FUNCIONES RACIONALES EN EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO VARIACIONAL

Ronald Andrés Noreña Gallego

Código 0635005

UNIVERSIDAD DEL VALLE

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas y Física (3487)

Santiago de Cali

2013

FUNCIONES RACIONALES EN EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO VARIACIONAL

Ronald Andrés Noreña Gallego

Código 0635005

Trabajo realizado para optar al título de licenciado en Matemáticas y Física en el año 2013

Directora

Mg. María Cristina Velasco Narváez

UNIVERSIDAD DEL VALLE

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas y Física (3487)

Santiago de Cali

2013

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: 1. Marque con una **X** la opción escogida.
2. diligencie el formato con una letra legible.

Título del Trabajo:	Funciones racionales en el desarrollo del pensamiento variacional.
Se trata de:	Proyecto [ ] Informe Final [X]
Director:	María Cristina Velasco Narváez
1er Evaluador:	
2do Evaluador:	
Fecha y Hora	Año: 2013 Mes: 08 Día: 16 Hora: 5:30pm

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
Ronald Andrés Noreña	0635005	Licenciatura en Matemáticas y física.

Evaluación

Aprobado	X	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ______________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo [ ] 1er Evaluador [ ] 2do Evaluador [ ]

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ______________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año: Mes: Día: Hora:

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas:

Mª Cristina Velasco N.	[firma]	[firma]
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ✓ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ✓ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: FUNCIONES RACIONALES EN EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO VARIACIONAL

Autores:

Nombre: Ronal Andrés Noreña Gallego Firma: C.C. 1'130.655.913 Cali

Nombre: Firma: C.C.

Nombre: Firma: C.C.

Fecha: Agosto-04-2013

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

A mi hermana Kelly Jhojana Noreña Gallego, a quien espero sirva de ejemplo de superación; a mi madre Amparo Gallego y abuela Aura Ocampo por su incondicional apoyo.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quedo infinitamente agradecido con mi madre Amparo Gallego, hermana Kelly Jhojana Noreña Gallego y abuela Aura Ocampo, por su apoyo incondicional, inmensa paciencia y sabios consejos; siendo ellas algunos de los más importantes pilares en la consolidación de la persona que soy.

En segundo lugar, estoy gratamente agradecido con la familia Loaiza Vargas, quienes me han aceptado dentro de su familia siendo éste mi segundo hogar; el señor Arcadio Paz Molina, Mónica Piedad Consuegra, Nancy Bolaños, Amparo Arce, Andrés Fernando Jiménez y Jorge Alberto Caro, quienes constituyen la única familia en la cual podemos elegir sus integrantes como son los amigos, los cuales sin importar las adversidades siempre están presentes en los momentos buenos y malos de la vida. A mi padre Rodrigo Noreña por haberme enseñado desde pequeño el valor de la responsabilidad y la honradez.

Por otro lado especial agradecimiento a los docentes Octavio Augusto Pabón, Edinson Fernández, Ligia Amparo Torres, María Cristina Velasco y Jorge Galeano, por el acompañamiento dado a lo largo de todo mi proceso de formación y los consejos brindados, siendo uno de sus frutos la culminación de mi pregrado en la *Licenciatura en Matemáticas y Física* en la Universidad del Valle.

Para finalizar quiero dedicar estas últimas líneas para agradecer a una mujer muy especial en éste momento de mi vida, quien se ha convertido en una pequeña luz dentro de un espeso panorama de sombras, y además fue un apoyo incondicional en los duros y desesperantes momentos de la culminación de mi trabajo de grado, por eso te agradezco Diana Marcela Gómez Ramírez mi gran mujer.

Contenido

Tabla de Diagramas

Tabla de Esquemas

Tabla de Gráficas

RESUMEN

Este trabajo de grado presenta un análisis y propuesta de enseñanza de las Funciones Racionales, caracterizándolas por medio de conceptos matemáticos como: dominio, comportamiento asintótico, equivalencia de funciones y la variable didáctica conjunto de referencia; con el fin de promover el desarrollo de pensamiento variacional al igual que un aprendizaje significativo del concepto de función racional en los estudiantes de grado noveno.

Para lograr esto se propone una serie de actividades presentadas en cuatro bloques denominados **situaciones**; con las cuales se espera determinar cómo pueden ser abordados algunos conceptos matemáticos seleccionados por medio del empleo de las **operaciones cognitivas** de *tratamiento* (dentro de un registro de representación semiótica especifico) y *conversión* (paso de un registro a otro) en los registros de representación algebraico y gráfico de acuerdo con la teoría cognitiva propuesta por Raymond Duval (1999) e intentando además articular estas operaciones cognitivas con las exigencias curriculares del MEN (2006), identificando los procesos generales y contextos más significativos en pro de los fines trazados en el trabajo de grado.

En el diseño de las actividades, se evidencia la potencialidad del concepto de **dominio**; primero por su relevancia en la articulación de los diversos conceptos a través de los cuales se estudiarán las funciones racionales, y segundo ante su importancia en el momento de caracterizar las funciones racionales a partir de la posible discontinuidad que estas puedan presentar en su dominio.

Palabras claves: Función racional, Pensamiento variacional, registro semiótico de representación, aprendizaje significativo.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado para optar por el título de *licenciado en matemáticas y física*, se traza como objeto de análisis problematizar el aprendizaje de las funciones racionales a partir de dos puntos de vista: el primero, a nivel didáctico por la articulación de los diversos conceptos matemáticos que circundan alrededor de las funciones racionales los cuales se consideran necesarios para su caracterización y aprendizaje; y el segundo, desde mi experiencia como docente en formación, es un ejercicio por articular una teoría cognitiva del aprendizaje de las matemáticas con las exigencias curriculares propuestas por el Ministerio de Educación en Colombia.

No obstante, una presentación plurirregistro (es decir, que involucra el uso de varios registros de representación) del concepto de función racional se considera un medio potenciador en la formación de pensamiento variacional además del desarrollo de un conocimiento significativo, tal y como lo menciona Raymond Duval (1999) en su trabajo *Semiósis y pensamiento humano*, al afirmar que aquello que permite garantizar la comprensión de los diferentes objetos matemáticos de estudio, está relacionado con las operaciones cognitivas de tratamiento y conversión; las cuales posibilitan que se reflejen ciertas características del objeto representado que no eran evidentes en su representación inicial, permitiendo el desarrollo de la objetivación y evidencia de aspectos no percibidos en un solo registro.

Una vez problematizados estos aspectos, se intenta dar cuenta del tipo de actividades que se deben considerar ante el concepto de función racional de forma que promuevan el desarrollo de pensamiento variacional en los estudiantes de grado noveno. Donde para indagar sobre este tipo de actividades que permiten caracterizar de forma significativa las funciones racionales se han tenido en cuenta las competencias que deben de alcanzar los estudiantes según lo estipulado en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y se ha resaltado la importancia que tienen los registros semióticos de representación (tanto de escritura algebraica como gráfico) en el aprendizaje de este tipo de funciones en la Educación Básica en Colombia.

De este modo, se reconoce tres grandes bloques temáticos en los cuales se desarrolla la investigación de éste trabajo de grado como son:

- Identificar y analizar las diversas dificultades que aparecen en los procesos de enseñanza de las funciones racionales.
- Optar por el uso de registros semióticos de representación como medio potenciador en la adquisición de un aprendizaje significativo por parte de los estudiantes frente a la noción de función racional, al igual que identificar la relación entre las representaciones empleadas de un mismo objeto matemático a partir sus características.
- Desarrollo y diseño de situaciones que promuevan: en primer lugar la articulación de al menos dos registros semióticos en la actividad matemática fomentada por los estudiantes; y en segundo lugar la articulación conceptual entre los conceptos matemáticos de: dominio, comportamiento asintótico, equivalencia de funciones y la variable didáctica conjunto de referencia, a partir de los cuales se pueden caracterizar las funciones racionales.

  Finalmente, se espera que estas actividades sean presentadas en el marco de una propuesta de enseñanza de las funciones racionales que pueden ser implementadas por el docente-lector en sus clases como una opción o sugerencia para el desarrollo del conocimiento de interés.

Para finalizar, es importante aclarar que esta propuesta no fue implementada en el aula de clase, sino que se han diseñado una serie de actividades con las cuales se busca integrar de manera apropiada algunos aspectos de orden matemático, cognitivo y curricular, de manera que estas fomenten una aprehensión significativa del concepto de función racional y el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de grado noveno.

CAPÍTULO 1: PRESENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Presentación del problema

En el presente capítulo se enuncian las razones que se han considerado para realizar la investigación pertinente al estudio y aprehensión de las Funciones Racionales en los estudiantes de grado noveno de la educación media en Colombia; a partir de algunas problemáticas identificadas en la actividad matemática desarrollada por los estudiantes, al igual que en la implementación y presentación de los objetos matemáticos por parte de los docentes en el momento de intentar articular ciertas teorías didácticas que han aprendido durante su formación como docente.

En este sentido, se tiene que los dos aspectos a través de los cuales se ha problematizado la investigación y que motivaron el desarrollo de este trabajo son:

- De una parte, **los problemas concernientes al aprendizaje del álgebra en la escuela**, en general, y de manera específica la dificultad que tienen los estudiantes de articular conceptos como dominio de una función, discontinuidad, comportamiento asintótico y expresiones algebraicas equivalentes, a fin de poder caracterizar las funciones racionales desde lo algebraico y lo gráfico.
- De otra parte, desde **mi experiencia docente**, las dificultades relativas a la enseñanza del álgebra, pues aunque los docentes conocen algunas teorías didácticas aún no es posible poner en correspondencia estas teorías con las exigencias curriculares y las demandas cognitivas que hacen posible un aprendizaje significativo de los objetos matemáticos, imposibilitando así el desarrollo de los diferentes pensamientos que contribuyen a la construcción del pensamiento matemático.

Los problemas sobre el aprendizaje del álgebra a los cuales se hace referencia de manera específica se dan cuando las funciones racionales son discontinuas (debido a que su denominador es cero), hecho que implica la existencia de un comportamiento asintótico o de un abierto, lo cual genera conflictos en los estudiantes debido a la experiencia que ellos han tenido previamente con el estudio de las funciones polinómicas, las cuales tienen como dominio el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, y además son continuas.

Este tipo de conflictos, presenta un fuerte cambio conceptual, que conlleva a estudiar el concepto de dominio de la variable para el caso de las funciones racionales, debido a que:

1. En estas funciones a diferencia de las polinómicas, el dominio no siempre está dado por el conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, puesto que se encuentra sujeto a discriminar aquellos valores de x en los cuales la expresión del denominador es cero. En general, dados los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ en la variable x, la función racional definida por $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ tiene como dominio al conjunto formado por:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: q(x) \neq 0\}$$

Donde según lo mencionado por Torres & Calderón (2010, p.64) encontramos que $\mathbb{R}$ es el conjunto de referencia[1] C_r sobre el que está trabajando, y este, no necesariamente coincide con el dominio de la función porque $D_f \subseteq \mathbb{R}$, es decir que, el dominio de la función puede ser un subconjunto propio del conjunto de referencia ($D_f \subset C_r$ que para el caso de las funciones racionales el conjunto de referencia está dado, usualmente, por los números

[1] Se denota al conjunto de referencia como C_r, siendo este el conjunto al cual pertenece la variable de la expresión algebraica, es decir, es un conjunto de cuyos elementos se nutre la variable.

reales, esto es, $C_r = \mathbb{R}$) y por tanto ya no sucede que el conjunto de referencia para la variable y el dominio de la variable sean iguales.

De acuerdo con lo anterior es posible afirmar que en lo referente al estudio del *dominio de una función*, hay una gran preocupación por el desconocimiento conceptual y procedimental que hay frente a la variable didáctica *conjunto de referencia* en comparación al *dominio* de una expresión algebraica o de una función, desconocimiento que en ocasiones se da a razón del tipo de actividades que se proponen en el aula, las cuales van dirigidas a determinar cuál es el dominio de la expresión algebraica o de la función.

Además se desconoce la trascendencia que tiene el conjunto de referencia en cuanto a la forma de la gráfica, es decir, que si una función tiene dominio discreto (como es el caso de las sucesiones que van de los naturales en los reales) su gráfica será discontinua, mientras que si éste es continuo su gráfica será continua.

2. Otro aspecto relacionado con el dominio de las funciones racionales da lugar al estudio del *comportamiento asintótico vertical*, el cual es propio de estas funciones en aquellos puntos x^* del dominio donde el denominador de la expresión es cero pero su numerador es distinto de cero (es decir, $q(x^*) = 0$ y $p(x^*) \neq 0$); de tal forma que la recta $x = x^*$ representa una asíntota vertical.

   Además de este tipo de asíntotas verticales, vale destacar otros tipos de comportamientos asintóticos los cuales son propios de las funciones racionales y que son de suma importancia en la caracterización de estas, como son las *asíntotas oblicuas* y *horizontales*, las cuales a diferencia de las verticales, no se dan bajo la característica del dominio, sino bajo la relación entre los grados de las expresiones polinómicas que están en el numerador y denominador de la expresión racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ y el comportamiento de su representación gráfica cartesiana en la medida que los valores de su dominio se hagan cada vez más grandes o más pequeños.

De modo que, con respecto a los grados de las expresiones polinómicas $p(x)$ y $q(x)$, si el grado de la expresión del numerador es estrictamente mayor en una unidad al grado de la expresión del denominador entonces existe una **asíntota oblicua** (si $grado\ de\ q(x) = n$ entonces $grado\ de\ p(x) = n + 1$), mientras que si el grado de la expresión del numerador es menor o igual al grado de la expresión del denominador entonces existe una **asíntota horizontal** ($grado\ de\ p(x) \leq grado\ de\ q(x)$); otra forma de estudiar este tipo de asíntotas horizontales, es a través de observar y analizar el comportamiento que toma la representación gráfica cartesiana de la función racional en la medida que los valores de su dominio vayan aumentando o disminuyendo considerablemente, verificando si esta se acerca o no a un valor fijo.

Ahora, como se había mencionado para el caso de las asíntotas verticales, estas se dan en aquellos casos donde el denominador de la expresión racional es cero pero su numerador no, entonces surge la pregunta ¿qué sucede en aquellas situaciones donde tanto la expresión del numerador como la del denominador son ambas cero?, para este caso es posible que la expresión racional tenga una asíntota vertical o un abierto, la decisión se toma una vez se ha simplificado o llevado la expresión a su forma irreducible, esta situación conlleva a considerar otro aspecto importante como es la equivalencia de funciones.

3. Al igual que el dominio y el comportamiento asintótico, la *equivalencia de funciones* es un concepto importante en el estudio de las funciones racionales, ya que ante la naturaleza de éstas (funciones racionales) se consideran ciertas situaciones donde la expresión se puede indeterminar de forma que tanto la expresión del numerador como la del denominador sean cero o sólo el denominador sea el que se anula. Para el caso en que tanto numerador como denominador se anulan para un mismo valor de x, implica que la expresión racional puede ser simplificada, es decir que puede ser llevada a su expresión irreducible convirtiéndose así en una "nueva", pero la pregunta es ¿esta "nueva" expresión es equivalente a la presentada inicialmente?

Intentando dar respuesta a la inquietud sobre cuándo dos expresiones son o no equivalentes, en el diseño de actividades propuestas en el trabajo de grado para los estudiantes de grado noveno, se pretende fomentar espacios de reflexión, en los cuales ellos a partir de plantear conjeturas y la exploración determinen las restricciones y condiciones que deben satisfacer estas expresiones en sus dominios para que sean equivalentes; nutriendo de este modo los procesos de manipulación de algoritmos desarrollados en su actividad matemática con la construcción de los aspectos conceptuales pertinentes a partir de la experiencia, manipulación y exploración de los objetos matemáticos de interés.

Este tipo de actividades se proponen con la intención de mostrar una nueva estrategia de abordar estos conceptos matemáticos, donde no solo se centre la atención de los estudiantes en la manipulación de algoritmos, sin reflexión alguna sobre el significado del objeto matemático que está en juego; a tal punto que los estudiantes frecuentemente simplifican expresiones por medio de diversos procesos algebraicos de forma exitosa pero sin entender la relación o restricciones que en ocasiones se debe considerar con respecto al domino, de tal forma que permita que tanto la expresión inicial como final sean equivalentes. Un ejemplo de esto lo podemos ver en el caso de la expresión $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ la cual presenta problema de discontinuidad en su dominio cuando $x = -1$, debido a que se indetermina la expresión, pero a través de diversos procesos algebraicos esta expresión se puede simplificar al punto de obtener una nueva $g(x) = x - 1$, así:

$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$	Expresión original
$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}$	Diferencia de cuadrados
$f(x) = x - 1$	Propiedad cancelativa, siempre que $x \neq -1$.

Del proceso anterior se puede afirmar que $f(x)\ y\ g(x)$ tienen la misma expresión analítica o regla de asignación, sin embargo $g(x)$ no posee problemas de discontinuidad en alguno de sus puntos, mientras que $f(x)$ si es discontinua en $x \neq -1$. Estos casos en ocasiones pasan sin ser percibidos por los estudiantes, ya que ellos de forma inmediata recurren a simplificar las expresiones, y una vez determinada la expresión simplificada o irreducible proceden a determinar el dominio en ésta, sin reconocer que para ser estas dos funciones equivalentes se debe restringir la función en todos aquellos puntos que indeterminan tanto la expresión inicial como la final; luego para el caso del ejemplo, se puede decir que la expresiones $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes solo cuando en ambas se restringen sus dominios de la siguiente manera:

$$D_f = D_g = \{x \in R: x \neq -1\}$$

De esta forma, se observa que la equivalencia de funciones no es un proceso espontaneo y de fácil entendimiento como en ocasiones se cree, por el contrario, se observa que a nivel conceptual el aprendizaje significativo y con sentido frente a la equivalencia de funciones pone en juego el concepto de dominio, de modo que, dos expresiones son equivalentes si el dominio de ambas tienen las mismas restricciones, y no por el solo hecho de ser el resultado de una ejecución de propiedades aritméticas en los procesos de simplificación.

Ahora con respecto a la segunda razón que ha motivado el desarrollo de este trabajo, vemos que existen programas de formación y cualificación docente que ha ofrecido la Secretaría de Educación Municipal en convenio con la Universidad Del Valle y cuya razón de ser se fundamenta en la necesidad de mediar en la formación matemática, curricular y de manejo de los recursos de los cuales disponen los docentes, tal como lo afirman Velasco & Mejía (2010, p.11) habitualmente en la formación de docentes se presentan a estos una gran cantidad de teorías a nivel cognitivo, pragmático y didáctico de la forma como se imparten y desarrollan los procesos de enseñanza, sin embargo llevar a la práctica estas teorías de modo que sean coherentes no es tarea sencilla.

Desde el punto de vista cognitivo los docentes reconocen la utilidad de los registros semióticos de representación en los procesos de aprendizaje, dado que este es el medio del cual se valen los docentes y los estudiantes para identificar, analizar y caracterizar los objetos matemáticos que se estudian en los diferentes niveles de escolaridad. Ahora particularizando un poco en la importancia de los registros algebraicos y gráficos (cartesianos) en vía de la formación de pensamiento matemático en los estudiantes, se toma en consideración las posturas adoptadas por Azcárate & Deulofeu (1990) y, Lacasta & Pascual (1998), los cuales resaltan la importancia del empleo de los registros de representación algebraico y gráfico en el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, además de una fuerte reflexión sobre las consecuencias que se presentan ante el empleo de cierto tipo particular de ejercicios y actividades que se muestra a los estudiantes. Además, se encuentra que la teoría cognitiva expuesta por Raymond Duval (1999) se constituye en un fuerte referente teórico de los aspectos cognitivos respecto a la importancia de los registros semióticos de representación y la forma como estos actúan en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, donde esta teoría juega un papel importante en la caracterización que hace el MEN (2006, p. 66) del pensamiento variacional, veamos:

> *El pensamiento variacional tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.*

De este modo, se considera que una vía por la cual se puede promover en los estudiantes una aprehensión significativa del concepto de función racional, es a partir del empleo de por lo menos dos registros de representación semióticos (algebraico y gráfico), los cuales permiten que los estudiantes puedan colocar en correspondencia ciertas características de los conceptos matemáticos estudiados en más de una forma de representación, las cuales en ocasiones no son visibles en el registro inicial empleado. A modo de ejemplo, se puede tomar el estudio de la equivalencia de funciones, en cuyo caso es importante no sólo el manipular la expresión de forma analítica sino ver en la representación gráfica cómo se interpretan algunos de los resultados obtenidos.

Además, el empleo de estos registros semióticos de representación, son un medio potente en la articulación de los diversos conceptos matemáticos, ya que como lo menciona Duval (1999, p.62) es en la capacidad de poder representar el objeto matemático de estudio en más de un registro de representación que se evidencia una aprehensión significativa de éste en los estudiantes por la distinción del objeto con respecto a su representación y la posibilidad de explorar propiedades que no son perceptibles en un registro inicial.

De acuerdo con lo anterior, tenemos que el empleo de los registros semióticos de representación, exigen que el estudiante desarrolle dos operaciones cognitivas como son la de *tratamiento* y de *conversión*, esto es de acuerdo con la perspectiva cognitiva de Raymond Duval (1999) que se presentará con detalle en el Capítulo 2.

Ante este hecho es de suma importancia que el docente sea consciente del tipo de actividades que propone a sus estudiantes porque de acuerdo con los registros semióticos de representación utilizados en ocasiones se exige a los estudiantes que realicen procesos de conversión, o como lo han denominado Azcárate, C. & Deulofeu (1990) *procedimientos de traducción*, esto se presenta frecuentemente en actividades tales que dada una expresión algebraica se pide al estudiante que construya su gráfica de tal forma que la articulación de las actividades propuestas bajo esta perspectiva han conllevado a crear falsas y equivocas concepciones en los estudiantes sobre la relevancia y potencialidad que puede tener el registro gráfico en su proceso de aprendizaje, reduciéndola al solo hecho de ser una ilustración.

> *Esta visión tan reducida de los procesos de traducción de un lenguaje a otro, que además parte de la expresión algebraica, sin duda la más difícil de*

interpretar, lleva a los alumnos a mecanizar el proceso sin comprenderlo y conduce a una serie de concepciones erróneas sobre el significado de la gráfica. (Azcárate, C. & Deulofeu, 1990, p.63)

Este trabajo de grado, tiene su eje central en los procesos de transformaciones de las funciones racionales a través de los registros semióticos de representación algebraico y gráfico por medio del empleo de las operaciones cognitivas de tratamiento y conversión, puesto que se reconocen las potencialidades que ofrecen los diferentes registros de representación en particular estamos de acuerdo con Lacasta, E. & Pascual, J. (1998, p.11) cuando afirman que *la gráfica permite en ocasiones manipular ciertas ideas matemáticas sin necesidad de definirlas completamente*, es decir que no sólo el registro de representación algebraico permite manipular ideas matemáticas.

De este modo, es a partir del uso de gráficas cartesianas de ecuaciones algebraicas que el alumno puede valorar la incidencia que tiene en ésta (la forma de la gráfica) los parámetros que intervienen en la expresión matemática o determinar la relación de covariación de las variables que están siendo representadas, entre otros aspectos que podrían estar contribuyendo al desarrollo del pensamiento variacional, en tanto que, permite al estudiante analizar el cambio no sólo desde lo analítico, sino desde la gráfica misma de la función o relación que se desea estudiar.

El desconocimiento de las potencialidades que ofrecen las operaciones cognitivas de tratamiento y conversión en los procesos de aprendizaje y de enseñanza, y la desarticulación (o falta de relación) de los diversos registros semióticos de representación que se emplean para representar un mismo objeto matemático, ha llevado a plantear cuestiones como: ¿Qué aprenden en realidad los alumnos?, ¿Qué concepciones se forman de los conceptos que manipulan sin recurrir a la movilización de un objeto matemático a través de los diferentes registros de representación? Y por último, ¿Qué influencia tienen sobre estas concepciones las actividades propuestas por el maestro en el aula?

Para tratar de dar solución a las preguntas propuestas anteriormente, se toma como punto de partida la caracterización de aprendizaje significativo propuesto por el MEN (2006) en los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas, el cual afirma que un *aprendizaje significativo y con sentido* en los estudiantes no se reduce tan solo a aspectos personales de lo aprendido, sino que se extiende a su inserción en prácticas sociales con sentido, utilidad y eficiencia. De tal forma que para alcanzar estas metas, es importante que los estudiantes en el proceso de construcción y aprehensión de los conceptos algebraicos vayan reconociendo las diversas relaciones que existen entre estos (conceptos) al igual que en sus sistemas de representación, donde estos registros no se deben convertir en medios aislados de representación, ya que como lo menciona Duval (1999, p. 62) *el cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación.*

Considerando lo presentado hasta ahora, se observa que este trabajo de grado pretende ser una propuesta de enseñanza de las funciones racionales, la cual pretende, que los estudiantes se vinculen en su proceso de aprehensión del objeto matemático y de la relación de éste con los demás conceptos relacionados que le permiten caracterizarlo, más que centrar su atención solo en procesos de manipulación de algoritmos; intentando dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué tipo de actividades deben emplearse en el aprendizaje de la función racional que permitan desarrollar pensamiento variacional e involucren los registros gráfico y algebraico?

1.2 Objetivos de la investigación

1.2.1 Objetivo general

Identificar algunas actividades y organizarlas en situaciones problema que permitan abordar el concepto de función racional como medio para potenciar el pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno.

1.2.2 Objetivos específicos

1. Identificar las nociones matemáticas que permiten caracterizar la noción de función racional.
2. Determinar las características o propiedades de la función racional que pueden ser abordadas por medio de los registros semióticos de representación (algebraico y gráfico).
3. Identificar algunos tipos de procesos y contextos que sean adecuados en la enseñanza de las funciones racionales.
4. Fomentar el diseño de una secuencia didáctica que promueva la formación de pensamiento variacional frente al concepto de función racional en los estudiantes de grado noveno de la educación media.

1.3 Justificación del problema

El problema que se gesta en el aula frente a lo que aprenden los estudiantes y lo que realmente pretende el docente que ellos aprendan, se da por los procesos de comunicación que se hayan desarrollado entre ellos (docente-alumno); siendo este un objeto de interés para la didáctica, ya que ésta se encarga de reflexionar de modo sistémico los problemas que se generan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, a través de la *reconstrucción del problema de la comunicación entre maestros y alumnos, a partir de los fracasos del aprender y enseñar* (Vasco, C. 2008).

Teniendo en cuenta dichos procesos de sistematización en los cuales se interesa la didáctica de las matemáticas, se presentan en ciertas ocasiones una serie de incidencias en los procesos de enseñanza a razón del desconocimiento en los estudiantes y falta de claridad por parte de los docentes en el momento de presentar un objeto matemático en el aula, en reconocer el lugar vivo de este concepto a través de contestos significativos los cuales resalten la importancia y funcionalidad de las funciones racionales para modelar y dar respuesta a problemas presentados en la vida real y en otros momentos de su formación escolar en pro de la madurez de su pensamiento matemático.

Es importante resaltar que en la mayoría de los casos los conceptos que se estudian en los diversos procesos de enseñanza, no presentan de forma inmediata una relación directa con los variados procesos sociales en los cuales se encuentra inmersa la comunidad estudiantil, sino que por el contrario, esta serie de conceptos se relacionan con la actividad social a largo plazo, a partir de los avances y de la madurez en la formación de pensamiento matemático de los estudiantes, por el hecho de reconocer las características conceptuales de los objetos matemáticos y la utilidad de estas para dar solución a ciertos problemas de su vida cotidiana.

La formación de dicho pensamiento en los estudiantes no se promueve como un fin caprichoso de docentes o entidades educativas, sino que por el contrario, vive en el marco de las diversas políticas institucionales que regulan el avance y finalidad de la educación en Colombia, de modo que los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas expuestos por el MEN (2006), en medio de sus exigencias frente a los requisitos básicos que debe de cumplir un estudiante entre los grados octavo y noveno respecto a las competencias adquiridas en matemáticas, promulga que deben:

> *Identificar relaciones entre las propiedades de las gráficas y de las ecuaciones algebraicas, construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada, modelar situaciones de variación con funciones polinómicas, identificar la relación entre los cambios de parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan; y analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas y racionales, exponenciales y logarítmicas, uso de procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas, entre otras* (MEN 2006, p. 87).

De tal manera, que para alcanzar dichos fines propuestos por el MEN, se debe tener en cuenta la forma como interviene la formación del concepto de función racional por parte de los estudiantes en el sistema didáctico, donde dicha aprehensión de los estudiantes en la mayoría de los casos se encuentra permeada por el contexto socio cultural en el cual se genera el proceso de aprendizaje, de las concepciones que la población estudiantil tiene y para el caso de estudio, el conjunto de prejuicios y creencias que los docentes tienen acerca de la noción de función racional en el momento de impartir dicho conocimiento en el aula. Siendo así que

> *El desafío es situar el conocimiento en el contexto vivo que ofrece el "problema que se presenta"… Y ese contexto vivo, en lo que concierne a la educación, es el aula de la escuela; el aula de la escuela situada en una cultura más amplia*. (Bruner, J. 1997, p.63).

De esta forma, para discutir sobre el proceso de enseñanza de las funciones racionales, es importante reconocer, como lo mencionan Malagón & Valoyes (2006, p. 37) que:

> *Consideramos que la actividad algebraica en la escuela debe caracterizarse por el estudio de campos de problemas mediante la utilización del instrumento algebraico. El resultado de esta actividad consistirá, básicamente en la construcción de modelos algebraicos de los campos de problemas considerados, los cuales pasarán posteriormente a ser en sí mismo objeto de estudio.*

Como se observa en el Diagrama 1 la actividad algebraica escolar es esencialmente una actividad de modelación, a partir de la cual es posible identificar y manipular la estructura global de campos de problemas, tratar casos generales y analizar las condiciones de existencia de las soluciones y su estructura.

Siendo esto lo altamente deseable con respecto a la relación entre actividad algebraica y los procesos de modelación, se debe aclarar que para este trabajo de grado solo se darán algunas pautas con respecto a la modelación, las cuales se presentan posteriormente, y no se abarcará con profundidad por no ser el eje central de la investigación.

