymbol{y}^3 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y} + \mathbf{1})$$

Ecuaciones en Algebloks: la letra como incógnita.

En las tareas con Algebloks emergen un tipo de tareas donde se identifican dos tipos de ecuaciones. En una de ellas, la variable satisface la ecuación para un único valore numéricos. Para observar cómo se muestra y se identifican las ecuaciones en las tareas con Algebloks, analicemos el siguiente ejemplo:

¿Cómo se representa $\mathbf{2}\boldsymbol{x}^2$ con Algebloks?

En este caso, el estudiante puede llegar a estos tres tipos de configuración **(fig 10)**.

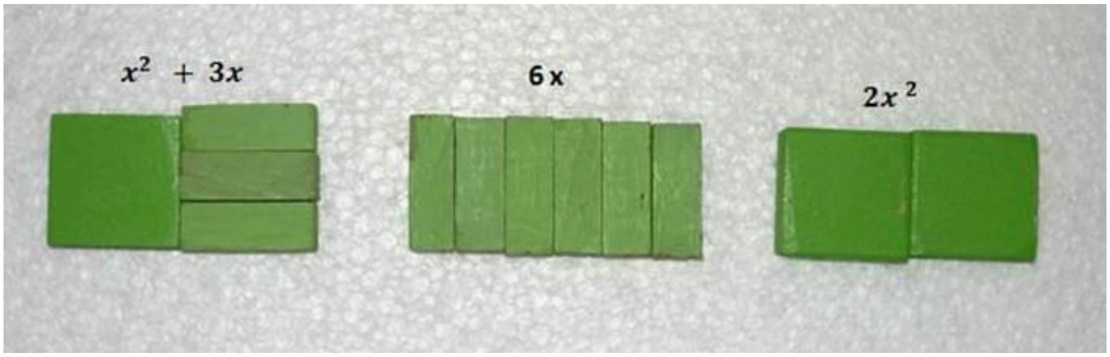


Fig.10. Representaciones de $2x^2$ ***con Algebloks.***

Debido a que estas tres representaciones muestran distintas formas de reorganizar distintos bloques para expresar la misma área desconocida, entonces se pueden dar las siguientes ecuaciones:

$$\boldsymbol{x^2 + 3x = 2x^2} \quad \textbf{(1)}$$
$$\boldsymbol{6x = 2x^2} \quad \textbf{(2)}$$
$$\boldsymbol{2x^2 = 2x^2} \quad \textbf{(3)}$$

Las dos primeras ecuaciones son dos ecuaciones con un único valor numérico para $\boldsymbol{x}$, ya que la ecuación se satisface sólo para un valor numérico del $\boldsymbol{x}$**,** el cual significa la medida del bloque $\boldsymbol{x}$ en estos Algebloks. En este caso, las ecuaciones difieren de la (3), ya que la en la ecuación (3) la ecuación se satisface para cualquier valor numérico que adquiera $\boldsymbol{x}$**,** mientras que en las ecuaciones (1) y (2) no sucede lo mismo.

Ahora bien, en este ejemplo, ¿qué representan los ostensivos $\boldsymbol{6x}$ y $\boldsymbol{3x}$? Para aclarar esta doble interpretación, se debe tener en cuenta las técnicas requeridas para manipular Algebloks, es decir, su valencia instrumental. El ostensivo $\boldsymbol{6x}$ puede representar dos ostensivos al ser representados en Algebloks, es decir, $\boldsymbol{6x}$ y $\boldsymbol{3x}$ pueden ser visto como:

- Dos superficies rectangulares de base x y altura 6 para $6x$ **(fig.11A)** y base $\boldsymbol{x}$ y altura $\boldsymbol{3}$ para $\boldsymbol{3x}$ **(fig.11B)**. En este caso, el producto de las dimensiones largo y ancho representan un área desconocida. Por tanto, $\boldsymbol{6x}$ y $\boldsymbol{3x}$ representan dos áreas desconocidas. **(fig.11)**

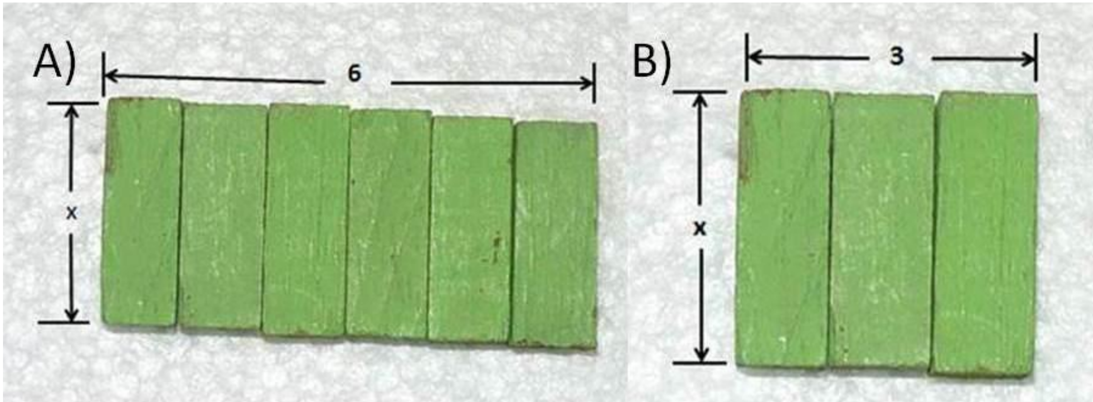


Fig.11. Rectángulos $\boldsymbol{6x}$ **y** $\boldsymbol{3x}$**.**

- Una distancia desconocida. Para $\boldsymbol{6x}$ **(fig.12a)**, se trata de una distancia seis veces más grande a una distancia desconocida de longitud $\boldsymbol{x}$. Para $\boldsymbol{3x}$ **(fig.12b)**, una distancia que es el triple de la distancia desconocida de longitud $\boldsymbol{x}$. **(fig.12)**.

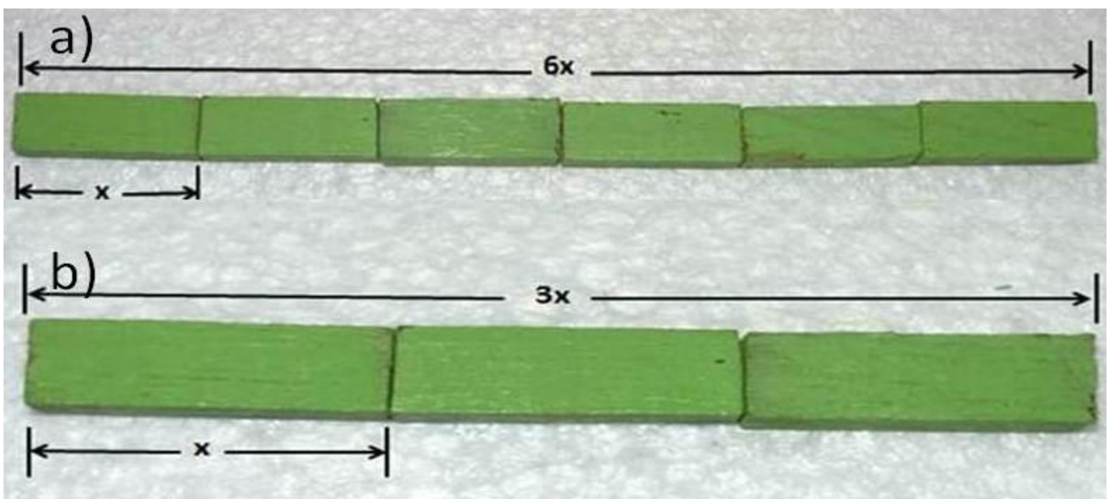


Fig.12. Distancias $\boldsymbol{6x}$ **y** $\boldsymbol{3x}$**.**

¿Cómo representar $\boldsymbol{2x}^2$ con Algebloks de tal manera que la ecuación resultante se cumpla para cualquier valor de $\boldsymbol{x}$? La respuesta es la representación (3) en la (**fig.10**).

En la ecuación $\boldsymbol{2x}^2 = \boldsymbol{6x}$ se identifica que el ostensivo $\boldsymbol{x}$ emerge como una incógnita en la cual podemos hallar su valor numérico. Uno de estos valores numéricos es la medida con la cual se construyeron los Algebloks. Por tanto, podemos afirmar que en otro tipo de construcción de Algebloks el valor numérico para x puede ser distinto, por tanto las ecuaciones algebraicas que surgen serán distintitas. Es decir, la igualdad $\boldsymbol{2x^2 = 6x}$ se puede representar con los bloques que se utilizan y describieron en este trabajo.

Sin embargo, en este trabajo no se tendrá en cuenta las PM que requieran tipos de tareas que involucren ecuaciones algebraicas directamente. Pero, debido que la factorización de polinomios es necesaria para la solución de algunas ecuaciones algebraicas, entonces se destaca la importancia de manipular Algebloks que involucren ecuaciones algebraicas. Así, la solución de la ecuación (2) es:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{2x^2 - 6x = 0}\\ \boldsymbol{2x(x-3) = 0} \qquad \textbf{Factorizando}\\ \boldsymbol{2x = 0 \quad y \quad x - 3 = 0}\\ \boldsymbol{x = 0 \quad y \quad x = 3}\end{gathered}$$

Finalmente, el valor numérico $\boldsymbol{x = 3}$ significa que el bloque en madera que representa $\boldsymbol{x}$ tiene una longitud de 3 unidades **(fig.13),** la cual se puede verificar con el bloque constante que equivale a la unidad. La distancia del bloque $\boldsymbol{x}$ es la misma distancia que generan 3 bloques constantes.

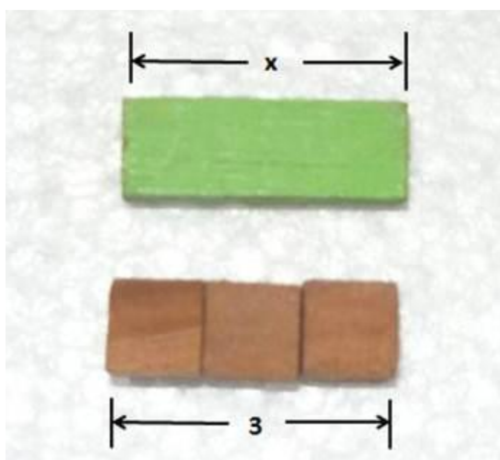


Fig.13 Valor numérico $\boldsymbol{x = 3}$

3.3 ESTRUCTURA DEL DISEÑO DE TAREAS.

Se proponen cinco tareas. En ella se intenta que el estudiante produzca una técnica para resolver un problema o tarea, que luego deba justificar mediante explicaciones que involucran una teoría, en este caso, la comprensión de operaciones aritméticas con polinomios como base de partida.

Tarea 1

Parte 1:

Objetivo: Que los estudiantes comiencen a manipular y reconocer los Algebloks (ostensivos), así como su modo de uso. Se identificaran las variables (ostensivos) que asumirán los Algebloks mediante tipos de tareas donde deben calcular distancias, áreas y volúmenes (no ostensivos) usando Algebloks (ostensivos), y por tanto, mostrando los resultados con las variables asumidas (ostensivos), es decir, por medio de expresiones algebraicas (por ejemplo el ostensivo $\boldsymbol{x}^2$ representa el área desconocida de un bloque), que representarán dichas distancias áreas y volúmenes (no ostensivos).

En esta tarea, se dispone de trazos en papel que representarán distancias y áreas; y los Algebloks. Las tareas oscilan con preguntas como:

¿Es posible determinar tres o más configuraciones que permitan representar y completar la distancia desconocida de A a B?
¿Cuáles son los bloques más adecuados completar las distancias?
¿Cuáles son los bloques más adecuados para cubrir los recuadros? ¿Cuál es el área de cada recuadro? ¿Cómo determino y cuál es el volumen de esos bloques?

De esta manera, a través de la manipulación de Algebloks, los estudiantes acordaran asignar a cada bloque una representación con letras del alfabeto y números, que a su vez representarán expresiones algebraicas. Así, podrán expresar una distancia, área o volumen desconocido a través de expresiones algebraicas obtenidas de la manipulación con Algebloks, donde emerge la valencia instrumental, es decir, aquellas reglas de uso que se deben tener en cuenta en la manipulación de Algebloks; y diversas técnicas como las que se describen a continuación.

Para representar distancias, se produce la técnica τ_{1a}, que consiste en que los estudiantes determinen que los bloques "x" y "y" son más adecuados para realizar configuraciones que representen distancias desconocidas. Para representar áreas, se produce la técnica τ_{1b}, donde los estudiantes determinan que los bloques "x^2", xy y "y^2" son más adecuados para realizar configuraciones que representen áreas desconocidas. De la misma manera, se produce la técnica τ_{1c} que induce que los bloques "x^3", x^2y, xy^2 y "y^3" son los más adecuados para realizar configuraciones que representen volúmenes desconocidos.

Parte 2:

Objetivo: Que el estudiante identifique la expresión algebraica que representa el área de una superficie poligonal irregular con ángulos internos rectos a partir de la suma de las áreas de cada bloque utilizado para cubrir dicho polígono.

Se dispone de una tabla con dos columnas. Al lado izquierdo aparecen los recuadros, distancias o imágenes de Algebloks. Al lado derecho, se debe escribir la expresión algebraica que representa el área, longitud o volumen de dicha figura del lado izquierdo. Así pues, el estudiante reconoce que un grupo de Algebloks representan un polinomio algebraico. El área de los recuadros se identifica a partir de la suma del área de cada bloque. Por tanto, se produce la técnica τ_{2b}. Consecuentemente, para determinar un volumen se recurre a sumar el volumen de cada bloque utilizado, produciendo la técnica τ_{2c}

Tarea 2

Parte 1:

Objetivo: Que el estudiante comprenda que $(x+y)^2$ no es igual a x^2+y^2. Así pues, por medio de la manipulación de Algebloks el estudiante determinará el resultado del cuadrado de la suma de un binomio.

Ejemplo:

En el diseño se propone la siguiente tarea:

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área del cuadrado de color negro?

La técnica **τ_{2b}** permite solucionar la tarea. El estudiante llegará a configuraciones como la **(fig.14)**.

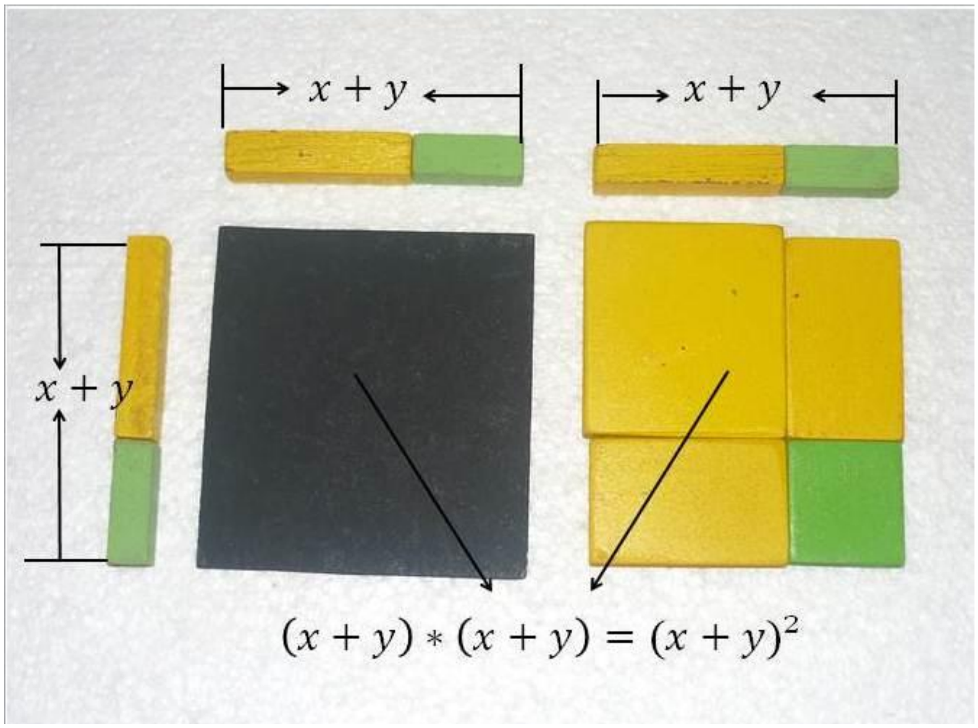


Fig.14 Bloques para formar el cuadrado negro.

El área del cuadrado negro se puede representar como la suma de las áreas de las partes. Así pues el área es $\boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2}$ **(fig.15)**. Sin embargo, para factorizar este polinomio es necesario que el estudiante exprese el área del cuadrado como el producto de $\boldsymbol{l * l}$ o base por altura. Para esto debe determinar la expresión algebraica que representa la distancia del lado del cuadrado. Así pues, el área del cuadrado se representa por $(\boldsymbol{x + y}) * (\boldsymbol{x + y}) = (\boldsymbol{x + y})^2$. De esta manera, se produce la técnica **τ_{3b}.** Las dos expresiones algebraicas que representan el área del cuadrado determinadas con las técnicas **τ_{2b} y τ_{3b}** son equivalentes. Por tanto, el estudiante puede comprender porque $(\boldsymbol{x + y})^2$ no es igual a $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2$, ya que para completar un cuadrado de lado $\boldsymbol{x + y}$ usando Algebloks no basta solo con los bloques que representan las áreas $\boldsymbol{x}^2$ y $\boldsymbol{y}^2$.

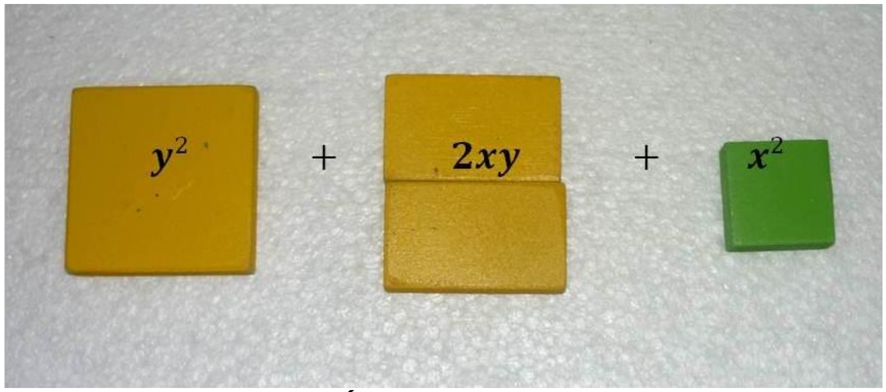


Fig.15 Áreas de cada bloque.

Sin embargo, para cubrir el cuadrado negro, el estudiante podría, por ejemplo, realizar las configuraciones que se pueden observar en la **(fig.16)**. Por tanto, el estudiante debe darse cuenta que "esta" técnica de cubrir el cuadrado negro no resuelve el tipo de tarea, ya que en la anterior tarea, se acordó cuáles bloques me permitirían cubrir superficies, las cuales me indican un área, es decir $\boldsymbol{\tau_{1b}}$. Además, estos tipos de configuraciones se analizan en la **tarea 5**.

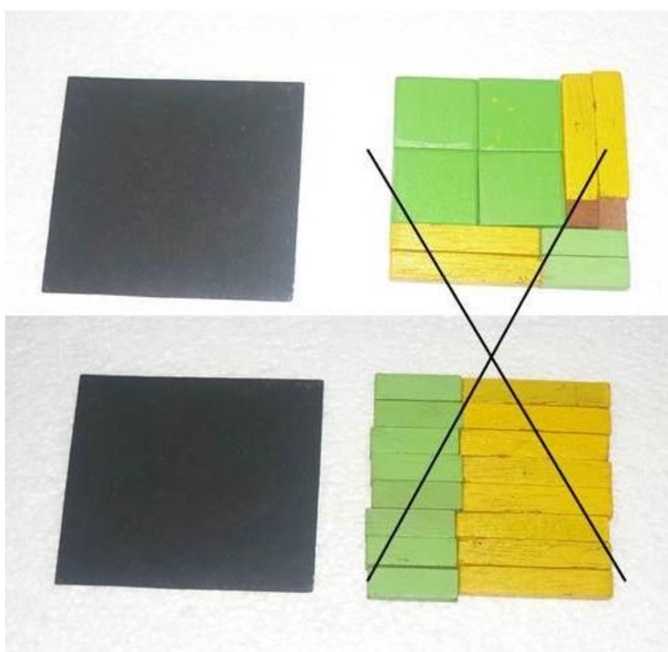


Fig.16 Configuraciones no adecuadas para el cuadrado negro.

Parte 2:

Objetivo: Determinar las expresiones algebraicas que representan áreas de distintas configuraciones con Algebloks. Por tanto, se involucran polinomios de grado 2. Por medio de configurar los bloques en un "rectángulo", los estudiantes determinan las dimensiones del largo, ancho (**τ_{3b}**).

Ejemplo:

A partir de una configuración realizada con Algebloks **(fig.17),** determinar dos expresiones algebraicas que representan el área de la superficie o rectángulo. Para esto, se debe tener en cuenta que la técnica **τ_{2b}** se transforma en **τ_{4b}**, ya que en las configuraciones propuestas en este tipo de tarea, se utilizan lo bloques "$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{xy}$ y $\boldsymbol{y}^2$ y la **unidad (1)**" para representar áreas. Sin embargo, la **τ_{1a}** sigue implícita, puesto que el primer paso es determinar las distancias desconocidas de los lados de una superficie rectangular. Se puede afirmar que **τ_{4b}** es una nueva técnica que reúne las dos técnicas **τ_{2b}** y **τ_{3b}**, puesto que permite encontrar dos expresiones algebraicas que representan el área de una superficie rectangular así:

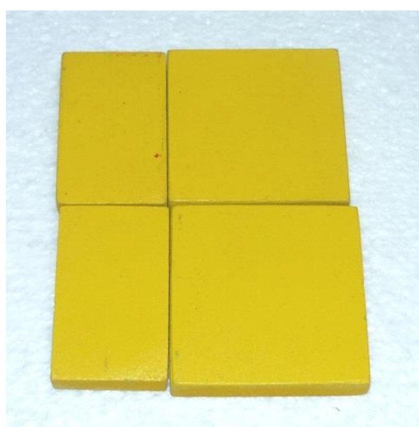


Fig.17 Superficie con Algebloks.

- Luego de formar la superficie con Algebloks, se determina una expresión algebraica inicial que representa el área de la superficie. Esto es: sumar el área de cada bloque que conforma la superficie total **(fig.12). Expresión algebraica inicial:** $\boldsymbol{2y^2 + 2xy}$

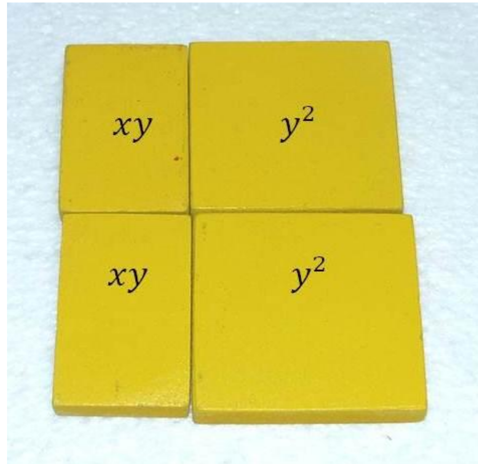


Fig.18 Área de superficie con Algebloks.

- Ahora, como ya se tiene una expresión algebraica inicial que representa el área de la superficie, lo que sigue es encontrar otra expresión algebraica “equivalente” que represente dicha área. Para ello, se debe recordar que el área de un rectángulo se obtiene al multiplicar la medida de dos longitudes (largo y ancho) denominadas: base y altura. De esta manera, con la superficie dada con Algebloks se determina la medida de la base y altura o el largo y ancho como se ve en la **(fig.19).**

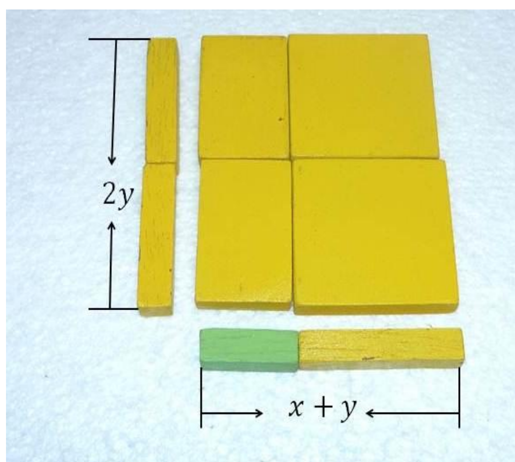


Fig.19 Dimensiones de superficie con Algebloks.

- Ahora, se multiplican las dos expresiones algebraicas de la base y altura. El resultado es un polinomio o expresión algebraica que representa el área de la superficie.

Expresión algebraica resultante: $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) * (\boldsymbol{2y})$

- Finalmente, la expresión algebraica resultante es equivalente a la expresión algebraica inicial, dando solución a la tarea propuesta.

$$\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{2xy} = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) * (\boldsymbol{2y})$$

De esta manera, el estudiante puede determinar la factorización del polinomio inicial a través de la manipulación con Algebloks utilizando $\boldsymbol{\tau_{4b}}$ para solucionar la tarea propuesta. Seguidamente, en esta tarea, el estudiante puede reconocer que los bloques utilizados representan un área. Así, el estudiante reconoce la valencia instrumental y semiótica de Algebloks, ya que en este tipo de tarea, la manipulación de los bloques induce al concepto de área y el concepto de volumen no emerge por ahora. Por ejemplo, si el bloque representado por el ostensivo $\boldsymbol{y}$ es usado en esta tarea, entonces no representa una distancia desconocida, si no el área de un rectángulo de dimensiones $\boldsymbol{1} * \boldsymbol{y}$, donde cada factor es la distancia del ancho, y largo respectivamente. Estas características determinan la valencia semiótica de los Algebloks.

Otro de los puntos que se propone en este tipo de tarea consiste en que, dado un polinomio, se debe determinar la factorización de él utilizando Algebloks. Así pues, emerge una secuencia de técnicas de acuerdo al tipo de polinomio. Principalmente, el estudiante debe usar Algebloks para formar un rectángulo que representa al polinomio dado, y de este modo, determinar las dimensiones largo y ancho.

En un primer intento, los polinomios propuestos en esta tarea son de la forma $\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}$, donde $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ pertenecen a los números enteros. De esta manera se genera la técnica $\boldsymbol{\tau_{1d}}$, que difiere de todas las anteriores en que en primer lugar se propone el ostensivo escrito (expresión algebraica) y se debe representar por el ostensivo físico, es decir, Algebloks. Así pues, en la **(fig.20)** se pueden observar las configuraciones con Algebloks para los siguientes polinomios:

1. $x^2 + 4x + 4$
2. $x^2 + 6x + 5$
3. $x^2 + 9x + 18$

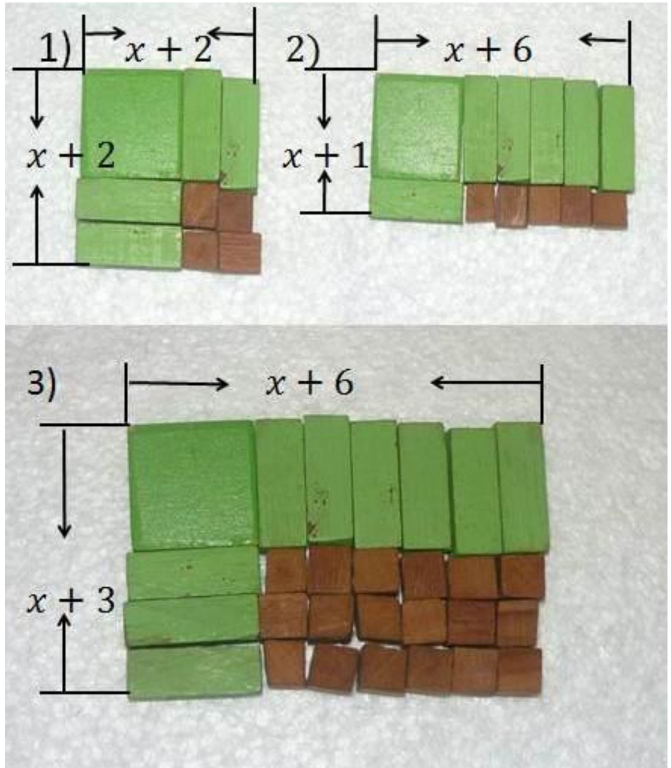


Fig.20 Configuraciones con Algebloks para tres polinomios de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$

El estudiante puede producir una técnica $\boldsymbol{\tau_{1d}}$ en la forma de configurar los bloques para completar el rectángulo. Así pues, a partir del tipo de tareas, luego de adquirir habilidades a través de la práctica, el estudiante podrá configurar los bloques en rectángulo de una forma más rápida, es decir, la técnica $\boldsymbol{\tau_{1d}}$ consiste en ubicar los bloques $\boldsymbol{x}$ al lado derecho e inferior del bloque $\boldsymbol{x}^2$; y lo cubos que representan la unidad se ubican en la parte inferior derecha del rectángulo que se quiere configurar **(fig.20)**. Esta técnica determina la valencia instrumental de los Algebloks en este tipo de tarea.

Luego de que el estudiante adquiere la técnica de configurar los bloques en rectángulos rápidamente, entonces ya puede determinar las expresiones algebraicas que representan las distancias del largo y ancho. Por tanto, obtiene la expresión factorizada del polinomio **(fig.20)**.

Ahora bien, dentro de $\boldsymbol{\tau_{1d}}$ emerge un aspecto matemático importante. En la **(fig.21)** se observa una parte de la configuración de rectángulos que se observa en la **(fig.20)** de los polinomios dados. La cantidad de los cubos que representan la unidad es el producto de la cantidad de bloques $\boldsymbol{x}$ ubicados debajo del bloque $\boldsymbol{x}^2$ por la cantidad de bloques $\boldsymbol{x}$ ubicados a la derecha del bloque $\boldsymbol{x}^2$. También, la suma de estos dos números es la cantidad de bloques $\boldsymbol{x}$ utilizados para completar el rectángulo.

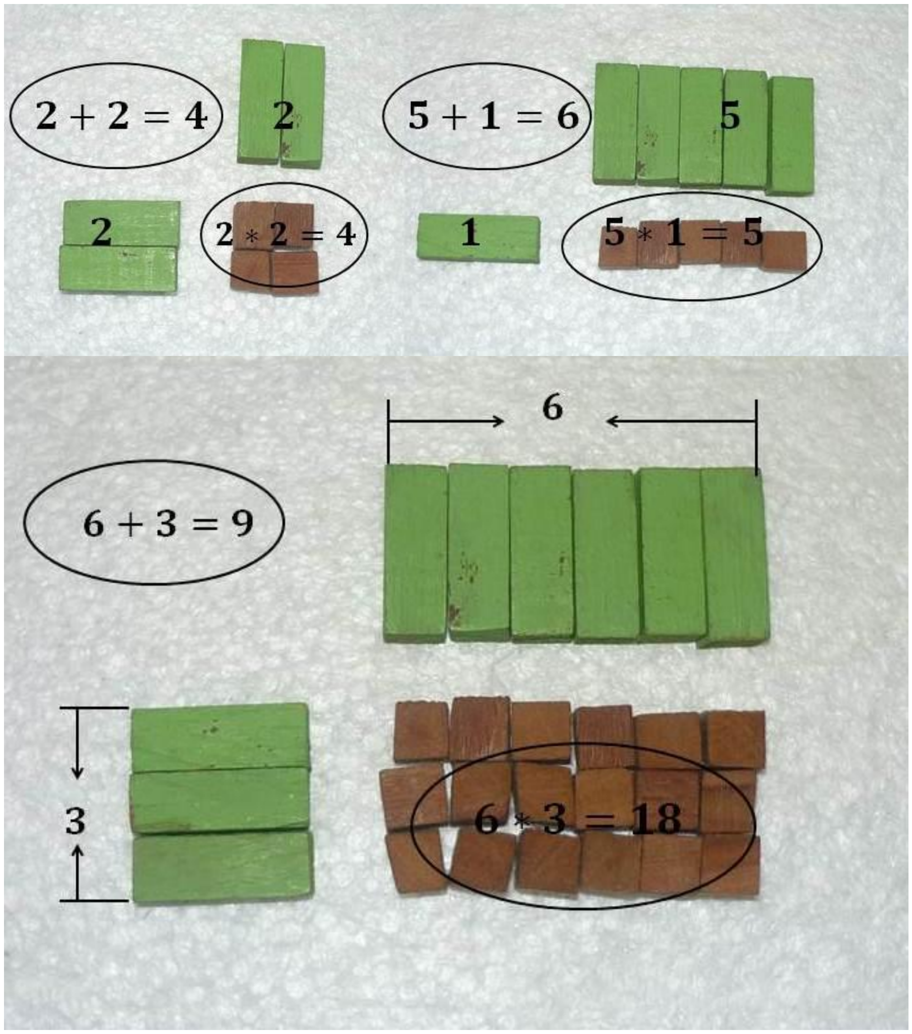


Fig.21 Desarrollo de la técnica τ_{1d}

Así pues, podemos observar que $\boldsymbol{\tau}_{1d}$ permite determinar dos números que al multiplicarlos obtenga la cantidad de cubos de unidad y al sumarlos obtenga la cantidad de bloques $\boldsymbol{x}$; y que a su vez, estos dos números aparecen en la factorización del polinomio. Esta técnica $\boldsymbol{\tau}_{1e}$ determina la valencia semiótica de los Algebloks. Esto es, en un polinomio de la forma $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{bx}+\boldsymbol{c}$, la factorización es:

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m})*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n})$$

Donde $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ pertenecen a los números enteros y $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{m}*\boldsymbol{n}=\boldsymbol{c}$. Finalmente, $\boldsymbol{\tau_{1d}}$ permite factorizar determinados polinomios. Si se propone factorizar el polinomio $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{16x}+\boldsymbol{72}$, donde no se cuenta con la cantidad de bloques necesarios, entonces el estudiante debe producir técnicas que permitan factorizar el polinomio sin el uso de Algebloks, en este caso, utilizar $\boldsymbol{\tau_{1e}}$ a lápiz y papel, que puede ser dibujar los bloques en papel o las posibles técnicas que podamos determinar por medio de la aplicación de dicha tarea. Esta técnica también permite factorizar polinomios de la forma $\boldsymbol{ax}^2+\boldsymbol{bx}+\boldsymbol{c}$, donde $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ pertenecen a los **números racionales**, que no son enteros. Por ejemplo, factorizar el polinomio $\boldsymbol{x}^2+\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{8}}$ es imposible con el uso de Algebloks, pero a partir de la manipulación de Algebloks se produjo $\boldsymbol{\tau_{1e}}$ que permite factorizar otros tipos de polinomios.

Por otro lado, si se propone factorizar polinomios de la forma $\boldsymbol{ax}^2+\boldsymbol{bx}+\boldsymbol{c}$, donde $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ pertenecen a los números enteros, entonces $\boldsymbol{\tau_{1d}}$ sirve para solucionar este tipo de tarea, sólo se transforma un poco al ubicar los bloques $\boldsymbol{x}^2$ en forma lineal. En la **(fig.22)** se pueden observar las configuraciones con Algebloks para los siguientes polinomios:

1. $2x^2+3x+1$
2. $2x^2+6x+4$
3. $5x^2+6x+1$
4. $3x^2+7x+4$
5. $3x^2+8x+4$
6. $2x^2+8x+8$

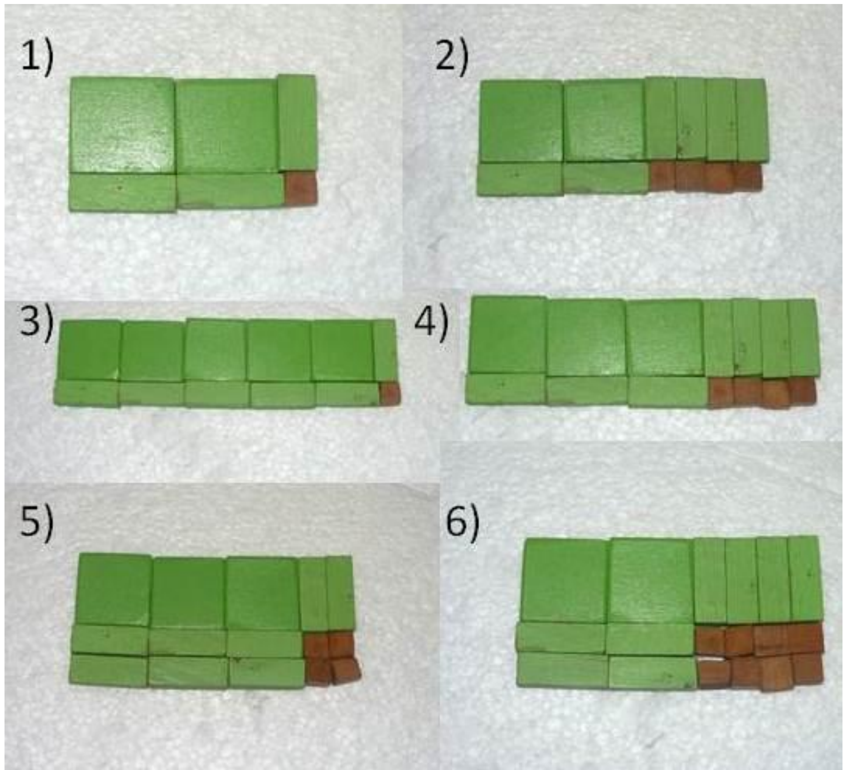


Fig.22 Configuraciones con Algebloks para seis polinomios de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$

Además, el polinomio $\boldsymbol{9x^2+9x+2}$ no se puede factorizar con Algebloks, debido a que hacen falta bloques $\boldsymbol{x^2}$**.** Por tanto, es necesario otro tipo de técnica para solucionar este tipo de tarea. Con el propósito de determinar la valencia semiótica que emerge en las configuraciones de la **(fig.22)**, en la **(fig.23)** se observa una configuración "separada" de los bloques dejando visualizar la forma como se ubicaron los bloques $\boldsymbol{x}$**.**

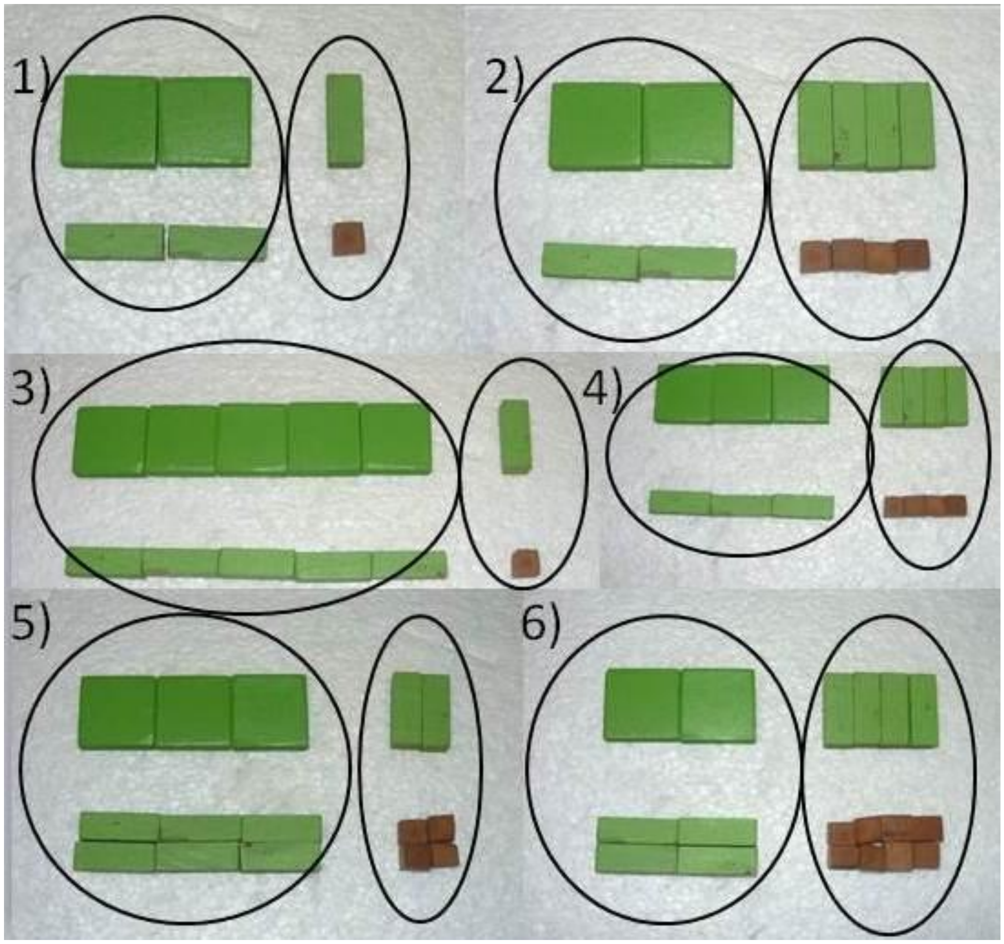


Fig.23 Desarrollo de la técnica $\boldsymbol{\tau_{2e}}$

Podemos observar que la cantidad de los cubos que representan la unidad "***no***" es el producto de la cantidad de bloques $\boldsymbol{x}$ ubicados debajo de los bloques $\boldsymbol{x}^2$ por la cantidad de bloques $\boldsymbol{x}$ ubicados a la derecha de los bloques $\boldsymbol{x}^2$. Pero, la suma de estos dos números si es la cantidad de bloques $\boldsymbol{x}$ utilizados para completar el rectángulo.

Sin embargo, en la **(fig.23)** se observa que en cada configuración hay dos óvalos que encierran dos configuraciones de determinados bloques. Los óvalos nos van a permitir describir la técnica que permitirá factorizar este tipo de polinomios en lápiz y papel. Tomemos, por ejemplo, la configuración de la **(fig.24)**, la cual representa al polinomio del punto 5 pero dividida en 4 partes de la **(fig.23)**.

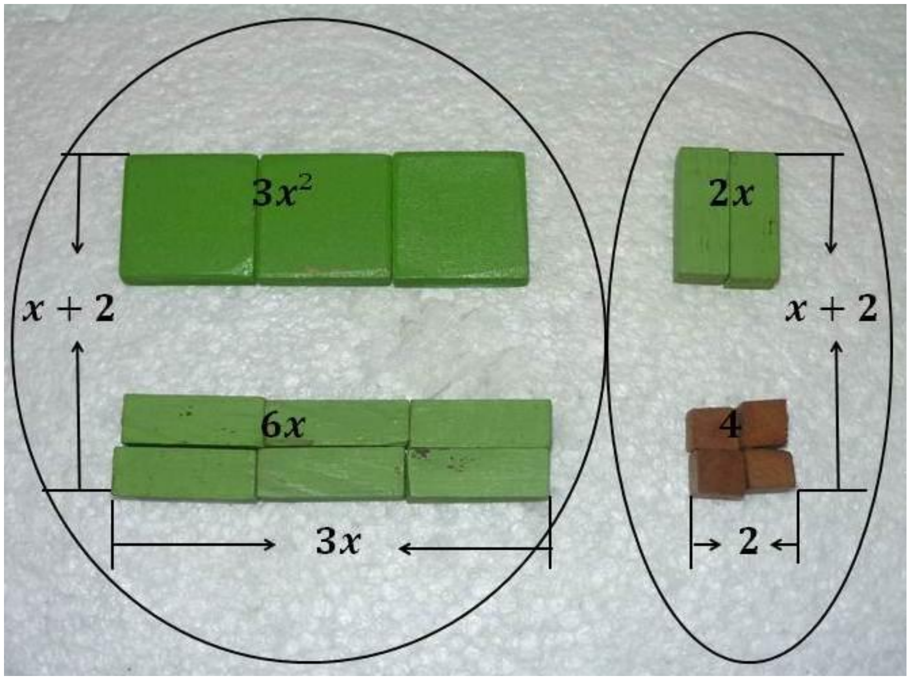


Fig.24 Desarrollo de la técnica τ_{2e} ***polinomio*** $\mathbf{3x^2+8x+4}$

Cada parte representa a su vez un área, la cual está dada por:

$$\mathbf{3x^2+6x+2x+4}$$

La valencia semiótica de “agrupar” por medio del óvalo en la **(fig.24)** se puede ver como:

$$\mathbf{(3x^2+6x)+(2x+4)}$$

Luego, se factoriza a su vez los dos rectángulos agrupados:

$$\mathbf{3x(x+2)+2(x+2)}$$

Ahora, la expresión $\mathbf{x+2}$ se repite ya que representa que los dos rectángulos tienen la misma altura. Si observo los lados del rectángulo total, el área se representa finalmente por:

$$\mathbf{(3x+2)*(x+2)}$$

Los números 6 y 2 se obtuvieron al configurar los bloques en un rectángulo. La suma de ellos representa la cantidad de bloques $\boldsymbol{x}$ utilizados y el producto $\mathbf{6*2=12}$ es el mismo producto de $\mathbf{3*4=12}$, donde 3 y 4 son los coeficientes del polinomio dado en el punto 5 **(fig.22)**. Así pues, luego de la manipulación con Algebloks se produce una técnica $\boldsymbol{\tau_{2e}}$ a lápiz y papel que puede factorizar polinomios de la forma $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$, donde $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ pertenecen a los **números racionales**, que no son enteros. Por tanto, los polinomios $\mathbf{9}\boldsymbol{x}^2+\mathbf{9}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}$ y $\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^2+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ se pueden factorizar con $\boldsymbol{\tau_{2e}}$.