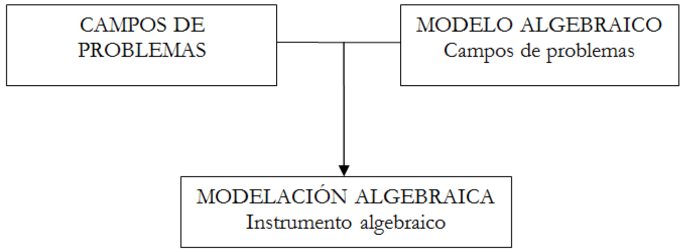


Diagrama 1 esquematización de la modelación algebraica

De esta manera, tenemos que las funciones permiten la modelación de diversas situaciones problemáticas pertenecientes a distintos contextos (algunos casos pueden ser matemáticos o extramatemáticos); tales que el concepto de función en la modelación además del uso del álgebra como herramienta, permiten manipular su estructura, hacer predicciones acerca de su comportamiento, realizar mediciones y cálculos, etcétera.

Ahora, en pro de dar a luz una respuesta respecto a las preguntas que se realizan los estudiantes sobre la importancia y relevancia de los temas que se estudian, se debe reconocer la intervención del currículo en medio de los procesos de enseñanza y de aprendizaje; donde desde esta perspectiva (curricular), el pensamiento variacional ha sido objeto de estudio y análisis a partir de la denominada renovación curricular realizada en Colombia en 1985; consolidando éste pensamiento como uno de los pilares en la formación matemática de los estudiantes, y además se considera al conocimiento como un producto social, resultado del análisis de la realidad y de la reflexión sobre las condiciones en las que se produce la ciencia.

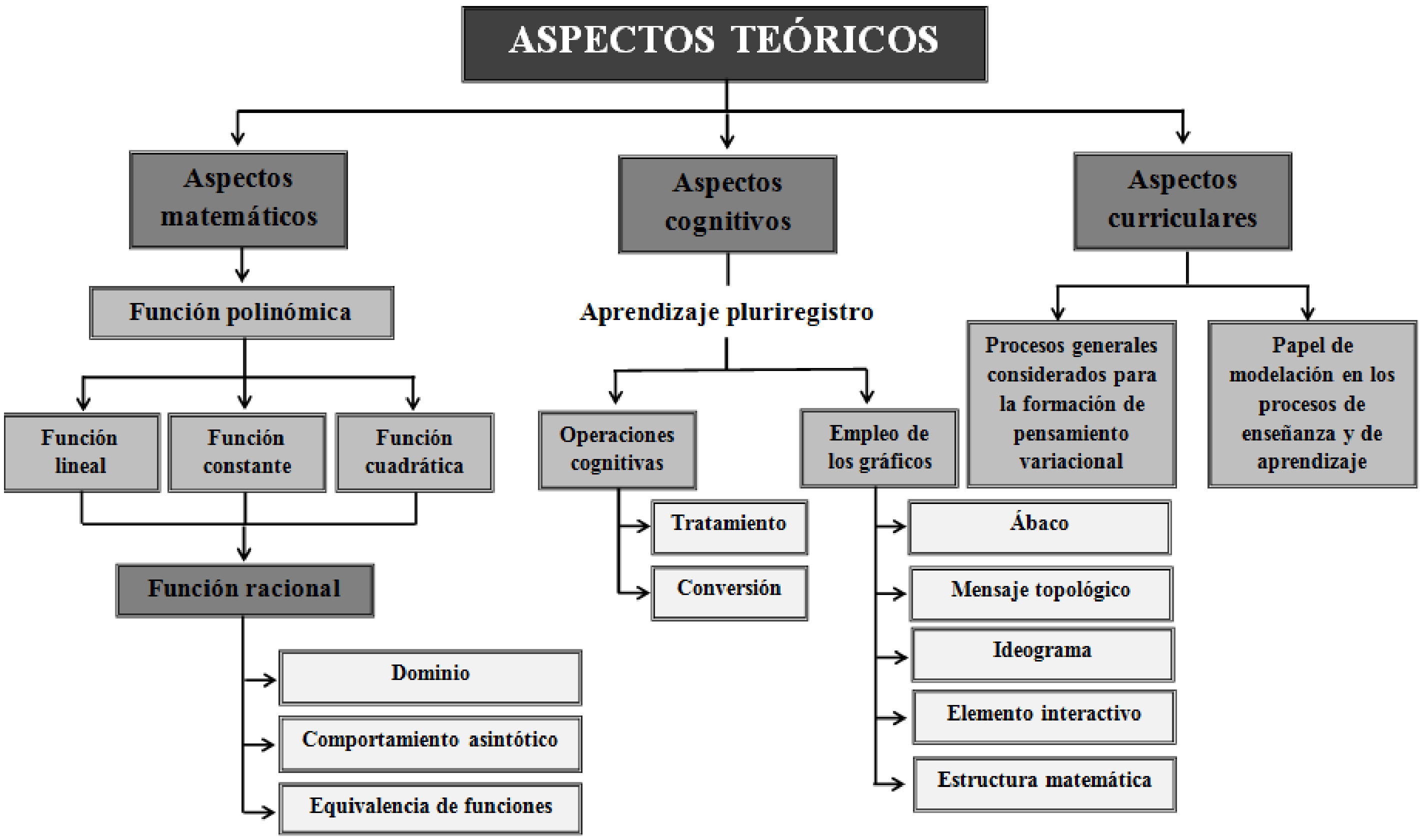
Es así, como una de las razones primordiales para realizar este trabajo tiene que ver con no habituarse a repetir las mismas prácticas educativas, es decir no caer en el hecho de enseñar de la misma manera que hemos aprendido, porque si lo hacemos entonces la didáctica de las matemáticas no podrá evolucionar y todo lo que se habría estudiado a lo largo de la formación de la licenciatura no tendría sentido. De modo que la práctica docente, como lo menciona Carlos Vasco (2008, p. 24), debe estar inmersa en lo que él ha denominado *práctica reflexiva*, es decir que el docente debe cuestionarse y preocuparse por los resultados de su práctica docente al igual de cómo pueden los estudiantes aprender los objetos matemáticos que se estudian. Y por eso advierte que:

> *Es un gran peligro que, con el pasar de los años, la experiencia del maestro se resuma en una sucesión de años un poco estériles, si no existe el acompañamiento de la reflexión, tanto personal como grupal, para que de esta forma su carrera se vuelva una práctica productiva; en el sentido que la didáctica debe ser, más que un libro con unas instrucciones, una práctica reflexionada, innovadora, que tenga su componente investigativo, evaluativo y que vaya acompañada de prácticas de sistematización y de escritura.* (Vasco, C., 2008, p. 24)

Por tanto, una de las dificultades que hay hoy en día, es la poca o ninguna incorporación de lo aprendido en: los programas de cualificación docente, la formación de los licenciados o los programas de posgrados en educación. Pues lo altamente deseable es que las actividades que se realizan en el aula sean coherentes con la perspectiva o concepción de la enseñanza y el aprendizaje que cada docente tiene.

De este modo, se considera que uno de los medios para remediar las dificultades mencionadas anteriormente respecto a la reflexión constante que se debe realizar de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, en pro de fomentar un aprendizaje significativo en los estudiantes, es a partir de reconocer la forma como se articulan, entre sí, los aspectos *matemáticos* (conceptos matemáticos), *cognitivos* (como modifica estos procesos las capacidades de cada individuo) y *curriculares* (determina las exigencias y metas que se debe alcanzar en estos procesos) alrededor del objeto de estudio, permitiendo reconocer la dirección y finalidad por los cuales se imparten estos procesos a partir de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes. En el capítulo posterior, se presentara una amplia descripción de la manera como estos tres aspectos se concibieron y caracterizaron en este trabajo de grado.

CAPÍTULO 2: ASPECTOS TEÓRICOS



Este capítulo presenta todas las características teóricas que se han empleado para el trabajo de grado alrededor del aprendizaje de las funciones racionales, los cuales se enmarcan en tres aspectos fundamentales como son los referentes: **matemáticos, cognitivos** y **curriculares**.

En los aspectos matemáticos, se presenta la forma como se va a considerar el concepto de función a lo largo de la investigación teniendo en cuenta la postura de Azcárate & Deulofeu (1990) y una vez definido éste, se procede acotar el objeto matemático de estudio a las funciones racionales. Posteriormente se definen los conceptos matemáticos a través de los cuales se van a caracterizar las funciones racionales, como son: las funciones polinómicas (de las cuales se hace énfasis en las funciones lineales, constantes y cuadráticas), comportamiento asintótico y equivalencia de funciones.

Para el caso de los aspectos cognitivos, el trabajo se enfatiza desde la propuesta teórica de Raymond Duval (1999, p.27) la cual hace referencia a que:

> *La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones "equivalentes" en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar* ***significaciones*** *diferentes para el sujeto que las utiliza. La noción de representación semiótica presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro* (Duval, R. 1999, p.27).

De forma que considerando el empleo de diferentes registros de representación semiótica, se espera fomentar dos aspectos importantes como son:

- La actividad matemática desarrollada por los estudiantes frente a los tratamientos y conversiones de expresiones racionales no se limiten solo a procesos de manipulación de algoritmos sin reflexión alguna del objeto matemático puesto en juego.

- Fomentar en los estudiantes la distinción entre el objeto matemático con respecto a sus formas de representación, con el fin que ellos no consideren que el objeto matemático es la representación en la cual le fue enseñado.

Para fortalecer los dos aspectos mencionados anteriormente, se promueven actividades para los estudiantes en los cuales deban involucrar más de un registro semiótico de representación, como son los registros gráficos y algebraicos, a partir de los procesos de transformación de representaciones semióticas expuestas por Raymond Duval (1999) tanto en el interior de cada registro (tratamiento) como en el paso de un tipo de registro a otro de diferente naturaleza (conversión), articulada con los propuestos teóricos de Lacasta & Pascual (1998), respecto a la clasificación de las actividades propuestas en el registro gráfico, a partir del uso que ellos determinen éste registro (ábaco, mensaje topológico, elemento interactivo, ideograma y estructura matemática) a causa de los tratamientos ejecutados sobre él.

Siendo las diferentes formas de emplear el registro gráfico en las actividades de aula, un medio para resaltar ciertas características particulares del objeto de estudio, a través de fomentar instantes de reflexión alrededor del objeto matemático, ya que dependiendo el tratamientos que se haga respecto a la representación gráfica de las funciones, los estudiantes, pueden: analizar o determinar valores en puntos particulares de su dominio, analizar el comportamiento de la misma en vecindades pequeñas de su dominio (crece, decrece, interceptos, etc.), representar bosquejos del posible comportamiento gráfico de una expresión algebraica a través de determinar ciertas características distintivas de esta o en caso contrario dada la representación gráfica, se identifica en esta ciertas propiedades las cuales pueden servir para determinar su correspondencia de esta con un tipo particular de expresión algebraica.

Ahora, en los aspectos curriculares, tomando como soporte los documentos expedidos por el MEN, como son los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) y los Lineamientos Curriculares (1998), además de la postura teórica de Valoyes & Malagón (2006) en torno a los aspectos curriculares, se intenta generar una discusión sobre las peculiaridades del pensamiento variacional en la formación de pensamiento matemático en los estudiantes. Además, de caracterizar como los registros semióticos de representación son un medio para lograr la formación de este pensamiento en los estudiantes.

A continuación se presentará de forma amplia la descripción de cada uno de los aspectos que se han mencionado anteriormente.

2.1 Aspectos matemáticos

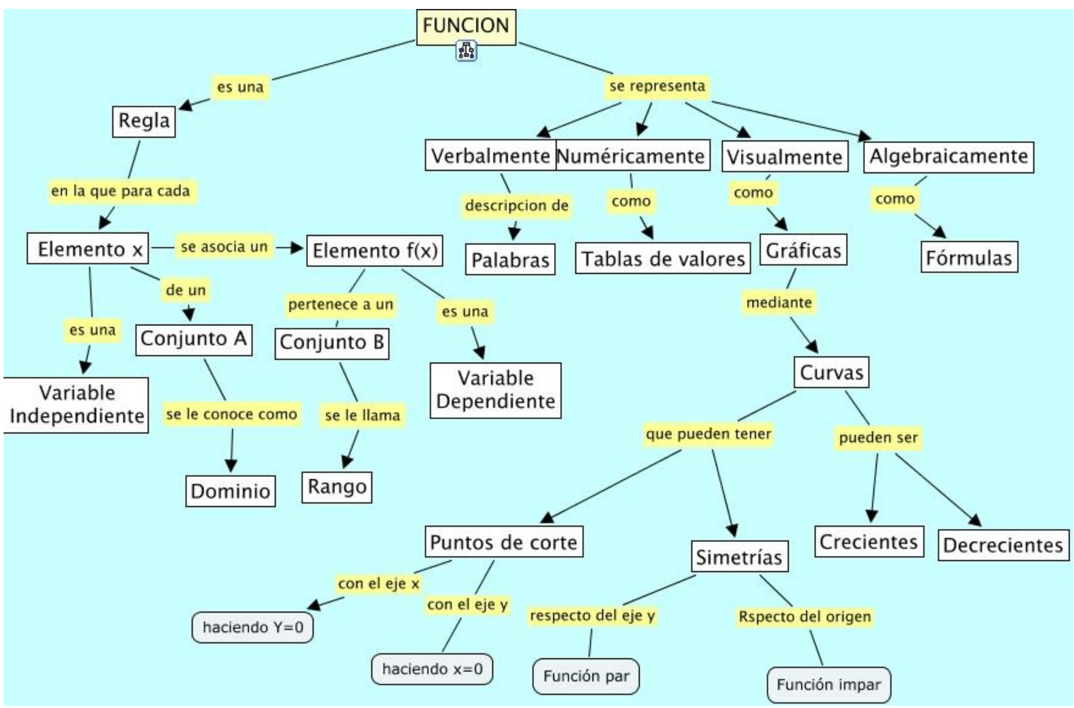
La presentación por parte de los docentes del concepto de función en el aula, se encuentra permeado por sus diversas formas de representación (diagrama sagital, maquina operatoria, etc.); las cuales se resaltan el carácter dinámico de esté concepto, destacando y articulando el conjunto de características y conceptos relacionados al objeto particular de estudio.

A continuación se presenta el Esquema 1, el cual muestra:

- Los tres aspectos que caracterizan toda función como son el dominio, el rango y la regla de asignación.

- Las diferentes formas como pueden ser representadas las funciones: de manera verbal, numérica (por medio de tablas), gráfica (en el plano cartesiano) o algebraicamente (usando expresiones algebraicas).

Destacando además, que el registro gráfico permite, a partir de un enfoque visual, estudiar ciertas propiedades y características de las curvas representadas como: su simetría (respecto al eje y y el origen) y posibles puntos de corte con los ejes coordenados (ejes x e y), y con respecto a su dominio cuáles son aquellos intervalos donde la función se comporta de manera creciente, decreciente o constante.



Esquema 1 red conceptual del concepto de función[2]

[2] Disponible en: http://cmapspublic3.ihmc.us/rid=1040063076515_52408617_2428/Funcion.cmap [Fecha de la consulta: 15 de agosto de 2012]

En el Esquema 1 se encuentra una caracterización teórica del concepto de función, siendo considerada como una regla de asignación tal que para cada elemento x de su dominio se le asocia un elemento de su rango, de la forma $y = f(x)$.

También se afirma que las funciones pueden ser representadas de forma: verbal (por medio de descripción de palabras), numérica (a partir de tablas de valores), visual (mediante el empleo de gráficas) o algebraicamente (mediante una fórmula).

Sin embargo, se pone de presente que no toda función expresada en forma analítica puede ser representada de forma gráfica, un ejemplo de ello, es la función de Dirichlet[3], la cual no puede ser representada gráficamente, ya que por la densidad de los números reales $\mathbb{R}$ sabemos que entre dos números consecutivos racionales $\mathbb{Q}$ existe por lo menos un número irracional $\mathbb{I}$ (y viceversa), lo cual implica que esta función es discontinua en todo punto de su dominio, luego al intentar realizar una representación gráfica de esta función nos damos cuenta que no es posible.

De acuerdo con lo anterior, en la presente investigación se concibe el concepto de función como *una ley que regula la dependencia entre cantidades u objetos variables* (Azcárate, C. & Deulofeu, P. 1990, p. 17); la cual recoge a modo global las características mencionadas frente a la forma como habitualmente se presenta el concepto de función (Esquema 1), por el hecho de considerar en ella una relación de dependencia entre más de una variable conceptual (como son el dominio y el rango), contemplando además la posible transformación que sufre la variable independiente por la forma particular de la expresión algebraica que determina la función.

[3] La función de Dirichlet se define de la siguiente manera: $D(x) = \begin{cases} c, & si\ x \in \mathbb{Q} \\ d, & si\ x \in \mathbb{I} \end{cases}$ donde c y d son números reales diferentes $(c \neq d)$

Se deja presente, que este trabajo de grado centra su atención en un tipo particular de funciones que se han elegido como objeto de reflexión a lo largo de él, las *funciones racionales* de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, definidas por el cociente de dos funciones polinómicas $p(x)$ y $q(x)$ tales que $q(x) \neq 0$.

El estudio de éstas (funciones racionales) se acota a aquellas que satisfacen que $p(x)$ y $q(x)$ sean funciones constantes, lineales o cuadráticas, por el hecho de ser familiares en su mayoría para los estudiantes de grado noveno de la educación media en Colombia.

Definición de función

Considerando el rigor y formalidad de las matemáticas, para realizar la caracterización de los objetos matemáticos y de los conceptos o nociones relacionados los cuales se mencionaron anteriormente, nos apoyaremos en el marco teórico y definiciones propuestas por Paul Rees, Charles Rees & Fred Spark (2006) en su texto titulado Álgebra, y en las Notas de clase: Números reales y funciones de Martha Pinzón y Daniela Vásquez (s.f), los cuales además de propiciar una caracterización de los objetos matemáticos desde la matemática misma, se convierten también en una propuesta de cómo se pueden definir, presentar y articular estos en medio de un proceso de enseñanza.

2.1.1 Función polinómica

Gran parte del estudio de funciones en la escuela se dedica a las funciones polinómicas, y a partir de ellas se definen las funciones racionales, por tal motivo inicialmente se presenta la definición de polinomio de grado $n - ésimo$, donde n es un número entero no negativo ($\mathbb{Z}_0^+$).

Definición de polinomio

Un polinomio de grado n sobre $\mathbb{R}$ en la variable x, es una expresión de la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad \textbf{(i)}$$

Donde a_i (con $i = 0, 1, 2, \ldots, n$) son números reales $\mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$ donde $n \in \mathbb{Z}_0^+$

Los números $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ se llaman *coeficientes del polinomio*, a_n es el *coeficiente principal* y a_0 es el *término independiente o constante*.

De tal forma, que se puede caracterizar las funciones polinómicas, como una combinación lineal de funciones de potencias de base real x y exponente entero no negativo n; donde éste tipo de funciones se caracterizan: primero, por ser continuas en todo el conjunto de los números reales, es decir que su dominio es $\mathbb{R}$. Y segundo, porque toda expresión polinómica es una función polinómica.

Como veremos a continuación, las funciones lineales, constantes y cuadráticas son casos particulares de las funciones polinómicas, tal que decimos que $p(x)$ es una función:

- Lineal, si $n = 1$
- Constante, si $n = 0$
- Cuadrática, si $n = 2$

A continuación se define cada una de éstas, reconociendo algunas propiedades y comportamientos que toman a partir de los valores de sus coeficientes.

✓ Función lineal

Esta es considerada en los procesos de enseñanza y de aprendizaje como el tipo de función más simple, y una de las más útiles. Donde una función $f(x)$ es una **función lineal** si su expresión algebraica es de la forma:

$$f(x) = ax + b$$

Donde a y b son números reales $\mathbb{R}$, y $a \neq 0$.

Se puede observar, que este tipo de funciones es un caso particular de las funciones polinómicas, el cual se da cuando $n = 1, a_1 = a$ y $a_0 = b$ en la expresión (i). En consecuencia, las funciones lineales son continuas en todo el conjunto de los números reales, es decir que su dominio es $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica. Además, su gráfica siempre es una línea recta (no vertical ni horizontal), donde su comportamiento está dado por los valores que tomen los coeficientes a y b, tal que:

- El dominio y el rango de $f(x)$ es $\mathbb{R}$.
- La gráfica de $f(x)$ es una recta con pendiente a e intersecto en y igual a b .
- Si $a > 0$, entonces $f(x)$ es creciente en todo su dominio.
- Si $a < 0$, entonces $f(x)$ es decreciente en todo su dominio.

✓ Función constante

Este tipo de funciones son de la forma $f(x) = b$, donde $b \in \mathbb{R}$.

Tiene como característica que, independientemente del valor que tome su variable independiente x, su imagen siempre será b; donde b es número real $\mathbb{R}$, y además, tienen la característica de ser continuas en todo el conjunto de los números reales, es decir en todo su dominio ($\mathbb{R}$).

La forma de su gráfica está dada por el valor de b, siendo esta una recta horizontal (paralela al eje x), la cual satisface que si:

- $f(x) = b$ y $b > 0$, entonces la recta está por encima del eje de las abscisas (eje x)
- $f(x) = b$ y $b < 0$, entonces la recta está por debajo del eje de las abscisas (eje x)
- $f(x) = b$ y $b = 0$, entonces la recta coincide con el eje de las abscisas (eje x)

✓ Función cuadrática

Una función $f(x)$ es una **función cuadrática** si su expresión algebraica es de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde a , b y c son números reales $\mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Se puede observar, que este tipo de funciones son un caso particular de las funciones polinómicas, el cual se da cuando $n = 2, a_2 = a, a_1 = b$ y $a_0 = c$.

La gráfica de este tipo de funciones recibe el nombre de **parábola,** y de forma similar a las funciones lineales, el comportamiento de estas (funciones cuadráticas) se da según las condiciones de los coeficientes a, b y c. A continuación veremos algunos hechos que modifican la forma gráfica de la parábola:

- $a > 0$ la gráfica es cóncava hacia arriba, es decir que abre hacia arriba.
- $a < 0$ la gráfica es cóncava hacia abajo, es decir que abre hacia abajo.
- $|a| > 1$ la gráfica de $f(x) = ax^2$ se estira, es decir, que es más angosta con respecto a $f(x) = x^2$
- $0 < |a| < 1$ la gráfica de $f(x) = ax^2$ se contrae, es decir, que es más ancha con respecto a $f(x) = x^2$
- Si es de la forma $f(x) = ax^2 + c$ el vértice de la parábola se desplaza sobre el eje y, de tal forma que si $c > 0$ su desplazamiento es hacia arriba, y si $c < 0$ su desplazamiento es hacia abajo.

Cabe mencionar que otra forma de representación algebraica que se utiliza frecuentemente para la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, es la denominada *forma canónica de la ecuación cuadrática*, la cual se obtiene mediante la completación del cuadrado de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ bajo la cual su representación está dada por la expresión:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Donde $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{-b^2}{4a} + c$ son números reales $\mathbb{R}$, y determinan la abscisa y la ordenada del vértice de la parábola dado por $V(h, k)$; y además, a partir de la geometría, se puede concluir que la gráfica correspondiente a la curva, es una parábola con eje de simetría dada por la recta $x = h$.

Ahora, proseguimos a caracterizar desde una perspectiva matemática las *funciones racionales*, al igual que dos conceptos o nociones relacionadas a este tipo particular de funciones, los cuales son relevantes en la formación de pensamiento variacional en los estudiantes de grado noveno de la educación media en Colombia, como son *las asíntotas* y el determinar cuándo dos expresiones de una función son equivalentes y bajo que parámetros, o como se ha nombrado en este caso *equivalencia de funciones*.

2.1.2 Función Racional

Una función racional es aquella expresión de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, tal que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas y $f(x)$ es irreducible o equivalente a una expresión irreducible.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}, \qquad y \quad q(x) \neq 0$$

Para el caso contemplado para el trabajo de grado, el estudio de las funciones racionales se va a realizar, a partir de la condición de que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de grado menor o igual a dos, es decir, que las funciones racionales que se van a emplear son aquellas que se forman por medio del cociente de funciones lineales, constantes o cuadráticas.

Para analizar una función Racional se deben considerar las siguientes características observables:

- El dominio D_f se conforma por todos aquellos valores de $\mathbb{R}$ que dotan de sentido a los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, excluyendo aquellos que hacen al denominador cero $(q(x) = 0)$. Esta condición se da, por el hecho de considerar que el dominio de una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, es la intersección entre los dominios de las funciones $p(x)$ y $q(x)$ excluyendo las raíces[4] del polinomio $q(x)$ del denominador, ya que estas hacen al denominador cero y la división por cero no está definida en matemáticas.

$$D_f = D_{p/q} = \{x \in D_p \cap D_q \text{ tal que } q(x) \neq 0\}$$

- El comportamiento asintótico de este tipo de funciones (racionales), los cuales se presentan por motivos como: *las raíces del polinomio* $q(x)$ (polinomio del denominador), y *la diferencia entre los grados de los polinomios* $p(x)$ *y* $q(x)$, donde estas razones se ampliaran posteriormente cuando se hable sobre las asíntotas.

- Tipo de discontinuidad que pueden sufrir las funciones racionales $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ en aquellos valores $x^* \in \mathbb{R}$ que son raíces del polinomio $q(x)$; las cuales pueden ser por *comportamiento asintótico vertical* (en el caso que $q(x^*) = 0$ y $p(x^*) \neq 0$ se

[4] Se conoce como *raíz* ó *cero de una función* f aquellos valores $c \in \mathbb{R}$, tales que $f(c) = 0$

garantiza que la recta vertical $x = x^*$ es una asíntota vertical) ó por *abierto*[5] (se presenta como consecuencia de las restricción que se debe hacer sobre el dominio de la función $f(x)$ cuando esta puede ser simplificada en su expresión irreducible $i(x)$; de modo que si el dominio de la expresión $i(x)$ excluye valores en los cuales era discontinua la expresión inicial $f(x)$ entonces este valor representa una discontinuidad por punto abierto).

✓ Las Asíntotas en un Función Racional

Las asíntotas en las funciones racionales son una implicación del comportamiento de estas a través de los casos donde $p(x) = 0,\ q(x) = 0$ y la relación entre los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$. Puesto que, los puntos de intersección x de la función f con el eje x ocurren precisamente cuando $p(x) = 0$.

Por otra parte, si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional en su expresión simplificada (irreducible) y a es un número real $\mathbb{R}$, entonces:

- La recta vertical $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$ si $x \to a$ implica $|f(x)| \to \infty$.
- La recta horizontal $y = a$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$ si $|x| \to \infty$ implica $f(x) \to a$.

A continuación presentamos las condiciones bajo las cuales una función racional irreducible de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$ tiene asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

[5] Este tipo de discontinuidad se hará más claro mediante el ejemplo presentado posteriormente cuando se habla de equivalencia de funciones respecto a la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

- **Asíntotas verticales**

$x = a$ es una asíntota vertical de $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ si $q(a) = 0$ y $p(a) \neq 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

Si $a \in \mathbb{R}$ es una raíz simple de $q(a) = 0$, las ramas laterales de la asíntota $x = a$ tienen sentidos distintos, una hacia $+\infty$ y otra a $-\infty$. Mientras que si a es una raíz doble, ambas ramas van hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$.

- **Asíntotas Horizontales**

Sea $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$, para definir las asíntotas horizontales debemos comparar los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, de manera que si $grado\, de\, p(x) = n$ y $grado\ de\ q(x) = m$, la función $f(x)$ tiene asíntota horizontal si y sólo si $n \leq m$, en caso contrario no.

Si $n < m$, entonces el eje x es la asíntota horizontal, es decir $y = 0$.

Si $n = m$, entonces la asíntota horizontal es la recta igual al cociente de los coeficientes principales de $p(x)$ y $q(x)$ dados por a_n y b_m respectivamente $\left(y = \frac{a_n}{b_m}\right)$.

- **Asíntotas Oblicuas**

Sea $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$, para definir las asíntotas oblicuas debemos comparar los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, de manera que si $grado\, de\, p(x) = n$ y $grado\ de\ q(x) = m$, la función $f(x)$ tiene asíntota oblicuas si y sólo si n es estrictamente mayor en una unidad a m, es decir, si el $grado\, de\, p(x)$ es estrictamente mayor en una unidad al $grado\ de\ q(x)$, en caso contrario no.

En caso que $f(x)$ presente asíntotas oblicuas, la expresión algebraica que denota el comportamiento estas, es el cociente $C(x)$ que se obtiene al dividir al polinomio $p(x)$ respecto a $q(x)$.

✓ Equivalencia de funciones

El solo hecho de determinar una expresión algebraica $i(x)$ a partir de efectuar procedimientos algorítmicos o aritméticos sobre otra expresión algebraica $f(x)$ no permite que los estudiantes identifiquen de manera significativa la relación conceptual existente entre ellas. De modo que, el estudio del concepto de *equivalencia de funciones* se convierte en una herramienta y espacio de reflexión importante en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, ante una aprehensión significativa sobre su quehacer matemático, permitiendo identificar las características teóricas y cognitivas con las cuales se puede determinar la relación conceptual que existe entre las expresiones $f(x)$ e $i(x)$.

De esta manera, se puede decir que una **función $\boldsymbol{f(x)}$ es equivalente a $\boldsymbol{i(x)}$** solo si satisface las siguientes condiciones:

i. La función $i(x)$ es el resultado de haber simplificado algebraicamente la función $f(x)$.

ii. Si el dominio D_i de la función $i(x)$ se restringe con respecto a las características del dominio D_f de la función $f(x)$, es decir, que el dominio de ambas funciones sea igual.

Por ejemplo, sea $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ una función tal que su dominio está dado por:

- $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, es decir que presenta problemas de continuidad para el caso donde $x = 1$.

- $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ puede ser simplificada a través de diversos procesos algebraicos, obteniendo así su expresión algebraica irreducible $i(x) = x + 1$.

Donde para garantizar que las funciones $f(x)$ e $i(x)$ son equivalentes, se debe restringir el dominio D_i de $i(x)$ con respecto a las condiciones que presenta el dominio D_f de la expresión $f(x)$, de modo que $D_i = D_f = \mathbb{R} - \{1\}$. De modo $x = 1$ representa un punto de discontinuidad, por abierto, de las funciones $f(x)$ e $i(x)$.

Finalmente se presenta la trasformación de funciones, algunas de las reglas se mencionaron, de manera particular, para el caso de las funciones lineal y cuadrática sin embargo estas pueden definirse de manera más general. Las transformaciones de funciones más comunes son: traslaciones, estiramientos o compresiones, reflexiones, entre otras. El estudio de estas transformaciones permite poner en correspondencia las variaciones visuales de una gráfica con sus correspondientes variaciones de la ecuación algebraica y viceversa. Además se resalta que son precisamente esta clase de correspondencias entre las variables visuales y algebraicas las que nos interesa que el estudiante establezca y a las cuales denominaremos más adelante, en los aspectos cognitivos, como unidades significantes.

Las transformaciones que pueden sufrir las expresiones algebraicas mencionadas anteriormente, no se presenta en los estudiantes como una actividad espontanea; por el contrario, esta obedece a diversos procesos cognitivos realizados de modo consciente por ellos para aprehender de manera objetiva los conceptos matemáticos que se estén estudiando. Como se verá en los aspectos cognitivos presentados a continuación, estos procesos están altamente relacionados con las operaciones cognitivas de tratamiento y conversión (Duval, R. 1999) que los estudiantes realizan sobre los objetos representados en diversos registros semióticos de representación, las cuales permiten la objetivación en ellos.

2.2 Aspectos cognitivos

El uso de ***registros semióticos de representación*** son un medio potente en la formación y desarrollo del pensamiento variacional, y en la adquisición de un aprendizaje significativo en los estudiantes de grado noveno alrededor del concepto de función racional, ya que a partir de lo expuesto por Duval (1999, p. 30), los registros semióticos de representación son el medio por el cual los sujetos interiorizan cognitivamente la información conceptual de los objetos que se están estudiando, con el fin de explorar su información, o para comunicarla posteriormente a un interlocutor.

Además, el empleo de registros semióticos de representación exige que los estudiantes realicen operaciones cognitivas como son: el **tratamiento** (transformaciones que se efectúan en el interior de un mismo registro, donde este no moviliza más que un solo registro de representación) y la **conversión** (transformaciones de un registro semiótico a otro de diferente naturaleza), siendo el empleo de estas dos operaciones cognitivas sobre los registros semióticos de representación la génesis de la actividad cognitiva desarrollada por los estudiantes, ante el hecho que estos registros permiten que se cumplan tres actividades cognitivas (Duval, R. 1999, p. 30), como son:

a. Construir un conjunto de marcas perceptibles que sean identificadas como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.
b. Permitir que se realicen transformaciones de las representaciones bajo las reglas proporcionadas por el sistema en el cual se está trabajando, tal que se obtengan

otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.

c. Capacidad de convertir las representaciones producidas en un sistema inicial de representación en otro tipo de representación, tal que este nuevo sistema permita explicitar otras significaciones relativas a aquello que se está representado.

Siendo a través de estas tres actividades que los alumnos interaccionan con los objetos matemáticos estudiados, los cuales se configuran a partir de las características particulares del entorno en el cual se desarrolle. Pero, para que el empleo de registros semióticos de representación sea potente en los procesos de aprehensión de los objetos matemáticos estudiados, se debe generar una fuerte reflexión en los procesos de enseñanza y de aprendizaje alrededor de distinguir el objeto de estudio con respecto a la representación empleada, ya que si esta distinción no es evidente para el estudiante, se puede generar en él una fuerte confusión respecto a la conceptualización desarrollada en relación al objeto matemático puesto en juego, al punto de no ser significante para el estudiante.

> *Toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una perdida en la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones "inertes" que no sugieren ningún tratamiento productor.* (Duval, R. 1999, p. 14)

Siendo así, que para alcanzar una aprehensión significativa, el empleo de los registros semióticos debe ser cuidadoso tanto por el docente en el momento de implementarlos en su gestión de aula como por los estudiantes al usarlos en su actividad matemática; no convirtiendo estos solo en medios visuales perceptibles a la vista de las personas, sino que por el contrario trasciendan hasta el punto de generar cambios de orden cognitivo en el estudiante; ya que, en algunos casos *las representaciones semióticas pueden ser satisfactorias desde el punto de vista de la expresión y no corresponder a ninguna objetivación para el sujeto que las reproduce solo por imitación, y no las produce para una objetivación* (Duval, R. 1999, p. 37).

Además, el empleo de más de un registro semiótico de representación en la gestión de aula, permite al docente trabajar sobre el significado mismo del objeto matemático, desligándolo del hecho que sea esta (significación) el resultado del empleo de un registro semiótico particular; por lo tanto el uso de diversos registros de representación en los procesos de enseñanza, permite por parte del docente que se aumenten las ocasiones que tiene el estudiante para expresarse, o como lo menciona Lacasta & Pascual (1998, p. 165):

> *La existencia de otros modos de presentación siempre es favorable para el profesor. Pero se puede dar el caso que el cambio incesante de representación no signifique una ayuda suplementaria para el alumno, que no entiende mejor una representación que otra, mientras el profesor va consolidando la impresión de que esos cambios van proporcionando nuevas razones para que el alumno sepa.*

Teniendo presente lo mencionado hasta ahora y que uno de los ejes centrales de este trabajo son los procesos de transformación de las funciones racionales a través de los registros semióticos de representación gráfico y algebraico, los docentes al momento de diseñar actividades para llevar al aula, son responsables de la forma como aparecen y se emplean en estas las operaciones cognitivas de tratamiento y conversión.

Es así, que en el caso de considerar la operación cognitiva de **conversión** y **coordinación de registros**, como un medio potente para la aprehensión de ciertos conceptos matemáticos, Duval (1999, Pp. 77-78) presenta una **organización de las**

situaciones de aprendizaje, la cual se ilustra a continuación en el Diagrama 2, donde en él se determina la forma como intervienen dichas operaciones cognitivas en medio de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes, lo cual puede ser de ayuda para el docente en el momento de determinar la eficiencia que puede presentar estas operaciones cognitivas en ciertas actividades, con el fin de que el objeto matemático puesto en juego sea aprendido.

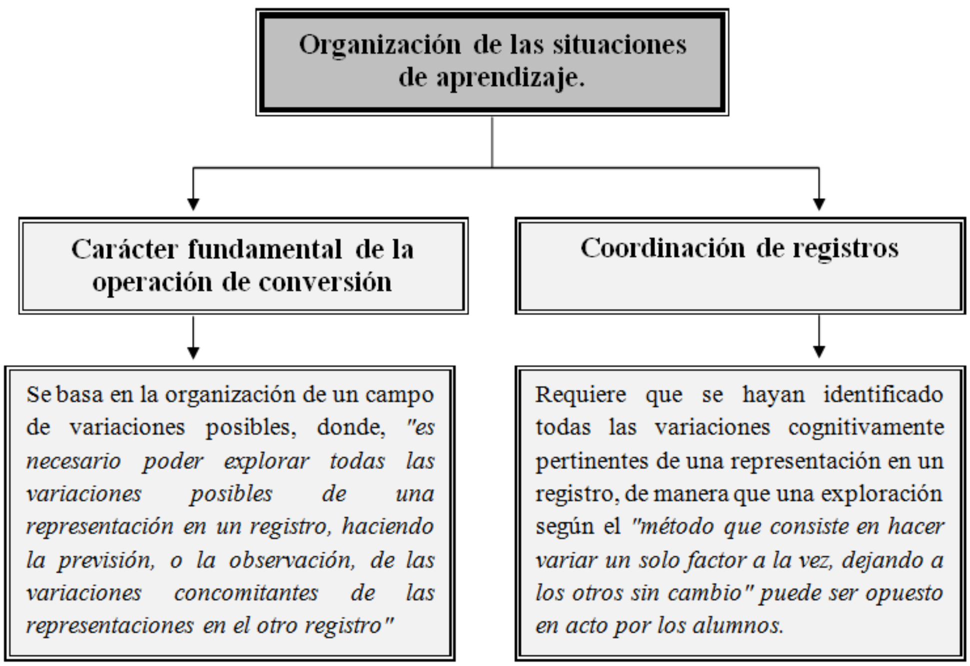


Diagrama 2 organización de las situaciones de aprendizaje

El desconocimiento del trasfondo conceptual que existe alrededor de las operaciones cognitivas de conversión y coordinación de registros, evidencia un problema ante el empleo del registro de representación gráfico, haciendo invisible la potencialidad de éste registro en la construcción de los diversos objetos matemáticos estudiados a través de él, ya que en muchas ocasiones es convertido en una representación visual del posible comportamiento de las funciones, carente de reflexión sobre las nociones matemáticas en él. Desconociendo así el aporte que brinda el registro gráfico en los procesos de aprehensión, como es que *el* *gráfico permite sacar provecho de las propiedades globales de una función (signo, crecimiento, máximo, concavidad, etc.). Una función que no tenga propiedades globales carece de interés matemático, puesto que no permite apenas aplicaciones y desarrollos* (Lacasta, E. & Pascual, J. 1998, p. 153).

Es así, que bajo los supuestos teóricos presentados por Lacasta & Pascual (1998), se puede dotar de sentido el registro semiótico gráfico (cartesiano) en la actividad matemática desarrollada por el estudiante en su proceso de aprendizaje; lo cual se logra ante el hecho de reconocer el carácter dinámico de esté (registro gráfico cartesiano) según sea la intensión didáctica en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las funciones. De esta manera, el registro gráfico se puede presentar de diversas formas en las actividades propuestas a los estudiantes, donde cada una de estas potencializa una serie particular de competencias en él. A continuación se presentará las diversas formas como interactúa el registro gráfico cartesiano en la actividad matemática de los estudiantes.

2.2.1 Formas como se evidencia el registro gráfico (cartesiano) en la actividad matemática

En la actividad matemática desarrollada por los estudiantes, los registros de representación gráfica, son un insumo importante en el desarrollo de pensamiento matemático en ellos, a través de promover espacios de reflexión y validación sobre su quehacer matemático en ausencia de herramientas algebraicas; Siendo esto posible a partir de determinar e identificar la manera cómo actúa este registro de representación en cada una de las actividades propuestas, el cual puede actuar como: **ábaco**, **mensaje topológico,**

ideograma, elemento interactivo y/o como **estructura matemática.** A continuación, se describe las características de cada una de estas:

2.2.1.1 Funcionamiento como ábaco: este se evidencia en la actividad matemática de los estudiantes, en situaciones donde usan los gráficos de las funciones como instrumento para determinar, gráficamente el valor de y para un x dado y viceversa. Es decir, que en este tipo de funcionamiento del gráfico, su uso se da punto a punto, convirtiéndose en un instrumento efectivo para determinar resultados numéricos mediante la utilización de sus propiedades locales, siguiendo un procedimiento algorítmico. Siendo así, como el gráfico se convierte en un instrumento simple y eficaz que permite deducir valores representados sobre una medida, pudiendo emplearse representaciones homotéticas.

Es importante mencionar que el empleo de las gráficas como ábaco, limita la actividad matemática de los estudiantes, puesto que solo permite una lectura punto a punto, sin dar lugar al posible análisis de la imagen (sea este el caso) en intervalos. Además, como lo menciona Lacasta & Pascual (1998), *el funcionamiento como ábaco no permite hacer extrapolaciones aunque se disponga de la fórmula algebraica, no se sabe si la fórmula es válida fuera del intervalo de definición de la función.* (p. 120).

En el diseño de actividades que se realizó en este trabajo de grado para los estudiantes de grado noveno de la educación media en Colombia, las cuales se presentan el Capítulo 3, se dan situaciones donde el registro gráfico es empleado bajo las características de ábaco, como es por el ejemplo en la Situación 1 la Actividad 1.

Actividad en la cual se presenta a los estudiantes la representación gráfica de la función racional $f(x) = \frac{1}{x}$, sobre la cual deben en un primer momento determinar el valor de la función para los siguientes valores x de su dominio: {-1/3, -1/2, -1 , -3/2, - 2, - 3, - 4 , 1/3, 1/2, 1, 3/2, 2, 3, 4 }, los cuales una vez determinados se emplean como insumo de análisis para que ellos conjeturen el comportamiento que toma la función racional racional gráficada alrededor de su asíntota vertical $x = 0$.

2.2.1.2 Funcionamiento como mensaje topológico:

el gráfico usado como soporte de un mensaje topológico se convierte en una curva referida a unos ejes, que no presenta necesariamente valores numéricos y que representa una función cualquiera; lo que está dibujado, con frecuencia puede no tener ninguna relación con una ecuación en particular (Lacasta, E. & Pascual, J. 1998, p. 126). En este caso, el análisis y uso de las funciones se centra más en las características globales de la gráfica de la función como son: el signo de la función, los intervalos de crecimiento, los máximos y mínimos, etc.

Un ejemplo de este tipo de actividades se ve en la Actividad 3 de la Situación 3 presentada en el capítulo posterior, ya que dada la representación gráfica de una función carente de su expresión algebraica y con sus posibles discontinuidades por puntos abiertos o comportamiento asintótico, el estudiante debe determinar cuál es el par de expresiones algebraicas correspondientes a ella, a partir de determinar características como su comportamiento antes y después de estos puntos de discontinuidad, su dominio, etc. .

Este a diferencia del uso como ábaco, no centra su atención en el análisis punto a punto, tal que, no posibilita precisar los valores numéricos en los ejes, pero las variables deben definirse en un conjunto ordenado.

2.2.1.3 Funcionamiento como ideograma: es una transformación conforme de la curva la cual conserva algunas propiedades topológicas, donde se puede perder el mensaje topológico. Este tipo de funcionamiento se usa con frecuencia para abordar problemas teóricos, para los cuales se hace uso de los hechos característicos de la función (crecimiento, decrecimiento, etc.).

La distinción que existe entre el uso del gráfico como mensaje topológico y como ideograma, tal como lo presentan Lacasta & Pascual (1998), radica en que *el ideograma es una función de comunicación pura, mientras que el mensaje topológico permite la puesta en marcha de una acción efectiva, para ilustrar otros conocimientos.* (p. 128). Ante esto, vemos que un ideograma es un signo gráfico que representa una idea, la cual permite la designación y reconocimiento de un objeto, donde este (ideograma) funciona por la existencia de una función que define la curva.

Es así como la Actividad 2:c de la Situación 4, es un ejemplo de este tipo de actividades ya que una vez el estudiante reconoce las variables que provee el contexto de desempeño el cual acota al objeto matemático que se está empleando, puede dar razón ante dos tipos de representaciones gráficas que se presentan cual es la más apropiada.

Esta al igual que en los casos anteriores presenta una serie de limitaciones en la actividad matemática de los estudiantes, como es que, el cambio de relación entre las escalas de los ejes cambia el ideograma, además, que como se mencionó antes, *el ideograma es una función de comunicación pura, mientras que el ábaco y el mensaje topológico permite la puesta en marcha de ciertas acciones*. (Lacasta, E. & Pascual, J. 1998, p. 131).

2.2.1.4 Funcionamiento como elemento interactivo: para hablar del gráfico como un *elemento interactivo no algorítmico,* se debe proveer, que este no funcione como un medio de control de la acción, sino como un modo de control del discurso y de la comunicación. Este tipo de uso, supone una respuesta que depende del mismo alumno sólo de una manera parcial, donde este se convierte al mismo tiempo en un instrumento y un objeto con el cual el alumno entra en interacción.

De tal forma que, *cuando el alumno utiliza el gráfico como elemento interactivo se produce lo que en teoría de situaciones de Brousseau se llama **devolución** del problema.* (Lacasta, E. & Pascual, J. 1998, p. 132), de modo que es el alumno quien se hace responsable de su aprendizaje.

Un ejemplo de este tipo de actividades se ve en la Actividad 5 de la Situación 3 presentada en el capítulo posterior, en la cual a partir de la representación gráfica de una función $h(x)$, el estudiante debe dar respuesta sobre el comportamiento que esta presenta con respecto a la continuidad de su dominio, comportamiento de la función en un punto específico (existe o no la función en ese valor), y en caso de que no exista determinar según su representación gráfica que tipo de discontinuidad presenta en él. De modo que la información pertinente para dar respuesta a todas estas preguntas se encuentra en la representación gráfica la cual a partir de los tratamientos que los estudiantes realicen en ella se convierte en el material de insumo para el análisis.

2.2.1.5 Funcionamiento como estructura matemática: Consiste en establecer dos momentos, uno *algebraico* (conformado por las fórmulas y por objetos que permiten la "traducción" al álgebra de los rasgos gráficos globales pertinentes) y otro *gráfico*. El paso del marco gráfico al algebraico es un papel normalmente desempeñado por el profesor. Tras los funcionamientos del gráfico el profesor pasa de uno a otro, confiando en la supuesta "transparencia" del gráfico, sin que el alumno pueda muchas veces saberlo. Es decir, que el marco conceptual utilizado en esta construcción consiste en ver lo enseñado como parte de una actividad de relación o transferencia de información entre dos marcos: el algebraico y el gráfico. Como lo menciona Lacasta & Pascual (1998, p. 136):

> *La transferencia del marco algebraico al gráfico está condicionada por el hecho de que el gráfico refleja propiedades de la función y no la función misma. Como la única posibilidad que ofrece el marco gráfico, tal como existe, es la de acumular información, se trabaja en el marco algebraico para obtener esa información, que se representa gráficamente a continuación. Para ello, el marco algebraico está dotado de la capacidad de operar sobre sus objetos básicos. El marco algebraico tiene, pues, unos mecanismos de manipulación de sus objetos mucho más ricos que los del gráfico.*

En las actividades propuestas en el capítulo posterior, encontramos algunas que se desenvuelven en el marco de esta clasificación, como es por ejemplo la Actividad 4 de la Situación 1, en la cual se presenta una serie de gráficas de la expresión racional $f(x) = \frac{1}{x} + b$ para los casos donde $b = 3, 2, 0, -2, -3$, con su respectiva expresión algebraica, y se espera que los estudiantes a partir de comparar el comportamiento que tiene gráfica con respecto a su expresión algebraica puedan conjeturar y posteriormente formalizar conceptualmente la relación del valor de b con respecto al desplazamiento sobre el eje y de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

De esta manera se reconoce las diversas formas como se puede emplear el registro gráfico en las actividades propuestas a los estudiantes, resaltando las ventajas y desventajas que presenta cada uno frente al desarrollo de pensamiento matemático en ellos a través de la operación cognitiva de tratamiento. Ahora, con respecto a la operación cognitiva de conversión o paso de la representación del objeto estudiando entre los registros algebraico y gráfico, se presenta en ocasiones una serie de obstáculos en los estudiantes, los cuales se presentan con detalles en el apartado posterior.

2.2.2 Dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de conversión entre los registros gráficos/algebraico

En el estudio y aprendizaje de las funciones, como primera instancia, se pasa por un estado de reconocimiento de estas (funciones) en cada uno de los registros semióticos de representación (gráfico y algebraico), lo cual permite a través de la operación cognitiva de **tratamiento**, la adquisición y desarrollo de capacidades en los estudiantes para leer e interpretar el objeto matemático representado en cada uno de ellos (registros semióticos) determinando las características o unidades significantes que se pueden identificar en él. Una vez los estudiantes reconozcan y caractericen los objetos matemáticos estudiados en cada uno de los registros semióticos de representación, se procede a fomentar en ellos la actividad cognitiva de conversión la cual permite transformar la información de un registro a otro de distinta naturaleza, sin limitarla a ser un procedimiento manipulativo sin reflexión alguna, como cotidianamente se percibe en las tares de paso de una expresión algebraica a su respectiva gráfica, donde los estudiantes han codificado una especie de receta a seguir como es generar en un primer momento tablas, y luego con estas desarrollar un bosquejo del comportamiento de dicha expresión en su representación gráfica, sin tener conciencia sobre los procesos cognitivos que se han puesto en juego en dicha actividad.

De este modo, cuando los estudiantes realizan procesos de conversión entre los registros semióticos de representación, en el paso de la gráfica a la ecuación algebraica, éste presenta dificultades, ya que, como lo menciona Duval (1999), *las unidades significantes del gráfico (recta, curva, ...) no están de ninguna manera determinados por la relación con los puntos marcados ... Esas unidades están determinadas por algunos valores visuales de la recta (o de la curva ...), que están separados del fondo constituido por los dos ejes orientados* (p. 60). Donde solo en la medida de que el estudiante pueda realizar una discriminación entre el conjunto total de elementos presentados por la gráfica (ejes ordenados, puntos,…), identificando aquellas unidades significantes de éste (son valores de diferentes variables visuales como cortes de la curva con los ejes, intervalos en los cuales crece y decrece, concavidad, etc.), podrá realizar una aproximación al proceso de generar una conversión orientada desde el registro semiótico de representación gráfico a otro de naturaleza diferente, al articular e identificar las unidades identificadas en el registro gráfico con las características presentadas del mismo objeto matemático en su nueva forma de representación. Tal que, solo en la medida que los estudiantes discriminen estas variables, se puede aproximar a efectuar la conversión inversa a la enseñada frecuentemente.

> *De manera más general para los registros bidimensionales, y en particular para aquellos en los cuales las unidades significantes no están semióticamente separadas, se puede afirmar, de una parte, que es necesario un aprendizaje de los tratamientos que le son propios y, de otra, que el criterio de univocidad semántica es más difícil de verificar para la actividad cognitiva de conversión.* (Duval, 1999, p.61)

De esta manera, sujetos al marco teórico propuesto por Duval (1999, Pp.78-79), es de suma importancia reconocer que las unidades significantes del registro gráfico de representación, están determinadas por ocho valores visuales que corresponden a la asociación de tres variables visuales pertinentes para el registro de los gráficos cartesianos, los cuales se presentan a continuación en el Esquema 2 Variables del registro gráfico:

Esquema 2 variables del registro gráfico.

Es así, que en la coordinación entre las representaciones gráficas cartesianas y la escritura algebraica de las relaciones, hay que reconocer que la naturaleza de estos registros son totalmente diferente; tal que, *las unidades significantes del registro gráfico cartesiano no son separables ya que están integradas en una sola forma percibida, mientras que las de la escritura algebraica son discretas* (Duval, 1999, p.78). Es decir, que las unidades significantes de las gráficas están determinadas por las características conceptuales que se visualizan bajo este registro de representación, de forma que para efectuarse un cambio o transformación de éstas (unidades significantes) es necesario el cambio global de la representación.

Ampliando el carácter distintivo entre los diversos registros de representación, Duval (1999), recalca que esta distinción no se da solo a partir de las características conceptuales del objeto matemático estudiando las cuales se van a percibir en un tipo particular de registro, sino que esta distinción también se da a partir del conjunto reglas y manipulaciones cognitivas que el registro permita; o como él lo menciona *los distintos registros de representación se diferencian no solo por la naturaleza de sus significantes, sino también por el sistema de reglas que autoriza su asociación y por el número de dimensiones en que puede efectuarse esta asociación* (p. 35).

En esta medida, la actividad cognitiva presentada por los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, requiere de dos funciones primordiales pero no iguales, como son la función de **objetivación** y la de **expresión**, conforme a lo presentado por Duval (1999, p. 36), la *objetivación* es la formación de representaciones mentales nuevas en el estudiante sobre el objeto de estudio, donde el empleo de registros semióticos para representar éstas (representaciones mentales) en ocasiones no son suficientes, aceptables o comprensibles desde el punto de vista de la expresión.

En consecuencia, para realizar un proceso de conversión de un registro semiótico de representación a otro, hay que tener presente que se deben cumplir tres condiciones como son: **a)** *posibilidad de una correspondencia "semántica" de los elementos significantes* (a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental[6]); **b)** *univocidad "semántica" terminal* (a cada unidad significante elemental de la representación de partida, no le corresponde más que una única unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada); y por último, **c)** *orden del arreglo de las unidades que componen cada una de las dos representaciones* (la organización respectiva de las unidades significantes, conduce a aprehender las unidades en correspondencia semántica).

De tal forma que el uso de diversos registros semióticos de representación, ayuda a generar consciencia en los estudiantes en su proceso de aprendizaje sobre los objetos matemáticos desarrollados, ya que, fomenta en estos la reflexión y distinción constante entre el **objeto representado** y la **representación del objeto**, supliendo de esta manera que liguen el aprendizaje de los objetos matemáticos como respuesta a la representación presentada, concibiendo que *la formación de una representación semiótica es el recurso a un(os) signo(s) para actualizar la mirada de un objeto o para sustituir la visión de ese objeto* (Duval, 1999, p.43). Por otra parte, ofrece ventajas tanto a docentes como a los alumnos en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las funciones racionales, como es:

- En los alumno la posibilidad concebir el objeto matemático estudiado en más de una clase de registro de representación, permitiendo reconocer a partir de los tipos de tratamientos que se pueden efectuar, y que son propios de cada registro, características del objeto que no son perceptibles bajo las singularidades de un registro inicial; además, desde el punto de vista de la resolución de problemas, estos se pueden convertir en un medio que reduce los costos en los diversos procesos algorítmicos.

[6] Desde el enfoque teórico de Duval, una **unidad significante elemental**, es una unidad que depende del "léxico" de un registro.

- En los docentes, como se menciono anteriormente, al gestar éstos su proceso de enseñanza a partir del uso de distintos registros semióticos, los cuales pueden no ser muy conocidos para los estudiantes, genera la impresión en el docente de estar trabajando sobre el sentido mismo del objeto matemático (distinguiendo la representación del objeto), propinando en el estudiante diversos medios y "espacios" por los cuales éste se pueda expresar.

Donde *La importancia de un cambio de registro está en que, justamente, se pueden efectuar tratamientos totalmente diferentes en un registro distinto a aquel en el que fueron dadas las representaciones iniciales*. (Duval, R. p. 55), lo cual es una de las grandes potencialidades del empleo de los registros semióticos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje frente a la formación de pensamiento matemático en los estudiantes, puesto que permite dinamizar al objeto matemático estudiado explorando y reconociendo sus características a través de sus diversas representación y los tratamientos que cada una permita.

2.3 Aspectos curriculares

Los estudiantes deben de cumplir y adquirir ciertas competencias en términos de la adquisición de contenido y de procesos heurísticos que sean viables en el momento de dar solución a una actividad específica; las cuales no se dan de manera particular y bajo caprichos peculiares de las instituciones o actores (docentes, textos, etc.) que intervienen en el proceso educativo, sino que por el contrario, estas exigencias y capacidades son reglamentadas y promulgadas en los documentos curriculares expuestos por el MEN como son los *Estándares Básicos de Competencias* (2006) y los *Lineamientos Curriculares*

(1998); siendo uno de los propósitos de los Lineamientos Curriculares promover una formación matemática en los estudiantes que contribuya de forma eficaz en los fines y metas trazadas por los procesos educativos según la época y contexto sociocultural en el cual se ubica.

De modo que los Lineamientos Curriculares, con el fin de alcanzar estas metas en los procesos de educación, tienen como grandes objetivos:

- Propiciar un aprendizaje duradero en los estudiantes (a nivel cognitivo), desligándose de la denominada *enseñanza tradicional* que considera a estos (estudiantes) como una tabula rasa que debe ser llenada de información por parte del docente, siendo éste (docente) el único autor dotado de conocimiento verdadero y válido, sin contemplar las construcciones realizadas por los estudiantes como un medio de adquisición de conocimiento.
- Superar los aprendizajes de conceptos y procedimientos fragmentados, intentando fomentar un aprendizaje de carácter aplicable y útil en la solución de situaciones complejas en la cotidianidad académica y social de los estudiantes.

Para alcanzar estas metas, se debe considerar al estudiante en los procesos educativos como un actor activo en la construcción de su conocimiento, involucrándolo en actividades matemáticas permeadas de **contextos** altamente significativos, que consideren los *conocimientos básicos de la disciplina* al igual que las *habilidades* del pensamiento (variacional) requeridas en su formación matemática.

Como se ha mencionado anteriormente, este trabajo de grado, pretende fomentar un aprendizaje significativo de las funciones racionales en los estudiantes de grado noveno de la educación media en Colombia, con el fin de promover en ellos a partir de este tipo de funciones la formación de pensamiento variacional, para lo cual se debe considerar que *el* *pensamiento variacional se ubica dentro del campo conceptual que involucra conceptos y procedimientos en contextos donde la variación se encuentra como sustrato*. (Valoyes, L. & Malagón, M., 2006, p.117). Siendo de esta forma que, para fomentar en los estudiantes el desarrollo de este tipo de pensamiento, se debe hacer uso de elementos estructurales como: **contextos** (referenciados por situaciones de dependencia entre variables y situaciones donde una cantidad varia), **procesos** (de observación, descripción y registro a partir del uso de lenguaje matemático) y **sistemas de representación** (enunciados verbales, gráficas cartesianas, expresiones analíticas, formulas, etc.).

Además de estos elementos estructurales, se debe resaltar la existencia de otro factor que es de gran importancia cuando se habla de formación de pensamiento variacional en los estudiantes, como son las reflexiones que los docentes hacen frente a sus prácticas, ya que en ocasiones ellos consideran que la puesta en acto de este pensamiento (variacional) en los procesos de enseñanza debe ser a partir de grado octavo o noveno ante la incursión del algebra como objeto de estudio (a razón de empezar a emplear expresiones algebraicas en su actividad matemática las cuales determinan un patrón de formación general), desconociendo que la madurez de éste puede iniciar desde los primeros años de escolaridad a partir del *reconocimiento de las relaciones entre el pensamiento variacional y los otros tipos promovidos desde los lineamientos* (Valoyes, L. & Malagon, M. 2006, p. 118); donde algunas relaciones del pensamiento variacional con respecto a los demás tipos de pensamientos promovidos en los procesos educativos, son presentados en el Diagrama 3.

Pensamiento variacional

Se relaciona con:

El pensamiento Numérico	El pensamiento Espacial	El pensamiento Métrico	El pensamiento Aleatorio
Porque por ejemplo:	Porque por ejemplo:	Porque por ejemplo:	Porque por ejemplo:
• Es una herramienta para cuantificar la variación. • Las propiedades de los números y sus operaciones junto con otros hechos numéricos son situaciones propicias para el desarrollo el pensamiento variacional.	El pensamiento variacional permite la descripción y modelación de propiedades y movimientos de figuras, cuerpos y fenómenos en el plano y el espacio.	• Los problemas de medición son potentes herramientas para la modelación de fenómenos de proporcionalidad. • Las relaciones de variación entre perímetro y área son contextos propicios para el desarrollo conceptual del pensamiento variacional.	• Las regularidades y las tendencias de los conjuntos de datos son fenómenos pertinentes para el estudio de la variación. • La construcción y uso de tablas, gráficos circulares y cartesianos, etc., favorece la visualización de situaciones de variación.

Diagrama 3 relación del pensamiento variacional con los otros tipos de pensamientos (Valoyes, L & Malagón, R. 2006, p. 118)

Una vez se reconoce la forma como se puede articular el pensamiento variacional con los otros tipos de pensamientos en pro de contemplar que la madurez de éste en los estudiantes se puede iniciar desde los primeros grados de escolaridad, los Lineamientos Curriculares pueden ser considerados como el punto de partida para analizar el nivel de desempeño y aprehensión que presentan los estudiantes en su proceso de aprendizaje, teniendo como indicador *las actuaciones o desempeños de los estudiantes que evidencian hasta qué grado, éstos han integrado los conocimientos y procedimientos matemáticos propios del pensamiento variacional* (Valoyes, L. & Malagón, M. 2006, p. 121), determinando cuando estos puedan o no ser utilizados en contextos donde se requiere el tratamiento matemático de la variación, sin importar la naturaleza propia del contexto (matemático ó extramatemático).