Por otro lado, con el propósito de producir nuevas técnicas, en esta tarea tenemos un caso particular: una colección de bloques con la cual no sea posible formar un rectángulo. En este tipo de tarea, el estudiante puede producir otra técnica muy similar a los anteriores casos que consistirá en “completar el rectángulo”. En otras palabras, desde el punto de vista matemático, se refiere a “completar el polinomio para poder factorizarlo”.

De esta manera, el área de la superficie que se forma con los bloques es la suma del área de cada bloque, produciendo así una primera representación para el área de la superficie. Sin embargo, se debe determinar otra expresión algebraica equivalente para el área de la superficie. Para esto, se debe tener en cuenta:

- Determinar el/los bloque(s) que hace(n) falta para que se forme un rectángulo.
- Completar el rectángulo, es decir, configurar los bloques con la forma de rectángulo.
- Determinar el área del rectángulo como los dos factores del largo y ancho.
- Ahora, a la expresión anterior, se debe restar la expresión algebraica de el/los bloques que se utilizaron para completar el rectángulo, ya que la técnica de “completar el rectángulo” significa adicionar un nuevo término al polinomio inicial y, por tanto, se debe restar al final para que la igualdad de los polinomios no sea afectada. De esta manera, la tarea propuesta tiene solución.

Finalmente, en esta tarea se trabaja con polinomios de grado 2 y con el concepto de área.

Tarea 3

Parte 1:

Objetivo: Que el estudiante comprenda que $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^3$ no es igual a $\boldsymbol{x}^3+\boldsymbol{y}^3$. Así pues, por medio de la manipulación de Algebloks el estudiante determinará el resultado del cubo de la suma de un binomio.

La técnica $\boldsymbol{\tau_{2c}}$ permite solucionar la tarea. El estudiante llegará a configuraciones como la **(fig.25)**.

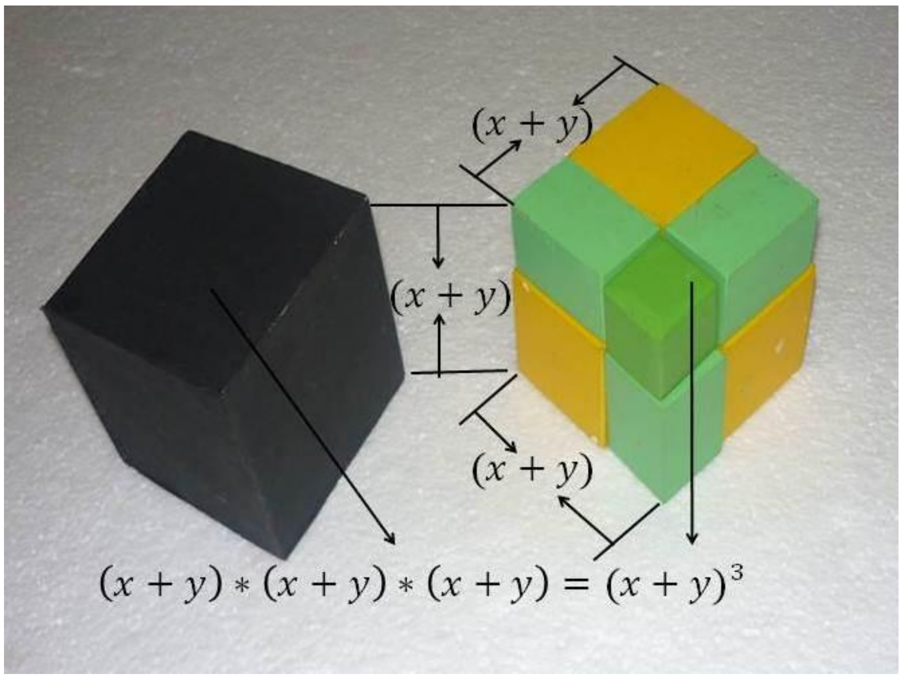


Fig.25 Bloques para forma el cubo negro.

De igual manera a la tarea 2, el volumen del cubo negro se puede representar como la suma de los volúmenes de las partes. Así pues, la expresión algebraica que representa el área es $\boldsymbol{x}^3+\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{y}^3$ **(fig.26)**. Sin embargo, para factorizar este polinomio es necesario que el estudiante exprese el volumen del cubo como el producto de $\boldsymbol{l}*\boldsymbol{l}*\boldsymbol{l}$ o largo por ancho por altura. Para esto debe determinar la expresión algebraica que representa la distancia del lado del cubo.

Luego, el volumen del cuadrado es $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^3$. De esta manera, se produce la técnica $\boldsymbol{\tau_{3c}}$. Las dos expresiones algebraicas que representan el volumen del cubo son equivalentes. Por tanto, el estudiante puede comprender porque $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^3$ no es igual a $\boldsymbol{x}^3+\boldsymbol{y}^3$, ya que para completar un cubo de lado $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ usando Algebloks no basta con los bloques que representan los volúmenes $\boldsymbol{x}^3$ y $\boldsymbol{y}^3$.

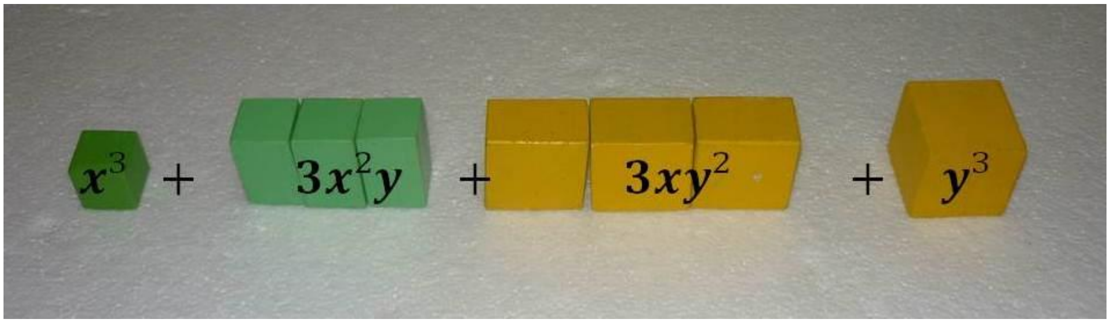


Fig.26 Volúmenes de cada bloque.

Parte 2:

Objetivo: Determinar las expresiones algebraicas que representan los volúmenes de distintas configuraciones con Algebloks. Por tanto, se involucran polinomios de grado 3. Por medio de configurar los bloques en una "caja", los estudiantes determinan las dimensiones largo, ancho y altura.

Ejemplo:

A partir de una configuración realizada con Algebloks **(fig.27),** determinar dos expresiones algebraicas que representan el volumen de la caja. Para esto, se debe tener en cuenta que la técnica $\boldsymbol{\tau_{2c}}$ se transforma en $\boldsymbol{\tau_{4c}}$, ya que en las configuraciones propuestas en este tipo de tarea, se utilizan todos los bloques de Algebloks para representar volúmenes. Sin embargo, al igual que en tareas anteriores, la $\boldsymbol{\tau_{1a}}$ sigue implícita, puesto que el primer paso es determinar las distancias desconocidas de los lados de una superficie rectangular. Se puede afirmar que $\boldsymbol{\tau_{4c}}$ es una nueva técnica que reúne las dos técnicas $\boldsymbol{\tau_{2c}}$ y $\boldsymbol{\tau_{3c}}$, puesto que permite encontrar dos expresiones algebraicas que representan el área de una superficie rectangular así:

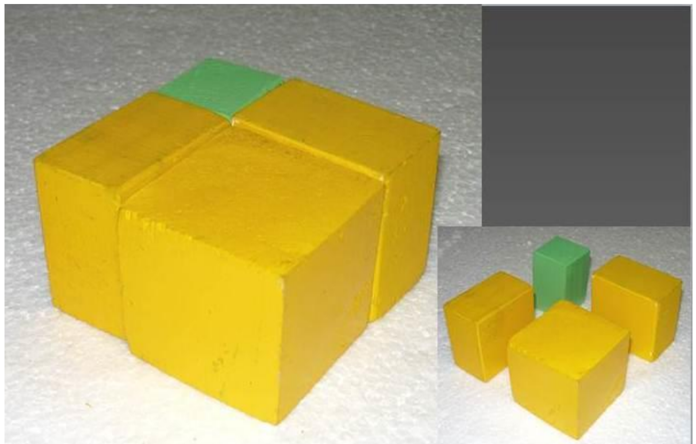


Fig.27 Caja con Algebloks.

- Luego de formar la caja con Algebloks, se determina una expresión algebraica inicial que representa el volumen de la caja. Esto es: sumar el volumen de cada bloque que conforma la caja **(fig.28).**
-
  Expresión algebraica inicial: $\boldsymbol{y^3 + x^2y + 2xy^2}$ **(polinomio)**

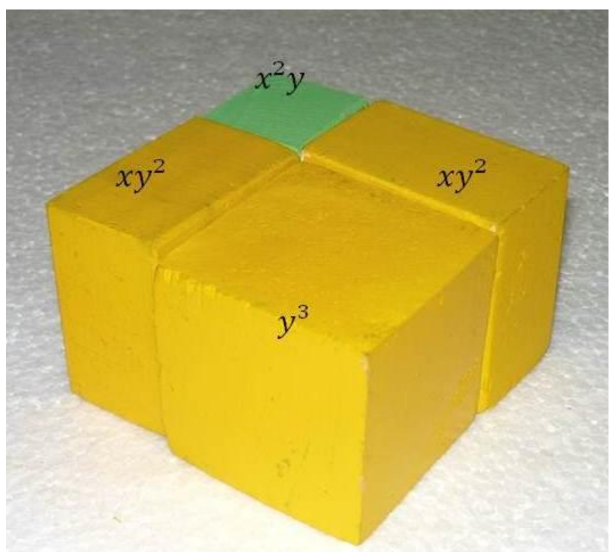


Fig.28 Volumen de caja con Algebloks.

- Ahora bien, como ya se tiene una expresión algebraica inicial para el volumen de la caja, lo que sigue es encontrar otra expresión algebraica equivalente al volumen de la caja. Para ello, se debe recordar que el volumen de una caja se obtiene al multiplicar la medida de tres longitudes: largo, ancho y altura. De esta manera, con la caja dada, se determina la medida del largo, ancho y altura **(fig.29)**.

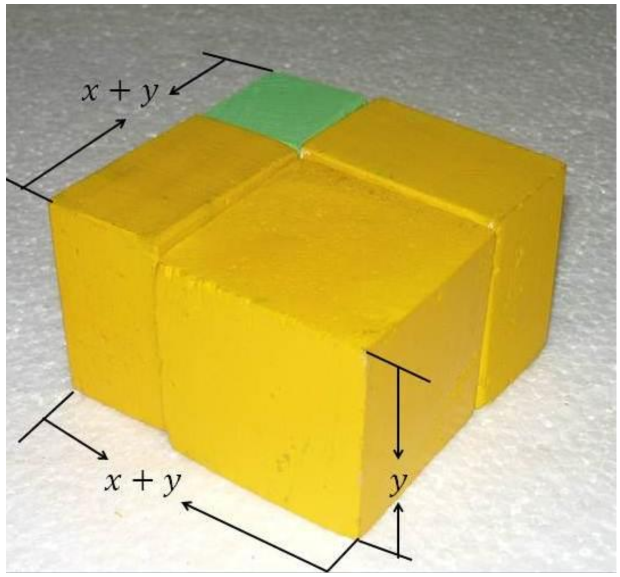


Fig.29 Dimensiones de la caja con Algebloks.

- Ahora, se multiplican las tres expresiones algebraicas del largo, ancho y altura. El resultado es un polinomio o expresión algebraica que representa el volumen de la caja.

  Polinomio: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) * (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) * (\boldsymbol{y})$
  Al simplificar, se obtiene:
  Expresión algebraica resultante: $\boldsymbol{y} * (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2$

- Finalmente, la expresión algebraica resultante es equivalente a la expresión algebraica inicial, dando solución a la tarea propuesta.

$$\boldsymbol{y} * (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{y}^3 + \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{2}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^2$$

De manera similar a la **T(2)** (Tarea 2), el estudiante puede determinar la factorización del polinomio inicial a través de la manipulación con Algebloks que involucra tipos de técnicas para solucionar la tarea propuesta. Seguidamente, en esta tarea, el estudiante puede reconocer que los bloques usados ya no representan un área, sino un volumen. Así, el estudiante reconoce la valencia instrumental y semiótica de Algebloks, ya que en este tipo de tarea, la manipulación de los bloques induce al concepto de volumen y el concepto de área no emerge directamente. Por ejemplo, si el bloque representado por el ostensivo $\boldsymbol{x}$ es usado en esta tarea, entonces no representa una distancia desconocida, si no el volumen de una caja de dimensiones $\mathbf{1} * \mathbf{1} * \boldsymbol{x}$, donde cada factor es la distancia del ancho, altura y largo respectivamente. Estas características determinan la valencia semiótica de los Algebloks.

Además, dentro de esta tarea, se propone otro tipo de tarea que consiste en que dado un polinomio, se debe llegar a la factorización de él, por medio del uso de Algebloks. Así pues, el estudiante debe usar Algebloks para formar la caja que representa al polinomio dado, y de este modo, posiblemente emerger técnicas inesperadas. En este caso, los Algebloks pueden dar solución a la factorización de algunos polinomios complejos de una manera fácil y rápida que en lápiz y papel tomaría mucho más tiempo. Este tipo de polinomios son aquellos que pueden ser representados con Algebloks en configuraciones en forma de caja. De manera similar a la **T(2)**, se genera la técnica $\boldsymbol{\tau_{2d}}$, similar a la técnica $\boldsymbol{\tau_{1d}}$ donde en primer lugar se muestra el ostensivo escrito (polinomio) y se debe representar por el ostensivo físico, es decir, con la configuración en caja con los Algebloks.

Tarea 4

Objetivo: Diferenciar los dos tipos de ecuaciones 1 y 2. En una ecuación de tipo 1, cualquier valor numérico para $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ satisfacer la ecuación. En una ecuación de tipo 2, sólo uno o dos valores para $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ Se estudia la situación en que un polinomio puede ser expresado como el producto de dos o más polinomios.

Estructura:

Así, si un polinomio es igual a un producto de dos factores que a su vez son polinomios, y ésta ecuación se cumple para cualquier valor numérico de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x}$, entonces los dos factores se denominan la factorización del polinomio. Por tanto, si se calcula el producto de los dos factores, el resultado es el mismo polinomio de la igualdad. Esto es:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) * \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad \textbf{(I)}$$

Donde $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ y $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ son polinomios con variables $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$**.** La expresión $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) * \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ se denomina la factorización de $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, si y solo si la ecuación es del tipo 1.

Ahora bien, si un polinomio es igual a un producto de dos factores que a su vez son polinomios, y ésta igualdad es una ***ecuación***, es decir, que la ecuación es del tipo 2 y sólo es válida para ciertos valores numéricos de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, entonces los dos factores no son factorización del polinomio. Por tanto, si se calcula el producto de los dos factores, el resultado no es el mismo polinomio de la ecuación, pero si es otro polinomio. Esto es:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) * \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad \textbf{(E)}$$

Donde $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ y $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ son polinomios con variables $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$**.** La expresión $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) * \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ no es la factorización de $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, pero si es la factorización de $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, puesto que $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ es el producto de $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) * \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. Por tanto se tiene que:

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) * \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad \textbf{(I°)}$$

La ecuación **(I°)** es de tipo 1. Sin embargo, la ecuación **(E)** es de tipo 2. Por tanto, las anteriores descripciones y afirmaciones son las que el estudiante puede llegar a construir justificaciones que permiten resolver tareas propuestas.

Ejemplo:

¿Cuál es el rectángulo que puede configurarse con Algebloks para representar el polinomio inicial **(i)** $\boldsymbol{3x^2 + 2y^2 + 4xy + 2x + 4y}$? ¿Cuál es la expresión algebraica en factores **(1)** que representa el área de este rectángulo? ¿Por qué el producto del polinomio factorizado **(1°)** no es igual a **(i)**?

Así pues, se puede producir $\boldsymbol{\tau_{5b}}$ para solucionar la tarea de esta manera: En la **(fig.30)** se puede apreciar la configuración del rectángulo con Algebloks a la que el estudiante puede llegar. Dependiendo de cómo se ordenen los bloques para formar el rectángulo, se pueden encontrar tres polinomios que representan la altura del rectángulo y un polinomio para la base.

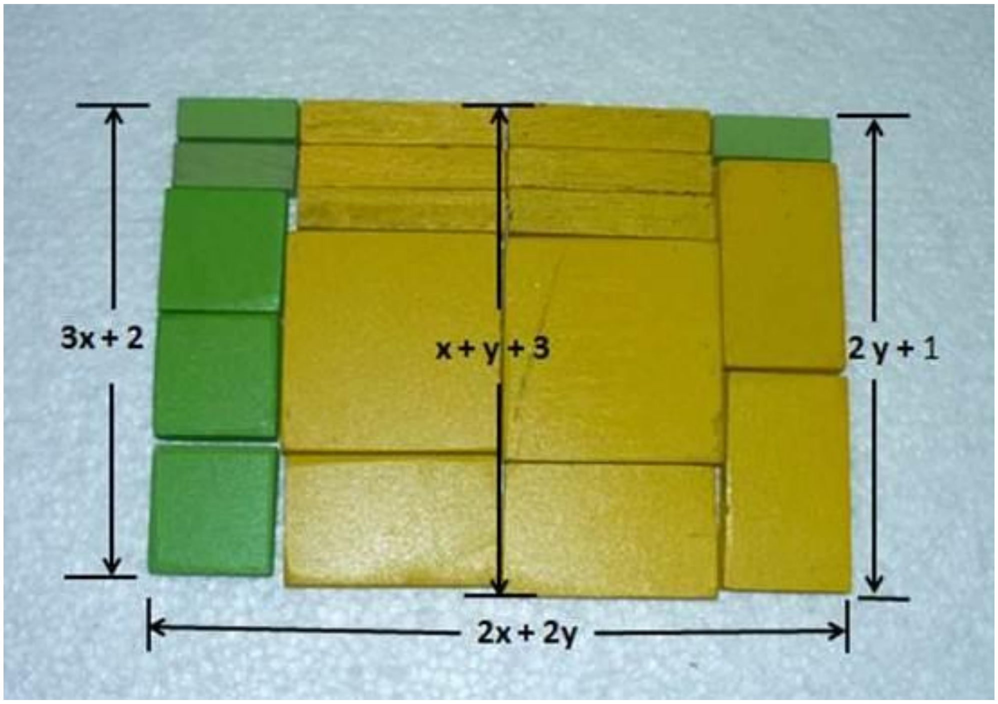


Fig.30 Representación rectangular para el polinomio $3x^2 + 2y^2 + 4xy + 2x + 4y$

De esta manera, para determinar el área del rectángulo de la **(fig.30)** pueden darse las siguientes tres expresiones:

$$(2x + 2y) * (3x + 2) \qquad \textbf{(1)}$$
$$(2x + 2y) * (x + y + 3) \qquad \textbf{(2)}$$
$$(2x + 2y) * (2y + 1) \qquad \textbf{(3)}$$

(1), (2) y **(3)** son las expresiones algebraicas en factores que representan el área del rectángulo. Al calcular los productos obtenemos los siguientes polinomios:

$$6x^2 + 6xy + 4x + 4y \qquad \textbf{(1°)}$$
$$2x^2 + 2y^2 + 4xy + 6x + 6y \qquad \textbf{(2°)}$$
$$2y^2 + 4xy + 2y + 2x \qquad \textbf{(3°)}$$

Por tanto, se puede afirmar que ninguno de los tres polinomios **(1°), (2°) y (3°)** son iguales al polinomio inicial **(i)** para cualquier valor de x y y, ya que no son ecuaciones de tipo 2. Pero, las siguientes ecuaciones son de tipo 1:

(1) = (1°)
(2) = (2°)
(3) = (3°)

Estas tres ecuaciones son de tipo 1, ya que para cualquier valor de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ la ecuación se mantiene. Cuando se despeja una variable de una ecuación de tipo 1, siempre se llega al resultado $\mathbf{0} = \mathbf{0}$ facilmente, mientras que si es una ecuación de tipo 2, puede resultar complejo y no se llega al resultado $\mathbf{0} = \mathbf{0}$. De esta manera, un estudiante puede diferenciar una ecuación de tipo 1 del tipo 2 mediante la técnica $\boldsymbol{\tau_5}$ hasta aquí descrita.