De esta forma, vemos que la relación que se establece entre el pensamiento variacional y los otros tipos de pensamiento, se genera en términos de la movilización de los contextos de medida, numéricos, geométricos y de datos que son requeridos para su constitución (Valoyes, L. & Malagón, M. 2006, p.125), además cabe mencionar que la relación existente entre el pensamiento variacional con los *sistemas algebraicos*, se da en la medida que, el álgebra es una herramienta potente de representación y de descripción de fenómenos de variación.

Vemos de esta manera que el estudio de las funciones es un campo fuerte en el desarrollo de pensamiento variacional en los estudiantes, ya que la naturaleza de las funciones yacen en procesos y situaciones de variación con respecto a la dependencia y/o relación de variables, siguiendo así la línea conceptual propuesta en los Estándares Básicos de Competencias propuestos por el MEN (2006), al referenciar al pensamiento variacional con el estudio de procesos de variación, desde su percepción, su identificación en diversos contextos, la descripción que de ella (variación) puede hacerse y por ultimo por el registro cualitativo y cuantitativo de la misma (Valoyes, L. & Malagón, M. 2006, p.125).

En lo mencionado hasta el momento, se reconoce que la tarea de promover situaciones con el fin de fomentar el desarrollo de pensamiento variacional en los estudiantes, no debe estar enfocada en promover procesos directos de ejercitación o resolución de problemas que evoquen la ejercitación de procedimientos y algoritmos, sino que por el contrario, es indispensable el empleo de los elementos estructurales presentados anteriormente, los cuales aluden al uso de contextos, los cuales incitan a que los estudiantes efectúen procesos de **modelación** y **matematización**, destacando los **procesos generales** que sean más eficientes para alcanzar dichas metas. De modo que a continuación se presentan los **procesos generales** que se contemplaron potentes para la formación de pensamiento variacional a partir de las actividades propuestas en este trabajo de grado, y una caracterización de cómo intervienen los **procesos de modelación** en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

2.3.1 Procesos generales considerados en las actividades propuestas para fomentar el desarrollo de pensamiento variacional.

En el diseño de las actividades propuestas en este trabajo de grado con el fin de fomentar el desarrollo de pensamiento variacional en los estudiantes de grado noveno a partir de una aprehensión significativa del concepto de función racional por medio de la articulación de conceptos como dominio, comportamiento asintótico, equivalencia de funciones y la variable didáctica conjunto de referencia, se hace fuerte hincapié en los procesos generales de:

- **Formulación, tratamiento y resolución de problemas:** proceso que puede ser considerado como el eje central y organizador de la actividad matemática generada por los estudiantes, puesto que es inherentes a todas las actividades en las cuales ellos están expuestos en su proceso escolar, ya que si estas (actividades) se proponen a partir de considerar situaciones que sean significativas para ellos, entonces proveerá en si el contexto en el cual la actividad desarrollada por el estudiante tenga sentido.

  De modo que *la formulación, el tratamiento y la resolución de problemas suscitados por una situación problema permiten desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para* *resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas* (MEN, 2006, p.52). Por lo tanto los problemas propuestos a los estudiantes deben permitir dinamizar el objeto matemático puesto en juego de forma que los estudiantes puedan determinar diferentes medios para su resolución y la posibilidad de que este ofrezca diversas respuestas, las cuales promuevan espacios de reflexión frente a la toma de decisión por parte de ellos de cuál puede ser la correcta según la situación y el por qué de esta elección.

Ahora en relación a las actividades que se proponen en este trabajo de grado (las cuales se presentan en el capítulo posterior) este proceso general se hace evidente en ellas ante las abstracciones, percepción y reflexión que los estudiantes deben realizar sobre el objeto matemático puesto en juego respecto a su comportamiento y la incidencia en este cuando se altera de algunos de sus parámetros. Donde en caso de no ser perceptibles estos cambios en los estudiantes, ellos se ven en la obligación de conjeturar como creen que sería el comportamiento del objeto matemático de modo general y validar posteriormente la veracidad de estas llegando así a la formalización conceptual del mismo.

Una actividad que puede ejemplificar el empleo de este proceso en las actividades propuestas a los estudiantes, es la Actividad 5 de la Situación 1, en la cual los estudiantes después de haber presenciado de manera intuitiva, a través de las actividades anteriores, los cambios conceptuales que puede presentar la expresión $f(x) = \frac{1}{x}$ al compararla con las expresiones $g(x) = \frac{1}{x+1}$

y $h(x) = \frac{1}{x-1}$, tanto en su representación algebraica como gráfica, deben argumentar como son estos cambios de modo general.

Ahora para llegar los estudiantes a esta generalización, deben a través de una serie de preguntas (presentadas en la actividad) conjeturar según lo percibido en las actividades anteriores, como creen que son estas características a modo general, y luego, validar la veracidad de estas ante el hecho de graficar una serie de expresiones racionales que permiten determinar si sus conjeturas son verdaderas o falsas.

- **Comunicación:** este proceso es de gran importancia en la actividad matemática desarrollada por los estudiantes ya que es a partir de él que se da a conocer todas las consideraciones y sentido generado por ellos sobre los objetos y aspectos puestos en juego en su proceso de aprendizaje.

> *La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aun universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos.* (MEN, 2006, p. 54)

De este modo se encuentra también en la Actividad 5 de la Situación 1, un ejemplo propicio para resaltar la relevancia del proceso de comunicación en la actividad matemática generada por ellos, ya que como se menciono anteriormente, los estudiantes deben plantear conjeturas sobre el comportamiento general de un expresión racional cuando se alteran ciertos parámetros en ella, permitiendo observar así la percepción que tienen del objeto estudiando.

- **Razonamiento:** este proceso se fecunda en las organizaciones mentales que los estudiantes establecen ante los objetos observados y estudiados, los cuales son exteriorizados a partir de diversos medios comunicativos; ante esto, vemos que el desarrollo de este proceso en los estudiantes, como lo menciona el MEN (2006, p.54), inicia desde sus primeros años de escolaridad a través de las abstracciones que ellos puedan realizar de los objetos estudiados tanto en contextos como por medio de materiales físicos, determinando de este modo una posición crítica por parte de los alumnos ante su proceso de aprendizaje, comprendiendo que *las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tiene sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas* (MEN, 2006, p. 54), permitiendo justificar, validar y refutar con sentido aspectos que intervienen en su proceso de formación como son, por ejemplo, posturas teóricas, definiciones o conclusiones. Además el desarrollo de este proceso, da herramientas a los estudiantes para determinar predicciones frente al comportamiento de ciertos aspectos del objeto estudiando, y en otros casos, la posibilidad de plantear conjeturas las cuales pueden ser validadas posteriormente.

Ante esto, *es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien el razonamiento en los aspectos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proposicional apoyado en el uso de gráficas.* (MEN, 2006, p.54), de modo que en la Actividad que se ha empleado como ejemplo en los procesos mencionados anteriormente (Actividad 5, Situación 1), se puede evidenciar la forma como este proceso interviene en la actividad matemática del estudiantes, como es: en un primer momento a partir de abstracción, comparación y determinación de los parámetros a partir de los cuales pueden confrontar las expresiones racionales $f(x), g(x)$ y $h(x)$, y así en un segundo instante conjeturar y validar la veracidad de estas frente al comportamiento a nivel general que puede tomar una expresión algebraica al alterar en ella ciertos aspectos particulares.

- **Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos:** Este proceso a diferencia de los demás, compromete la actividad matemática desarrollada por los estudiantes ya que fomente la *construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados "algoritmos"* (MEN, 2006, p.55) de modo que se madure el rápido y eficaz empleo de estos por los estudiantes, articulando en conocimiento procedimental sin olvidar el conocimiento conceptual del objeto estudiando.

> *Este proceso implica compromete a los estudiantes en la construcción y ejecución segura y rápida de procedimientos mecánicos o de rutina, también llamados "algoritmos", procurando que la práctica necesaria para aumentar la velocidad y precisión de su ejecución no oscurezca la comprensión de su carácter de herramientas eficaces y útiles en unas situaciones y no en otras y que, por lo tanto, pueden modificarse, ampliarse y adecuarse a situaciones nuevas, o aun hacerse obsoletas y ser sustituidas por otras.* (MEN, 2006, p. 55)

Una de las metas de las situaciones, es privilegiar el aprendizaje significativo, por medio de actividades que no centren su atención en la manipulación de algoritmos dejando de lado las características y caracterización conceptual del objeto matemático que se está utilizando; pero no se debe desconocer que en el empleo de algoritmos, existe mecanismos cognitivos involucrados, donde, como lo menciona el MEN (2006, p.55), estos son: **a)** la *alteración de momentos* (requiere atención, control, planeación, ejecución, verificación e interpretación intermitente de resultados parciales) en los que prima el conocimiento conceptual y otros en los que prima el procedimental; **b)** la *automatización* (requiere de la repetición practica para lograr una rápida, segura y efectiva ejecución de los procedimientos), donde cabe aclarar que la automatización no contribuye en el desarrollo comprensivo y significativo del conocimiento, pero sí contribuye en la adquisición de destrezas para la ejecución fácil y rápida de ciertos tipos de tareas; y **c)** *la reflexión sobre que procedimientos y algoritmos conducen al reconocimiento de patrones y regularidades en el interior de determinado sistema simbólico y en que contribuye a su contextualización* (esta exige al estudiante poder explicar y entender los conceptos sobre los cuales un procedimiento o algoritmo se apoya, seguir la lógica que lo sustenta y saber cuándo aplicarlo de manera fiable y eficaz y cuando basta utilizar una técnica particular para obtener más rápidamente el resultado).

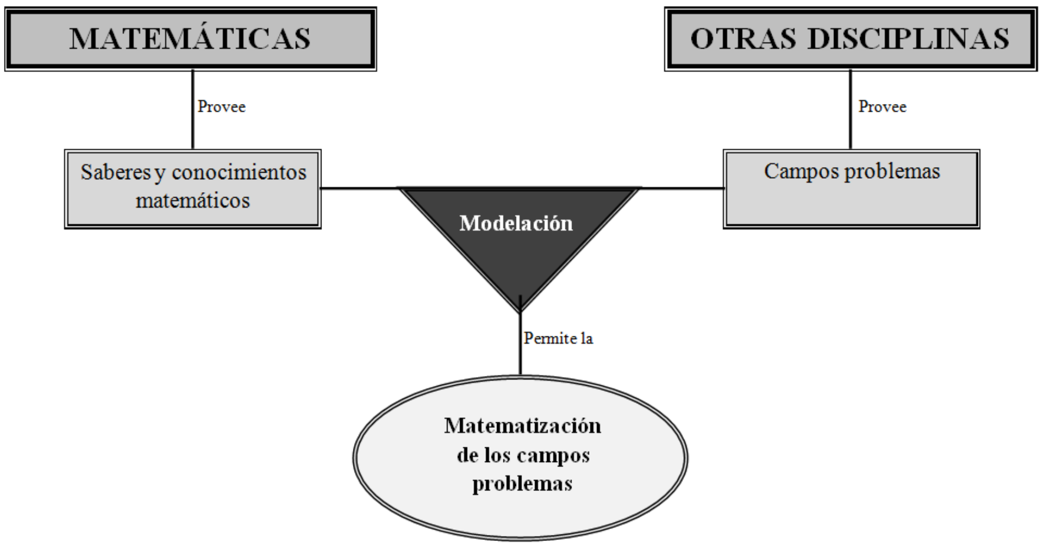
Un ejemplo de este tipo de proceso es la Actividad 2 de la Situación 2 presentada en el capítulo posterior, en la cual dada una serie de expresiones racionales, se espera que el estudiante reconozca la relación existente entre el dominio de estas con aquellos valores que indetermina la expresión. Para lograr esto la actividad es controlada por el docente al reconocer que estas expresiones son irreducibles, lo cual permite asegurar la existencia de una asíntota vertical en aquellos valores de indeterminación.

Ante lo mencionado en la caracterización de los procesos generales del MEN (2006) presentada anteriormente, se debe reconocer que: estos procesos deben ser un medio para superar los diversos obstáculos que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (MEN, 2006, p. 51), y por otro lado que no se desenvuelven de manera aislada entre sí, sino que por el contrario existe una relación cognitiva entre ellos la cual permite la articulación entre estos en ocasiones.

2.3.2 La modelación en los procesos de enseñanza y de aprendizaje

Cuando se habla de formación de pensamiento variacional en los estudiantes, no se debe desconocer ciertos procesos que son inherentes a este tipo de pensamiento como son: los **procesos de modelación de fenómenos** (matemáticos o extra-matemáticos), la **resolución de problemas**, **generalización de patrones** y las **relaciones entre números o hechos numéricos** (como es el caso de las funciones); al igual que el medio (o interface) por el cual se estructuran las representaciones mentales de los estudiantes para luego ser representadas por el empleo de los registros semióticos de representación gráfico y algebraico.

Como lo menciona el MEN (2006), el interés de la modelación matemática en los procesos de formación de pensamiento matemático en los estudiantes, se da ante la necesidad y preocupación de que ellos en su proceso de aprendizaje logren vincular sus saberes y conocimientos matemáticos con acciones de otras disciplinas; es decir, que su conocimiento matemático no se convierta en una actividad limitada solo a la disciplina de las matemáticas, sino que este sea cognitivamente una herramienta que permita a los estudiantes dar repuesta a situaciones problemas de otras disciplinas o ciencias a partir de modelar los campos problemas ó situaciones que ellas presentan por medio de los saberes y conocimientos matemáticos desarrollados en el estudiante. En el Esquema 3 presentado a continuación se intenta recoger la forma como se relacionan los objetos matemáticos con los campos problemas que provee otras disciplinas.



Esquema 3 relación interdisciplinar de las matemáticas

En el Esquema 3 se observa que la relación interdisciplinar de las matemáticas, se da a partir de la modelación, la cual actúa como un medio o puente entre ellos, tal que es a través de la matematización que se desarrolla una actitud matemática en los estudiantes sobre los campos problemas propuestos por diversas disciplinas. Lo cual obliga en las situaciones problema identificar y poner en juego el conocimiento de las posibilidades y limitaciones de un enfoque matemático y de su pertinencia (Valoyes, L. & Malagón, M. 2006, p.149).

> *El proceso de modelación implica la identificación de una situación problemática real, la cual es puesta bajo observación con el objeto de encontrar los aspectos matemáticos presentes en ella y de esta manera construir un modelo*

matemático; la puesta a prueba del modelo se da a través de su poder de predicción y descripción de los fenómenos que hacen parte de la situación problemática originaria y que permitirían su reformulación si es necesario. (p. 150)

Siendo así que la actividad algebraica que se debe proponer en el ámbito escolar, es aquella donde se considere la modelación algebraica de *campos de problemas* de diversa naturaleza (o disciplinas) por medio del instrumento algebraico (Valoyes, L. & Malagón, M. 2006), donde la relación entre los *campos de problemas*, *el modelo algebraico* y la *modelación algebraica*, se presentó en el Diagrama 1 esquematización de la modelación algebraica.

De esta manera, aunque la modelación no sea un pilar fuerte en este trabajo de grado, pero si necesario en formación de pensamiento variacional, se logra ver otra importancia y aporte de éste en los procesos de enseñanza, tal que se puede concebir la modelación matemática como una herramienta didáctica en la construcción de conceptos matemáticos, la cual ayuda a dar sentido a estos conceptos y potenciar la aplicabilidad de las matemáticas en las situaciones cotidianas de los estudiantes.

Reconociendo además, en primera lugar, que los procesos de **modelación matemática** en los estudiantes, son de suma importancia en la búsqueda de un aprendizaje significativo de los objetos matemáticos estudiados; y en segundo lugar, que se encuentra en las funciones racionales un enorme y amplio campo de aplicaciones tanto a nivel intra-matemático como extra-matemático, e interdisciplinar ya que históricamente este tipo de funciones se ha empleado como un objeto matemático que ha permitido modelar diversos fenómenos en disciplinas como la física, estadística, economía, etc., y en situaciones que evocan contextos de situación real; de modo que en estos niveles intra-matemáticos y extramatemáticos, las funciones no se presentan como objetos matemáticos inertes, sino que por el contrario, se presentan como objetos dinámicos los cuales toman forma según sea el espacio de aplicación por medio de los diversos *procesos de matematización* a los cuales han sido expuestas, lo cual ubica y da sentido a las funciones ante contextos y espacios específicos.

Ahora, es a partir del contexto en el cual las actividades son presentadas a los estudiantes que se determina el registro semiótico de representación apropiado y eficaz para su solución; se debe aclarar, que la elección del tipo de representación que se va a emplear para tratar el objeto matemático de estudio, es realizada por los estudiantes a partir de su subjetividad y posteriormente supervisada por el docente el cual cualifica la eficiencia de esta elección tanto en ahorro de procesos y tratamientos de la actividad desarrollada por el alumno, como la pertinencia de éste para resaltar la intención que presente la actividad propuesta en pro de la formación de pensamiento matemático en los estudiantes.

Es de suma importancia aclarar que, con lo mencionado hasta ahora, no se pretende fomentar la idea equivoca, respecto a que el estudio de las matemáticas desde su naturaleza abstracta sea un mal camino a tomar por los docentes, sino que por el contrario se pretende mostrar un problema que frecuenta los procesos de enseñanza y de aprendizaje en la escuela. De tal manera que no se espera que se genere una pérdida de rigor en la presentación de los objetos matemáticos a estudiar, sino que estos sean sometidos por los docentes con anterioridad a fuertes espacios de reflexión, que permitan la selección y articulación de cómo estos se van a presentar a los alumnos, de tal forma que promuevan el desarrollo de pensamiento matemático en estos al igual que caracterizar la utilidad que los objetos matemáticos pueden representar para los estudiantes en su devenir diario.

Para finalizar se presenta a continuación en el Diagrama 4 un esquema en el cual se sintetizan los problemas asociados a la enseñanza y al aprendizaje de las funciones racionales a través de registros semióticos de representación, veamos:

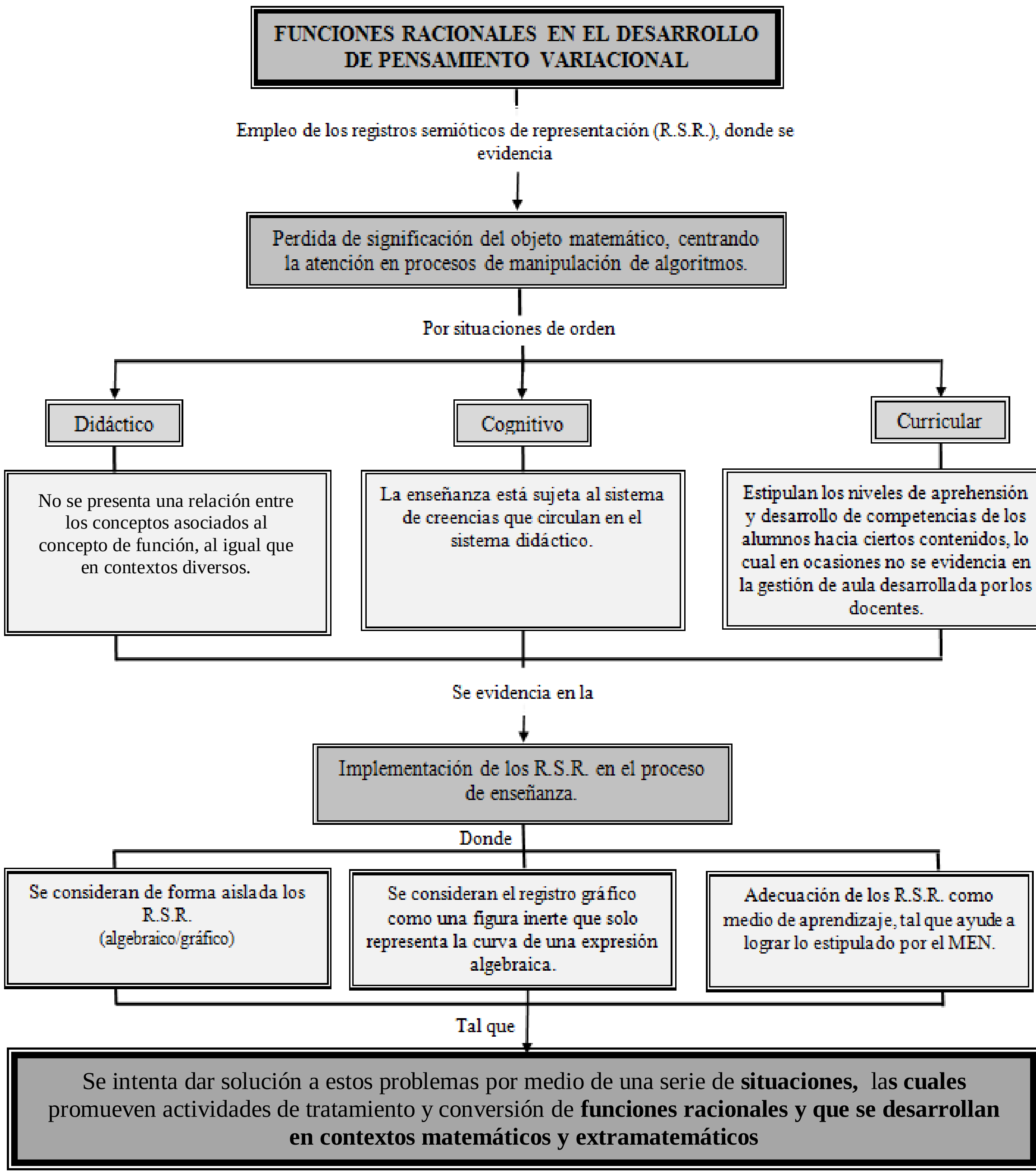
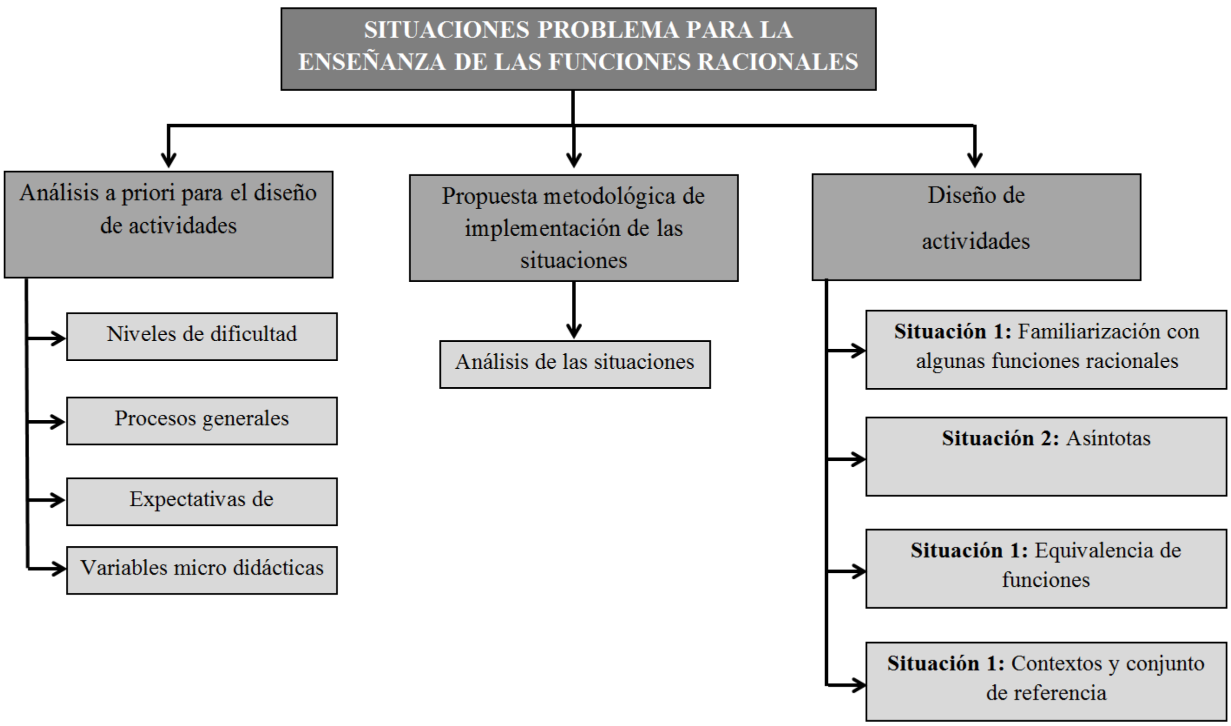


Diagrama 4 importancia de los registros semióticos de representación en la formación de pensamiento variacional

Los elementos abordados en los referentes teóricos (matemáticos, cognitivos y curriculares) mencionados anteriormente, han sido tomados en consideración en los capítulos posteriores para el diseño y organización de las actividades, donde como se evidenciará en el Capítulo 3 se inicia con un *análisis a priori* en el cual se exponen de manera puntual la importancia de los aspectos conceptuales que se emplearan el diseño de las situaciones y los criterios de análisis los cuales determinan: el nivel de dificultad de estas (basado en las operaciones cognitivas que deban realizar), procesos generales (según los expuestos por el MEN, 2006) y las expectativas de desempeño (que se espera que aprendan los estudiantes). Una vez expuesto este análisis, se presentan cuatro bloques de actividades llamados *situaciones*, donde cada una de estas estudia uno de los conceptos seleccionados para caracterizar las funciones racionales y, además, establecen la coherencia y cohesión conceptual entre ellos.

CAPÍTULO 3: SITUACIONES PROBLEMA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES RACIONALES



3.1 Análisis a Priori para el Diseño de las Actividades

Para el desarrollo del análisis de las situaciones, en primer lugar se contemplan los aspectos teóricos presentados en el Capítulo 2 referente a los tratamientos que deben realizar los estudiantes sobre los registros semióticos de representación gráfico y algebraico, y la forma como se pueden emplear las representaciones gráficas cartesianas en las actividades propuestas a los estudiantes expuestas por Lacasta & Pascual (1998).

De manera que para realizar el análisis de las situaciones y actividades que se presentan a continuación, se contemplan tres *variables de análisis macro* como son:

- Niveles de dificultad
- Procesos generales
- Expectativas de desempeño

Tal que por medio de estas variables se espera determinar de qué manera las actividades diseñadas y presentadas a los estudiantes, permite una aprehensión significativa de las funciones racionales a partir de los conceptos de interés para su caracterización y el desarrollo en la formación de pensamiento variacional de los estudiantes de grado noveno de la educación media en Colombia.

A partir de estas tres variables de análisis macro didáctico, se desligan dos características a contemplar en el análisis de las situaciones propuestas, estas se han denotado como *variables de análisis micro*, las cuales son: los **tipos de actividades** que se presentan a los estudiantes y la **forma de empleo de las representaciones gráficas** en las actividades propuestas; donde la selección de los tipos de actividades que se propone a los estudiantes se determina bajo la clasificación presentada por Blanco (1993), y la forma de empleo de las gráficas ante la categorización propuesta por Lacaste & Pascual (1998) la cual fue presentada en el Capítulo 2.

3.1.1 Los niveles de dificultad

La primer variable macro didáctica está relacionada con los niveles de dificultad, los cuales determinan el orden en el cual se presentaran las situaciones y al igual que la disposición de las actividades que se proponen dentro de cada una de estas. Dichos niveles de complejidad están asociados con las operaciones cognitivas que el estudiante puede realizar sobre los dos registros semióticos empleados (gráfico y algebraico).

En consecuencia los niveles de dificultad dependen de la actividad cognitiva desarrollada por los estudiantes la cual puede ser:

N.1: Actividad de tratamiento

N.2: Actividad de conversión

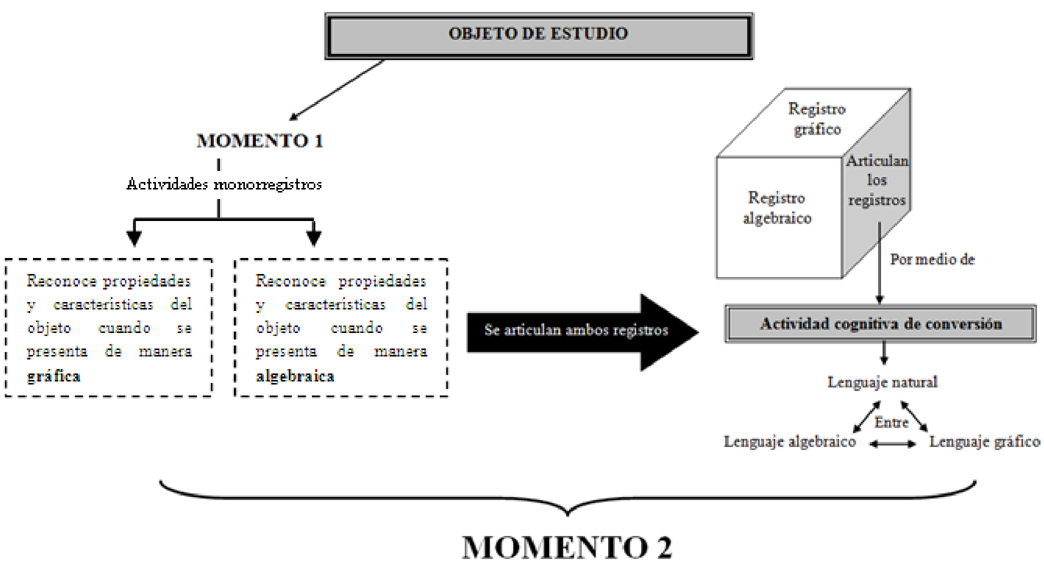


Diagrama 5 momentos en que se dividen las actividades

Así pues, se ilustra en el Diagrama 5, el Momento 1: consiste en garantizar que el estudiante domina los tratamientos propios de los registros de representación gráfica (**N.1**) y algebraica (es decir, que las actividades se enfocan solo en actividades monorregistro). El Momento 2: consiste de actividades que involucran más de un registro semiótico de representación y por tanto lo que se pone en juego es la operación cognitiva de conversión (**N.2** esto es, que se caracteriza por el fomento de actividades plurirregistro o por la articulación de por lo menos dos registros de representación semiótica para un mismo objeto matemático).

Ahora pasemos a nuestra segunda variable macro didáctica como son los procesos generales, los cuales están determinados por el tipo de actividad, clasificación presentada por Blanco (1993). Esta se pueden recoger en tres grandes grupos como son: **análisis**, **articulación de registros de representación**, y **meta cognitivo**. De modo que como se ha mencionado anteriormente es a través de estas que se pretende alcanzar uno de los principales objetivos de este trabajo alrededor de la formación de pensamiento variacional.

3.1.2 Procesos generales

En pro de un aprendizaje con sentido en los estudiantes, se debe considerar las cualidades y capacidades que pueden potenciar las preguntas propuestas según su naturaleza, es decir, si estas son:

- **Actividades de análisis:** las cuales demandan del estudiante justificar sus procesos rutinarios de manipulación de algoritmos. Es decir, que él debe dar razón de los diversos medios y herramientas que emplea para dar solución a una situación particular. Por otra parte, los procesos a emplear en este tipo de actividades expuestos por el MEN (2006) son:

P.1: Formulación, tratamiento y resolución de problemas

P.2: Comunicación

P.3: Razonamiento

P.4: Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.

- **Actividades de articulación de registros:** este tipo de actividades, hace uso de la modelación como eje central en la articulación de los registros semióticos de representación gráfico y algebraico o modelos[7], puesto que un modelo se produce para poder operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre las representaciones empleadas en la actividad matemática generada por los estudiantes.

  > *Un buen modelo mental o gráfico permite al estudiante buscar distintos caminos de solución, estimar una solución aproximada o darse cuenta de si una aparente solución encontrada a través de cálculos numéricos o algebraicos si es plausible y significativa, o si es imposible o no tiene sentido.* (MEN, 2006, p. 53)

  Por otro lado, este tipo de actividades se vincula fuertemente con los procesos de: modelación, comunicación y razonamiento, ya que, como se caracterizaron anteriormente, estos procesos articulan los objetos matemáticos estudiados desde su naturaleza y mediación promovida por el modelo, como las formas de comunicación en medio de una sociedad específica, o, a partir de las características privilegiadas en la consolidación de signos y símbolos determinados para su representación.

[7] Modelo: sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible (MEN, 2006, p. 52)

- **Actividades meta cognitivas:** en la búsqueda de un aprendizaje significativo en los estudiantes, que promueva la aprehensión de la esencia conceptual de los objetos estudiados más que de los algoritmos subyacentes a él, lleva a preguntar en medio de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes el *por qué* la selección o forma de resolver un tipo particular de actividades promovidas.

  De modo que las respuestas obtenidas concernientes a las reflexiones que los estudiantes hayan hecho sobre los procesos empleados para solucionar las actividades, permite al docente identificar la posible caracterización que ellos han hecho de los objetos estudiados sin limitarse a concebir que el aprendizaje ha sido eficiente tan solo por la obtención de respuestas correctas en las actividades, sino que por el contrario, se centra la atención en los procesos realizados por los estudiantes de manera significativa, tal que la manipulación correcta de algoritmos sea una de las tantas variables a considerar en la correcta aprehensión de los objetos matemáticos.

3.1.3 Expectativas de desempeño

Cuando se habla de expectativas y desempeños, se refiere a las habilidades que el estudiante debe adquirir por medio de las actividades y situaciones propuestas, es decir, como lo menciona en el MEN (1997, p. 13) que estas se refieren a *operaciones intelectuales o procesos mentales sobre el quehacer matemático*.

Luego, para el caso de las situaciones que se van a proponer se hace fuerte énfasis en expectativas de desempeño como:

D.1: Transforma por manipulación algebraica una expresión racional en otra que sea equivalente.

D.2: Selecciona o construye representaciones equivalentes de funciones racionales.

D.3: Construye gráficamente en sistemas coordenados por medio de dibujos por puntos o el uso de propiedades conocidas de los objetos que se están siendo graficados.

D.4: Lee e interpreta una presentación de datos presentados en un registro tabular para responder a una pregunta.

D.5: Selecciona una representación adecuada de los objetos estudiados para una comunicación dada o para una situación de resolución de un problema.

D.6: Compara y contrasta dos representaciones de un mismo objeto matemático.

D.7: Reconoce o utiliza la relación entre dos representaciones de un mismo objeto.

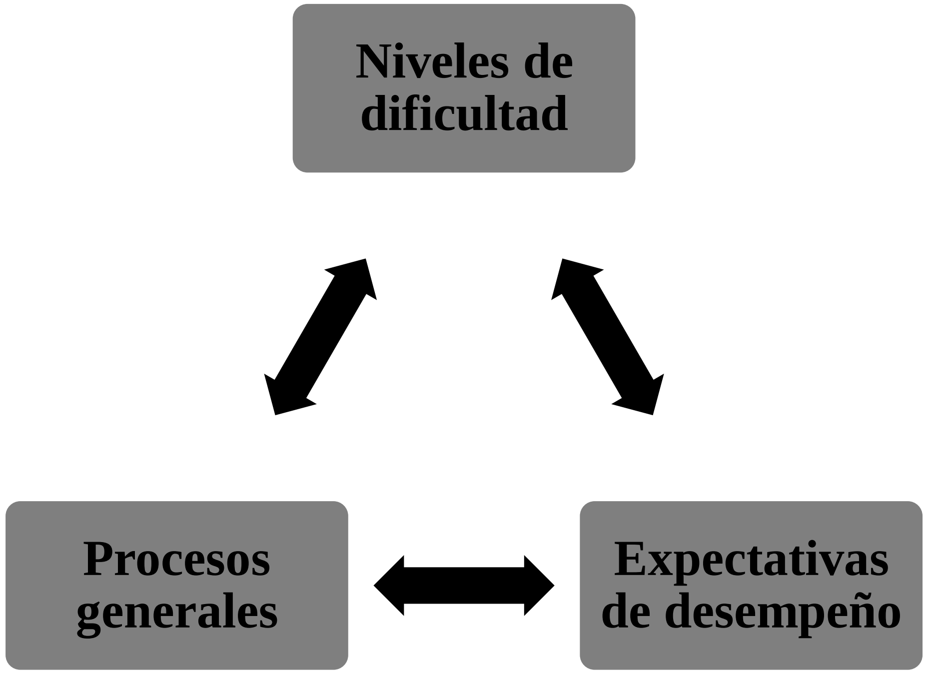
D.8: Encuentra objetos relacionados entre sí, por medio de transformaciones, ecuaciones equivalentes bajo manipulación algebraica.

D.9: Describe el efecto de un cambio en una situación representada en un registro gráfico (efecto producido sobre una gráfica al cambiar uno de los parámetros).

D.10: Predice mediante el análisis de su comportamiento la forma general de éste en un punto muy lejano.

D.11: Selecciona o construye una representación matemática de un problema (situación representada del mundo real).

Para concluir se observa que los tres criterios de análisis: niveles de dificultad, procesos generales y expectativas de desempeños; se encuentran relacionadas entre sí (como se ve en la **Gráfica 2**) con el fin de armonizar y hacer concreto los objetivos que debe tener cada una de las situaciones presentadas en pro de dar respuesta a los objetivos planteados en la investigación, al igual que a fomentar una aprehensión significativa del concepto de función racional y la formación de pensamiento variacional en los estudiantes de grado noveno.



Gráfica 1 relación entre los criterios de análisis

Cuando se habla de uno de los criterios de la triada niveles de dificultad, procesos generales y expectativas de desempeño, es difícil hacerlo en ausencia de los demás, ya que cuando hablamos de los niveles de dificultad se debe vislumbrar que tipo de procesos se encuentran inmersos en dichos niveles y que se espera que logren los estudiantes por medio de estos; de forma similar sucede cuando el punto de partida de partida de la discusión se da desde uno de los otros dos criterios. Esto se da por el hecho que como es sabido los procesos de enseñanza deben tener claro su intención didáctica en el momento de ser impartido de forma que se encuentre inmerso en las diversas dinámicas sociales donde se imparte dicho proceso.

3.1.4 Variables micro didácticas

Las primera variables micro didácticas son el **tipo de actividades** que se pueden presentar a los estudiantes, las cuales pueden ser:

E.1: ejercicios de reconocimiento

E.2: ejercicios algorítmicos o de repetición

E.3: problemas de traducción simple o compleja

E.4: problemas de procesos

E.5: problemas sobre situaciones reales

E.6: problemas de investigación matemática

E.7: problemas de puzle

E.8: historias matemáticas.

Dependiendo del tipo de actividades propuesta a los estudiantes se articula el desarrollo de su actividad matemática, ya que determinan la dinámica para abordar el concepto matemático de interés.

Vale recordar que para el trabajo de grado se optó por caracterizar el concepto general de función desde la postura de Azcárate & Deulofeu (1990, p.17) los cuales consideran que *una función no es más que una ley que regula la dependencia entre cantidades u objetos variables*. Sin desconocer en este (concepto de función) su forma de operar como una regla de correspondencia generalizada a procesos de cambio.

Ahora, para pensar en el tipo de actividades que ayudaran a potenciar dicho pensamiento, es importante revisar la definición dada por Blanco (1993) para cada uno de los ocho tipos que mencionamos con anterioridad, veamos:

- **Ejercicios de reconocimiento (E.1):** son ejercicios con los cuales se pretende resolver, reconocer o recordar un factor específico, una definición o una proposición de un teorema.
- **Ejercicios algorítmicos o de repetición (E.2):** son ejercicios que pueden ser resueltos con un proceso algorítmico, donde estos tratan de reforzar alguna expresión matemática o potenciar habilidades de cálculo.
- **Problemas de traducción[8] simple o compleja (E.3):** son problemas formulados en un contexto concreto y cuya resolución supone la conversión de un enunciado, oral o escrito, a una expresión matemática. Es importante reconocer que en éste tipo de problemas aparece en el enunciado toda la información necesaria para la resolución del mismo y en ocasiones, implícitamente, hace evidente la estrategia a seguir (Blanco, L., 1993, p. 51).
- **Problemas de procesos (E.4):** este tipo de ejercicios difiere de los demás en que la forma de cálculo no aparece claramente delimitada, generando de esta forma la posibilidad de conjeturar varios caminos para encontrar la solución.
- **Problemas sobre situaciones reales (E.5):** son actividades lo más cercanas posibles a situaciones reales que requieren el uso de habilidades, conceptos y procesos matemáticos. Estos problemas dan oportunidad a la construcción de diagramas, estimaciones, cálculo de las medidas, procesos de análisis y síntesis, pero sobre todo ayudan a comprender el significado de las matemáticas y su relación con la realidad.

[8] Se entenderá en este caso el término **traducción** de forma similar a **conversión**.

- **Problemas de investigación matemática (E.6):** son problemas directamente relacionados con contenidos matemáticos, cuyas proposiciones pueden no contener ninguna estrategia para representarlos, y sugieren la búsqueda de algún modelo para encontrar la solución.
- **Problemas de Puzles (E.7):** en estos problemas se pretende mostrar el potencial recreativo de las matemáticas. Obliga a flexibilizar la forma de abordar un problema y a considerar varias perspectivas para su análisis ya que normalmente el contexto y la formulación que se hacen de estos problemas suele ser engañosa. Posiblemente su solución necesariamente no supone procesos matemáticos y pueden resolverse mediante una idea.
- **Historias matemáticas (E.8):** se caracteriza bajo la articulación disciplinar entre textos como libros de cuentos, novelas, etc., en las cuales promulguen algunas propuestas o planteamientos que requieran de algún esfuerzo para evidenciar el concepto matemático puesto en juego.

La segunda variable micro didáctica está relacionada con la **Forma como el estudiante emplea la representación gráfica:** en las actividades propuestas en cada una de las situaciones se emplean frecuentemente representaciones gráficas, las cuales según sea su forma de uso se pueden clasificar en 6 grupos según Lacasta & Pascual (1998); estos grupos son:

G1: funcionamiento como ábaco

G2: funcionamiento como mensaje topológico

G3: funcionamiento como ideograma

G4: funcionamiento como elemento interactivo

G5: funcionamiento como estructura matemática

Teniendo en cuenta estos dos paquetes de variables de análisis con sus respectivos criterios, a continuación se realiza el análisis de cada una de las situaciones con sus correspondientes actividades. Antes de iniciar la lectura de estos, se presenta al lector la notación que se empleara en este análisis para indicar la actividad (o actividades) que se esté estudiando, a partir de las siguientes siglas:

Sn: denota la situación en la cual se está trabajando, de modo que $n = 1, 2, 3, 4$.

An: denota la actividad en la cual se está trabajando, de modo que $n \in \mathbb{N}$.

Como ejemplo, la siguiente notación **S1:A1:1-3** demarca que se está trabajando los ítems 1, 2 y 3 de la Actividad 1(**A1**) presentada en la Situación 1 (**S1**).

3.2 Propuesta metodológica de implementación de las situaciones

Para iniciar, es importante hacer clara la distinción existente entre *situación* y *actividad*, donde como lo exponen los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (MEN, 2006, p. 72):

- **Situación:** se entiende como el conjunto de problemas, proyectos, investigaciones, construcciones instrucciones y relatos que se elaboran basados en las matemática, en otras ciencias y en los contextos cotidianos y que en su tratamiento trata de generar un aprendizaje en los estudiantes.
- **Actividad:** obedece al trabajo intelectual que realizan o desarrollan los estudiantes a nivel individual y grupal, como es definir estrategias para

interpretar, analizar, modelar y reformular la situación; formular preguntas y problemas entre otras.

Puesto que es a partir de estos principios que se organizan los procesos de enseñanza y de aprendizaje intentando promover un aprendizaje significativo en los estudiantes, basándose en el desarrollo y empleo de estructuras curriculares las cuales orientan el desarrollo de competencias.

Teniendo en cuenta la distinción conceptual entre situación y actividad, es responsabilidad del docente en medio de su gestión de aula velar por la coherencia de los diversos conceptos matemáticos puestos en juego en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, de manera que estos se engranen de forma coherente y sea evidente para el estudiante la red conceptual existente entre estos.

De este modo, este trabajo de grado propone una gran cantidad de actividades articuladas en cuatro situaciones las cuales estudian los conceptos de asíntotas, equivalencia definiciones y conjunto de referencia con el objeto de caracterizar a través de estos el concepto de función racional, las cuales pueden ser seleccionadas, analizadas y estructuradas por los docentes en nuevas y cortas secuencias didácticas ajustadas al tiempo que el disponga en sus clases para su estudio.

Además, se deja a responsabilidad del docente lector el empleo de otros medios en el estudio y solución de las diversas actividades propuestas en la secuencia, como puede ser por ejemplo, el empleo de software que le permitan al estudiante generar conclusiones en el menor tiempo posible, en donde el interés no consiste en ver si el estudiante sabe o no graficar, sino en la posibilidad de reconocer lo que varía y como varía, como es el caso de la **S1:A5:3**, la cual puede ser extensa en su estudio a lápiz y papal por la construcción de las diversas gráficas que se emplearan para determinar la forma como interviene la alteración de un parámetro tanto en su representación gráfica como algebraica; Siendo así que el empleo de recursos tecnológicos o software dinámicos se convierten en una herramienta potente en los fines que se espera alcanzar en dicha actividad, ya que se desentiende a los estudiantes del proceso de graficación, centrando su atención en un aspecto de gran importancia como es determinar los cambios que se presenta en los objetos matemáticos estudiados cuando se altera alguno de sus parámetros a partir del dinamismo que ofrece los programas.

Respecto a la secuencia formada por el docente lector, a través de las actividades que se presenta en el apartado 3.3 de diseño de actividades, la cual el docente articula contemplando el tiempo que puede dispones de su clase para desarrollarla, se espera que este se haga bajo los criterios de solución que se ha trazado en la secuencia inicial que se presenta en el este trabajo, la cual:

1. Propone una fase exploratoria, en la cual los estudiantes por medio de sus sentidos identifican los conceptos que se van a estudiar, a través de tareas donde se alteran parámetros y se espera que ellos identifiquen los cambios que estos producen en sus representaciones gráficas y algebraicas
2. Una vez identificados los cambios que se dan en los registros semióticos de representación cuando se altera un parámetro en ellos, los estudiantes deben plantear conjeturas donde intentan generalizar estos comportamientos, intentando acercarse a una presentación conceptual de ellos.
3. El docente hace una presentación conceptual de los objetos matemáticos que intervienen hasta ese instante de estudio, apoyado en los aspectos teóricos que se presentan en los **cuadros conceptuales** de la secuencia, los cuales recogen los aspectos teóricos relevantes hasta dicho instante.

4. Una vez presentados los aspectos conceptuales por parte del docente, el estudiante debe validar sus construcciones teóricas y conjeturas realizas, las cuales posteriormente son puestas en acción a través de procesos de ejercitación.

Es así, que para fomentar el desarrollo del pensamiento variacional, se deben enriquecer las actividades propuestas, por medio de escenarios en los cuales prevalezcan los fenómenos de cambio y de variación en medio de la práctica a partir de la variación numérica continua y la variación numérica discreta, de forma que sea la variación el medio potenciador y genético de la actividad matemática a desarrollar.

En dichas actividades, el docente debe fomentar en él estudiante la observación y análisis general sobre el modelo, de tal forma que sea visible el fenómeno de variación presente y lo pueda traslapar a otros contextos. Contrario a esto, el docente debe tratar de evitar que las actividades centren su atención solo en particularidades o situaciones puntuales-numéricas[9] del fenómeno desligándolo del contexto que lo permea.

Siendo así que los docentes deben ser cautelosos en el momento de elegir o emplear contextos en las actividades propuestas a los estudiantes, en que las situaciones promovidas sean realmente significativas y que la articulación de los enunciados y datos promovidos en el caso de situaciones que evoquen actividades de la vida cotidiana del estudiantes o de la vida real, sean coherentes y validables desde la experiencia, de tal manera que no se conviertan en una falacia disfrazada por el ejemplo de contextos.

> *El contexto del aprendizaje de las matemáticas es el lugar – no sólo físico, sino ante todo sociocultural – desde donde se construye sentido y significado para las actividades y los contextos matemáticos, y por lo tanto, desde donde se establecen conexiones con la vida de los estudiantes y sus familias, con las*

[9] Contemplaremos las situaciones puntuales-numéricas, como aquellas donde tan solo se pide al estudiante dar el valor de la curva o función en un punto específico sin dar razón del por qué dicho valor se presenta ante las características del modelo.

demás actividades de la institución educativa y, en particular, con las demás actividades de la institución educativa y, en particular, con los demás ciencias y con otros ámbitos de las matemáticas mismas. (MEN, 2006, p.70)

En concordancia con lo mencionado anteriormente, se debe considerar el carácter mediático de los contextos no solo como aquellas actividades que coexisten o son visibles en los procesos o actividades realizadas por los estudiantes en su cotidianidad, sino que por el contrario, como lo menciona el MEN en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006, p.71) estos contextos pueden coexistir en un espacio de naturaleza meramente matemático, donde las situaciones problemas promovidas en el aula pueden parecer teóricas y alejadas de los contextos extraescolar o sociocultural para un observador externo, sin reconocer que estas pueden estar muy bien contextualizadas en el ambiente de estudio e investigación que el docente ha logrado crear en el contexto inmediato de su aula.

Luego, el tipo de actividades que se presenta a los estudiantes no se da a través de una selección caprichosa de los docentes, sino que estas aparecen como respuesta a los **procesos generales** que se espera potenciar en ellos, donde estas actividades hacen fuerte énfasis en no limitarse solo a la resolución repetitiva de problemas de manipulación de algoritmos sino que busca incentivar a los estudiantes a comunicar y dar razón de los procesos empleados y del por qué empleo estos como medio de solución de su actividad.

A continuación se presenta el análisis de cada una de las situaciones propuestas, teniendo en cuenta los criterios mencionados hasta ahora. Las cuales pretenden fomentar el desarrollo de pensamiento variacional en los estudiantes, a partir de promover momentos de reflexión y análisis sobre los conceptos que permiten reconocer y sintetizar los procesos y situaciones de variación que se genera en medio de la actividad matemática.

3.2.1 Análisis de las situaciones

A continuación se presenta el análisis de las actividades propuestas en cada una de las situaciones, considerando las variables de análisis macro y micro presentadas anteriormente.

Análisis situación 1: familiarización con algunas funciones racionales

La primera situación, tiene como propósito acercar un poco a los estudiantes a conocer este nuevo tipo de funciones a estudiar (funciones racionales), las cuales presentan un fuerte cambio conceptual con respecto a las funciones polinómicas que los estudiantes de grado noveno de la educación media en Colombia han estudiado hasta el momento.

Este cambio conceptual, radica en la posible discontinuidad que pueden presentar las funciones racionales en su dominio y el comportamiento que toma esta en vecindades alrededor de los valores donde presenta discontinuidad; siendo este tipo de estudio y análisis respecto al comportamiento de una función racional nuevo para los estudiantes, ya que como se mencionó anteriormente, hasta grado noveno la actividad de aprendizaje se ha realizado con funciones polinómicas, las cuales no presentan problemas de discontinuidad puesto que son continuas en todo su dominio.

De este modo, S1:A1 y S1:A2, presenta estos cambios conceptuales respecto a la expresión algebraica $F(x) = \frac{1}{x}$ y $G(x) = \frac{1}{x+1}$, a través de la discontinuidad de $F(x)$ en su dominio cuando $x = 0$ y $G(x)$ cuando $x = -1$; una vez sean incuestionables estas discontinuidades, empleando las gráficas 1 y 2 se espera que los estudiantes identifique y reconozcan ciertos patrones de regularidad con respecto a las expresiones estudiadas, donde el registro gráfico se convierte en el medio de control de la actividad matemática a desarrollar, por ser éste registro el que provee la información necesaria para el análisis, reflexión y decisión de respuestas de las actividades propuestas.

De tal manera que bajo la clasificación presentada por Lacasta & Pascual (1998), los gráfico cartesianos se emplea en éste caso como: **ábaco** (al determinar la imagen de las funciones $F(x)$ y $G(x)$ para algunos valores x^* de sus dominios los cuales se emplean como material de análisis de la actividad que se vaya a responder), **mensaje topológico** (al identificar y reconocer ciertas características del comportamiento gráfico de las funciones $F(x)$ y $G(x)$, por ejemplo si la curva es creciente o decreciente alrededor de sus puntos de discontinuidad) y **elemento interactivo** (el registro gráfico se convierte en el proveedor de información para la gestión de la actividad que deba resolver el estudiante).

Respecto a los niveles de dificultad, la actividad matemática que desarrollan los estudiantes en estas dos primeras actividades se genera a partir de la actividad cognitiva de **tratamiento**, puesto que es necesario que los estudiantes manipulen, transformen y extraigan de los registros gráficos de las funciones racionales $F(x)$ y $G(x)$ la información que sea necesaria y pertinente para analizar las diversas tareas propuestas. Luego, por medio de los procesos generales de **comunicación** y **razonamiento**, deben conjeturar y dar razón de las interpretaciones hechas de los datos, de forma que puedan describir a partir de la intuición el comportamiento general de estas representaciones gráficas en cualquier punto de su dominio que sea muy cercano ó lejano de su valor de discontinuidad, y determinar cómo el cambio de alguno de los parámetros de la expresión algebraica afecta su representación gráfica y de qué manera.

Para el caso de la Actividad 3 (A3), ésta en su estructura general presenta el mismo tipo de actividades y objetivos que las dos anteriores A1 y A2 [S1:A3: a-c], centrando su estudio en la expresión $H(x) = \frac{1}{x-1}$. La diferencia de A3 respecto a las dos actividades anteriores, es por la aparición de ejercicios que posibilitan comparar el comportamiento gráfico y algebraico de las tres expresiones estudiadas hasta el momento $F(x)$, $G(x)$ y $H(x)$; [S1:A3:d] con el fin que los estudiantes puedan a partir de comparar estas tres funciones racionales determinar ciertas características y relaciones entre sus representaciones algebraicas y sus gráficas.

Hay que mencionar que este nuevo ítem propuesto en la Actividad 3, busca que la relación y las características identificadas entre las expresiones $F(x)$, $G(x)$ y $H(x)$ con respecto a sus representaciones gráficas, no se haga de forma aislada como hasta el momento, sino que pretende que los estudiantes puedan identificar relaciones y patrones a nivel comparativo entre las tres expresiones estudiadas a partir de formular conjeturas respecto a la forma y parámetros que se evidencian en la gráfica y la forma como esto incide en su representación algebraica.

Donde, una vez sea ha identificado el denominador como uno de los parámetros de relación entre las tres expresiones racionales $F(x), G(x)$ y $H(x)$, la **Tabla 1.3** presentada en [S1:A3] tiene como propósito ayudar a que los estudiantes identifiquen, a partir de comparar los comportamientos de las imágenes de las funciones $F(x), G(x)$ y $H(x)$ (en los valores particulares de $x = \{0, -1, 1\}$ respectivamente) el desplazamiento de la representación gráfica de las funciones $G(x)$ y $H(x)$ una unidad hacia la izquierda ($H(x)$) ó hacia la derecha ($G(x)$) respecto a la función $F(x)$; relacionando este aspecto al cambio de forma en el denominador que presentan las expresiones algebraicas con respecto a la expresión $F(x) = \frac{1}{x}$.

Esto permite reconocer de forma intuitiva y parcial un patrón de regularidad entre una familia de expresiones algebraicas con una característica similar respecto a la variación de sus representaciones gráficas, como es en éste caso una familia de expresiones de la forma $\frac{1}{x-a}$ para $a \in \mathbb{Z}$, donde si $a = 0$ se obtiene la expresión inicial $\frac{1}{x}$, pero si $a \neq 0$ se presentan dos tipos de variaciones tanto de la expresión algebraica y en su comportamiento gráfico, las cuales son:

- Si $a > 0$ la familia de expresiones son de la forma $\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x-(+a)}$, garantizando así que la representación gráfica de estas se pueden obtener desplazando a unidades hacia la **derecha** sobre el eje x (sentido positivo del eje x) del sistema de coordenadas cartesianas la expresión $\frac{1}{x}$.
- Si $a < 0$ la familia de expresiones son de la forma $\frac{1}{x-(-a)} = \frac{1}{x+a}$ y su representación gráfica se puede obtener a partir de desplazar hacia la **izquierda** sobre el eje x del sistema de coordenadas cartesianas en a unidades la expresión $\frac{1}{x}$.

Donde este comportamiento se intenta formalizar posteriormente en la Actividad 5 [S1:A5], al identificar los estudiantes que el sentido en el cual se desplaza la expresión racional en este tipo de funciones, está dado por la magnitud ó signo que acompaña a la constante a. Siendo esta actividad potenciadora en la formación de pensamiento variacional puesto que promueve que el estudiante identifique patrones de regularidad que relacionan el comportamiento gráfico de una función racional con respecto a su expresión algebraica.

Por lo mencionado hasta el momento, se puede decir a groso modo, que una vez identificados ciertos parámetros de cambio que relacionan a las tres expresiones $F(x)$, $G(x)$ y $H(x)$, se espera que los estudiantes determinen como el cambio de estos parámetros afecta o genera un cambio en su representación gráfica, mostrando la relación entre la forma como se comporta gráficamente un función (respecto al desplazamiento sobre el eje x, y la forma de su expresión algebraica, como se muestra en el Diagrama 6 presentado a continuación.

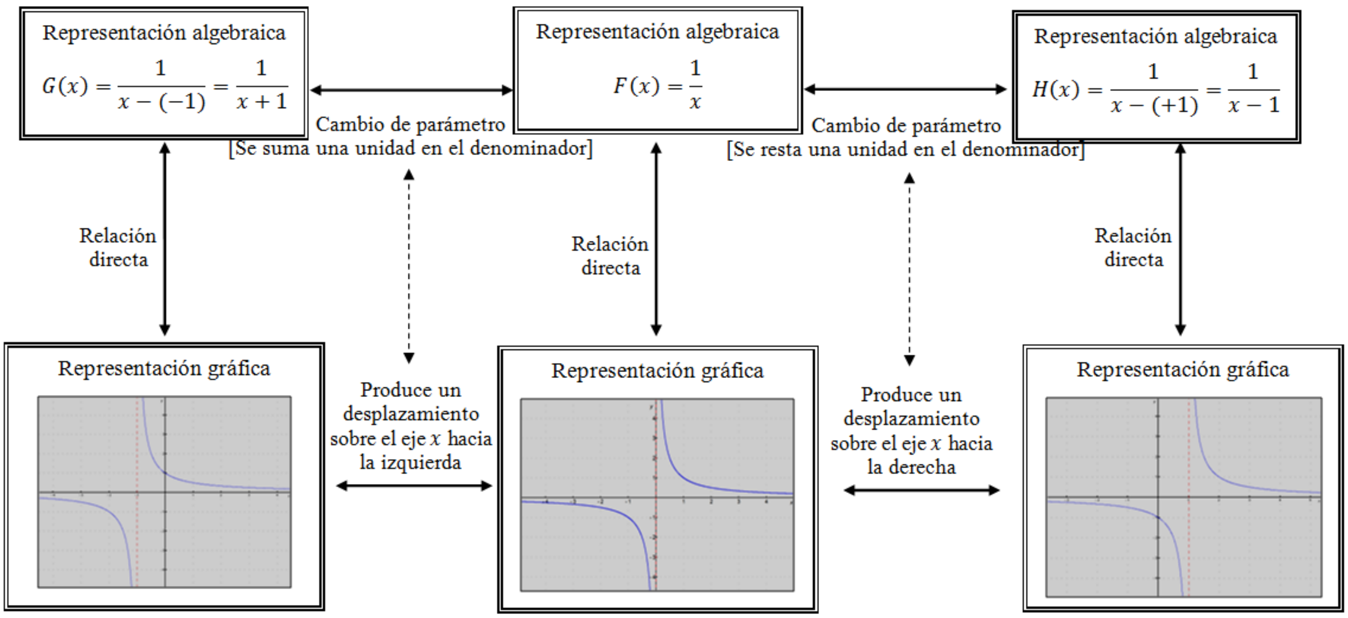


Diagrama 6 expresión algebraica Vs desplazamiento sobre el eje x

Por medio del Diagrama 6, presentado anteriormente, se enseña la relación directa que existe entre cada una de las expresiones racionales estudiadas $F(x), G(x)$ y $H(x)$ con respecto a su representación gráfica, ya que tanto la representación algebraica como la gráfica son dos medios distintos para representar el objeto matemático de estudio (líneas finas de doble flecha orientadas de forma vertical); y además la relación directa que se puede establecer entre las distintas representaciones algebraicas y gráficas (líneas finas de doble flecha orientadas de forma horizontal) de las funciones $F(x), G(x)$ y $H(x)$ respecto a los diversos cambios transitorios que presente el parámetro de relación que se ha establecido entre ellas (líneas punteadas de doble flecha orientadas de forma vertical).

Una vez estudiada e identificada todas las posibles variaciones que puede sufrir la expresión algebraica $F(x) = \frac{1}{x}$ con relación al desplazamiento sobre el eje x de su representación gráfica al sumar o restar una constate a en su denominador, la Actividad 4 (A4) realiza el estudio de la variación de $F(x)$ cuando esta se desplaza sobre el eje y. Para este nuevo caso de estudio, la expresión algebraica que se quiere generalizar y colocar en relación con las transformaciones de $F(x)$, esta dada por la expresión $\frac{1}{x} + b$ para $b \in \mathbb{Z}$, convirtiéndose en el insumo de la actividad matemática a generar los estudiantes.