Ahora bien, se puede afirmar que **(1), (2)** y **(3)** son la factorización de los polinomios **(1°), (2°)** y **(3°)** respectivamente. Estos polinomios son iguales al polinomio inicial para ciertos valores de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$. Por tanto se dan las siguientes ecuaciones:

(i) = (1°)
(i) = (2°)
(i) = (3°)

Para las tres ecuaciones, los valores numéricos de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son los mismos. Además, con cada polinomio **(1°), (2°)** y **(3°)** se puede construir con Algebloks el rectángulo que representa cada polinomio, al igual como se realizó con **(i)**. De esta manera, se obtienen las configuraciones de la **(fig.31)**.

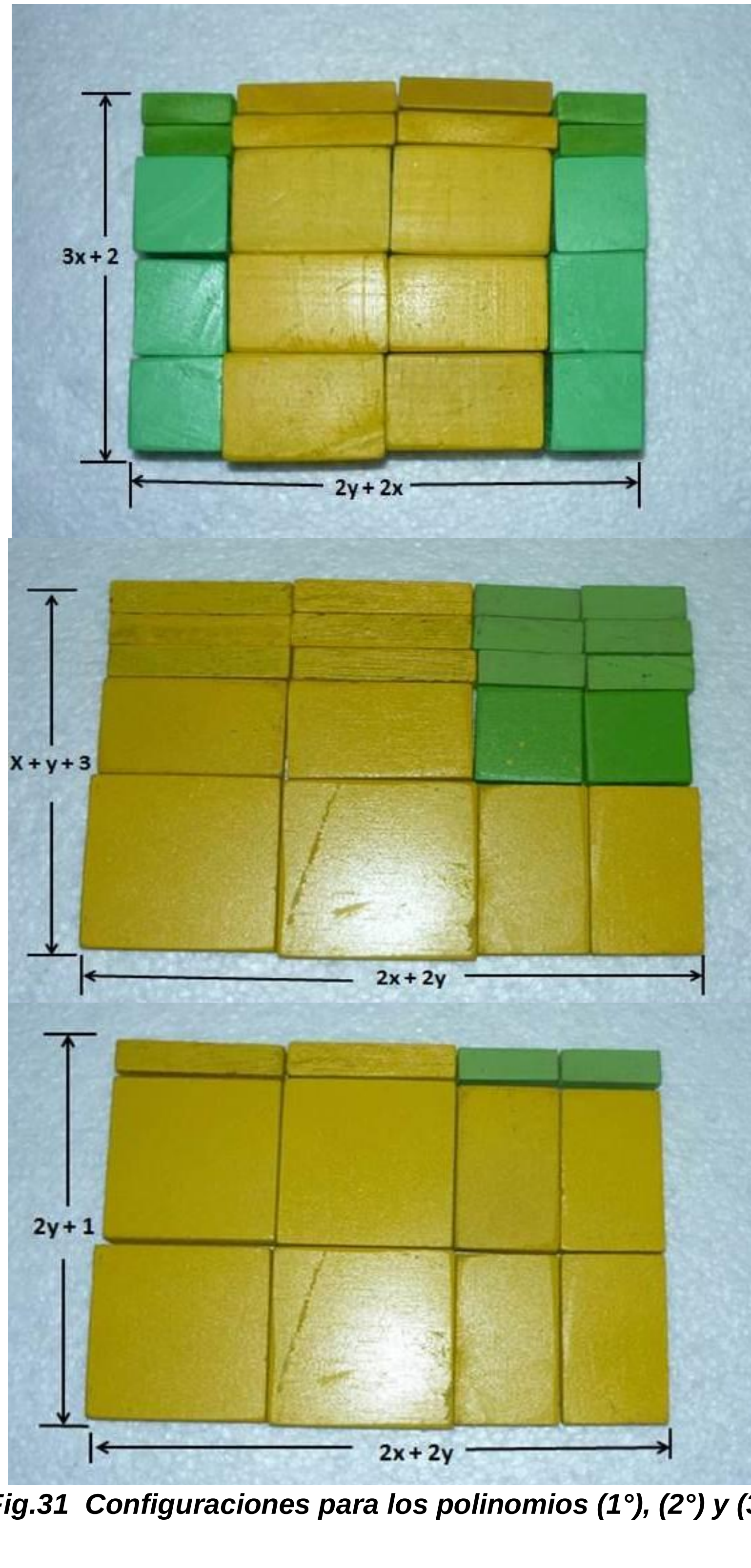


Fig.31 Configuraciones para los polinomios (1°), (2°) y (3).

Los tres rectángulos de la **(fig.31)** y el rectángulo de la **(fig.30)** son superficies que tienen la misma área. Por tanto, con Algebloks podemos construir diversas configuraciones que representen una misma área. Sin embargo, cada polinomio que representa el área del rectángulo es igual al otro sólo para específicos valores numéricos de la variable. Ahora bien, observemos los factores de **(1), (2)** y **(3)**. Como el producto de cada uno de ellos es igual y forman ecuaciones, podemos afirmar que:

$$3x + 2 = x + y + 3 = 2y + 1 \quad \textbf{(4)}$$

Los tres polinomios de **(4)** son iguales y conforman una ecuación. Representan las tres diferentes "alturas" para los tres rectángulos de la **(fig.31)** y que en el rectángulo de la (**fig.30)** también se pueden identificar. Así pues, los tres polinomios representan tres distancias iguales como se observa en la **(fig.32)**.

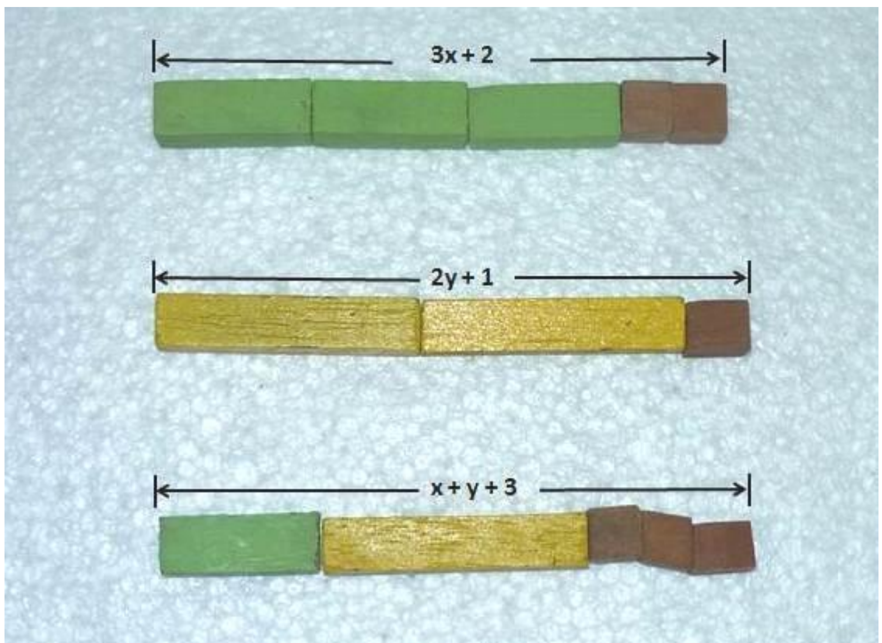


Fig.32 Tres alturas de distancias iguales.

Para calcular los valores numéricos de x y y es necesario resolver ecuaciones cuadráticas a través de realizar sustituciones en un sistema de ecuaciones. Pero estas habilidades todavía no son conocidas por los estudiantes. Por tanto, este tipo de tarea logra conectar con otro tipo de tarea donde deberán emerger otros tipos de técnicas para poder solucionarla. De esta manera, se pueden ir generando otras PM.

En descripciones anteriores se dedujo el valor numérico de $\boldsymbol{x = 3}$. Sustituimos este valor en **(4)** correspondientemente para deducir el valor numérico de $\boldsymbol{y = 5}$. De esta manera, la distancia del bloque $\boldsymbol{y}$ es igual a la distancia de 5 bloques que representan la unidad organizados linealmente.

Tarea 5

Parte 1:

Objetivo: Que el estudiante factorice polinomios de grado n mayor a tres sin usar Algebloks.

En esta tarea, se propone que el estudiante compare la factorización realizada con Algebloks de un polinomio de segundo grado con un polinomio de tercer grado. El rectángulo generado por el polinomio de segundo grado será una de las “caras” de la caja formada por el polinomio de tercer grado. De esta manera, se espera que el estudiante generalice este método e identifique la factorización de un polinomio de grado 4. Así pues, se produce la técnica $\boldsymbol{\tau_{1f}}$, donde el estudiante puede factorizar polinomios de grado $\boldsymbol{n}$ mayor a tres al compararlo con polinomios de grado tres o dos.

Luego, se propone que el estudiante factorice otros polinomios de grado n mayor a tres.

Parte 2:

Objetivo: Que el estudiante factorice polinomios de la forma $\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}$, donde $\boldsymbol{a, b, c}$ pertenecen a los **números racionales**, sin utilizar Algebloks. Así mismo, polinomios donde se pueda identificar un factor común.

En esta tarea, se proponen tipos de problemas en contexto donde el estudiante deba factorizar polinomios de la forma $\boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}$ descrita anteriormente sin tener acceso a los Algebloks. Se analizarán las técnicas que emergen y los posibles obstáculos para resolver dicha tarea.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los resultados se dieron en seis sesiones, cuyo análisis se muestran por cada tarea realizada, mostrando los objetivos que se esperaban cumplir de cada tarea en contraste con los resultados obtenidos y los objetivos del trabajo para finalmente dar una respuesta a la pregunta de investigación.

A modo de claridad, desde la tarea 1 hasta la tarea 5, se puede realizar una descripción de las técnicas que se produjeron en todo el desarrollo de las actividades con Algebloks. Así pues, la enumeración de las técnicas $\boldsymbol{\tau}$ que se mostrarán en el análisis de las tareas tiene un significado que se muestra a continuación:

Los literales ***a, b, c, d, e, f*** significan:

a: son las técnicas que se produjeron con relación a resolver tipos de tareas que involucran el concepto de distancia. Ejemplo: $\boldsymbol{\tau_{1a}}$

b: son las técnicas que se produjeron con relación a resolver tipos de tareas que involucran el concepto de área.

c: son las técnicas que se produjeron con relación a resolver tipos de tareas que involucran el concepto de volumen.

d: son las técnicas que se produjeron con relación a resolver tipos de tareas a partir de la escritura de polinomios, es decir, el ostensivo del grafo del polinomio es el tipo de tarea que requería para su solución el uso de Algebloks.

e: son las técnicas que se produjeron con relación a resolver tipos de tareas sin el uso de Algebloks que involucran polinomios de grado 2 de la forma $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$;Por tanto, se empiezan a desarrollar técnicas a lápiz y papel.

f: son las técnicas que se produjeron con relación a resolver tipos de tareas sin el uso de Algebloks que involucran polinomios de grado mayor a 3.

El siguiente esquema evoca el orden y evolución como el producto del análisis de las técnicas que surgieron en la aplicación de las actividades. Se muestra de acuerdo a la nomenclatura utilizada:

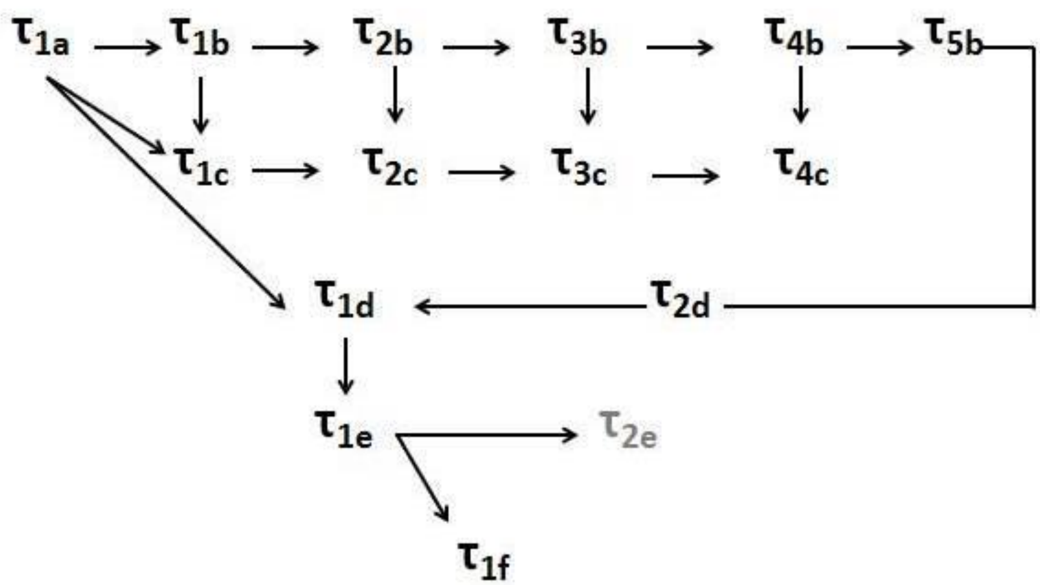


Fig. 33 Esquema de las técnicas producidas en el análisis de resultados.

Se puede observar que todas las técnicas se producen a partir de τ_{1a}. Además, las técnicas con los literales ***b*** y ***c***, están relacionadas horizontal y verticalmente de acuerdo a su evolución de la técnica (numerales) y al concepto de área (literal ***b***) y volumen (literal ***c***). Las τ_{1d} y τ_{2d} son las técnicas previas a aquellas técnicas que permiten factorizar polinomios sin el uso de Algebloks. Finalmente, se llega a la técnica $\tau_{1f,}$ la cual permite factorizar ciertos polinomios de grado 3 sin el uso de Algebloks. Para llegar a esta técnica, se requirió de todo un conjunto de técnicas que le anteceden.

Tarea 1:

Parte 1:

Objetivo: Se identificaron las variables (ostensivos) que asumieron los Algebloks mediante tipos de tareas donde deben calcular distancias, áreas y volúmenes (no ostensivos) usando Algebloks (ostensivos), y por tanto, se mostraron los resultados con las variables asumidas (ostensivos), es decir, por medio expresiones algebraicas (ostensivos) que representan dichas distancias, áreas y volúmenes (no ostensivos).

En esta primera sesión, se les explicó a los estudiantes el trabajo que se realizará con ellos. Se escogió el horario de las clases de matemáticas, el cual hubo que ajustar luego y ampliar el tiempo de trabajo. En este momento surge la primera ventaja con respecto a una de las dificultades que Socas (1989) afirma: “Dificultades debidas a actitudes afectivas y no racionales hacia el álgebra” (p.91); puesto que los estudiantes mostraron mayor motivación por la clase de matemáticas. Así mismo, mostraron interés por resolver las tareas propuestas con los Algebloks perdiendo la noción del tiempo, pudiendo así, lograr una mayor concentración de los estudiantes ante la actividad matemática que se les propuso.

Se puede afirmar que 4 de 5 grupos lograron manipular y reconocer los Algebloks como instrumentos para calcular distancias, áreas y volúmenes.
Luego de haber llegado un acuerdo al asignar una representación en “letras” a los bloques de Algebloks $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, los estudiantes usaron éstos para determinar las representaciones algebraicas de área o volumen de los demás bloques. Así pues, los resultados del trabajo con Algebloks en términos de Valencia Instrumental, evocan rápida y fácilmente el concepto de área y volumen. Los estudiantes calculan el área de un bloque de Algebloks mediante la técnica de medir las distancias de sus dos lados que denominan base y altura, y luego multiplicarlas entre sí. De igual manera, para calcular el volumen de un bloque, midiendo sus tres lados que denominan como largo, ancho y altura. Denominaremos a esta técnica como $\boldsymbol{\tau_{3b}}$.

De manera más específica, con respecto a los nombres asignados a los bloques en primera instancia, en todos los grupos surgieron palabras como “palo amarillo”, “barra verde”, “cuadrado amarillo”, “cubo verde”. **(fig.34).**

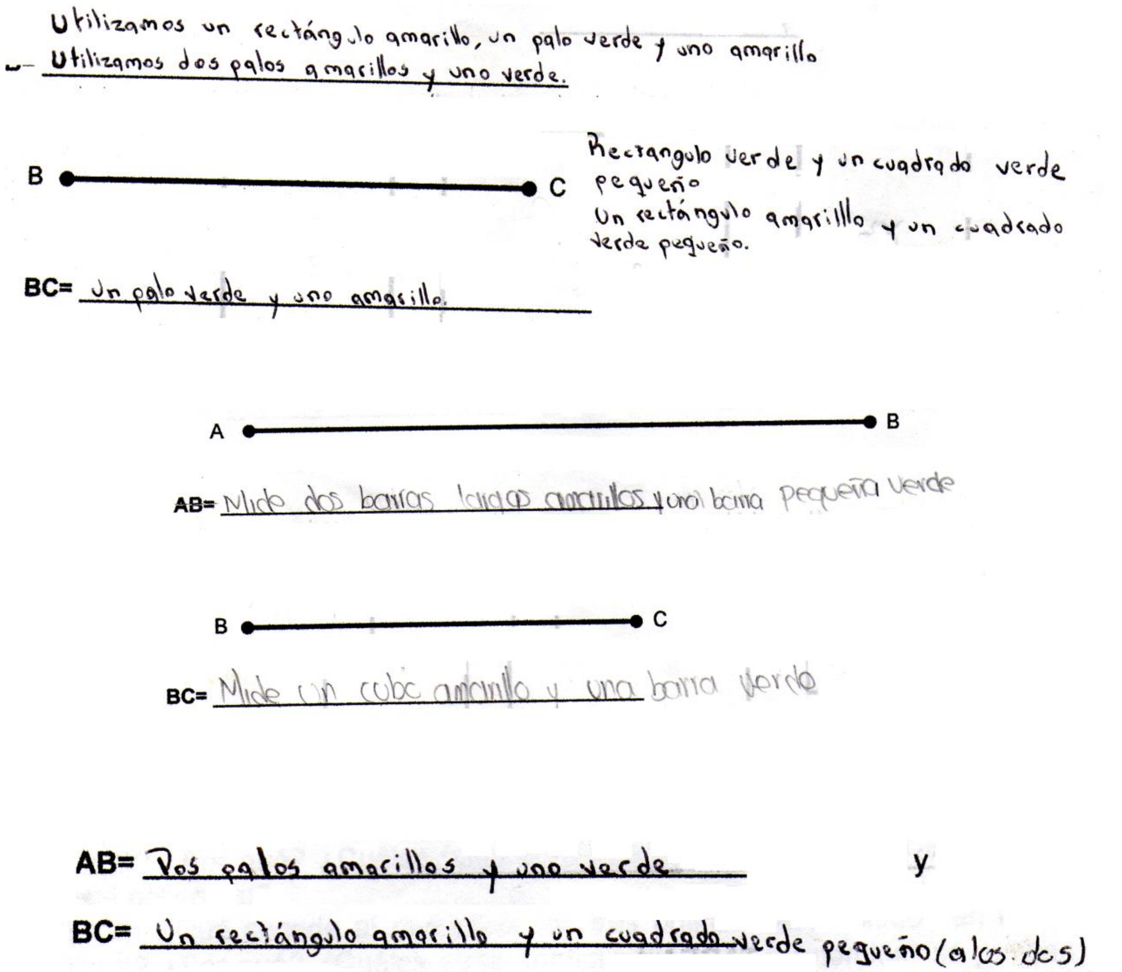


Fig.34 Nomenclatura inicial de los Algebloks por parte de los estudiantes.

Consecuentemente, todos los grupos acordaron que los bloques más adecuados para determinar una expresión para las distancias desconocidas, eran los bloques x y y, nombres que entre todos acordaron asignarle. A esta técnica la denominaremos $\tau_{1a.}$ **(fig.35).**

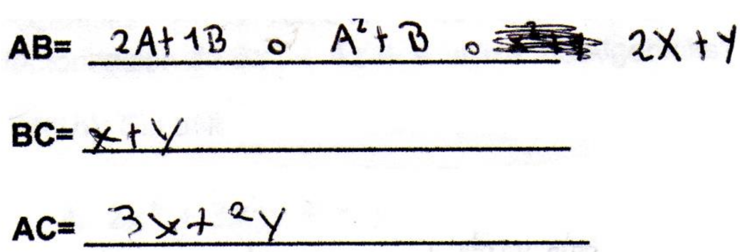


Fig.35 Desarrollo de la técnica τ_{1a}

Luego, para calcular el área de los recuadros, los estudiantes acordaron los bloques más adecuados para cubrirlos. Estos bloques representaban cuadrados y rectángulo. En este instante, se produce la técnica **τ_{1b},**[2] que evocan el concepto de área. **(fig.36).**

Fig.36 Desarrollo de la técnica τ_{1b}

Además, para determinar el área del recuadro, todos los grupos adquirieron la técnica de medir las distancias de sus lados con los bloques x y y**,** dos grupos requirieron menor tiempo para resolver esta tarea. Luego, multiplicaban tales distancias, que denominaban "base" y "altura". A esta técnica la denominamos **$\tau_{3b.}$ (fig.37).**

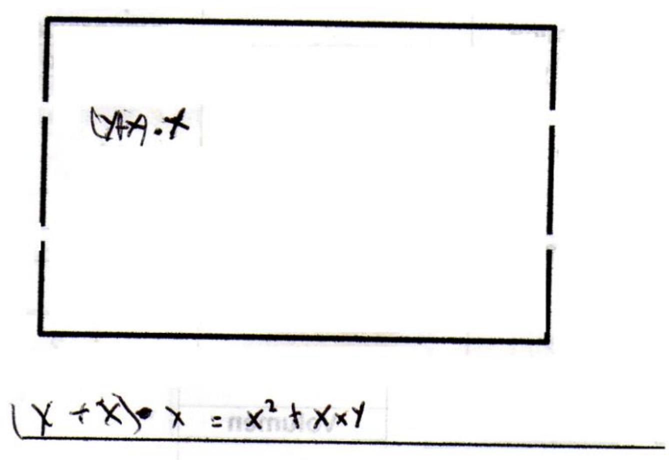
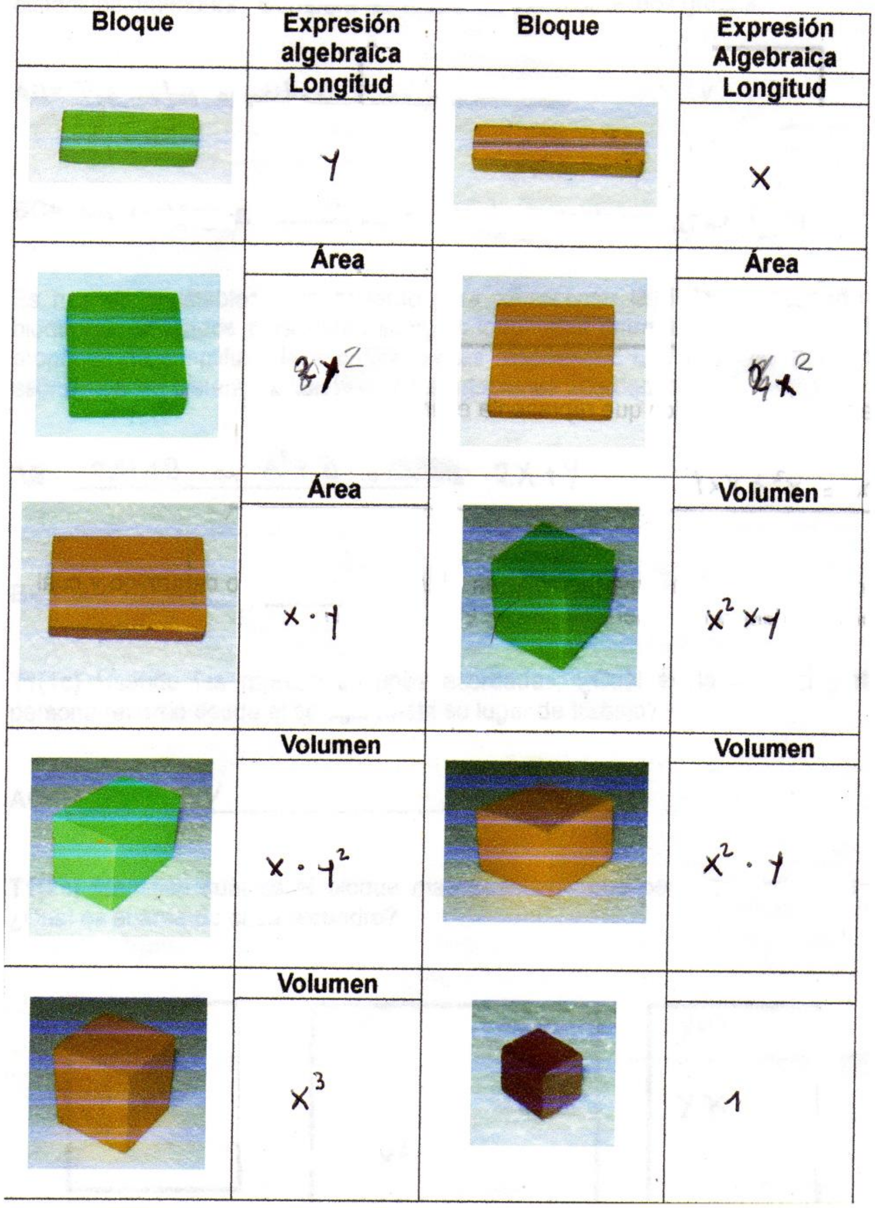


Fig.37 Desarrollo de la técnica τ_{3b}

[2] **τ_{1b} : C**onsiste en cubrir los recuadros con los bloques x^2, xy y y^2.

De esta manera, para determinar las expresiones algebraicas que representarían los volúmenes de los demás bloques, no hubo mayor obstáculo. Denominaremos $\boldsymbol{\tau_{1c}}$ a la técnica que induce que los bloques "$\boldsymbol{x}^3$", $\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^2$ y "$\boldsymbol{y}^3$" son los más adecuados para realizar configuraciones que representen volúmenes desconocidos. Finalmente, los grupos registraron los datos en la tabla 1. **(fig.38).**



Bloque	Expresión algebraica	Bloque	Expresión Algebraica
	Longitud: y		Longitud: x
	Área: $\cancel{8}y^2$		Área: $\cancel{4}x^2$
	Área: $x \cdot y$		Volumen: $x^2 x y$
	Volumen: $x \cdot y^2$		Volumen: $x^2 \cdot y$
	Volumen: x^3		1

Fig.38 Registro de datos en la Tabla1.

Dos de tres grupos de estudiantes experimentaron problemas al tratar de representar productos de expresiones algebraicas, como $\boldsymbol{x * x = x^2}$ es diferente a $\boldsymbol{x + x = 2x}$ a través del contexto de la tarea en lenguaje algebraico. Se evidencia la carencia de las nociones básicas en el uso y significado de las letras como variables, es decir, no hay valencia semiótica en términos de uso de las variables. La mayoría presentaron dificultades al inicio para representar las áreas y volúmenes.

Parte 2:

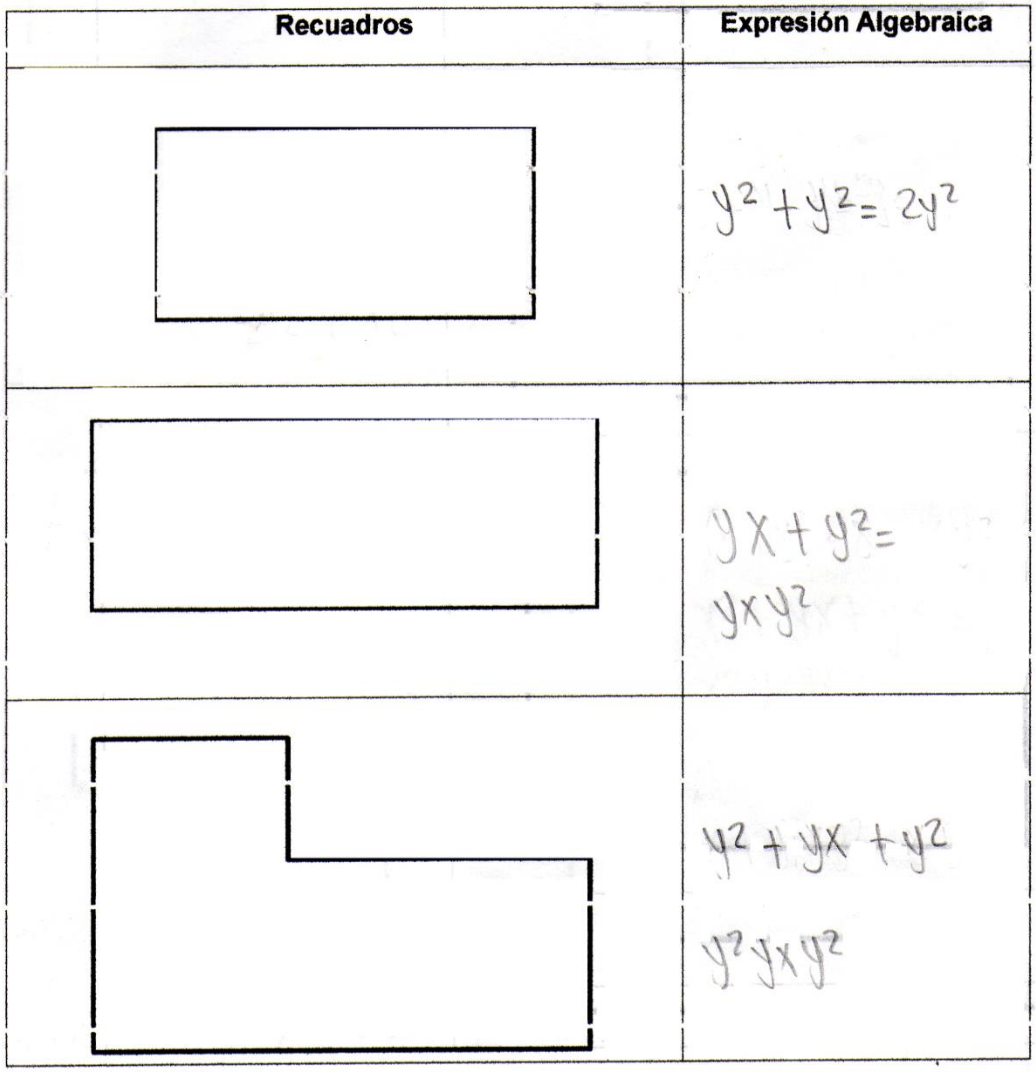
Objetivo: Identificar la expresión algebraica que representa el área de una superficie poligonal irregular con ángulos internos rectos a partir de la suma de las áreas de cada bloque utilizado para cubrir dicho polígono.

En esta parte los estudiantes del grupo bajo estudio experimentaron problemas al tratar de representar una situación real en lenguaje algebraico. Ningún grupo desarrolló la actividad totalmente correcta. Se presentaron errores frente a:

- El uso de los bloques adecuados para cubrir las superficies. Algunos grupos utilizaron los bloques que representaban distancias o volúmenes, lo cual, de acuerdo a la valencia instrumental desarrollada en la parte 1 de esta tarea, era incorrecto. Además, la técnica $\boldsymbol{\tau_{1b}}$ indica cubrir superficies solamente con los bloques $\boldsymbol{x^2, xy}$ **y** $\boldsymbol{y^2}$.

- El área total de la superficie se representó exitosamente como la suma de cada bloque. Sin embargo, la suma de términos algebraicos semejantes no estuvo presente en los estudiantes. **(Ver anexos, fotografía 5).**

- Un grupo asumió el ostensivo $+$ como innecesario. **(fig.39).** Por tanto, la escritura final de la representación del área de la superficie mostraba varias letras con exponentes seguidos, como si fuera un producto. Esto muestra carencias en las operaciones algebraicas de la suma y multiplicación de monomios.



-

- *Fig.39 Dificultad de interpretación ostensiva en el desarrollo de la técnica* τ_{2b}

Así pues, se produce otra técnica para determinar el área de una superficie. La denominaremos como **τ_{2b}, (Ver anexos, fotografía 5),** que indica determinar el área de una superficie al sumar el área de cada bloque usado para cubrir dicha superficie. La mayoría de los grupos logró adquirir la técnica por parte de los estudiantes. Pero, puso en evidencia dificultades en torno a la manipulación de los ostensivos escritos, es decir, la escritura adecuada de representaciones algebraicas para el área de una superficie. **(fig.39).**

Tarea 2:

Parte 1:

Objetivo: Comprender que $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2$ no es igual a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2$. Así pues, por medio de la manipulación de Algebloks el estudiante determinará el resultado del cuadrado de la suma de un binomio.

En esta tarea los grupos de estudiantes no debían cubrir ningún recuadro impreso en el papel y luego determinar su área, si no que se les brindaba un pedazo de cartulina negra con la forma de cuadrado al cual deberían determinar el área de dos formas diferentes.

En este momento, surgió una dificultad en torno a incapacidad de interpretar los enunciados de la tarea por parte de los estudiantes. Dada la estructura de los enunciados similares en las otras tareas, esta dificultad se presentó en otras tareas, lo que requirió de la intervención del docente en actividades como completar la tabla y otras tareas.

Así pues, se presentaron dificultades para completar la tabla 3, puesto que los estudiantes no sabían interpretar lo que se les pedía hacer, o bien, en ciertos casos, los estudiantes querían que el profesor les confirmara lo que había que hacer, puesto que les parece más factible seguir instrucciones orales a escritas. Luego de una intervención del profesor, todos los grupos completaron la tabla correctamente. Sin embargo, al escribir las dos representaciones algebraicas para el área del cuadrado negro, 4 grupos recurrieron a la técnica $\boldsymbol{\tau_{3b}}$. De esta manera, la primera expresión algebraica que los grupos determinaron para representar el área del cuadrado negro fue:

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$$

La segunda expresión algebraica resultó más difícil de determinar para todos los grupos. Se concluye que la tabla3 de la tarea2 (Ver anexos) creó confusiones en los estudiantes, pues no pudieron aplicar la técnica $\boldsymbol{\tau_{2b}}$ que se desarrolló en la tarea 1. La tabla3 no tenía un significado para los estudiantes. En cambio, la configuración con los Algebloks para cubrir el cuadrado negro si produjo significado para todos los grupos, consolidándose la técnica, pudiendo así lograr determinar la segunda expresión algebraica que representaba el área del cuadrado negro. **(fig.40)**.

Área del bloque empleado	Cantidad de Bloques	Área total
yx	2	$2yx$
y^2	1	y^2
x^2	1	x^2

A1= $2xy + y^2 + x^2$

A2= $(x+y).(x+y) = (x+y)^2$

Área del bloque empleado	Cantidad de Bloques	Área total
x^2	1	x^2
$x.y$	2	$(x.y)+(x.y)$
y^2	1	y^2

A1= $x^2 + 2xy + y^2$

A2= $(x+y).(x+y)^2 = (x+y)^2$

Fig.40 Desarrollo de la técnica τ_{4b}

Ahora bien, en cuanto a justificar la equivalencia de las dos expresiones algebraicas, solo un grupo lo pudo demostrar a través de un discurso teórico matemático riguroso. **(fig.41)**. El grupo justificó que el producto de los dos las del cuadrado (**A2**), era igual a la suma de las partes de cada bloque que conformaba el cuadrado negro (**A1**). Los demás grupos escribieron justificaciones matemáticas válidas, basándose en la manipulación de Algebloks. Por tanto, se puede afirmar que todos los grupos alcanzaron el objetivo planteado con esta tarea, aunque es necesario profundizar en el replanteamiento de la tabla3. En otras palabras, la valencia semiótica de los bloques de Algebloks utilizados en esta etapa, todavía no es aún clara para los estudiantes.

Se puede afirmar a partir de esta formula:

$$\left.(x+y)\cdot(x+y) = (x+y)^2\right\} = A_2$$

$$(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) =$$

$$= x^2 + \underbrace{xy + yx} + y^2$$

$$\left.= x^2 + 2xy + y^2\right\} A = 1$$

Fig.41 Justificación matemática de la técnica τ_{4b}

Parte 2:

Objetivo: Determinar las expresiones algebraicas que representan áreas de distintas configuraciones con Algebloks. Por tanto, se involucran polinomios de grado 2. Por medio de configurar los bloques en un “rectángulo”, los estudiantes determinan las dimensiones del largo, ancho (**τ_{3b}**).

En esta parte, se desarrolló las técnicas **τ_{2b}** y **τ_{3b}** de forma más detallada. Los estudiantes emplearon de forma adecuada los Algeblocks, para determinar las expresiones algebraicas que representaban en área de cierta configuración; por lo cual se puede afirmar que se reconoce en este momento la valencia instrumental de estos ostensivos.

En cuanto a la forma de expresar las dos expresiones algebraicas que representaban el área de cada figura, se obtuvieron distintas formas de escritura, y en algunos casos, se obtuvieron errores. **(fig.42)**. Así pues, todos los grupos lograron determinar las dos expresiones algebraicas que representaban el área de cada figura que se les propuso.

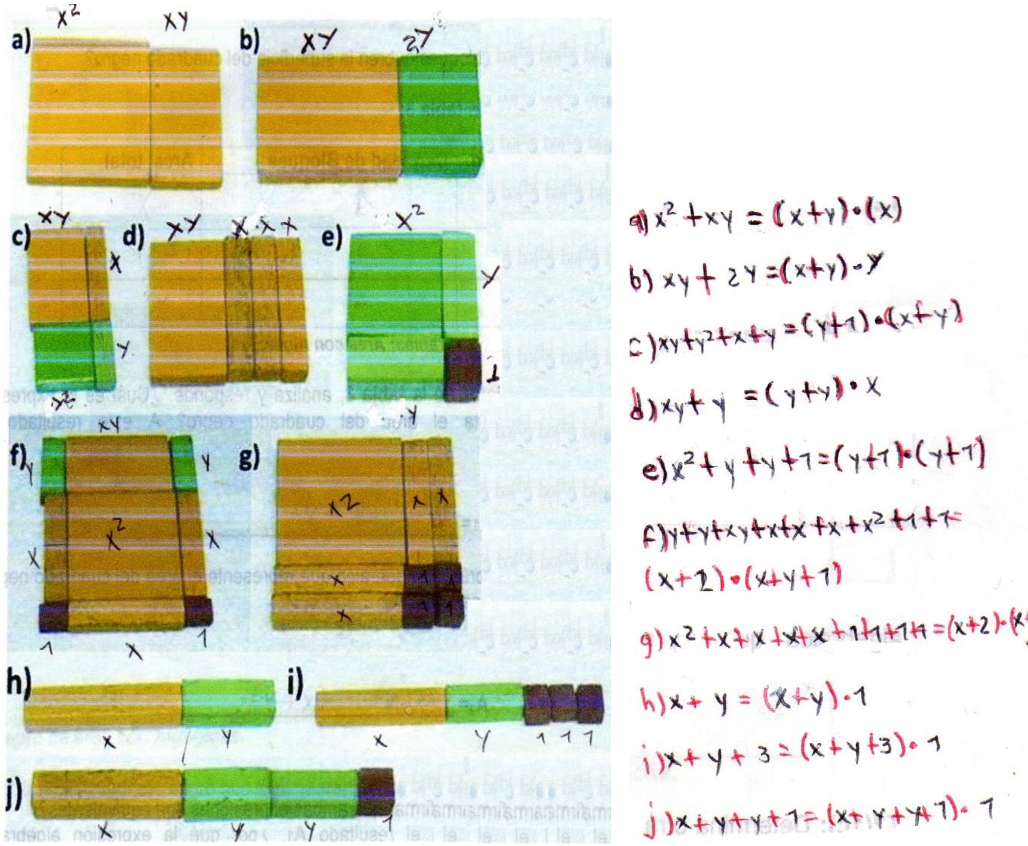


Fig.42 Desarrollo de la técnica $\boldsymbol{\tau_{1d}}$

En esta tarea, tres de cinco grupos comprendieron que los bloques x y y pueden evocar también un área. Ellos justificaron su argumento al expresar el área como un producto de la base por la altura. En este caso, la altura era la unidad 1. **(fig.43)**.

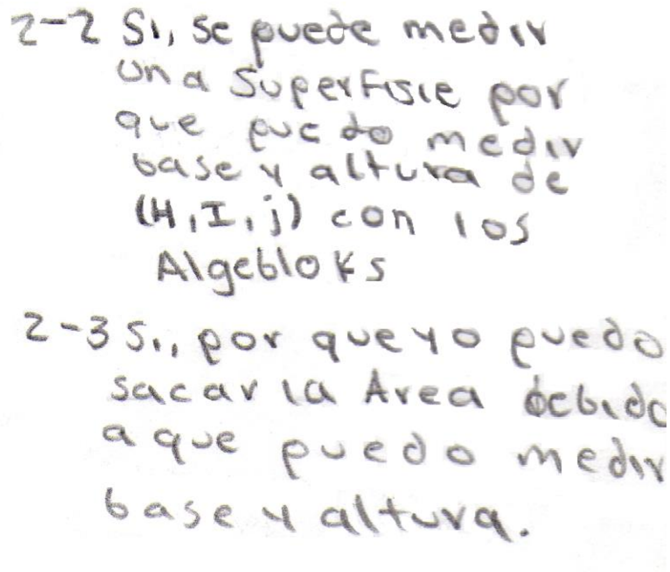

2-2 Si, se puede medir
una Superfisie por
que puedo medir
base y altura de
(H, I, j) con los
Algebloks
2-3 Si, por que yo puedo
sacar la Area debido
a que puedo medir
base y altura.

***Fig.43 Justificación de la técnica* τ_{3b}**

De esta manera, una configuración de bloques que antes evocaban una distancia, en esta tarea los estudiantes comprendieron que también puede evocar el concepto de área. De igual manera para el bloque de la unidad, los estudiantes comprendieron que el área era 1. La valencia instrumental y semiótica de los Algebloks se hace evidente con más posibilidades, puesto que en este momento no hubo dificultades para los estudiantes en reconocer que ahora pueden utilizar una mayor cantidad de bloques para determinar áreas de superficies, y de esta manera, las opciones para determinar diversas áreas con Algebloks es mucho mayor.

Así pues, se produjo la técnica $\boldsymbol{\tau_{4b}}$, **(fig.42),** la cual indica determinar dos expresiones algebraicas equivalentes para un rectángulo utilizando una mayor cantidad de bloques. A partir de esta tarea y técnica, los estudiantes se aproximan más al concepto de factorización de polinomios.

En otro punto de la tarea, se les mostró una lista de polinomios a los estudiantes. Ellos debían, por medio de los Algebloks, hallar los dos polinomios factores equivalentes al polinomio dado. El ostensivo escrito evocó rápidamente otro ostensivo, es decir, el bloque de Algebloks correspondiente. Así pues, a través del polinomio, los estudiantes determinaban cuáles y cuántos bloques eran necesarios para configurarlos en la forma de un rectángulo. A través de varios intentos, los estudiantes adquirieron técnicas en tanto a la forma de ubicar los bloques para hallar de una forma más rápida el rectángulo. Finalmente, cuando ya tenían el rectángulo configurado, determinaban la base y altura, encontrado así los dos polinomios factores del polinomio dado. En otras palabras, los estudiantes estaban factorizando polinomios de grado dos a través del uso de Algebloks, una valencia instrumental. **(fig.42)**.

Pero, con el objetivo de producir técnicas de factorización sin el uso de Algebloks, los estudiantes debían responder las preguntas restantes de esta parte de la tarea, en la cual requerían de una justificación teórica de sus técnicas.

Así pues, todos los grupos lograron comprender y producir la técnica $\boldsymbol{\tau_{1d}}$, que consiste que a partir de un polinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$, donde $\boldsymbol{a=1, b, c}$ pertenecen a los **números naturales**, encontrar con el uso de Algebloks los dos binomios factores. Pero, la técnica $\boldsymbol{\tau_{1d}}$, no permite resolver un polinomio que requiera de una cantidad de bloques que no se tenga. Es por eso, que los estudiantes debieron producir nuevas técnicas. Dos grupos lograron resolver la tarea. Como primer paso, los dos grupos realizaron trazos de los Algebloks en la hoja de papel para determinar la forma del rectángulo **(fig.44)**.