Para iniciar este estudio, se presenta a los estudiantes un paquete de cinco representaciones gráficas con su respectiva expresión algebraica de la forma $\frac{1}{x} + b$, con las cuales, se espera que ellos a través de realizar tratamientos sobre estas representaciones hallen los valores de las funciones para una serie de puntos específicos los cuales deben luego organizar en la Tabla 1.4 [S1:A4:a-b].

Una vez hayan organizado los datos en la Tabla 1.4, se espera que los estudiantes evidencien que así como el desplazamiento de la representación gráfica a lo largo del eje x se daba por él cambio explícito de un parámetro sobre la expresión algebraica, su desplazamiento sobre el eje y también se genera por el cambio específico de un parámetro sobre la expresión $F(x) = \frac{1}{x}$, siendo en este caso la suma de una constante b ($b \in \mathbb{Z}$), modificando la expresión algebraica a la forma $\frac{1}{x} + b$; donde:

- Si $b > 0$, la expresión algebraica es de la forma $\frac{1}{x} + (+b) = \frac{1}{x} + b$, y su representación gráfica se desplaza b unidades en sentido positivo al eje y del sistema de coordenadas cartesianas con respecto a la gráfica de la expresión $\frac{1}{x}$.

- Si $b < 0$, la expresión algebraica es de la forma $\frac{1}{x} + (-b) = \frac{1}{x} - b$, y su representación gráfica se desplaza hacia abajo b unidades sobre el eje y del sistema de coordenadas cartesianas respecto a la gráfica de la expresión $\frac{1}{x}$.

De este modo, el empleo de la Tabla 1.4, permite que los estudiantes conjeturen e identifiquen el patrón de regularidad que existe entre la representación gráfica de la expresión $f(x) + b = \frac{1}{x} + b$ y su desplazamiento sobre el eje y para los casos donde $b = 0, b > 0$ y $b < 0$, siendo esto un fuerte aspecto conceptual para la formación de pensamiento variacional de los estudiantes, por el hecho de poder identificar y comunicar procesos de generalidad sobre una expresión, respecto a su comportamiento.

Luego de que ellos hayan organizado y analizado los datos de la Tabla 1.4, por medio de los ítems **c** y **d** [S1:A:c-d], se verifica si el nivel de apreciación que ellos han tenido con respecto a la variación de la expresión $\frac{1}{x}$ sobre el eje y es el esperado, por medio de enunciados que ellos deben completar de tal forma que den razón de la característica de estudio particular.

Hasta el momento las representaciones gráficas han jugado un papel importante en la actividad matemática desarrollada por los estudiantes, convirtiéndose en la herramienta primordial de información para identificar de forma exploratoria las características que se esperan los estudiantes detecten sobre las funciones racionales de estudio, por medio de la actividad cognitiva de tratamiento, las cuales posteriormente se formalizan conceptualmente.

La Actividad 5 (A5) marca una fuerte diferencia en la forma de análisis con respecto de las actividades anteriores, ya que actúa sobre el objeto matemático mismo de manera formal sin apoyarse en la intuición que prevé la representación gráfica. Esta actividad, tiene como objetivo que los estudiantes conjeturen de forma general los procesos de variación que se han estudiado en las actividades anteriores, y validen los conceptos construidos hasta el momento por medio de la intuición.

Este proceso de formalización respecto a las variaciones que puede presentar la expresión $\frac{1}{x}$ tanto en su expresión algebraica como en su representación gráfica cuando se desplaza a través de los ejes x e y, inicia en el análisis y reflexión de los diversos cambios percibidos en la expresión $\frac{1}{x}$, cuando es llevada a la forma $\frac{1}{x-a}$ y $\frac{1}{x}+b$ para $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$, destacando las variaciones y características tienen en cada uno de estos las constantes a y b [S1:A5:a], y posteriormente, los cambios percibidos en situaciones donde la función $\frac{1}{x}$ sufra las dos transformaciones simultáneamente $\frac{1}{x-a}+b$ [S1:A5:b], según lo percibido en el estudio intuitivo que se realizó anteriormente.

Posteriormente [S1:A5:c], los estudiantes deben verificar la validez de las conjeturas que presentaron anteriormente con respecto al comportamiento y variaciones que presenta la expresión $\frac{1}{x}$ cuando es llevada a la forma $\frac{1}{x-a}+b$ para $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$; para esto, se provee a los estudiantes una serie de expresiones algebraicas de este tipo, a las cuales deben bosquejar su comportamiento gráfico, siendo por esta actividad de **conversión** de registros que los estudiantes puedan estipular que tan ciertas y validas fueron las conjeturas presentadas, y de ser el caso corregirlo. De modo que las preguntas empleadas tienen como finalidad ser más de análisis que de procedimiento o manipulación, donde el estudiante se ve obligado a generalizar los diversos procesos que efectúo anteriormente.

La Actividad 6, introduce el estudio de una nueva expresión racional $g(x) = \frac{1}{x^2}$, marcando la aparición de esta por medio de un proceso de comparación con la expresión que hasta el momento ha sido elemento de insumo conceptual $f(x) = \frac{1}{x}$. Esta comparación se da por medio de la Tabla 1.6 [S1:A6:a] la cual permite que los estudiantes diferencien el comportamiento de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$, a través de los aspectos topológicos presentados por cada una de ellas, como es por ejemplo que, aunque ambas presentan el mismo punto de discontinuidad, el comportamiento gráfico antes y después de éste valor no es el mismo en ellas, ya que el trazo de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ antes de $x = 0$ se encuentra por debajo del eje coordenado x y después de él está por encima del eje coordenado x; mientras que en el caso de $g(x) = \frac{1}{x^2}$ esto no ocurre, puesto que antes y después de $x = 0$ el trazo de su representación gráfica está por encima del eje coordenado x.

Hecha la presentación de esta nueva expresión racional $g(x) = \frac{1}{x^2}$ a partir de compararla con la ya conocida $f(x) = \frac{1}{x}$, [S1:A6:e-f], centran su atención en características de la expresión $g(x)$, como es conjeturar cambios que se dan con respecto a la representación gráfica de la expresión $g(x) = \frac{1}{x^2}$ cuando esta es llevada a la forma $g(x - 4) = r(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ [S1:A6:e] y el reconocimiento de aspectos topológicos característicos de la expresión $g(x) = \frac{1}{x^2}$ [S1:A6:e], donde se espera que para solucionar estos puntos ellos extrapolen la experiencia que tuvieron con el estudio de la expresión $f(x) = \frac{1}{x}$ con respecto a los desplazamientos de esta a lo largo de los ejes del sistema de coordenadas cartesianas. Para finalizar, el ítem **g.** [S1:A6:g], pretenden recoger las características topológicas de ambas expresiones, con el fin que para el estudiante ya sean claras los aspectos que marcan la distinción entre estas.

La Actividad 7, realiza el estudio de las variaciones que presenta el comportamiento gráfico de la expresión $\frac{1}{x^2}$ respecto al desplazamiento sobre los ejes x y y del sistema de coordenadas cartesianas, cuando esta es llevada a la forma $\frac{1}{(x-a)^2}$ y $\frac{1}{x^2}+b$ para $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$; el cual se realiza de forma similar al hecho para el caso de la función $\frac{1}{x}$.

Se presenta una serie de gráficas con sus respectivas expresiones algebraicas, esperando que a través de la visualización intuitiva y tratamiento de estos, los estudiantes determinen parcialmente la relación que puede existir entre el desplazamiento sobre los ejes del sistema de coordenadas cartesianas de la expresión $\frac{1}{x^2}$ cuando esta es de las dos formas mencionadas anteriormente [S1:A7:a,b,c,d], tal que:

- Si la expresión $g(x) = \frac{1}{x^2}$ es llevada a la forma $h(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$ esta se desplaza a espacios en sentido positivo del eje x si $a > 0$, y en sentido negativo si $a < 0$ [S1:A7:b].
- Si la expresión $g(x) = \frac{1}{x^2}$ es llevada a la forma $s(x) = \frac{1}{x^2} + b$, esta última se obtiene desplazando la gráfica de $g(x)$ b unidades en sentido positivo del eje y si $b > 0$, y en sentido negativo si $b < 0$ [S1:A7:c-d].

Una vez se han estudiado e identificado las variables y parámetros que promueven el desplazamiento de la expresión $\frac{1}{x^2}$ sobre los ejes x y y del sistema de coordenadas cartesianas, se pide a los estudiantes que conjeturen que alteraciones creen ellos que sucederían en la representación gráfica, si la expresión $h(x) = \frac{1}{x^2}$ es llevada a la forma

$k(x) = \frac{1}{(x-a)^2} + b$ [S1:A7:e], esperando que ellos consideren que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces el desplazamiento de la gráfica ya no será sobre los ejes del sistema de coordenadas cartesianas, sino sobre los cuadrantes del mismo.

Para finalizar, la Actividad 8 (A8) recoge los análisis realizados anteriormente respecto al desplazamiento sobre los ejes del sistema de coordenadas cartesianas de las funciones $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$, a través de poner a prueba la caracterización realizada por los estudiantes respecto a los patrones de regularidad que los permite. Llevándolos así a objetivar que en aquellos casos donde las expresiones algebraicas presenten la intervención de las constantes a y b (respecto a los desplazamientos sobre los ejes del sistema de coordenadas) de manera simultánea, promueve que la gráfica se desplace a lo largo de los cuadrantes.

Para concluir, se puede decir de manera general que:

- La mayoría de sus actividades centran su atención en la operación cognitiva de **tratamiento**, puesto que se espera que los estudiantes a partir de observar y analizar las representaciones gráficas de las funciones racionales que se estén estudiando, determinen las particularidades topológicas que pueden estas presentar, como son: sus valores de discontinuidad, concavidad antes y después de estos valores, comportamiento de la función en pequeñas vecindades alrededor de los valores de discontinuidad, etc.

  Se espera además que a partir de comparar una serie de expresiones racionales representadas en su registro gráfico y algebraico, los estudiantes puedan **identificar**, **conjeturar** y **generalizar** patrones de comportamiento, acerca de las transformaciones (desplazamientos de las funciones base en los cuadrantes y ejes del sistema de coordenadas cartesianas) que exhiben las expresiones algebraicas que se tomaron como base $\left(\frac{1}{x}\ \text{y}\ \frac{1}{x^2}\right)$, cuando se modifican estas unidades. Este hecho, contribuye en la formación de pensamiento variacional en los estudiantes, puesto que promueve que ellos a partir de su intuición, identifiquen los aspectos que cambian en las expresiones algebraicas y la forma como este repercute en su comportamiento gráfico.

Una vez haya los estudiantes identificado y conjeturado los aspectos y patrones de comportamiento de las funciones $\left(\frac{1}{x}\ \text{y}\ \frac{1}{x^2}\right)$ al alterar alguna de sus unidades, la actividad cognitiva de **conversión** se hace necesaria en la actividad matemática de los estudiantes, a razón de ser por medio de ésta que se valida la veracidad de las conjeturas e intuiciones presentadas por los estudiantes, a partir de determinar (gráficamente o algebraicamente) el comportamiento que presenta una representación algebraica particular.

- Respecto a los procesos generales (MEN, 2006) que se le dio relevancia en estas actividades, se puede decir que ante el empleo de las gráficas como insumo de análisis, los procesos con mayor repercusión en estas fueron los de **comunicación** y **razonamiento**, ya que el propósito de las actividades propuestas en esta situación 1 en su mayoría era que los estudiantes a partir de su experiencia e intuición fueran quienes identificaran los conceptos y aspectos característicos de las funciones racionales (discontinuidad de su dominio y posible comportamiento asintótico en éste valor) los cuales son formalizados posteriormente y contribuyen a caracterizar el concepto de función racional a partir de aspectos y comportamientos propios de ella.

Ante esto, las actividades propuestas centran la atención en los **análisis** y **razonamientos** que los estudiantes realizan sobre las representaciones gráficas en el momento de determinar los aspectos o unidades significantes que cambian en ellas, los cuales posteriormente deben **comunicar** a partir describir y conjeturar de manera general el comportamiento que puede presentar dichas representaciones en caso de alterar alguno de sus parámetros. Una vez los estudiantes han razonado, comunicado y el docente ha validado los comportamientos que ellos percibieron y describieron de estas funciones, se presentan tareas que ayuden la ejercitación y puesta en acción en la actividad matemática desarrollada por los estudiantes de los aspectos validados, destacando de este modo los procesos generales de **formulación, tratamiento y resolución de problemas** y de **formulación, comparación y ejercitación de procedimientos**.

A continuación se presentan las tablas que recogen las características que satisfacen las actividades de la situación según las variables de análisis macro (Tabla de análisis S1:1) y micro (Tabla de análisis S1:2).

S1	DIFICULTAD		PROCESOS				DESEMPEÑOS										
	N1	N2	P1	P2	P3	P4	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11
Actividad 1	X			X	X					X					X	X	
Actividad 2	X			X	X					X					X		
Actividad 3	X	X		X	X	X				X		X	X		X		
Actividad 4	X			X	X	X				X		X	X		X		
Actividad 5		X		X	X	X		X	X			X	X				
Actividad 6	X	X	X	X	X				X	X	X	X			X		
Actividad 7	X	X	X	X	X				X			X	X		X		
Actividad 8		X		X	X	X					X	X	X				

Tabla de análisis S1:1

S1	Tipo de Actividad								Empleo de la representación gráfica				
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	G1	G2	G3	G4	G5
Actividad 1	X		X						X	X		X	
Actividad 2	X		X						X	X		X	
Actividad 3	X		X	X					X	X		X	X
Actividad 4	X		X	X					X	X		X	X
Actividad 5	X		X	X		X				X	X		
Actividad 6	X		X							X	X		X
Actividad 7	X		X			X					X		X
Actividad 8	X		X	X			X			X	X		X

Tabla de análisis S1:2

Análisis situación 2: asíntotas

La situación 2 (S2), centra su atención en el estudio del comportamiento asintótico de las funciones racionales, a partir de problematizar la discontinuidad que este tipo de funciones puede sufrir respecto a su dominio. Por esta razón las dos primeras actividades dirigen su atención a conceptualizar el concepto de dominio para el caso de las expresiones racionales.

Las Actividades A1 y A2, tiene como objetivo que los estudiantes no limiten el concepto de dominio de las funciones racionales al hecho de determinar solo aquellos valores que indetermina la expresión al hacer cero su denominador. Por el contrario su atención se centra en las construcción teórica del concepto de dominio de las funciones racionales a través de construir y mostrar como interviene en él los dominios D_p y D_q correspondientes a los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ que constituyen el numerador y denominador de la expresión racional $f(x)$ [S2:A1]; llegando así a la definición teórica del concepto de dominio para las funciones racionales $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ como la intersección de los dominios de las expresiones polinómicas $p(x)$ y $q(x)$ que la constituye excluyendo aquellos valores de x tales que hacen $q(x) = 0$ [S2:A2].

$$D_{p/q} = D_f = \{x \in (D_p \cap D_q) \text{ tal que } q(x) \neq 0\}$$

Una vez los estudiantes reconocen y pueden justificar la relación que hay entre el dominio de las expresiones polinómicas que compone la función racional y el dominio de esta (función racional) [S2:A1:f], la Actividad 2 (A2) tiene como pretensión fortalecer la definición formal de éste concepto

Estas actividades en comparación con las presentadas en la Situación 1, no da a los estudiantes de forma implícita el insumo de análisis, sino que por el contrario se exige a ellos que formulen y encuentren diversos medios que consideren eficientes para su análisis; requiriendo para su desarrollo que los estudiantes hayan adquirido bases sólidas y fuertes frente a los procesos de cambios de las funciones racionales exploradas en la Situación 1, ya que es necesario que bosquejen el posible comportamiento gráfico de las expresiones resaltando ciertas características topológicas alrededor de los puntos de discontinuidad [S2:A2:c-d].

Una vez los estudiantes reconocen por medio de las actividades 1 y 2 los aspectos teóricos del concepto de dominio de las funciones racionales y el posible comportamiento que puede tener estas funciones entorno a sus puntos de discontinuidad, la actividad 3 (A3) inicia el estudio de las asíntotas verticales y horizontales de las funciones racionales. Para el estudio de estas, el concepto de dominio es fundamental, ya que en un primer instante se presenta una serie de expresiones racionales en su forma irreducible, $\frac{a}{0}$ para $a \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, y así garantizar un comportamiento asintótico vertical en aquellos valores donde se indeterminan la expresión [S2:A3:c,d,e].

De forma similar se estudian las asíntotas horizontales, solo que para este caso las discontinuidades se verifican en aquellos valores del rango. Para determinar estos valores se emplearon dos formas: primero a través de despejar las expresiones en términos de y ($x = g(y)$) [S2:A3:a], y luego sobre esta nueva expresión determinen los valores para los cuales se indetermina la expresión de forma similar a las actividades donde deben determinar el dominio; y segundo por medio de datos tabulares en valores del dominio muy grandes, los cuales permiten que los estudiantes reconozcan de forma empírica la existencia de una asíntota vertical en la medida que las imágenes de la función se acerquen a un valor fijo [S2:A3:b].

En contraste con las expresiones racionales estudiadas en la Situación 1 las cuales solo presentaban una asíntota vertical, se espera que a través de la determinación de los dominios en esta actividad de la Situación 2, los estudiantes evidencien que una expresión racional puede presentar más de una asíntota vertical lo cual depende de la cantidad de valores de discontinuidad que ésta presente (para el caso como son expresiones lineales y cuadráticas, lo máximo de asíntotas verticales que va a tener es dos) y además por el tipo de discontinuidad.

Para cerrar parcialmente el estudio del comportamiento asintótico horizontal y vertical, se presenta a los estudiantes un ítem [S2:A3:f] con tres representaciones gráficas las cuales corresponden a las expresiones $\mathbf{B}.\, y = \frac{4}{x^2} + 3$, $\mathbf{D}.\, y = \frac{x}{x^2-1} - 2$ y $\mathbf{f}.\, y = \frac{x-1}{x+1}$; donde ellos deben determinar qué gráfica le corresponde a cada expresión algebraica a partir de identificar el dominio, las asíntotas verticales y horizontales que presenta cada una de estas, de forma que se ven obligados a relacionar ciertas unidades significantes del objeto de estudio en más de un registro de representación para poder determinar la paridad de las mismas.

El caso del comportamiento asintótico oblicuo, se estudia a partir de una característica entre las expresiones polinómicas $p(x)$ y $q(x)$ que constituyen el numerador y el denominador de las expresión racional $f(x)$, como es el cociente que se genera al efectuar la división entre ellas y el grado de las mismas.

De esta manera para iniciar el estudio del comportamiento asintótico oblicuo a partir de los aspectos intuitivos que los estudiantes puedan determinar en cada uno de los ítems propuestos en la Actividad 4 (A4), se le presenta a los estudiantes como insumo de análisis y reflexión una serie de expresiones racionales de la forma $y = f(x)$, con la característica particular que en cada una de estas el grado del polinomio del numerador es estrictamente mayor en una unidad al grado del polinomio del denominador ($grado\, de\, p(x) > grado\ de\ q(x)$en una unidad) siendo esta una de las características que se espera que los estudiantes identifiquen en relación al tipo de comportamiento asintótico oblicuo con respecto a la forma de las expresiones algebraicas.

Para iniciar, se pide a los estudiantes que para cada una de las expresiones dadas, realicen la división entre los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ [S2:A4:a], lo cual ya deben estar en capacidad de realizar, puestos que la división entre polinomios se estudia en grado octavo. El objetivo de realizar estas divisiones, es que una vez hechas identifiquen el cociente $C(x)$ de cada una de estas ya que este es la expresión algebraica que corresponde a la asíntota oblicua de cada expresión racional.

Una vez graficadas las duplas $y = f(x)$ y $C(x)$, los estudiantes deben reflexionar, conjeturar y determinar desde su intuición como consideran que es la relación en términos del comportamiento de cada uno de los pares de expresiones, de forma que determinen si creen que estos se inrtersectan o cómo será su comportamiento en valores x del dominio muy grandes [S2:A4:c].

Después de haber realizado la caracterización de los comportamientos asintóticos horizontal, vertical y oblicuo de forma intuitiva en las actividades 1, 2, 3 y 4 de la situación 2, se formalizan los aspectos conceptuales de los mismos en el Cuadro conceptual 2. En este cuadro se presentan las características que presentan las funciones racionales cuando presentan alguno de estos comportamientos asintóticos, como es por ejemplo la presencia de asíntotas verticales en aquellos puntos de discontinuidad de su dominio D cuando la indeterminación de la expresión en este es de la forma $\frac{a}{0}$ donde $a \neq 0$; o con respecto a los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ de la función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde:

- Si el $grado\ de\ p(x) < grado\ de\ q(x)$ entonces existe una asíntota horizontal que tiene por ecuación la recta $y = 0$.
- Si el $grado\ de\ p(x) = grado\ de\ q(x)$ entonces existe una asíntota horizontal que tiene por ecuación la recta $y = \frac{a_n}{b_m}$, donde a_n es el coeficiente principal de $p(x)$ y b_m el coeficiente principal de $q(x)$.
- Si el $grado\ de\ p(x) > grado\ de\ q(x)$ estrictamente en una unidad, entonces existe una asíntota oblicua.
- Si el $grado\ de\ p(x) > grado\ de\ q(x)$ en más de una unidad, entonces la gráfica no presenta asíntotas horizontales.

Además de estas características presenta otras referentes al comportamiento topológico de la curva alrededor de las asíntotas verticales dependiendo del tipo de raíces que presente la expresión, y con respecto a la ecuación de las asíntotas oblicuas.

La Actividad 5 (A5), recoge todos los aspectos cognitivos estudiados hasta el momento en las actividades propuestas en la Situación 1 y Situación 2 respecto al comportamiento asintótico. De manera que para dar respuesta a esta Actividad, los estudiantes deben considerar los aspectos conceptuales que se estudiaron y presentaron en el Cuadro conceptual 2, ya que por medio de esta los estudiantes pueden completar la Tabla 2.5, respecto a algunos aspectos topológicos y asíntotas que presenta una expresión racional [S2:A5:a].

Y una vez determinadas estas características y expresiones algebraicas de las funciones racionales, y consignadas en la Tabla 2.5, se utiliza para fomentar situaciones de reflexión respecto a las características que satisfacen cada una de las expresiones algebraicas cuando presentan cada uno de los tipos de comportamientos asintóticos estudiados anteriormente [S2:A5:b]; además de reflexionar sobre el hecho que una expresión racional puede presentar más de un tipo de comportamiento asintótico [S2:A5:b].

Para finalizar, se presenta la Actividad 6 (A6), la cual tiene como objetivo determinar el nivel de aprehensión que los estudiantes alcanzaron en relación a las características esenciales de las funciones racionales respecto a los comportamientos asintóticos y la relación de estas características (o unidades significativas) en los registros algebraicos y gráficos; de modo que en un primer momento se pide a los estudiantes que determinen la veracidad de unos enunciados [S2:A6:a] los cuales hacen alusión a la relación a una serie de aspectos relacionados a los posibles comportamientos asintóticos que pueden presentar las expresiones presentadas en cada una de los ítems, a la certeza sobre la función racional presentada con respecto a la expresión algebraica de una de sus asíntotas.

Luego en un segundo momento de la misma actividad, se determina la aprehensión alcanzada por los estudiantes respecto a la relación de ciertas características topológicas con respecto al comportamiento gráfico de la misma [S2:A6:b], donde mostrando características como: las ecuaciones de las asíntotas de la función, su dominio, su rango, su concavidad en un intervalo determinado del dominio y su decrecimiento en otro, ellos deben describir el comportamiento gráfico de la función racional que se está estudiando a la cual le es propia todas estas características en ausencia de su expresión algebraica.

A modo general, las actividades propuestas en esta situación 2, las cuales se encargan del estudio de los comportamientos asintóticos que pueden presentar las funciones racionales, y la relación entre el tipo de discontinuidad que presenta y la existencia de una asíntota vertical, se puede decir que:

- En lo referente a las actividades cognitivas que promueve esta situación, en un primer momento se centra en los **tratamientos**, en la medida que se espera que los estudiantes a partir de manipular la representación algebraica de una expresión racional, determine ciertas características conceptuales que relaciona las partes constitutivas de dicha expresión, de modo que en el momento de ellos iniciar su actividad matemática esta tenga sentido y no se quede solo en la manipulación de algoritmos ausente de los aspectos conceptuales que se estén tratando con estos.

  Para lograr esta significación, se crean momentos de reflexión mediante la articulación de las respuestas que obtuvieron con estos tratamientos en su representación algebraica y las características que pueden ser percibidas en su representación gráfica, de manera que reconozcan la incidencia de estas unidades significantes en su comportamiento gráfico, siendo este un primer momento de aparición de la actividad de **conversión** en el estudio de las asíntotas.

Es necesario en el estudio de las asíntotas oblicuas los referentes visuales que permitan la articulación de las unidades significativas de estas en los registros algebraicos y gráficos por medio de la operación cognitiva de **conversión**. Esto se da ya que conceptualmente se puede determinar la existencia o no de este tipo de comportamiento en una función racional por medio de los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ que cosntituyen la expresion racional $f(x)$, pero esta característica no da razón de la forma de estas.

Para determinar la forma del comportamiento de este tipo de asíntotas, es necesario en un primer instante determinar el cociente $c(x)$ de dividir $p(x)$ entre $q(x)$, el cual determina el comportamiento de la asíntota oblicua; y posteriormente en un segundo instante, mediante la actividad de **conversión**, graficar $c(x)$ de modo puedan los estudiantes reconocer la relación entre el comportamiento de $f(x)$ y $c(x)$.

- Respecto a los procesos generales que se hacen prevalentes en el estudio de los comportamientos asintóticos, se evidencia que por el tipo de actividades que presenta la Situación 2 estos son: **a)** en un primer instante de acercamiento de los estudiantes a la forma como estas se evidencian en las funciones racionales $f(x)$, son la **formulación, tratamiento y resolución de problemas** y la **formulación, comparación y ejercitación de procedimientos**, ya que ellos deben mediante la exploración reconocer cuales son los criterios y características que presentan las funciones racionales cuando tienen asíntotas verticales, (indeterminación de la forma $\frac{a}{0}$ para $a \neq 0$, y la existencia de estas en las raíces de $q(x)$) , horizontales y oblicuas (determinar $C(x)$); y **b)** los procesos de **razonamiento** y **comunicación**, puesto que deben conjeturar por una parte la relación entre los parámetros identificados en su expresión algebraica y la forma como esta incide en la representación gráfica (y viceversa) y por otro lado dentro del registro gráfico, la relación entre la representación gráfica de $f(x)$ con relación al comportamiento gráfico de las asíntotas.

Para la caracterización de estas asíntotas el registro gráfico juega un papel de suma importancia en esta situación, puesto que es el primer medio de validación del cual se valen los estudiantes para detectar la particularidad de que estas nunca se cortan con la curva de la expresión, sino que se aproximan tanto como sea posible.

A continuación se presentan las tablas que recogen las características que satisfacen las actividades de la situación según las variables de análisis macro (Tabla de análisis S2:1) y micro (Tabla de análisis S2:2).

S2	**DIFICULTAD**		**PROCESOS**				**DESEMPEÑOS**										
	N1	N2	P1	P2	P3	P4	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11
Actividad 1	X			X	X	X				X		X					
Actividad 2	X	X	X	X					X	X			X				
Actividad 3	X	X		X	X	X					X		X				
Actividad 4	X	X	X		X					X					X		
Actividad 5	X			X	X	X				X							
Actividad 6	X	X	X	X	X				X			X	X				

Tabla de análisis S2:1

S2	Tipo de Actividad								Empleo de la representación gráfica				
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	G1	G2	G3	G4	G5
Actividad 1	X	X	X										
Actividad 2	X			X						X	X		
Actividad 3	X	X								X	X		X
Actividad 4	X	X								X		X	
Actividad 5		X										X	
Actividad 6	X			X		X	X			X	X	X	X

Tabla de análisis S2:2

Análisis situación 3: Equivalencia de funciones

Esta situación caracteriza los hechos que se deben resaltar para que dos expresiones $f(x)$ e $i(x)$, donde una sea el resultado de simplificar la otra, sean equivalentes. El estudio de este concepto se da bajo la necesidad de fomentar un aprendizaje significativo en los estudiantes alrededor de éste aspecto, desligándolos de la inercia en el cual se ha sucumbido la equivalencia de funciones como es el hecho de tan solo simplificar las expresiones algebraicas a través de diversos procesos de manipulación de algoritmos repetitivos, sin hacer reflexión alrededor de las restricciones conceptuales que se deben contemplar para que tanto la expresión inicial $f(x)$ como la resultante $i(x)$ respecto a su dominio para que estas sean equivalentes.

Para superar esta limitación cognitiva, la Actividad 1 (A1), [S3:A1:a-b] pretende que los estudiantes reconozcan mediante la exploración sobre una serie de expresiones algebraicas (racionales), los dos tipos de indeterminación que estas pueden presentar en aquellos valores del dominio donde se indeterminan, como son la forma: $\frac{0}{0}$ ó $\frac{a}{0}$ para $a \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$ (se realiza mediante actividades que promuevan la **formulación, tratamiento y**

resolución de problemas y la **formulación, comparación y ejercitación de procedimientos**).

Una vez los estudiantes reconocen los dos tipos de indeterminaciones que pueden presentar las expresiones racionales, se estudia las implicaciones que cada una de estas presenta respecto a la expresión algebraica [S3:A1:c]. Para el desarrollo y caracterización de esto, se empleó el análisis sobre la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$ en los casos cuando $x = -2$ y $x = 1$ en los cuales se indetermina $f(x)$; esperando que los estudiantes reconozcan que una expresión racional $f(x)$ que presenta una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ está sujeta a poder ser simplificada mediante **tratamientos** en su expresión irreducible $i(x)$, la cual va a presentar una indeterminacion de la forma $\frac{a}{0}$ para $a \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$.

El reconocer estos dos tipos de discontinuidad, permite además formalizar uno de los aspectos conceptuales que se estudió en la Situación 2, como es el comportamiento asintótico vertical. Esta formalización se da en términos del tipo de discontinuidad, ya que si esta es de la forma $\frac{a}{0}$ para $a \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces se puede garantizar que la función $f(x)$ esta en su forma irreducible $i(x)$, y por lo tanto existe un comportamiento asintótico vertical en todos aquellos valores x del dominio en los cuales la expresión se indetermina; hecho que no se puede garantizar cuando la indeterminación de la expresión es de la forma $\frac{0}{0}$, lo cual implica que la expresión puede ser llevada a su forma irreducible $i(x)$.