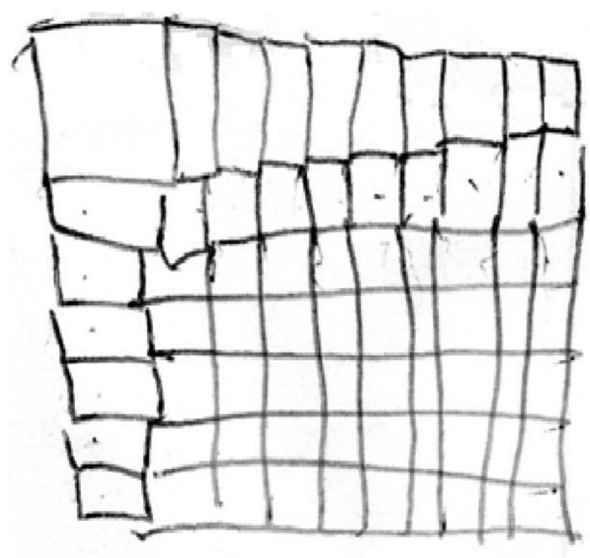


Fig.44 Inicios del desarrollo de la técnica $\boldsymbol{\tau_{1e}}$

Sin embargo, la técnica se reformó con la pregunta de la tarea: "¿Qué relación encuentras en la cantidad de bloques "***x***" y "***y***" y la cantidad de bloques unidad usados para cada polinomio?". En este caso, los mismos dos grupos produjeron la técnica $\boldsymbol{\tau_{1e}}$. De esta manera, lograron factorizar el polinomio. Además, en la tarea 5 se refuerza esta técnica $\boldsymbol{\tau_{1e}}$. La técnica $\boldsymbol{\tau_{1e}}$ determina la valencia semiótica de los Algebloks. Esto es, en un polinomio de la forma $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}$, la factorización es:

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{m}) * (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n})$$

Donde $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ pertenecen a los números enteros y $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} = \boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{m} * \boldsymbol{n} = \boldsymbol{c}$.

Por tanto, dos grupos lograron determinar que los números $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ tenían una relación con los bloques "***x***" y bloques ***unidad*** en el rectángulo configuraban. ***(fig.45, fotografías 9-12)***.

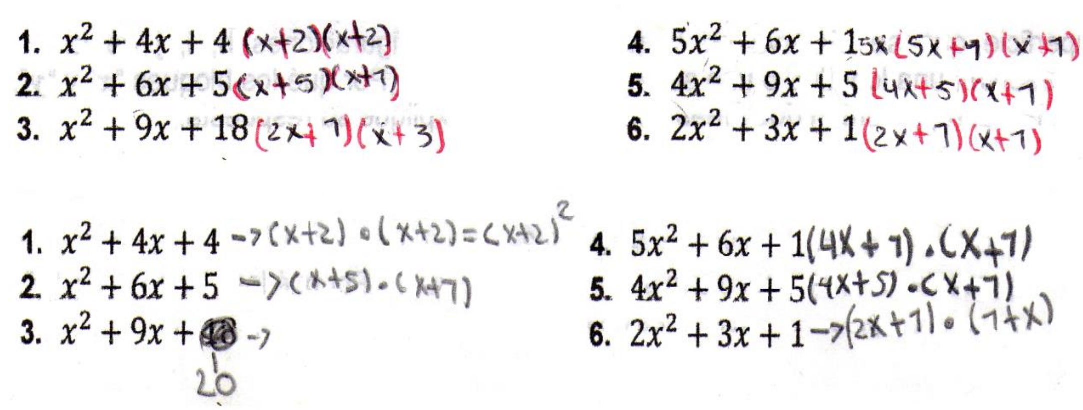


Fig.45 Desarrollo de la técnica $\boldsymbol{\tau_{1e}}$

Finalmente, el objetivo de la parte 2 se alcanzó en su gran mayoría, puesto que los estudiantes lograron encontrar dos expresiones algebraicas equivalentes. Sin embargo, la técnica $\boldsymbol{\tau_{1e}}$ se desarrolla mejor en la tarea 5. Por ahora, solo dos grupos dieron sus primeros pasos en producir nuevas técnicas para solucionar un nuevo tipo de tarea.

Tarea 3:

Parte 1:

Objetivo: El estudiante alcance a comprender que $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})^3$ no es igual a $\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{y}^3$. Así pues, por medio de la manipulación de Algebloks el estudiante determinará el resultado del cubo de la suma de un binomio.

En esta tarea, los resultados fueron muy similares a los de la parte 1 de la tarea 2. En este caso, los grupos de estudiantes debían determinar el volumen de un cubo negro hecho en cartón paja, de dos formas diferentes, es decir, encontrar dos expresiones algebraicas que representen el volumen de dicho cubo.

En este momento, al igual que en la tarea 2, surgió una dificultad en torno a incapacidad de interpretar los enunciados de la tarea por parte de los estudiantes. Así pues, se presentaron dificultades para completar la tabla 4, (ver anexos, tarea 3) puesto que los estudiantes no interpretaron el enunciado que indicaba la tarea que debían solucionar. Luego de una intervención del profesor, todos los grupos completaron la tabla correctamente. Sin embargo, al escribir las dos representaciones algebraicas para el volumen del cubo negro, solo un grupo logró hacerlo correctamente. Otros dos grupos, sólo lograron escribir una representación con la técnica $\boldsymbol{\tau_{3c}}$, que consiste determinar el volumen al multiplicar las distancias del largo, ancho y altura. De esta manera, la primera expresión algebraica que los grupos determinaron para representar el área del cuadrado negro fue:

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$$

El resto de los grupos, lograron escribir las dos expresiones algebraicas pero confundieron su orden en el espacio de la hoja donde debían responder, es decir, los estudiantes rápidamente adquirieron al técnica $\boldsymbol{\tau_{3c}}$, de esta manera la primera expresión que determinaron fue $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ y la escribieron en el espacio inadecuado **(fig.46)**. Sólo un grupo produjo la técnica $\boldsymbol{\tau_{2c}}$, que indica determinar el volumen a partir de sumar el volumen de cada bloque que conforma una caja, en este caso, de igual tamaño al cubo negro. La tabla 4 podría ayudar a desarrollar esta técnica, pero solo un grupo logró comprender y determinar la expresión algebraica a través del análisis de la tabla. Los demás grupos, requirieron de la guía del profesor y determinaron la otra expresión algebraica del volumen del cubo negro a través de la manipulación de Algebloks. **(fig.47)**.

Bloque	Cantidad de Bloques	Área de la base	Altura	Volumen de un Bloque	Volumen total
Cubo Verde.	1	y^2	y	$y \cdot y \cdot y$	y^3
Prisma Verde.	3	xy	y	$x \cdot y \cdot y$	$3xy^2$
Prisma Amarillo.	3	x^2	x	$x \cdot x \cdot y$	$3x^2y$
Cubo amarillo.	1	x^2	x	$x \cdot x \cdot x$	x^3

V1= $(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)$

V2= $y^3+3xy^2+3x^2y+x^3$

Fig. 46 Expresiones algebraicas ubicadas inadecuadamente.

Bloque	Cantidad de Bloques	Área de la base	Altura	Volumen de un Bloque	Volumen total
Cubo verde.	1	y^2	y	y^3	y^3
Prisma Verde.	3	y^2	x	$x \cdot y^2$	$3xy^2$
Prisma Amarillo.	3	x^2	y	$x^2 \cdot y$	$3xy$
Cubo amarillo.	1	x^2	x	x^3	x^3

Bloque	Cantidad de Bloques	Área de la base	Altura	Volumen de un Bloque	Volumen total
Cubo Verde.	1	y^2	y	y^3	y^3
Prisma Verde.	3	y^2	x	y^2x	$3y^2x$
Prisma amarillo.	3	x^2	y	x^2y	$3x^2y$
Cubo amarillo.	1	x^2	x	x^3	x^3

V1= $y3+(3y^2x)+(3x^2y)+(x^3)$

V2= $(x+y)^3$

Fig.47 Desarrollo de la técnica τ_{4c}

Respecto a esta tarea, la exigencia de justificar (la tecnología) la técnica de la equivalencia de las dos expresiones algebraicas - aunque solo un grupo lo pudo demostrar a través de un discurso teórico basado en la manipulación de Algebloks - se identifica que es posible escribir justificaciones matemáticas válidas, basándose en el uso de Algebloks **(fig.48)**. Otros dos grupos justificaron de manera incorrecta, puesto que no tenían un sentido argumentativo y coherente dentro de la explicación de la técnica para solucionar la tarea. **(fig.49)**. Los demás grupos, no lograron justificar su respuesta. Por tanto, se puede afirmar que es necesario profundizar en la estructura del diseño de tareas y en el replanteamiento de la ***tabla4*** en la Tarea 3. En otras palabras, la valencia semiótica en cuanto a la manipulación de bloques de tres dimensiones, en esta etapa, todavía no es clara para los estudiantes.

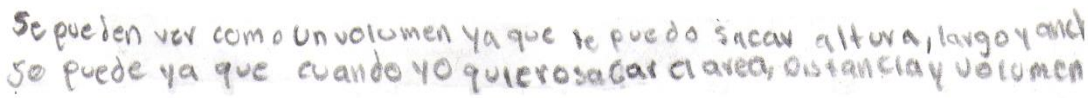

Se pueden ver como un volumen ya que te puedo sacar altura, largo y anch
Se puede ya que cuando yo quiero sacar el area, distancia y volumen

Fig.48 Justificación de la técnica τ_{3c}

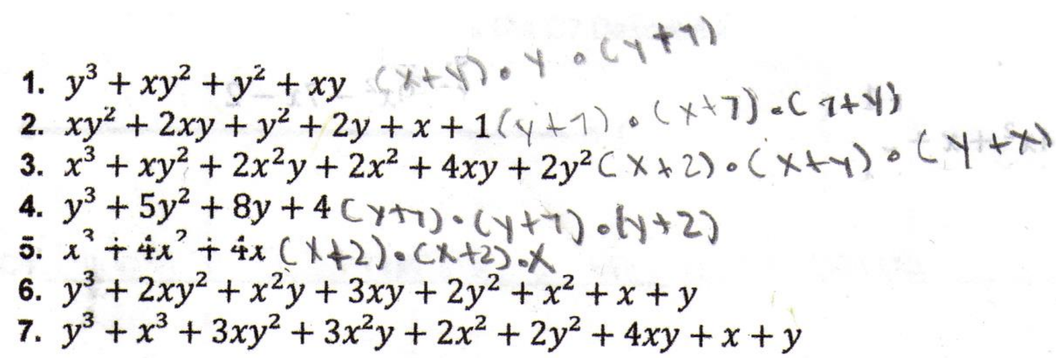

1. $y^3 + xy^2 + y^2 + xy$ (x+y)·y·(y+1)
2. $xy^2 + 2xy + y^2 + 2y + x + 1$ (y+1)·(x+1)·(1+y)
3. $x^3 + xy^2 + 2x^2y + 2x^2 + 4xy + 2y^2$ (x+2)·(x+y)·(y+x)
4. $y^3 + 5y^2 + 8y + 4$ (y+1)·(y+1)·(y+2)
5. $x^3 + 4x^2 + 4x$ (x+2)·(x+2)·x
6. $y^3 + 2xy^2 + x^2y + 3xy + 2y^2 + x^2 + x + y$
7. $y^3 + x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 2x^2 + 2y^2 + 4xy + x + y$

Fig.49 Desarrollo de la técnica τ_{2d}

Parte 2:

Objetivo: Determinar las expresiones algebraicas que representan los volúmenes de distintas configuraciones con Algebloks. Por tanto, se involucran polinomios de grado 3. Por medio de configurar los bloques en una “caja”, los estudiantes determinan las dimensiones largo, ancho y altura.

En esta parte, se desarrolló las técnicas $\boldsymbol{\tau_{2c}}$ y $\boldsymbol{\tau_{3c}}$[3] de forma más detallada. De forma general, solo dos grupos lograron adquirir la valencia instrumental de los Algebloks, puesto que utilizaron los bloques de manera eficaz para poder resolver la tarea que se les propuso.
Ahora bien, en cuanto a la forma de expresar las dos expresiones algebraicas que representaban el volumen de cada figura, se obtuvieron distintas formas de escritura, pero los errores fueron menores a comparación de la tarea dos. Se reconoce entonces un avance en el aprendizaje de los estudiantes en cuanto a la manipulación de Algebloks para resolver tipos de tareas a través de la producción y mejoramiento de nuevas técnicas **(fig.48)**. Así pues, dos grupos lograron determinar las dos expresiones algebraicas que representaban el área de cada figura que se les propuso.

En esta tarea, tres de cinco grupos comprendieron que todos los bloques de Algebloks pueden evocar también un volumen. Ellos justificaron su argumento al expresar que a cualquier bloque se le podía determinar su volumen “midiendo” el largo, ancho y su altura. De esta manera, una configuración de bloques que antes evocaban una distancia, en esta tarea los estudiantes comprendieron que también puede evocar el concepto de volumen **(fig.49)**. De esta manera, este ostensivo (Algebloks) tiene una doble valencia semiótica dependiendo del tipo de tarea propuesto. De igual manera para el bloque de la unidad, los estudiantes comprendieron que el volumen era 1. La valencia instrumental y semiótica de los Algebloks se hace evidente con más posibilidades, puesto que en este momento no hubo dificultades para los estudiantes en reconocer que ahora pueden utilizar todos los bloques para determinar volúmenes, y de esta manera, las opciones para determinar diversos volúmenes con Algebloks son mayores. Además, en esta etapa de la aplicación, los resultados permiten afirmar, en cuanto a la valencia instrumental de los bloques, que la manipulación de Algebloks para resolver tipos de tareas evoca fácilmente el concepto de “área” y “volumen”.

---

[3] $\boldsymbol{\tau_{2c}}$**:** Determinar el volumen a partir de sumar el volumen de cada bloque que conforma una caja. $\boldsymbol{\tau_{3c}}$**:** Determinar el volumen al multiplicar las distancias del largo, ancho y altura.

Así pues, se produjo la técnica $\boldsymbol{\tau_{4c}}$,[4] la cual consiste en cómo determinar dos expresiones algebraicas equivalentes que representen el volumen de una caja utilizando Algebloks. A partir de esta tarea y técnica, los estudiantes se aproximan más al concepto de factorización de polinomios, aumentando el conjunto de polinomios factorizables con Algebloks.

En otro punto de la tarea, se les mostró una lista de polinomios a los estudiantes. Ellos debían, por medio de los Algebloks, hallar los tres polinomios factores equivalentes al polinomio dado. El ostensivo escrito, es decir el polinomio, evocó rápidamente otro ostensivo, es decir, los bloques de Algebloks correspondientes. Así pues, a través del polinomio, los estudiantes determinaban cuáles y cuántos bloques eran necesarios para configurarlos en la forma de una caja. A través de varios intentos, los estudiantes adquirieron habilidades, que hacen parte de la técnica que denominamos $\boldsymbol{\tau_{2d}}$[5], **(fig.50),** en tanto a la forma de ubicar los bloques para configurar de una forma más rápida la caja. Finalmente, cuando ya tenían la caja configurada, determinaban el largo, ancho y la altura, encontrado así los tres polinomios factores del polinomio dado. En otras palabras, los estudiantes estaban factorizando polinomios de grado tres a través del uso de Algebloks. Esta afirmación resalta la valencia instrumental en la manipulación de Algebloks en este tipo de tarea.

Finalmente, el objetivo de la parte 2 se alcanzó en su gran mayoría por dos grupos, puesto que lograron encontrar dos expresiones algebraicas equivalentes para representar el volumen de cierta caja.

Tarea 4:

Objetivo: Diferenciar una ecuación de tipo 1 del tipo 2. Se estudió la situación en que un polinomio puede ser expresado como el producto de dos o más polinomios.

---

[4] $\boldsymbol{\tau_{4c}}$**:** Consiste en determinar volúmenes con dos expresiones algebraicas a través de las técnicas $\boldsymbol{\tau_{2c}}$ **y** $\boldsymbol{\tau_{3c}}$.

[5] $\boldsymbol{T_{2c}}$: Consiste en determinar tres expresiones algebraicas equivalentes que sean factores de un polinomio inicial utilizando Algebloks al formar una caja de tres dimensiones.

En esta tarea, los grupos lograron configurar los bloques correspondientes al polinomio dado en un rectángulo o caja y determinar los dos o tres polinomios factores. Posteriormente, uno de todos los grupos logró determinar el producto de estos dos o tres polinomios mediante el algoritmo de la multiplicación de polinomios. Sin embargo, ningún grupo pudo comprender porque este resultado era diferente al polinomio inicial. De esta manera, la diferenciación de los tipos de ecuaciones no fue evocada por medio de esta tarea para los estudiantes. Se hace necesario desarrollar tareas que involucren la multiplicación de dos o más polinomios.

Tarea 5:

Parte 1:

Objetivo: Factorizar polinomios de grado ***n*** mayor a tres sin utilizar Algebloks.

Uno de los cinco grupos logró factorizar los cinco polinomios de grado ***n*** mayor a tres que se propusieron en la tarea. Para esto, el grupo produjo la técnica que permitió resolver esta área, que denominaremos $\boldsymbol{\tau_{1f}}$, que incluye los siguientes pasos:

El grupo comprendió que podían transformar un polinomio de grado ***n*** mayor a tres a un polinomio de grado 3 o 2 al restar una constante a todos los exponentes de la variable del polinomio[6]. De esta manera, podían factorizar con Algebloks estos polinomios. Luego, le aumentaban un factor "***x***" con el exponente igual a la constante que le restaron al inicio. **(fig.50)**. Esto es:

Los estudiantes debían factorizar el polinomio $\boldsymbol{x^4+4x^3+4x^2}$, teniendo en cuenta la factorización de los dos polinomios $\boldsymbol{x^3+4x^2+4x}$ y $\boldsymbol{3x^2+4x+4.}$ El grupo reconoció una relación matemática en los exponentes del polinomio. De esta manera, factorizaron el polinomio de grado 2 y 3, y la técnica permitió fácilmente descubrir que aumenta un factor "***x***" por cada unidad que aumentaban los exponentes de la variable "***x***". **(fig.50)**.

[6] $\boldsymbol{\tau_{1f}}$: Transformar un polinomio de grado ***n*** mayor a tres a un polinomio de grado 3 o 2 al restar una constante a todos los exponentes de la variable del polinomio.

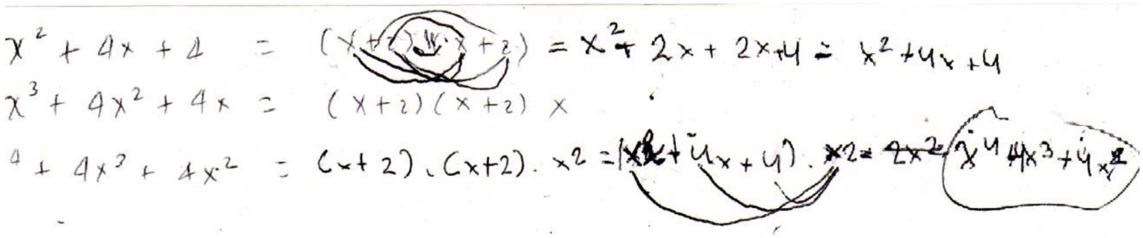


Fig.50 Desarrollo de la técnica τ_{1f}

Así pues, con la misma técnica, el grupo logró factorizar los 4 polinomios siguientes que proponía la tarea. Por tanto, se puede afirmar que la manipulación con Algebloks bajo un diseño de tareas específico, logró producir técnicas para factorizar un conjunto específico de polinomios de grado n mayor a 3 sin el uso de Algebloks al identificar un factor común. Es necesario aclarar, que los polinomios de grado n mayor a tres propuestos a los estudiantes no fueron escogidos al azar, por lo que el conjunto de polinomios de grado n mayor a tres que los estudiantes lograron factorizar es restringido. Finalmente, el objetivo en esta parte de la tarea se cumplió para sólo un grupo de los cinco grupos de estudiantes.

Parte 2:

Objetivo: Que el estudiante factorice polinomios de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$, donde $\boldsymbol{a,b,c}$ pertenecen a los **números racionales**, sin utilizar Algebloks. Así mismo, polinomios donde se pueda identificar un factor común.

Para el caso del polinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$, donde $\boldsymbol{a=1,b,c}$ pertenecen a los **números naturales**, ningún grupo fue capaz de resolverlo sin el uso de Algebloks. La técnica, que nunca se produjo en los estudiantes, para resolver esta tarea se denomina $\boldsymbol{\tau_{2e}}$. Por tanto, se afirma que se requiere de más tiempo de trabajo con los estudiantes para lograr desarrollar técnicas a lápiz y papel para factorizar este tipo de polinomios.

Análisis de resultados general:

De esta manera, podemos afirmar que las técnicas producidas por los estudiantes a través del Diseño de Tareas soportan la construcción de una praxeología local. Retomemos la afirmación de Bosch (2001):

> La TAD establece una marcada distinción entre las organizaciones matemáticas puntuales, construidas a partir de un único tipo de problemas, en las que las técnicas se utilizan de manera rígida y el entorno tecnológico acostumbra ser muy pobre, de las organizaciones “locales”, que se obtienen articulando ente sí - por vía de un discurso tecnológico elaborado – distintas organizaciones puntuales. (p.18).

Entenderemos nuestra praxeología local, como el conjunto de distintas organizaciones puntuales, es decir, un conjunto de diversos tipos de tareas. En la (**fig.33**) se observa un abanico de técnicas que permitieron resolver no un único tipo de tareas, si no diversos tipos de tareas, cuyas técnicas son clasificados con los literales ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e***, y ***f,*** produciendo así una organización o praxeología local; que permite resolver tipos de tareas que involucran el concepto de distancia, área y volumen, representaciones con expresiones algebraicas, factorización de polinomios de grado 2 y 3.

Además, de todas las técnicas producidas bajo el diseño de tareas, las que permiten dar una respuesta a la pregunta de investigación, son las que contienen los literales ***e*** y ***f***, ya que son las técnicas que lograron resolver tipos de tareas que involucraban la factorización de polinomios de grado 2, 3 y mayor a 3 “**sin**” el uso de Algebloks. Sin embargo, el conjunto de polinomios que los estudiantes lograron factorizar tiene restricciones. Este tipo de polinomios son aquellos donde se pueda determinar un factor común $\boldsymbol{x^n}$**,** con ***n*** perteneciente a los números naturales; y el otro factor sea un polinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$**.** En la **fig.33** la técnica $\boldsymbol{\tau_{2e}}$ se encuentra de un tono transparente debido a que en el diseño de tareas no se produjo.

Ahora bien, recordemos la pregunta de investigación:

¿De qué manera el uso de los Algebloks, posibilita o limita el aprendizaje de la factorización de polinomios de grado mayor o igual a tres?

Bajo el diseño de tareas de este trabajo y las condiciones institucionales que surgieron para la aplicación de dicho diseño, las limitaciones para el aprendizaje de la factorización de polinomios de grado mayor o igual a tres radican en sus restricciones, puesto que el conjunto de polinomios que en este trabajo se logró factorizar es limitado. El uso de Algebloks posibilita la factorización de este tipo de polinomios en cuanto a las técnicas que se produjeron, puesto que las tareas propuesta permitieron, en algunos grupos, alcanzar una tecnología (justificación de la técnica) adecuada en la que el discurso matemático es coherente. Este discurso matemático basado en un contenido teórico matemático involucró conceptos geométricos, como Distancia, Área, Volumen, (**fig. 43 y 48**); y conceptos algebraicos, como polinomio, expresión algebraica, factorización, (**fig.41**).

Recomendaciones:

En cuanto al uso del paréntesis en los ostensivos que se evocaron en lápiz y papel, se detectó la carencia de una justificación para los estudiantes. Parece que para los estudiantes el uso del paréntesis no requiere una justificación alguna. De igual manera, se hace necesario que el profesor desarrolle actividades que lleven a la reflexión de este ostensivo, ya que su uso se asume institucionalmente. De esta manera, las PM resultan incompletas dada la carencia de las justificaciones para el empleo de las técnicas o la validación de ellas.

Se recomienda ampliar el diseño de tareas con el objetivo de disminuir las limitaciones en cuanto a la factorización de polinomios de grado mayor a tres.

5. CONCLUSIONES

El diseño de tareas con el uso de Algebloks, en el tiempo establecido que la institución brindó y bajo todas las condiciones sociales presentadas, permitió desarrollar las técnicas para la factorización de polinomios específicos de grado 2 y 3, aunque frente a los tipos de tareas en los que no es posible resolver con los Algebloks, como polinomios de grado mayor a 3, las técnicas son limitadas. Es necesario otro tipo de actividades que no involucren el uso de Algebloks para desarrollar estas técnicas, así como la reflexión frente a mejoras en el diseño de tareas con Algebloks.

En el caso de la factorización de polinomios de grado igual a 3 con el uso de Algebloks, se observó facilidad al factorizar por parte de los estudiantes, ya que sin el uso de Algebloks, las técnicas a lápiz y papel que permitían factorizar dichos polinomios, son complicadas. De esta manera, el diseño de actividades con Algebloks permitió factorizar con gran facilidad polinomios de grado "igual" a 3.

Para la comprensión de concepto desde la TAD y procedimientos matemáticos, en este caso, en la factorización de polinomios utilizando el material manipulativo Algebloks, se deduce que se requiere de más tiempo en comparación a una clase magistral. Sin embargo, el diseño de tareas con el uso de Algebloks involucra más a los estudiantes con un mayor interés y, por tanto, están más dispuestos a aclarar más dudas.

En cuanto a la valencia semiótica, se puede afirmar que las tareas con Algebloks lograron evocar eficazmente los conceptos de Volumen, Área y Distancia en relación con representaciones algebraicas. Además, fue posible lograr justificaciones y explicaciones de las técnicas utilizadas por los estudiantes para solucionar las tareas. En cuanto a la valencia instrumental, los Algebloks, como objetos ostensivos, se adecuaron como instrumentos en la actividad matemática, es decir, en el desarrollo de las tareas. Las manipulaciones de los Algebloks para construir rectángulos o cajas permitieron ubicar su valencia instrumental.

Los estudiantes alcanzaron a construir en el marco de una estructura matemática discursos justificativos bajo una teoría matemática, es decir, las explicaciones de las técnicas fueron acorde con propiedades algebraicas y geométricas correspondientes a los estándares especificados para el grado octavo. Algunos expresaron sus explicaciones bajo algoritmos que describían procedimientos algebraicos (**fig.41**) y otros bajo enunciados coherentes que se argumentaban en concepciones y propiedades geométricas (**fig.43 y 48**).

6. REFERENCIAS

Ardila, J. (2009). Geometría y Factorización. *Memorias del IX congreso de encuentro de matemática educativa.* Valledupar: Universidad Popular del Cesar.

Arrieta, M. (1998). Medios materiales en la enseñanza de la matemática. *Revista de Psicodidáctica,* (*5*), 107-114.

Bosch, M. (2001). Un punto de vista Antropológico: la Evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad matemática. *Memorias del cuarto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática.* (pp. 15-28)

Camacho M, Hernández J, Socas M. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria*. Revista interuniversitaria de formación del profesorado*. (32), 73-86.

Camargo, L; García, G; Leguizamón, C; Samper; Carmen & Serrano, C. (2002) Alfa 8. Bogotá: Editorial Norma.

Cardoso E & Hernández N. (2009). Desarrollo del pensamiento algebraico a través del uso de Algebloks. *Memorias del X Congreso Nacional de Investigación Educativa.* (pp. 1-12). Veracruz.

Castellanos, M &Obando, J. (2009). Errores y dificultades en procesos de representación: El caso de la generalización y el razonamiento algebraico. *Memorias del X congreso Encuentro de Matemática Educativa.* (pp. 12-13). Pasto: Universidad de Nariño.

Chica, N. (2011). *Propuesta de intervención pedagógica para comprender el significado del número entero.* Tesis de Maestría en enseñanza de ciencias exactas y naturales. Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, Colombia.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano.* (M, Vega Trad.) Merlín I.D, Cali, Colombia. (Trabajo original publicado en 1995).

Fonseca & Gascón J. (2000). *Integración de praxeologías puntuales en una praxeología matemática local. La derivación de funciones en Secundaria1*. Comunicación presentada en el IV Simposio de la SEIEM celebrado en Huelva.

Gómez C, Mosquera S & Soto F. (2005). La caja de polinomios. Cali, Colombia. Universidad del Valle.

Gómez J. (s.f). *La hibridación de saberes en la escuela.* Bogotá, Colombia. Universidad Pedagógica Nacional.

Hernández J; Muñoz M; Palarea M. M; Ruano R; Socas M. M. (2008). *Materiales manipulativos para la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en la educación Obligatoria, (pp. 115-145).*

Lovell, K. (1999). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños.* (Séptima Edición). Madrid, España: Ediciones Morata S.L

Mejía, M. (2004). *Análisis didáctico de la factorización de las expresiones polinómicas cuadráticas.* Trabajo de Grado de Licenciatura, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

MEN (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Ministerio de Educación Nacional. Colombia.

Morales I & Sepúlveda A. (2006). Propuesta para la enseñanza de la factorización en el curso de álgebra. *Memorias del XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas.* (pp.1-8). Michoacán: UMSNH.

Nieves, E. (2012). *Implementación de estrategias constructivistas en la enseñanza del álgebra, que fomenten el desarrollo de la función neurocognitiva automonitoreo, como un estudio de caso en la sección 20 del grado octavo de la educación básica de la i. e inem "josé félix de restrepo".* Tesis de Maestría de la facultad de ciencias, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, Colombia.

Picciotto H. & Wah A. (1994). *Algebra.* Teacher's Edition. California, United States: Creative Publications.

Resnick L. y Ford W. (1990). *La enseñanza de la matemática y sus fundamentos psicológicos*. Paidós.

Socas, R. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid, España: Síntesis.

Socas, R, (2007). *Dificultades y errores en e aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico, p*p. 19-52.

Uriel M. (2009). Álgebra geométrica mediante cubos. *Memorias del IX congreso de encuentro de matemática educativa.* Valledupar: Universidad Popular del Cesar.

Vallejo, F. (2009). Didáctica del álgebra: Área. *Revista Digital de Ciencia y Didáctica. (*22), 141-151.

ANEXOS

ANEXO 1: TAREAS

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

TAREA 1

Profesor: Gilberto Rubio Espinosa.

Colegio Parroquial Santiago Apóstol.
Grado 8°:
Estudiantes: ____
____
____

Parte 1:

Conociendo los Algebloks.

Observa la figura:

El punto A es un lugar del colegio donde se encuentra una persona que desea llegar hasta su casa que se encuentra en el punto B. Se desea conocer la longitud del punto A al B, pero no se tiene regla y sólo contamos con Algebloks que se te facilitan.

T1(1a) ¿Es posible determinar tres o mas configuraciones que permitan representar y completar la distancia desconocida de A a B? Describe las configuraciones.

AB= ____

Luego de que la persona llega a casa, desea dirigirse al trabajo que se encuentra en el punto C. ¿Es posible determinar tres o mas configuraciones que permitan representar y completar la distancia desconocida de B a C? Describe las configuraciones.

B  C

BC= _______________________________________

T1(1b) ¿Cuáles son los bloques más adecuados para representar las distancias anteriores? ¿Cuál es la configuración que permite representar y completar las dos distancias anteriores? Compara las respuestas con otros dos grupos.

AB= ______________________________________ y

BC= _____________________________________

Es necesario establecer un acuerdo para representar la distancia ocupada por el/los bloque(s) utilizados para determinar las longitudes entre los puntos AB y BC; con el propósito de simplificar la escritura de las respuestas. Luego de llegar a un acuerdo, escribimos las distancias con las representaciones acordadas:

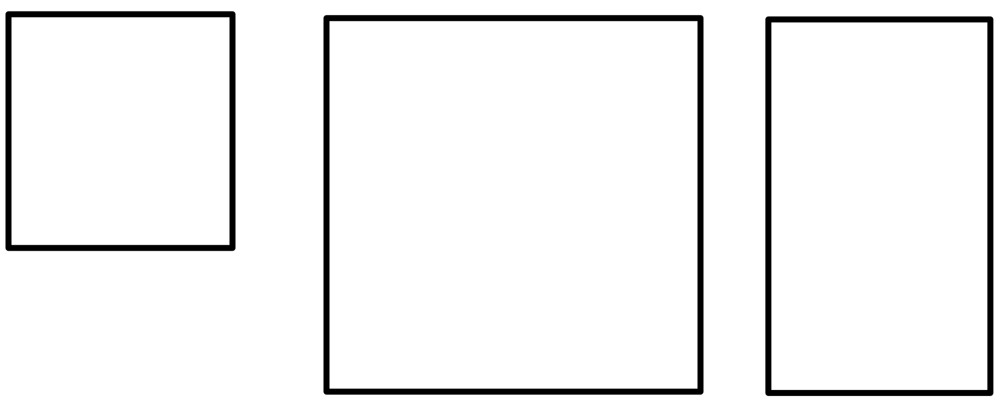
AB= ____________________________

BC= ______________________________

T1(1c) Usando las representaciones acordadas, ¿Cuál es la distancia total que la persona recorrió desde el colegio hasta su lugar de trabajo?

AC= _______________________________

T1(2a) Identifica cuál es el bloque mas adecuado que permite cubrir cada recuadro. ¿Cuál es el área de cada recuadro?

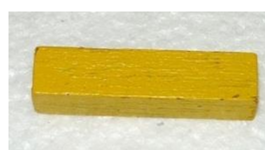
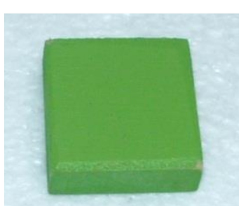
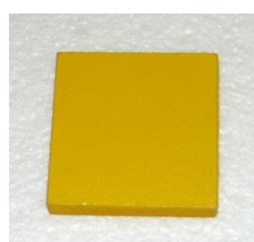


T1(2b) Utiliza el menor número de bloques adecuados para cubrir el recuadro.

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área del recuadro?

T1(3) Identifica los bloques de mayor tamaño en los Algebloks. ¿Cómo determino y cuál es la representación algebraica del volumen de esos bloques?

Ahora, registra en la **tabla 1** como se indica en dicha tabla, la expresión algebraica que representa longitud, área o volumen según el bloque correspondiente.

Bloque	**Expresión algebraica**	**Bloque**	**Expresión Algebraica**
	**Longitud**		**Longitud**
	**Área**		**Área**

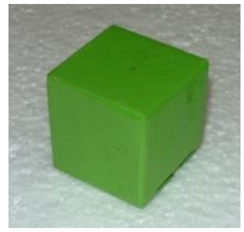
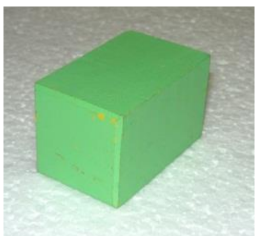
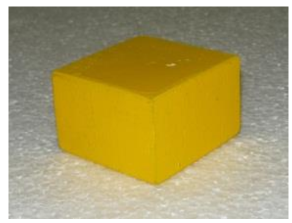
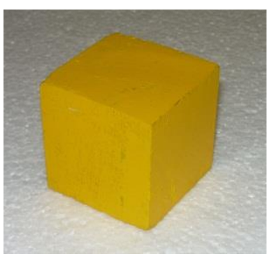
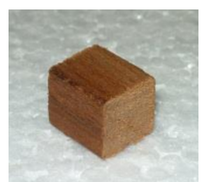
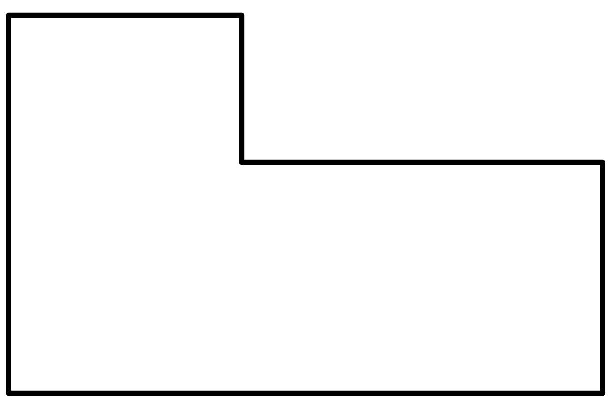
	**Área**		**Volumen**
	**Volumen**		**Volumen**
	**Volumen**		

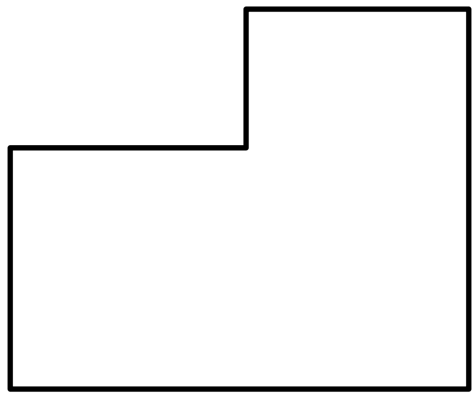
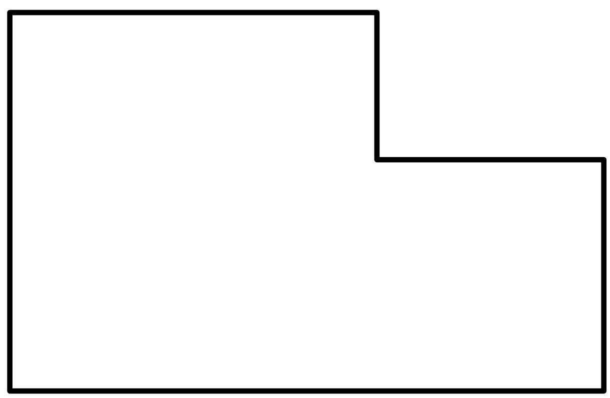
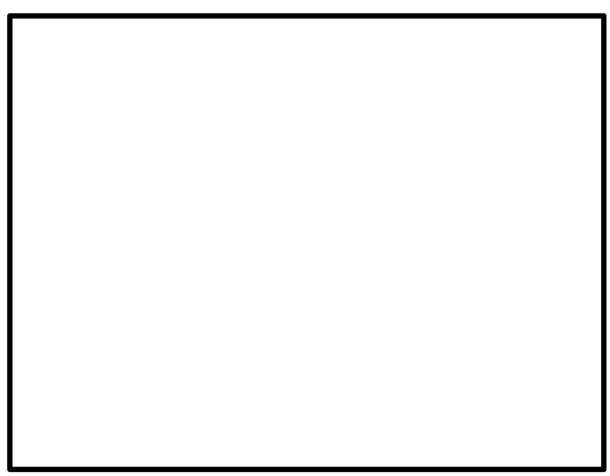
Tabla 1: Expresiones algebraicas de Algebloks

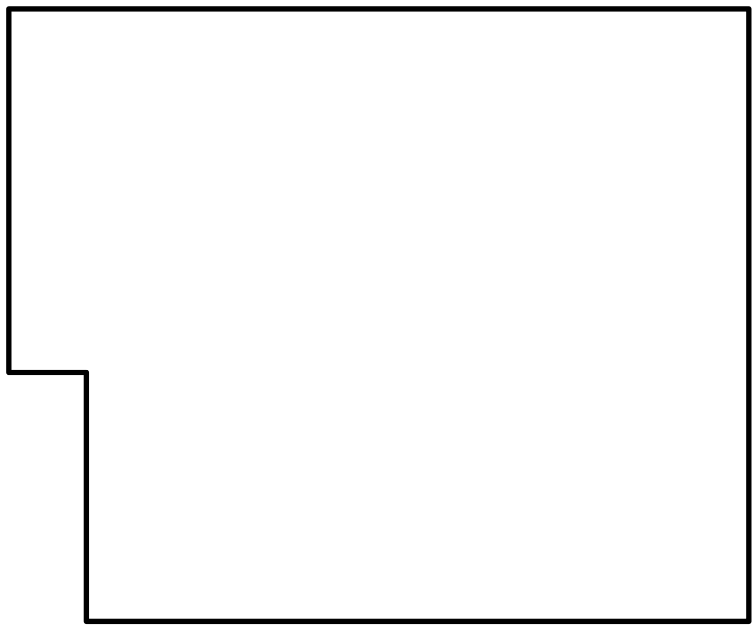
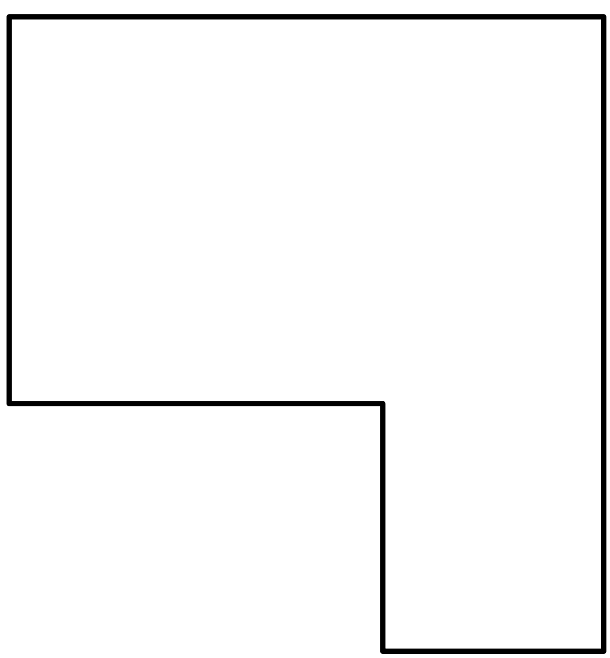
Parte 2:

Representación de polinomios con Algebloks.

La **tabla 2** contiene dos columnas. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de los recuadros, la distancia de los segmentos, y el volumen de la imagen con Algebloks, que se observa en la tabla 2?

Recuadros	Expresión Algebraica
	
	
	

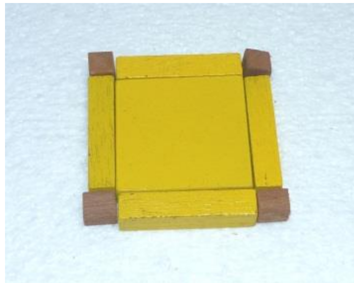
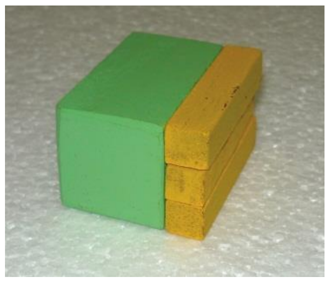
	
	

Tabla 2: Representación de polinomios con Algebloks.

TAREA 2

Parte 1:

Concepto de área con Algebloks.

La **(fig.1)** es un cuadrado negro que encontrarán en los bloques de Algebloks.

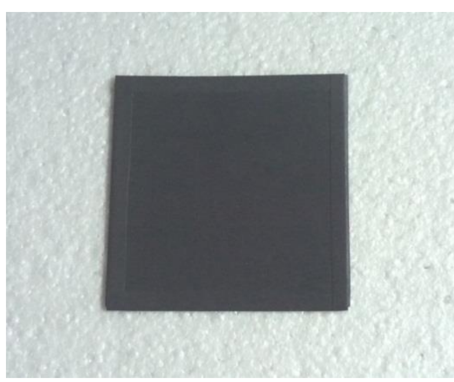


Fig.1 Cuadrado negro.

T2(1a) ¿Cuáles y cuántos bloques cubren la superficie del cuadrado negro?

Registra los resultados en la **tabla 3:**

Área del bloque empleado	Cantidad de Bloques	Área total

Tabla3: Área con Algebloks.

T2(1b) A partir de los datos de la **tabla 3**, analiza y responde: ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área del cuadrado negro? A este resultado lo denominaremos $\mathbf{A_1}$.

$\mathbf{A_1}$**=** ______________________________

T2(1c): Determina otra expresión algebraica que represente el área del cuadrado negro. A este resultado lo denominaremos $\mathbf{A_2}$.

$\mathbf{A_2}$**=** _____________________________

Analiza y responde:

a. ¿Por qué se puede afirmar que ambas expresiones son equivalentes?

b. Teniendo en cuenta el resultado $\mathbf{A_1}$, ¿por qué la expresión algebraica $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2$ no es igual a $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2$? Utiliza los Algebloks para justificar la respuesta.

Parte 2:

Calculando áreas.