Luego de presentar estas tres actividades de exploración y reconocimiento, se formaliza la nomenclatura $i(x)$, como aquella que representa la versión irreducible de la expresión racional que se esté estudiando, garantizando que la indeterminación que presenta $i(x)$ es de la forma $\frac{a}{0}$ para $a \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$.

Una vez trabajadas las actividades presentadas anteriormente y formalizada la nomenclatura $i(x)$, se espera que los estudiantes estén en capacidad de determinar cuándo una expresión racional puede o no ser simplificada en su expresión irreducible $i(x)$ a partir de la discontinuidad que presente [S3:A1:d], y de ser esta de la forma $\frac{0}{0}$ entonces determinar su expresión $i(x)$ [S3:A1:e].

Reconocer cuando una función $f(x)$ puede ser simplificada en su expresión $i(x)$, permite el estudio conceptual de la equivalencia entre ambas expresiones, a partir de sus dominios D_f y D_i [S3:A1:f]. Para esto, una vez determinadas $f(x)$ y $i(x)$ los estudiantes deben hallar sus correspondientes dominios D_f y D_i y consignarlos en la Tabla 3.1 [S3:A1:g], la cual se emplea como material de análisis para identificar que se puede dar el caso que los dominios D_f y D_i pueden ser diferentes, ya que el dominio D_i puede eximir valores x donde la expresión $f(x)$ presentaba discontinuidad, lo cual lleva a problematizar las discontinuidades por abiertos que se caracterizara más adelante en la Actividad 2.

Un ejemplo de lo mencionado anteriormente lo podemos ver en la siguiente Diagrama 9, por medio de la expresión racional $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$:

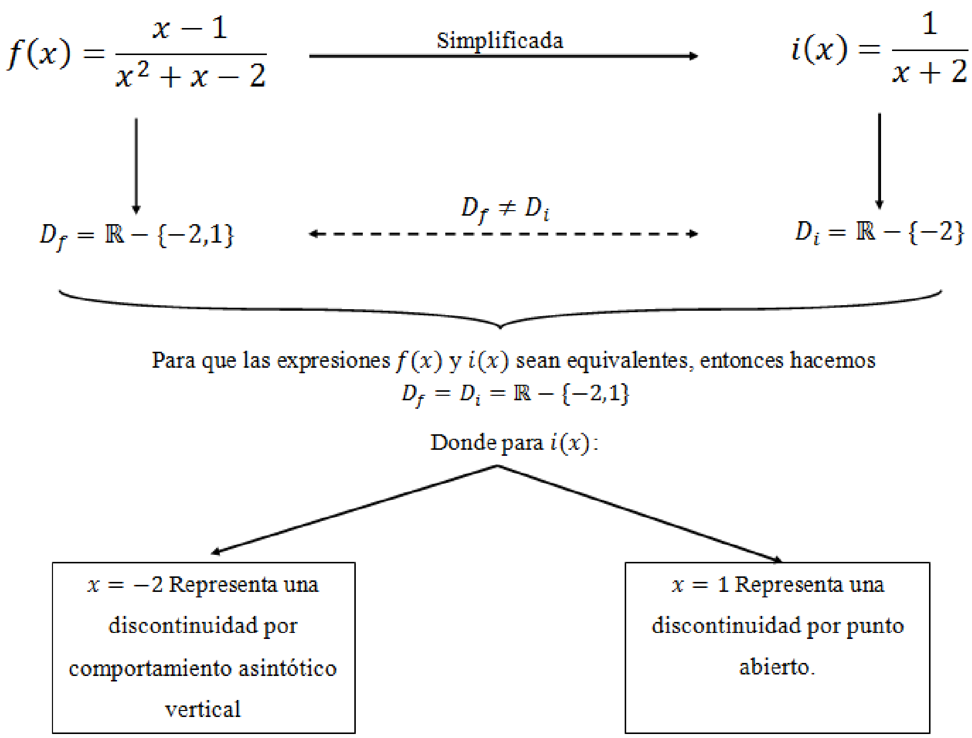


Diagrama 7 equivalencia de funciones

En el Diagrama 7 presentado anteriormente, se evidencia que aunque $i(x)$ es el resultado de simplificar a través de diversos procesos algebraicos la expresión $f(x)$, estas dos son diferentes en forma y características como por ejemplo sus dominios; de modo que para ser $f(x)$ y $i(x)$ equivalentes, se debe restringir el dominio de la expresión $i(x)$ con respecto al dominio de su expresión inicial $f(x)$. Una vez hecho esto, los valores x en los cuales la expresión $f(x)$ es discontinua, actúan sobre su expresión $i(x)$ presentando comportamientos de discontinuidad por comportamiento asintótico vertical y punto abierto. Vale mencionar que el no restringir los dominios de ambas expresiones implicaría que estas no serían equivalentes.

Terminada de estudiar la Actividad 1, se presenta el cuadro conceptual 3, en el cual se formalizan todos los aspectos teóricos que se deben contemplar para determinar que el par de expresiones $f(x)$ y $i(x)$, las cuales se vinculan por el hecho de ser una la versión simplificada de la otra, sean equivalentes respecto la restricción de sus dominios. Características que son estudiadas formalmente en la Actividad 2 (A2) por medio de registros tabulares que evidencien ciertos comportamientos topológicos como son los cambios que presenta en algunos valores de su trayectoria la expresión racional $f(x)$ respecto a su expresión simplificada $i(x)$ [S3:A2], como son aquellos valores x del dominio que indeterminaba la expresión inicial $f(x)$ pero que una vez esta era llevada a su expresión irreducible $i(x)$ no lo hacía, convirtiéndose en este nueva expresión en un punto de discontinuidad a razón de un abierto; siendo estos aspectos relativo a la discontinuidad en ambas expresiones como se ilustro en el Diagrama 7.

A diferencia de la Actividad 1, para este caso se hace necesario el empleo del registro de representación gráfico. Empleado como ideograma resalta todas las características y transformaciones que sufre una expresión racional $f(x)$ cuando es llevada a su forma irreducible $i(x)$; esperando así que conceptualmente los estudiantes reconozcan la incidencia que existe entre los dominios de dos expresiones algebraicas $f(x)$ y $i(x)$, respecto a las restricciones de sus dominios para estimar que estas son equivalentes y la forma como esto incide en su comportamiento gráfico.

Siguiendo esta secuencia de construcción conceptual de la equivalencia entre expresiones algebraicas, la Actividad 3 valida la aprehensión que los estudiantes han realizado hasta el momento respecto al tema, considerando una serie de presentaciones gráficas en las cuales aparecen los dos tipos de discontinuidad estudiados que deben ser puestas en correspondencia por los estudiantes con la expresión algebraica $f(x)$ y $i(x)$ que le corresponde y las restricciones que deben satisfacer los dominios de estas para ser equivalentes.

Luego la Actividad 4 (A4) potencializa la capacidad de comunicación de los objetos matemáticos estudiados, por medio de preguntas donde deben validar que tan significativa ha sido su aprehensión de estos, por medio de determinar la veracidad de ciertos enunciados, que describen los comportamientos y características de las funciones racionales estudiadas hasta el momento, respecto a la equivalencia de funciones tanto a nivel general como para ciertos casos particulares [S3:A4:a].

Para finalizar, deben **argumentar** la diferencia conceptual que existe entre la gráfica de $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x-a}$ y la de $g(x) = x - b$, de modo que a pesar de ser $g(x)$ la expresión simplificada de $f(x)$, esta última puede presentar una discontinuidad por punto abierto en $x = a$ si el estudiante determina las condiciones para que estas sean equivalentes, de no establecerse estas condiciones, la representación gráfica de $g(x)$ es una recta la cual no presentaría problemas de discontinuidad en ningún valor de su dominio [S3:A4:b].

De igual forma, la Actividad 5 (A5) fomenta tareas de **reflexión** y **síntesis** alrededor de la representación gráfica de $h(x)$ (Gráfica 3.5); de modo que a partir de la observación y percepción que los estudiantes realicen sobre esta gráfica, deben determinar ciertas características topológicas (dominio, existencia de la función en un punto particular y la relación entre el tipo de discontinuidad respecto al tipo de indeterminación) las cuales considerando los aspectos que se han estudiado en las situaciones anteriores respecto a las funciones racionales, sirven de ayuda para determinar la posible expresión algebraica que describa el comportamiento de esta función $h(x)$.

Se observa que con el fin de caracterizar los aspectos conceptuales de la equivalencia de funciones los cuales se han hecho invisibles en los procesos educativos por la manipulación iterada de algoritmos, las actividades propuestas en esta situación centran su atención en los procesos de **razonamiento** y **comunicación** de las características que deben cumplir dos expresiones para ser equivalente por medio de la **exploración** y **análisis** de comportamientos algebraicos y gráficos del dominio y no por el solo hecho de simplificar algebraicamente ciertas expresiones.

A continuación se presentan las tablas que recogen las características que satisfacen las actividades de la situación según las variables de análisis macro (Tabla de análisis S3:1) y micro (Tabla de análisis S3:2).

S3	**DIFICULTAD**		**PROCESOS**				**DESEMPEÑOS**										
	N1	N2	P1	P2	P3	P4	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11
Actividad 1	X		X	X	X							X	X	X			
Actividad 2	X	X		X	X	X		X		X		X					
Actividad 3	X				X							X	X				
Actividad 4	X			X	X								X				
Actividad 5	X	X	X	X	X			X		X	X	X		X			

Tabla de análisis S3:1

S3	Tipo de Actividad								Empleo de la representación gráfica				
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	G1	G2	G3	G4	G5
Actividad 1	X												
Actividad 2	X		X						X			X	
Actividad 3	X										X		X
Actividad 4	X			X									
Actividad 5			X	X					X	X		X	X

Tabla de análisis S3:2

Análisis situación 4: Contextos y conjunto de referencia

Esta situación al igual que la Situación 3 centra su atención en conceptos que se han hecho invisibles en la actividad matemática desarrollada por los estudiantes por el empleo excesivo de actividades que fomentan la manipulación de algoritmos. En este caso más que un concepto se problematiza en una variable didáctica de gran importancia en la significancia de los objetos matemáticos estudiados como es el conjunto de referencia C_r, el cual se hace evidente en la actividad matemática de los estudiantes y se puede resaltar mediante el empleo de contextos, dando respuesta a una de las exigencias expuestas por el MEN como es que los objetos matemáticos sean útiles a los estudiantes en su cotidianidad.

De este modo el empleo de contextos es de suma importancia en la medida que promueve que los estudiantes realicen procesos de matematización donde deben acotar los objetos matemáticos estudiados según las características de la actividad que esté intentando resolver como se observa en la Actividad 1 y 2 de la situación 4 (S4), en las cuales las funciones racionales y los conceptos relacionados a ellas se convierten en el medio para solucionar dichas actividades.

La Actividad 1 (A1), a partir de un contexto que puede ser familiar para la mayoría de los estudiantes de grado noveno, por la interacción constante que tienen con los videojuegos, promueve un escenario en los cuales ellos deben desactivar una serie de virus encriptados mediante expresiones algebraicas racionales. Para desactivar estos virus se presenta un conjunto C_r en el cual se encuentran los valores que nutren a cada uno de los virus, de modo que se hace necesario que los estudiantes empleen diversos conceptos matemáticos, como es por ejemplo el concepto de dominio, con los cuales pueda determinar los valores del C_r que satisfagan las condiciones dadas por la actividad para desactivar los virus.

Para controlar este acercamiento al conjunto de referencia C_r, se pide a los estudiantes en un primer momento que teniendo en cuenta las características de las soluciones que desactivan los virus, determinen cuales son estos [S4:A1:a], donde por medio de esta se espera determinar el nivel de comprensión y análisis que desarrollan respecto a los aspectos matemáticos de la actividad la cual está acotada por un escenario especifico, o si por el contrario su costumbre es dirigirse solo a manipular las expresiones algebraicas de la actividad desconociendo los parámetros que le dan el sentido a la misma [S4:A1:c].

En la Actividad 2 (A2), el contexto que se emplea se ajusta más a una situación de la vida real, siendo de este modo significativa para el estudiante ante la posibilidad de poderla validar o extrapolar a un acontecimiento que puede suceder en algún momento de su vida. Además, esta actividad tiene como objetivo mostrar un lugar activo donde se pueden emplear las funciones racionales diferentes al contexto matemático en el cual se han presentado las actividades hasta este momento, mostrando así la posibilidad que ofrece las funciones racionales para modelar y dar solución a situaciones que evoquen la vida real.

Ante esto los tres primeros ítems de esta actividad [S4:A2:a-c], centran su atención en que los estudiantes identifiquen los cambios que puede presentar las variables de una expresión algebraica cuando esta se aborda en un contexto meramente matemático en comparación a situaciones donde la misma expresión se presenta en un contexto real el cual acota ciertos parámetros de ella.

Una vez sean percibidos los cambios de estas características en la expresión $U(s)$ de la A2 a raíz del empleo del contexto real a nivel algebraico, estos cambios también acotan los objetos matemáticos en su representación gráfica, de modo que esta toma forma y sentido según el contexto especifico de la situación, no siendo en ocasiones su representación meramente matemática significativa para modelar esta [S4:A2:c,d,e]. Jugando en este caso la representación gráfica un papel importante puesto que describe el comportamiento de la función, pero este solo tendrá sentido ante la reflexión y coherencia que el estudiante establezca entre ella y el contexto que lo permea.

Después de presentadas estas dos primeras actividades en contextos específicos, se presenta la el Cuadro conceptual 4, en el cual se hacen explícitos los aspectos teóricos referentes a la relación entre el conjunto de referencia y el dominio de una expresión racional, al igual que la forma como el conjunto de referencia interviene en el comportamiento gráfico de la misma.

Luego la actividad 3 (A3) mediante actividades de reflexión y ejercitación, fortalece estos aspectos en los estudiantes; en un primer momento se fortalece la variable didáctica de conjunto de referencia [S4:A3:a-b], donde se espera que los estudiantes identifiquen que el dominio de una expresión racional se configura según el conjunto de referencia C_r en el cual esta se define, para esto se analizo la expresión $f(x) = \frac{2-x}{x^2+x-12}$ definida en tres conjuntos de referencia distintos $C_r = \mathbb{R}$, $C_r = \mathbb{N}$ y $C_r = \mathbb{Z}$, donde al determinar sus dominios estos son $D_f = \mathbb{R} - \{-4, 3\}$, $D_f = \mathbb{N} - \{3\}$ y $D_f = \mathbb{Z} - \{-4, 3\}$ respectivamente, identificando así que estos a razón del conjunto de referencia C_r en el cual se definió son diferentes entre sí a pesar de corresponder a la misma expresión algebraica.

Luego de haber afirmado la relación que hay entre el conjunto de referencia y el dominio de la expresión algebraica para un caso particular, se presenta a los estudiantes por medio de la Tabla 4.3 una serie de expresiones racionales con sus respectivos conjuntos de referencia, a los cuales deben determinarles del cuadro de **Opciones de Dominios $\boldsymbol{D_f}$** cual le corresponde a cada uno [S4:A3:c]. Esta actividad pretende fortalecer y verificar si los estudiantes han entendido de forma correcta la variable de conjunto de referencia, al someterla en distintas funciones.

Hasta el momento el estudio se ha realizado a nivel algebraico, luego para reconocer la repercusión que tiene el conjunto de referencia en el comportamiento gráfico de una expresión algebraica, se emplea una expresión que es ya conocida por los estudiantes la cual no va a presentar dificultad para ellos en el momento de gráficas o bosquejar su comportamiento en un sistema de coordenadas cartesianas, como es la expresión $\frac{1}{x}$ [S4:A3:d], Para esto se escogieron dos conjuntos de referencia $C_r = \mathbb{R}$ y $C_r = \mathbb{Z}$ con la intención de mostrarle a los estudiantes que:

- Cuando el $C_r = \mathbb{R}$, el comportamiento gráfico de la expresión $\frac{1}{x}$ se da mediante una curva suave.
- Cuando el $C_r = \mathbb{Z}$, el comportamiento gráfico de la expresión $\frac{1}{x}$ se da mediante una sucesión de puntos

Para finalizar, se presenta la Actividad 4 (A4), la cual tiene como intención enseñar a los estudiantes que las funciones racionales también aparecen como un medio potente en la modelación de eventos de otras disciplinas, como es por ejemplo en el caso en disciplinas como la geometría [S4:A4:a] mediante la relación área perímetro de un rectángulo, y en física [S4:A4:b] mediante la modelación de la ley de Boyle para los gases.

De esta manera se puede observar que el empleo de contextos en la actividad matemática propuesta a los estudiantes, ayuda en ellos a identificar y dotar de sentido los objetos matemáticos estudiados, desligándolos de la idea de ser solo entes abstractos los cuales no son funcionales para su formación como un sujeto político y social. Y frente al conjunto de referencia, los contextos se convierten en el medio propicio para potenciar su aprendizaje, ya que la naturaleza del contexto delimita las fronteras del objeto matemático que se esté problematizando.

A continuación se presentan las tablas que recogen las características que satisfacen las actividades de la situación según las variables de análisis macro (Tabla de análisis S4:1) y micro (Tabla de análisis S4:2).

S4	**DIFICULTAD**		**PROCESOS**				**DESEMPEÑOS**										
	N1	N2	P1	P2	P3	P4	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11
Actividad 1	X		X	X	X					X				X			
Actividad 2	X	X	X	X	X			X			X					X	
Actividad 3	X	X	X	X	X	X			X		X						
Actividad 4	X	X	X	X	X			X	X						X	X	

Tabla de análisis S4:1

S4	Tipo de Actividad								Empleo de la representación gráfica				
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	G1	G2	G3	G4	G5
Actividad 1	X		X				X						
Actividad 2	X		X	X	X		X		X	X		X	
Actividad 3	X	X		X							X		
Actividad 4			X	X	X					X	X		

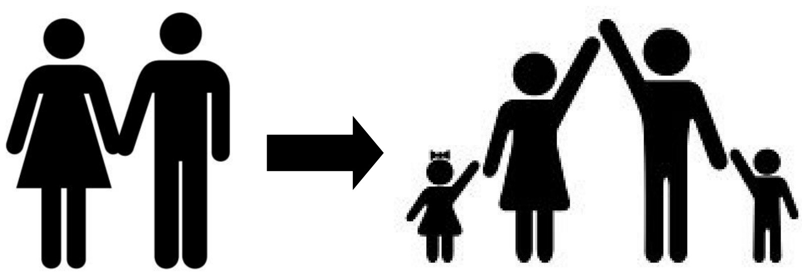
Tabla de análisis S4:2

A continuación se presentan las situaciones que fueron insumo de análisis.

3.3 Diseño de Actividades

¿Sabías que?

A menudo, encontramos que en los diversos contratos sociales establecemos relaciones matemáticas de forma implícita, una forma de evidenciarlo es a partir de lo que se ha definido como núcleo familiar, el cual parte de la premisa de que a todo hombre se le asigna una mujer o viceversa, los cuales fundamentan la creación de otras personas pertenecientes al núcleo familiar como son los hijos.



También se emplean otros tipos de relaciones, como es asociar una cantidad de personas con la cantidad necesaria de objetos para que todos tengan uno, o de manera más funcional, se emplean habitualmente modelos matemáticos para representar fenómenos reales y a partir de estos se realizan predicciones sobre un comportamiento a futuro bajo ciertas condiciones específicas a estudiar, esto se puede evidenciar por ejemplo, con el primer modelo que descubría el crecimiento poblacional propuesto por Malthus, presentado a continuación.

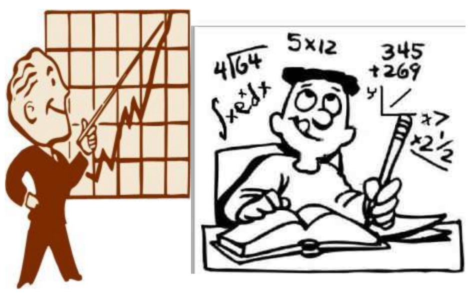
$$\boldsymbol{p(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}}$$

Donde $\boldsymbol{p(t)}$ representa el crecimiento poblacional y t el tiempo transcurrido en años. O en situaciones más usuales, encontramos por ejemplo, la correspondencia establecida entre la cédula de ciudadanía con respecto a los habitantes de una nación, donde a cada habitante le corresponde un número de identificación el cual es único.

Es así, como se observa que de manera indiferente e implícita, a menudo se hace uso de modelos los cuales pueden ser formalizados desde las matemáticas para designar relaciones cotidianas, donde estos (modelos) se basan en el empleo de la noción de **función**, pero ¿qué es una función?, ante esto, caracterizamos el concepto de función como:

Una ley que regula la dependencia entre cantidades u objetos variables

De tal manera que esta se convierte en un medio potente para modelar y analizar todos Aquellos fenómenos de variación que se ven constantemente en la vida cotidiana.



De tal forma que como lo mencionan en el texto *Álgebra* (Rees, P. , Rees, C. & Spark, F., 2006, p. 247), *en las numerosas aplicaciones de las matematicas en la ciencia, ciertas fórmulas o relaciones básicas ocurren una y otra vez. La base de muchas de estas fórmulas es una función* f *definida mediante alguna ecucación* $y = f(x)$. De manera que nos preguntamos si:

¿el solo hecho de manipular y entender correctamente los algoritmos matemáticos son un camino a considerar que el aprendizaje ha sido significativo, sin considerar la validación de estos en contextos que evoquen situaciones cotidianas de la comunidad estudiantil?

SITUACIÓN 1: familiarización con algunas funciones racionales

OBJETIVO: acercar a los estudiantes de forma intuitiva a reconocer ciertas características distintivas de las funciones racionales como es su discontinuidad en el dominio y la forma como se evidencia gráficamente.

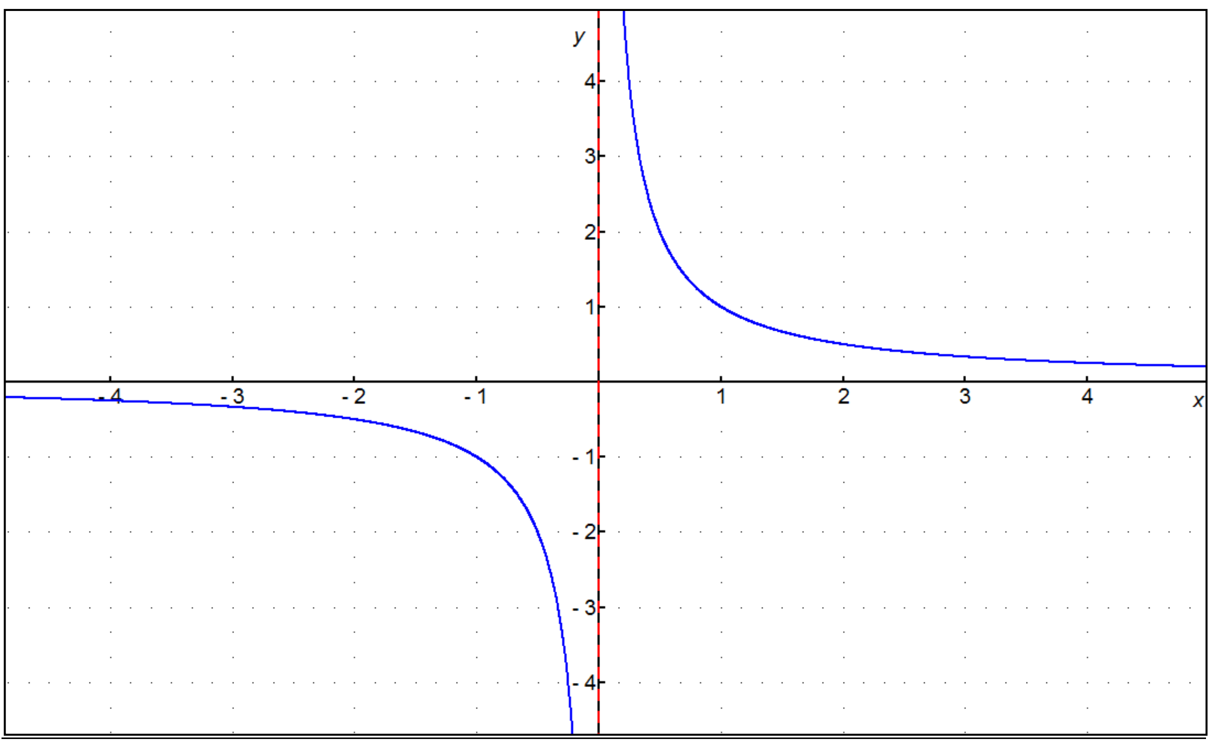
LOGROS:

- Determina de forma intuitiva el comportamiento (crecimiento o decrecimiento) de las funciones racionales alrededor de asíntotas verticales y horizontales.
- Analiza y conjetura posibles comportamientos de expresiones racionales ante la alteración de su forma inicial.
- Reconoce y determina ciertos parámetros de regularidad de comportamiento en algunas expresiones racionales con respecto al desplazamiento de sus asíntotas ante variaciones en la expresión.

Sabías que la *observación* es un proceso natural o fisiológico que puede hacer todo hombre, el cual es de gran importancia en los procesos o vías de aprendizaje, ya que es a través de éste que se conocen las diversas interpretaciones que se generan en el interior de todo sujeto sin estar aún puestas en concordancia y codificadas bajo la estructura socio-cultural en la cual coexiste el sujeto.

Ante esto, se puede conjeturar al proceso de observación como un primer instante en el cual se reconoce al hombre como un ser crítico y pensante el cual puede intervenir en su proceso de aprendizaje, al igual que categorizar a esté proceso como un punto de partida en los procesos de visualización desarrollados, los cuales generan la actividad matemática desarrollada por los alumnos.

Actividad 1: A continuación aparece la gráfica de la función $F(x) = \frac{1}{x}$ utilízala para responder las preguntas **1** a **9**. Recuerda justificar tu respuesta en cada caso.



Gráfica 1

Contesta teniendo en cuenta la información que proporciona la **Gráfica 1**:

a. Determina cuál es el dominio D_F.

b. Determina el valor de la función $F(x)$, de ser posible, para: $x = 1$, $x = 0$ y $x = -1$

c. De la siguiente lista de números cuáles no pertenecen al dominio D_F de la función

{5, 1/2, 2, -1, -3/2, 1, 0, 1/2, -3}

d. Determina la imagen de $F(x)$, cuando $x =$ 1/3, 1/2, 1, 3/2, 2, 3, 4

e. Determina la imagen de $F(x)$, cuando $x =$-1/3, -1/2, -1 , -3/2, - 2, - 3, - 4

f. Observa la **Gráfica 1** y con tus propias palabras explica qué sucede con la función cuando los valores de x están próximos a cero.

g. ¿Crees que la función se comporta de igual forma cuando los valores se acercan a cero por la izquierda y por la derecha? Justifica tu respuesta.

h. Considerando los grupos de imágenes de la función $F(x)$ de los literales **d** y **e**, contesta las siguientes preguntas justificando cada una de las respuestas:

   I. ¿Qué sucede con el comportamiento gráfico de la función en la medida que los valores de x se hacen cada vez más pequeños?

   II. ¿Qué sucede con el comportamiento gráfico de la función en la medida que los valores de x se hacen cada vez más grandes?

   III. ¿El comportamiento de la función $F(x)$ es creciente o decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$?

   IV. ¿El comportamiento de la función $F(x)$ es creciente o decreciente en el intervalo $(0, \infty)$?

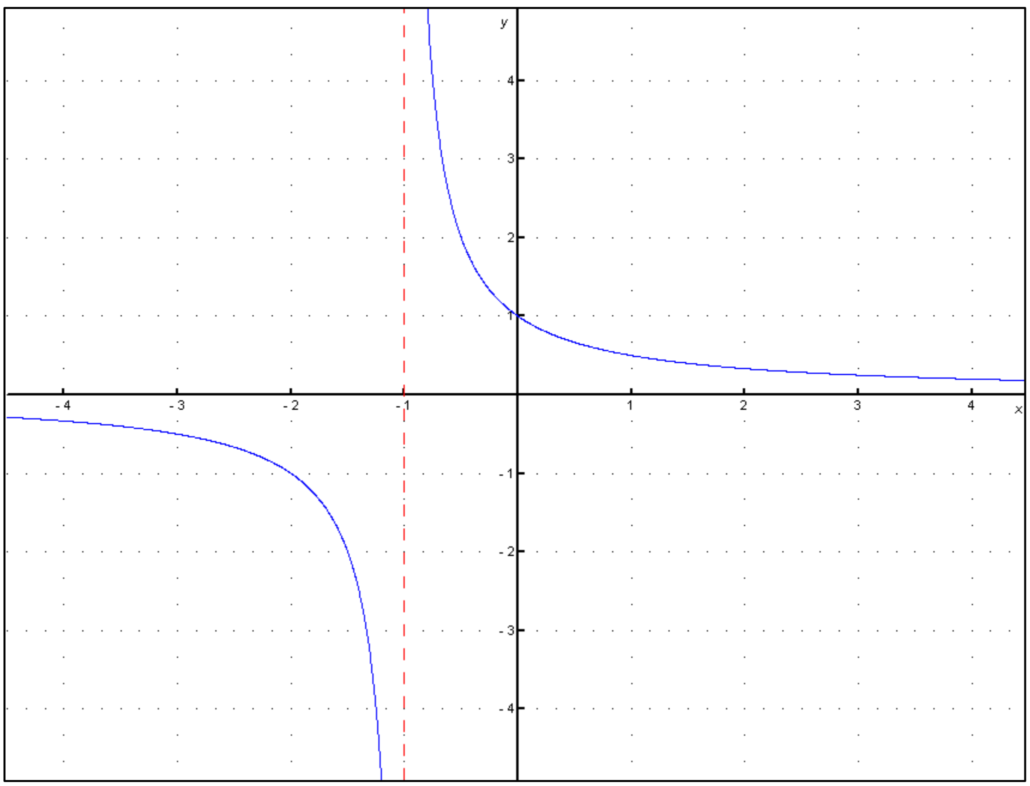
i. Califica cada enunciado como verdadero (V) o falso (F) y justifica tu respuesta:

I. Cuando los valores de x se acercan a cero por la izquierda, la función $F(x)$ tiende a infinito ( )

II. Cuándo los valores del dominio de la función se acercan a cero por la derecha, los valores de esta se hacen cada vez más grandes ( )

III. Existe un valor de x tal que $F(x) = 0$ ( )

<u>Actividad 2</u>: A continuación aparece la gráfica de la función $G(x) = \frac{1}{x+1}$ utilízala para responder las preguntas **1** a **7**. Recuerda justificar tu respuesta en cada caso.