T2(2): ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área para cada superficie que se observa en la **(fig.2)**? ¿Cuál son las dos formas de representar el área para cada superficie que se observa en la **(fig.2)**? ¿Las configuraciones h, i, j de la **(fig.2)** representan una longitud o una superficie? ¿Por qué? ¿Por qué los bloques "x" y "y", en esta tarea, representan dos áreas desconocidas? Explique su respuesta.

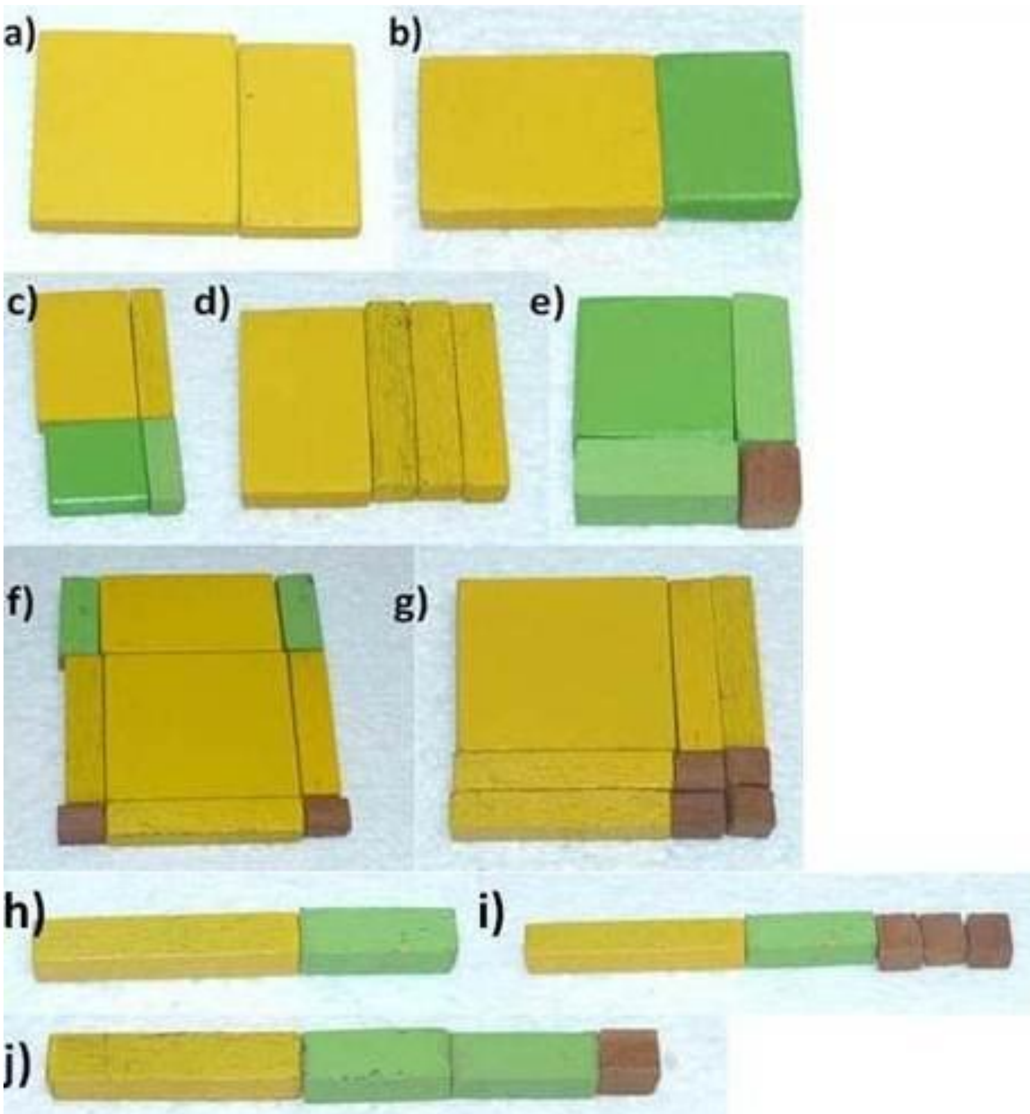


Fig.2: Actividad con superficies con Algebloks.

T2(3): Cada uno de los siguientes polinomios representan áreas de superficies rectangulares. Para cada polinomio dado, ¿Cuáles son los dos polinomios que al multiplicarlos obtengo el polinomio dado? ¿Qué relación encuentras en las configuraciones obtenidas con Algebloks?¿qué relación encuentras en la cantidad de bloques "$\boldsymbol{x}$" y "$\boldsymbol{y}$" y la cantidad de bloques unidad utilizados para cada polinomio?

1. $x^2 + 4x + 4$
2. $x^2 + 6x + 5$
3. $x^2 + 9x + 18$
4. $5x^2 + 6x + 1$
5. $4x^2 + 9x + 5$
6. $2x^2 + 3x + 1$
7. $3x^2 + 7x + 4$
8. $2x^2 + 6x + 4$
9. $2x^2 + 8x + 8$
10. $3x^2 + 8x + 4$
11. $x^2 + 17x + 72$
12. $9x^2 + 9x + 2$

T2(4): ¿Por qué no es posible construir un rectángulo o superficie para el polinomio $\boldsymbol{2x^2 + 3x + 4}$ y cómo determinar otra expresión algebraica equivalente a este polinomio dado?

TAREA 3

Parte 1:

Concepto de volumen con Algebloks.

La (**fig.3)** es un cubo negro que encontrarán en los bloques de Algebloks.

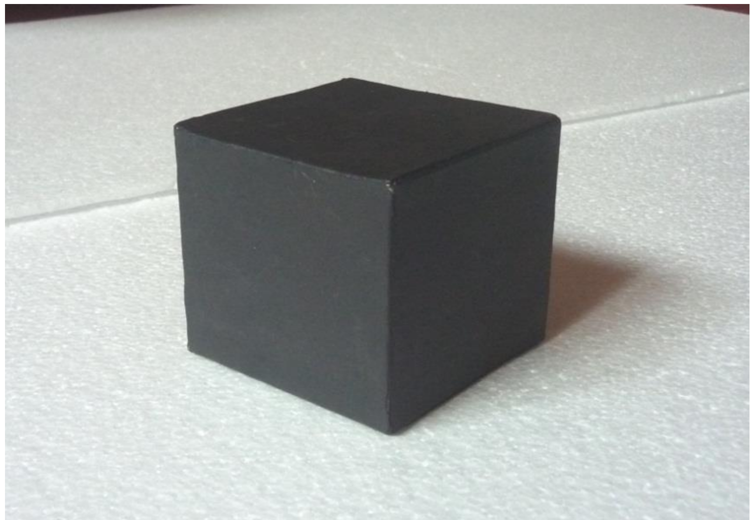


Fig.3 Cubo negro.

T3(1a) ¿Cuáles y cuántos bloques forman una caja de igual volumen al cubo negro?

Registra los resultados en la **tabla 4.**

> ***Nota: La columna "área de la base" se completa teniendo en cuenta que la "base" del bloque sea un cuadrado.***

Bloque	**Cantidad de Bloques**	**Área de la base**	**Altura**	**Volumen de un Bloque**	**Volumen total**
Cubo Verde.					
Prisma Verde.					
Prisma Amarillo.					
Cubo amarillo.					

Tabla 4: Volumen con Algebloks.

T3(1b) A partir de los datos de la **tabla 4**, analiza y responde: ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el volumen del cubo negro? A este resultado lo denominaremos $\mathbf{V_1}$.

V_1= ______________________________

T3(1c): Determina otra expresión algebraica que representa el volumen del cubo negro. A este resultado lo denominaremos **V_2**.

V_2= _____________________________

Analiza y responde:

a. ¿Por qué se puede afirmar que ambas expresiones son equivalentes?

b. Teniendo en cuenta el resultado **V_1**, ¿por qué la expresión algebraica $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^3$ no es igual a $\boldsymbol{x}^3+\boldsymbol{y}^3$? Utiliza los Algebloks para justificar la respuesta.

Parte 2:

***Calculando volúmenes*.**

T3(2a): ¿cuál es el volumen para cada caja que se observa en la **(fig.4)**? ¿Cuál son las dos formas de representar el volumen para cada caja que se observa en la **(fig.4)**? ¿Son iguales?

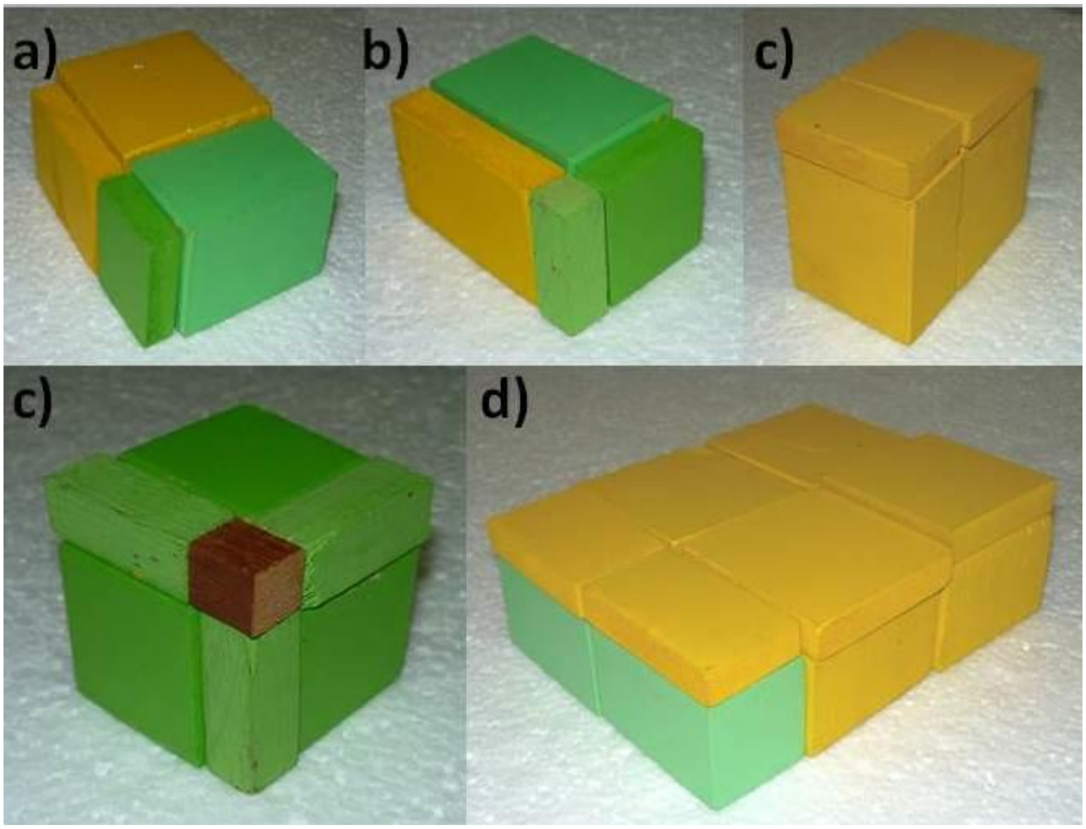


Fig.4: Actividad con cajas con Algebloks.

T(2b): ¿Por qué los bloques “$\boldsymbol{x}$” y “$\boldsymbol{y}$”, en esta tarea, representan dos volúmenes desconocidos? ¿Por qué los bloques “$\boldsymbol{x}^2$”, “$\boldsymbol{y}^2$” y $\boldsymbol{xy}$**,** en esta tarea, representan dos volúmenes desconocidos? ¿Por qué y en qué momentos el bloque unidad puede verse como una distancia de longitud 1, una superficie de área 1, o una caja de volumen 1?

T3(3): Cada uno de los siguientes polinomios representan volúmenes de cajas. Para cada polinomio dado, ¿Cuáles son los tres polinomios que al multiplicarlos obtengo el polinomio dado?

1. $y^3 + xy^2 + y^2 + xy$
2. $xy^2 + 2xy + y^2 + 2y + x + 1$
3. $x^3 + xy^2 + 2x^2y + 2x^2 + 4xy + 2y^2$
4. $y^3 + 5y^2 + 8y + 4$

5. $x^3 + 4x^2 + 4x$
6. $y^3 + 2xy^2 + x^2y + 3xy + 2y^2 + x^2 + x + y$
7. $y^3 + x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 2x^2 + 2y^2 + 4xy + x + y$
8. $6xy^2 + 2y^3 + 2y^2 + 6x^2y$

TAREA 4

T4(1): ¿Qué sucede al multiplicar los dos polinomios obtenidos al factorizar el polinomio $\mathbf{3x^2 + 2y^2 + 4xy + 2x + 4y}$? ¿Por qué? ¿Cuáles otras configuraciones y polinomios se pueden obtener?

T4(2): ¿Qué sucede al multiplicar los tres polinomios obtenidos al factorizar el polinomio $\mathbf{2y^3 + xy^2 + 4x^2y + 2y^2 + 2xy}$? ¿Por qué? ¿Cuáles otras configuraciones y polinomios se pueden obtener?

TAREA 5

T5(1): En tareas anteriores, el polinomio $\mathbf{x^3 + 4x^2 + 4x}$ se factorizó utilizando Algebloks. ¿Qué relación encuentras en la factorización de este polinomio y la factorización de $\mathbf{3x^2 + 4x + 4}$ utilizando Algebloks? A partir de tu respuesta, factoriza el polinomio $\mathbf{x^4 + 4x^3 + 4x^2}$.

T5(1b): Sin utilizar Algebloks, factoriza los siguientes polinomios:

1. $2x^5 + 5x^4 + 3x^3$.
2. $y^5 + 4y^4 + 4y^3$.
3. $x^4 + 3x^3 + 2x^2$.
4. $2x^4 + 3x^3y + x^2y^2$.

T5(2): Sin usar Algebloks, ¿Cuál es la factorización de los siguientes polinomios?

1. $x^2 + 2x + 1$
2. $x^2 - x - 6$
3. $x^2 + 7x - 18$
4. $5x^2 + 4x + 1$
5. $4x^2 + x + 5$
6. $2x^2 + 6x + 4$
7. $2x^2 + 15x - 8$
8. $3x^2 - 11x - 4$
9. $x^2 + 20x + 75$
10. $9x^2 - 7x - 2$

ANEXO 2: FOTOGRAFÍAS

Foto1: Realizando la Tarea 1.

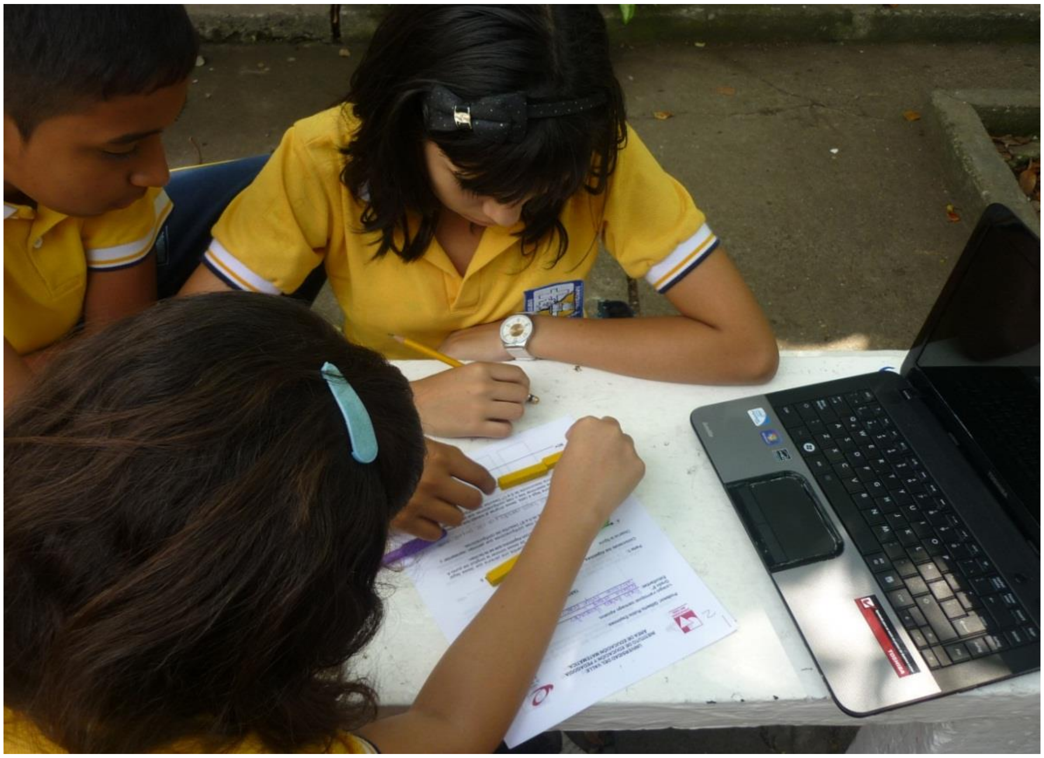


Foto2: Realizando la Tarea 1.

Foto3: Realizando la Tarea1.

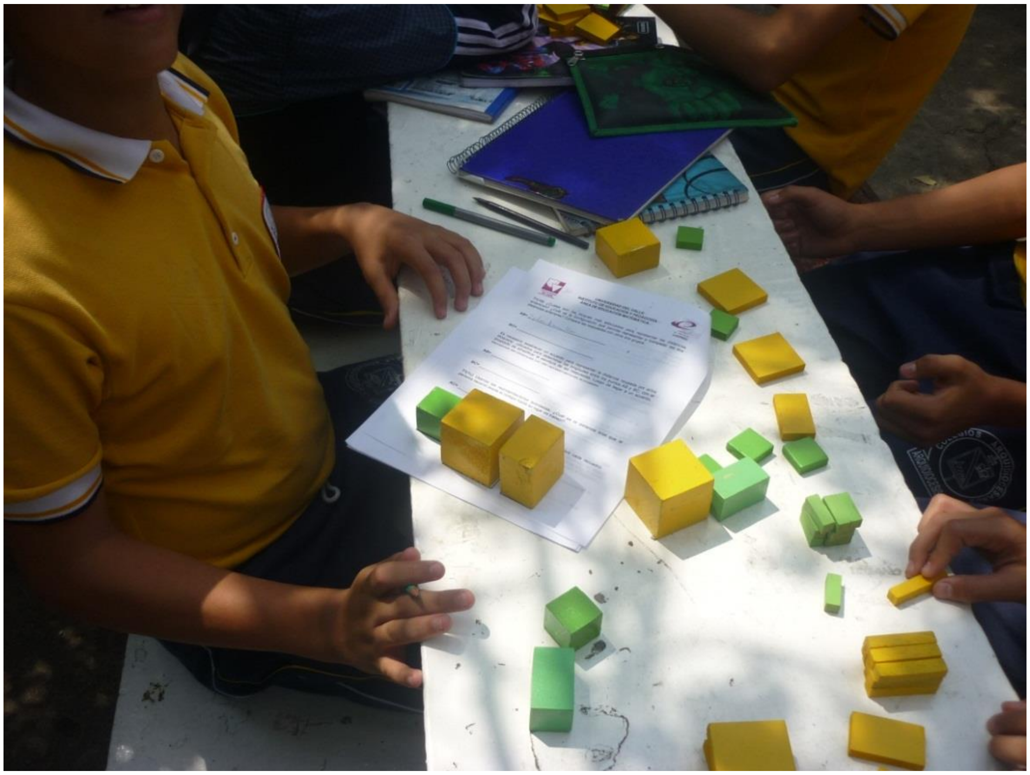


Foto3: Realizando la Tarea 1.

Foto4: Realizando la Tarea 1.

Foto5: Realizando la Tarea 1.

Foto6: Realizando la Tarea 2.

Foto7: Realizando la Tarea 2.

Foto8: Realizando la Tarea 2.

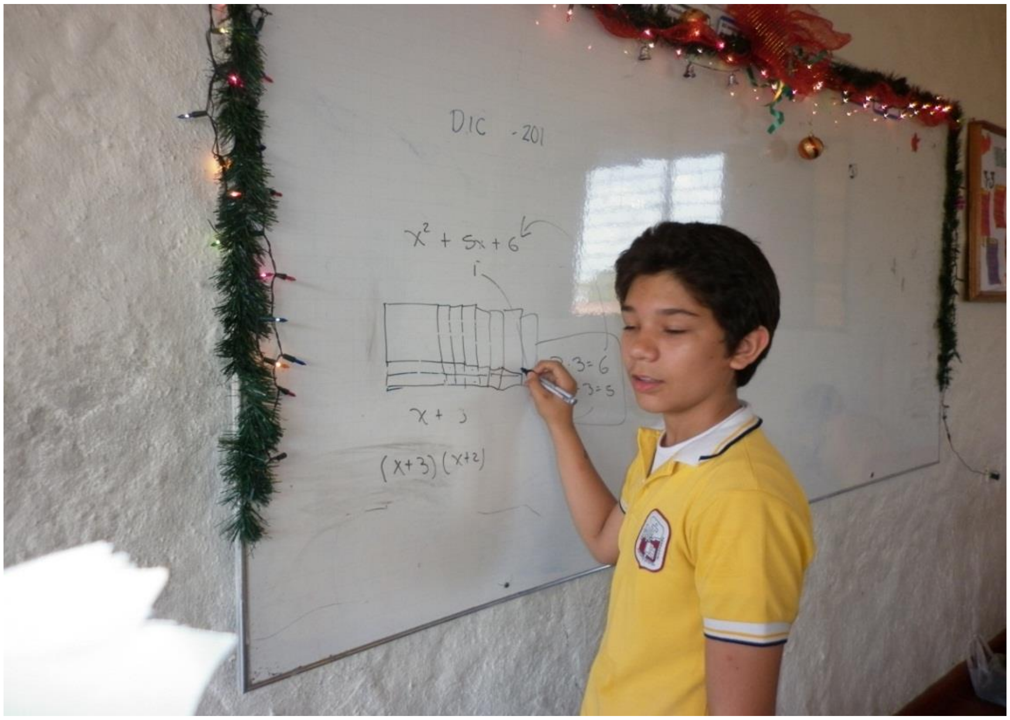


Foto9: Realizando la Tarea 2.

Foto10: Realizando la Tarea 2.

Foto11: Realizando la Tarea 2.

Foto12: Realizando la Tarea 2.

Foto13: Realizando la Tarea 3.