Gráfica 2

Contesta teniendo en cuenta la información que proporciona la **Gráfica 2**:

a. ¿Cuál es el dominio de la función $G(x)$?

b. Determina, de ser posible, el valor de la función $G(x)$ para: $x = 1$, $x = 0$ y $x = -1$

c. Determina la imagen de $G(x)$, cuando $x =$ -2/3, -1/2, 0, 1/3

d. Determina la imagen de $G(x)$, cuando $x =$ -4/3, -3/2, -2, -15/6

e. Explica con tus palabras qué sucede en la **Gráfica 2** cuando $x = -1$

f. ¿Crees que la función se comporta de igual forma cuando los valores se acercan a menos uno (-1) por la izquierda y por la derecha? Justifica tu respuesta

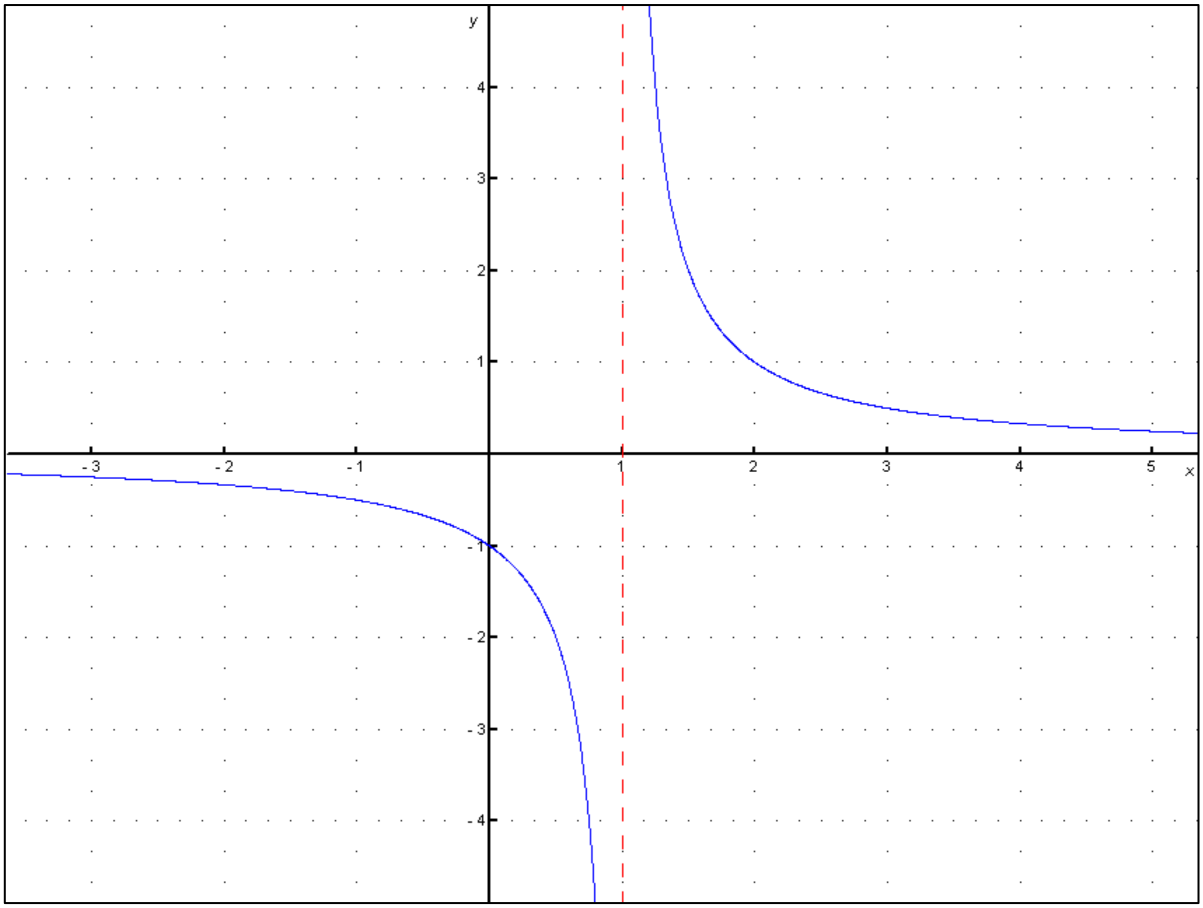
g. Completa:

   I. Cuando x se aproxima a _____ por la _____________ el comportamiento de la función $G(x)$ muestra que está tiende a $-\infty$ (es decir que se hace cada vez más pequeña).

   II. Cuando $x = -1$ la expresión $G(x)$ ___________________________________

   III. En la medida que los valores de x se hacen muy grandes o muy pequeños, vemos que el comportamiento de la función muestra que esta se acerca cada vez a ___________________________________

<u>Actividad 3</u>: A continuación aparece la gráfica de la función $H(x) = \frac{1}{x-1}$ utilízala para responder las preguntas de la **a** a la **d**. Recuerda justificar tu respuesta en cada caso.



Gráfica 3

Contesta teniendo en cuenta la información que proporciona la **Gráfica 3**:

a. ¿Cuál es el dominio de la función $H(x)$?

b. Determine el valor de la función $H(x)$ para: $x = 1$, $x = 0$ y $x = -1$

c. Crees que la función se comporta de igual forma cuando los valores se acercan a uno (1) por la izquierda y por la derecha (justifica tu respuesta)

d. Teniendo en cuenta las funciones $F(x)$, $G(x)$ y $H(x)$, ilustradas en las Gráficas 1, 2 y 3 respectivamente responda:

   I. ¿Son los dominio de $F(x)$, $G(x)$ y $H(x)$ iguales o diferentes?

II. Completa la Tabla 1.3, tabulando los valores de x correspondientes:

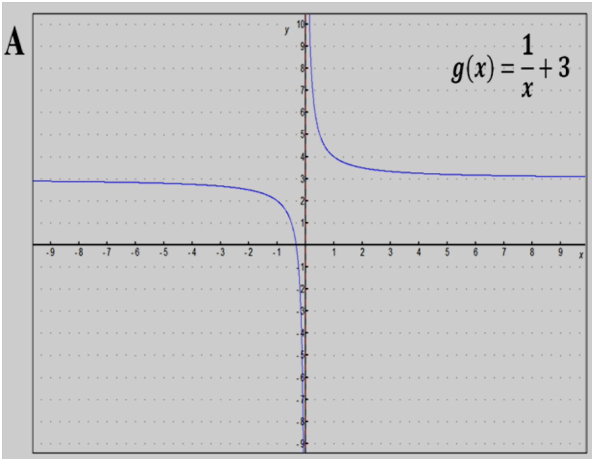
x	**-3**	**-2**	**-1**	**-1/2**	**0**	**1**	**1/2**	**2**	**3**
$G(x) = \dfrac{1}{x+1}$									
$F(x) = \dfrac{1}{x}$									
$H(x) = \dfrac{1}{x-1}$									

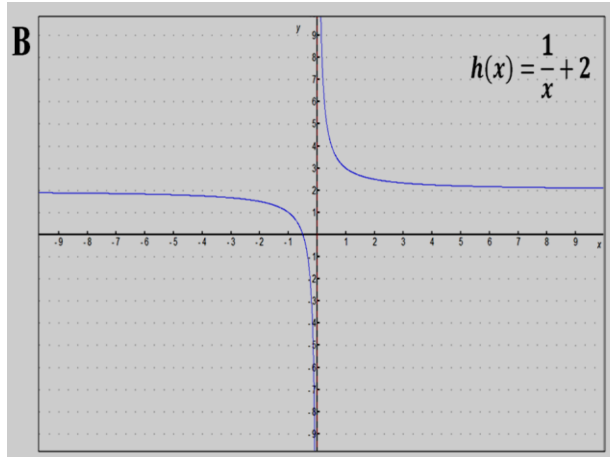
Tabla 1.3

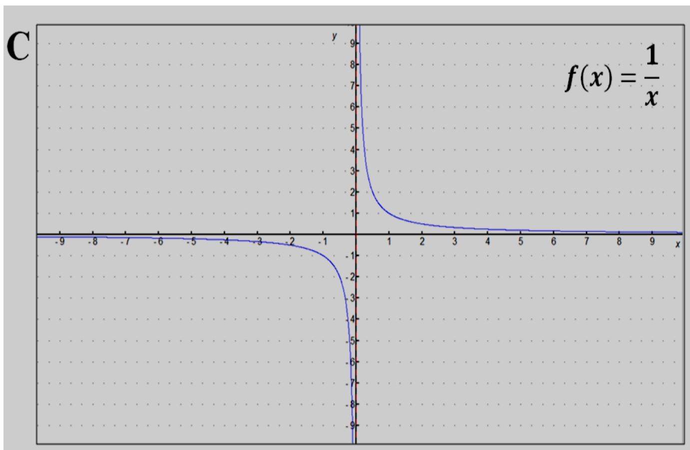
III. Teniendo en cuenta la Tabla 1.3, determina qué relación encuentra entre comportamiento algebraico y gráfico de las funciones $F(x)$ y $G(x)$.

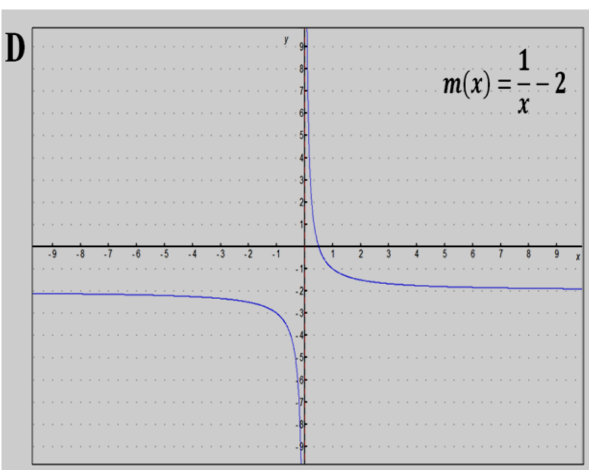
IV. Teniendo en cuenta la Tabla 1.3, determina qué relación encuentra entre comportamiento algebraico y gráfico de las funciones $F(x)$ y $H(x)$.

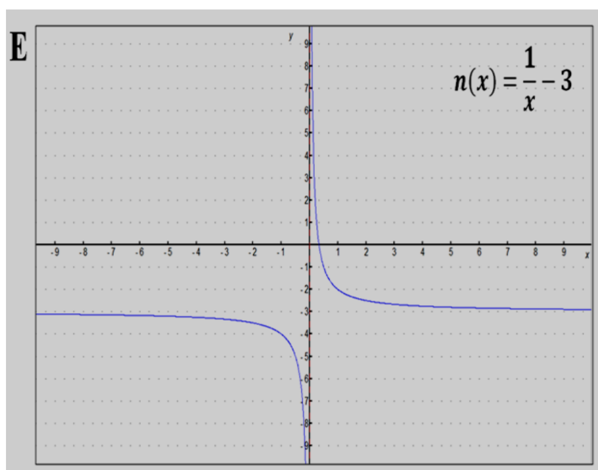
<u>Actividad 4</u>: Observa la secuencia de gráficas y expresiones algebraicas:











Teniendo en cuenta la secuencia de gráficas presentadas anteriormente contesta:

a. Para cada una de las gráficas presentadas, de ser posible, encuentra el valor de cada una de las funciones en los casos donde $x =$ -2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 2.

b. Teniendo en cuenta los datos obtenidos en el ítem anterior, completa la siguiente tabla comparativa

x / y	**-2**	**-1**	**-1/2**	**0**	**1/2**	**1**	**2**
A $g(x)$							
B $h(x)$							
C $f(x)$							
D $m(x)$							
E $n(x)$							

Tabla 1.4

c. De acuerdo con la tabla comparativa (Tabla 1.4) qué puedes decir del comportamiento de un mismo x con respecto a la forma como se modifican los valores de y en las funciones **A**, **B**, **C**, **D** y **E.**

d. Completa:

I. Dada la expresión $f(x) = \frac{1}{x}$, si esta se modifica sumado una constante positiva en el denominador, entonces su representación gráfica de desplaza hacia ____________________ con respecto a la expresión inicial.

II. Si la expresión es de la forma ____________________ entonces su gráfica de desplaza en sentido negativo sobre el eje y con respecto a la expresión $f(x) = \frac{1}{x}$

<u>Actividad 5</u>: Analiza y argumenta qué sucede en cada uno de los casos

a. Si tenemos como base la función $f(x) = \frac{1}{x}$ explica que sucede si esta sufre las modificaciones mencionadas a continuación**:**

I. Se suma una cantidad $\boldsymbol{a}$ a su denominador, quedando la expresión de la forma $f(x-a) = \frac{1}{x-a}$ **,** ¿Qué sucede con la gráfica si $a > 0$ y si $a < 0$?

II. Se suma una cantidad $\boldsymbol{b}$ a la expresión tal que esta quede de la forma $f(x) + b = \frac{1}{x} + b$ **,** ¿Qué sucede con la gráfica si $b > 0$ y si $b < 0$?

b. Hasta el momento solo se ha hablado del comportamiento de la función racional $f(x) = \frac{1}{x}$, cuando se modifica por:

- Desplazamiento sobre el eje x cuando la expresión $f(x) = \frac{1}{x}$ es de la forma $f(x-a) = t(x) = \frac{1}{x-a}$, de forma que $t(x)$ se desplaza sobre el eje x en sentido positivo o negativo dependiendo del valor de la constante a.
- Desplazamiento sobre el eje y cuando a la expresión $f(x) = \frac{1}{x}$ se le suma una constante b, tal que quede de la forma $f(x) + b = s(x) = \frac{1}{x} + b$, donde el

desplazamiento sobre el eje y es en sentido positivo o negativo dependiendo del valor de la constante b.

Teniendo en cuenta las dos modificaciones presentadas anteriormente con respecto al desplazamiento sobre el eje x y el eje y del sistema cartesiano de coordenadas de la expresión $f(x) = \frac{1}{x}$, ¿qué crees que suceda si ambas modificaciones se dan de manera simultánea, tal que la expresión quede de la forma $f(x-a) + b = \frac{1}{x-a} + b$ **,** cuando:

I. $a > 0\ y\ b > 0$?

II. $a < 0\ y\ b < 0$?

III. $a > 0\ y\ b < 0$?

IV. $a < 0\ y\ b > 0$?

c. Graficar las siguientes expresiones:

A. $f(x) = \frac{1}{x}$

B. $f(x) = \frac{1}{x+1} + 1$

C. $f(x) = \frac{1}{x+3}$

D. $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$

E. $f(x) = \frac{1}{x-3} - 2$

F. $f(x) = \frac{1}{x} - 2$

G. $f(x) = \frac{1}{x-3} + 1$

H. $f(x) = \frac{1}{x-2}$

I. $f(x) = \frac{1}{x-2} - 2$

J. $f(x) = \frac{1}{x}$+4

Teniendo en cuenta las gráficas realizadas en el numeral **3** contesta:

I. ¿El comportamiento de las funciones fue el esperado según lo que contestaste en el ítem 2**a**?

II. ¿El comportamiento de las expresiones de la forma $f(x) = \frac{1}{x-a} + b$ fue el esperado según los supuestos dados en el ítem 2**b**?

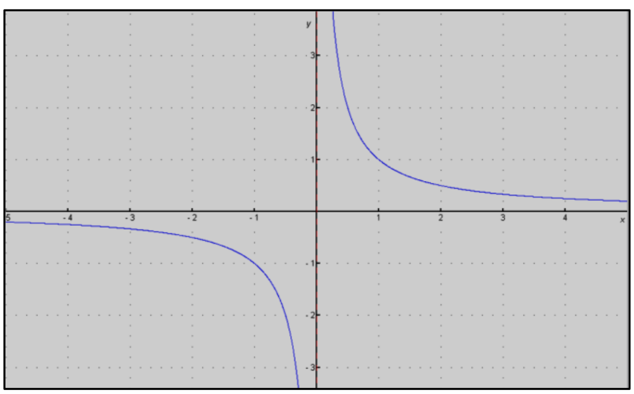
Actividad 6: Analiza

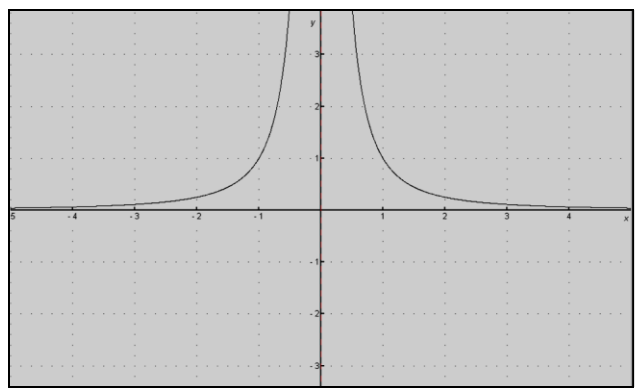
a. Completa la siguiente Tabla 1.6 de datos para las expresiones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$

x	-3	-5/2	-1	-1/2	0	3/5	1	2	3
$f(x) = \dfrac{1}{x}$									
$g(x) = \dfrac{1}{x^2}$									

Tabla 1.6

b. Teniendo en cuenta los datos de la Tabla 1.6, determina en la siguiente gráfica qué expresión le corresponde a cada curva, dando como mínimo tres argumentos del porqué de tu elección.





Expresión:______________________________ Expresión:_____________________________

c. ¿Crees que la función $g(x) = \frac{1}{x^2}$ se comporta igual a la expresión $f(x) = \frac{1}{x}$? justifica tu respuesta.

d. Determina si es falso (F) o verdadero (V) y justifica tu respuesta

I. Cuando los valores de los dominios de las funciones $g(x)$ y $f(x)$ se acercan a cero por la derecha los valores de estas se hacen cada vez más grandes ( )

II. Cuando los valores de los dominios de las funciones $g(x)$ y $f(x)$ se acercan a cero por la izquierda los valores de estas se hacen cada vez más pequeños ( )

e. Qué crees que suceda si modificamos la expresión $g(x)$ de forma que esta quede de la forma $g(x-4) = r(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ (Nota: Grafica la nueva expresión $r(x)$ y compárala con la inicial)

f. Considerando los datos de la Tabla 1.6 y su comportamiento gráfico del ítem **b** de la función $g(x)$, contesta las siguientes preguntas justificando cada una de las respuestas:

I. ¿Qué sucede con el comportamiento gráfico de la función en la medida que los valores de x se hacen cada vez más pequeños?

II. ¿Qué sucede con el comportamiento gráfico de la función en la medida que los valores de x se hacen cada vez más grandes?

III. ¿Es el comportamiento de la función $g(x)$ en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ creciente o decreciente?

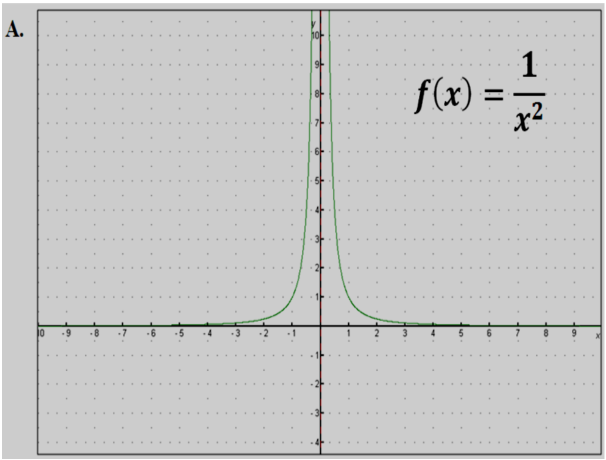
g. Compara las funciones $g(x) = \frac{1}{x^2}$ y $f(x) = \frac{1}{x}$ y determina las siguientes características

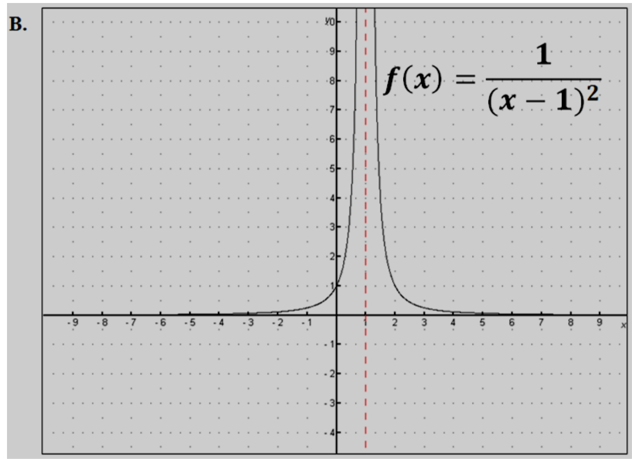
I. Cómo es el comportamiento de $g(x)$ en comparación al de $f(x)$ cuando se acerca a cero por izquierda y derecha.

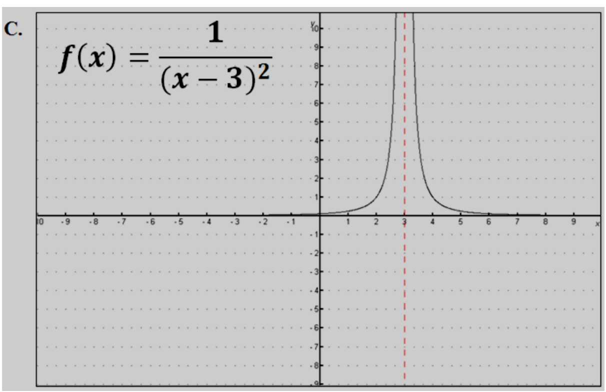
II. ¿En el intervalo $(-\infty, 0)$ las dos funciones son crecientes?

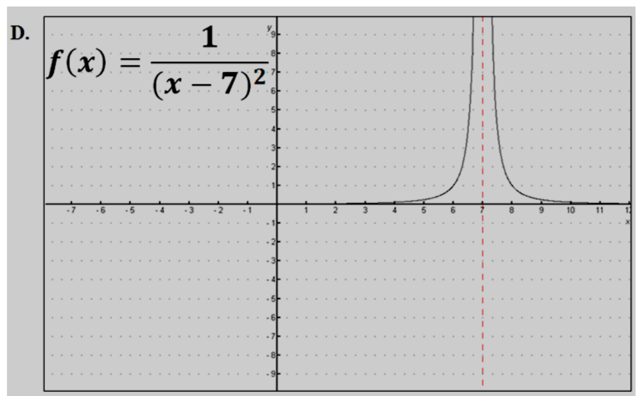
III. Cómo es la concavidad de las dos funciones en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ ¿son iguales?

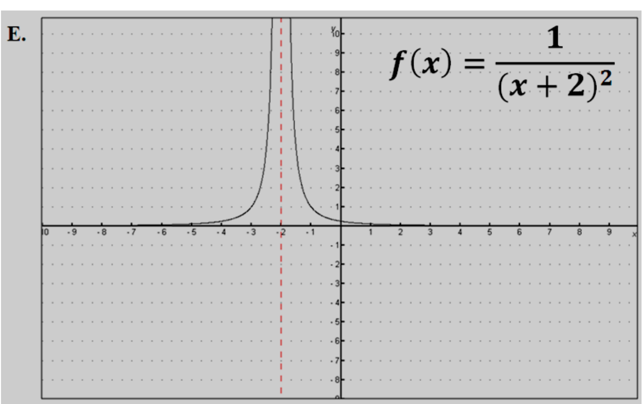
Actividad 7: Observa y analiza

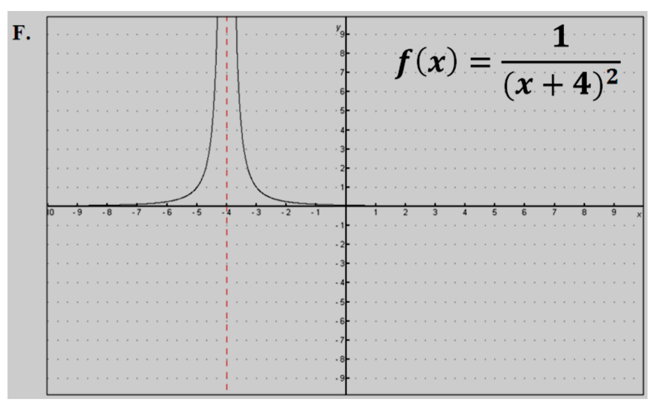




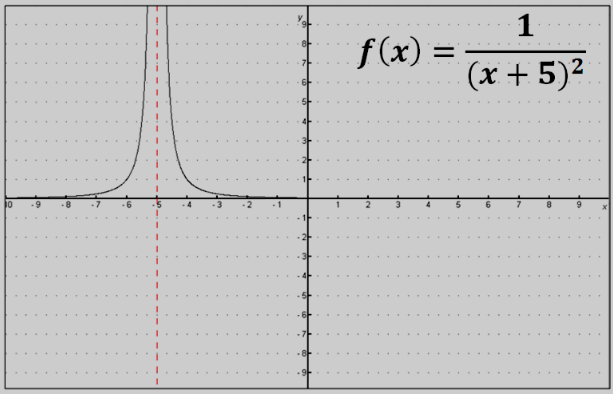




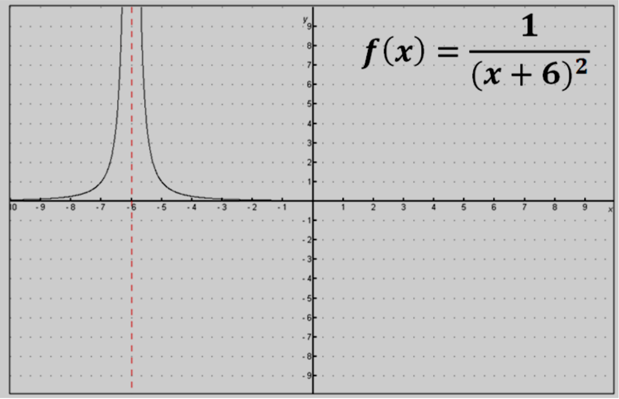




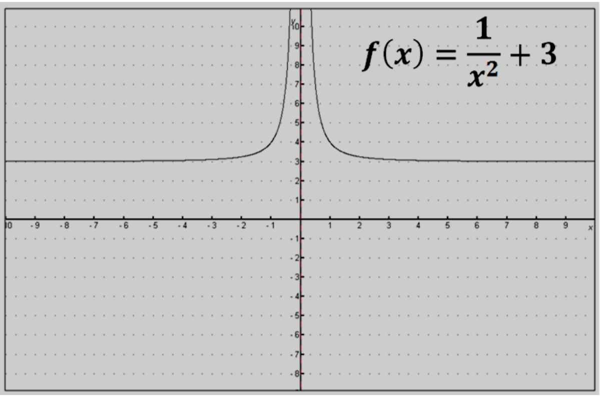
G.



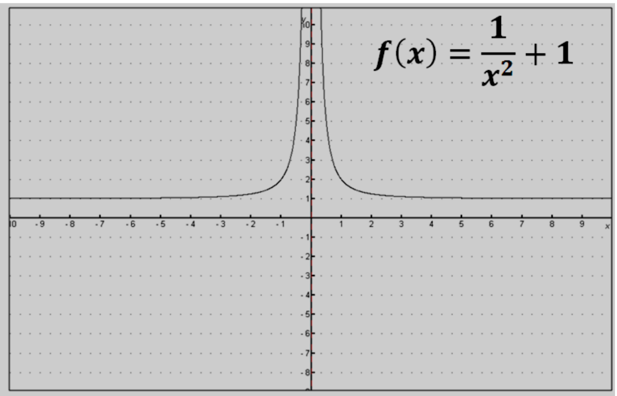
H.



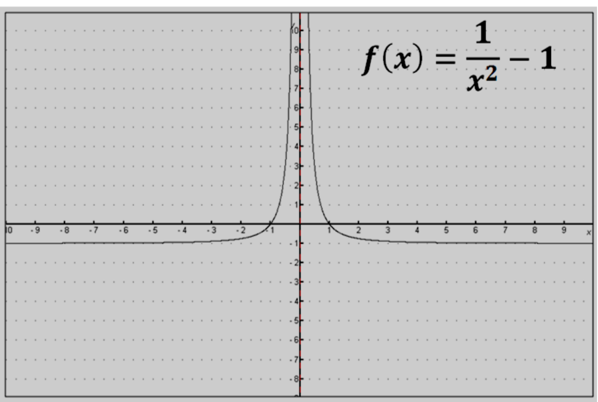
I.



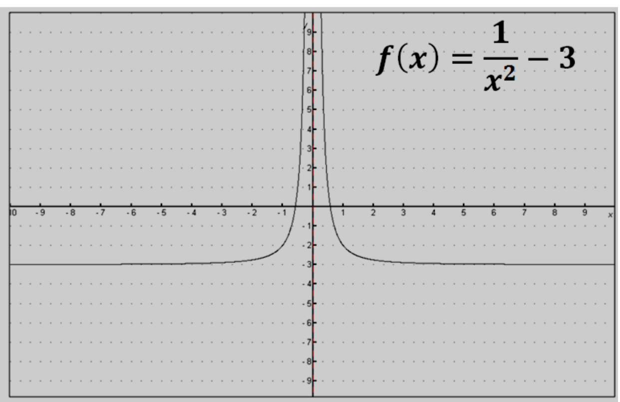
J.



K.



L.



Contesta:

a. ¿Qué relación puedes establecer entre la forma del comportamiento gráfico y su respectiva representación algebraica en cada una de las duplas gráfica-expresión presentadas anteriormente por los itérales A-L?

b. Dada como punto de partida la representación gráfica de la expresión $g(x) = \frac{1}{x^2}$, explica que características se deben tener en cuenta con respecto a esta, para obtener la representación gráfica de la expresión $h(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$ para los casos donde: $a = 0$; $a > 0$ y $a < 0$, donde $a \in \mathbb{Z}$.

c. Explica con tus palabras que crees que sucede con la representación gráfica de la expresión $g(x) = \frac{1}{x^2}$, si a esta se le suma una contante b ($b \in \mathbb{Z}$) de tal forma que la expresión se modifica como se ve a continuación:

$$s(x) = \frac{1}{x^2} + b$$

(Nota: Explica que sucede cuando b es positivo y negativo)

d. Elije y gráfica una serie de funciones $f(x)$ de la forma del literal c, y verifica si las conjeturas dadas en dicho punto fueron correctas.

e. Explica con tus palabras qué crees que le sucede a la representación gráfica de la expresión $h(x)$ del literal b., si a esta se le suma una constante b ($b \in \mathbb{Z}$), modificando la expresión de la forma $h(x) + b = k(x)$, donde:

$$k(x) = \frac{1}{(x-a)^2} + b$$

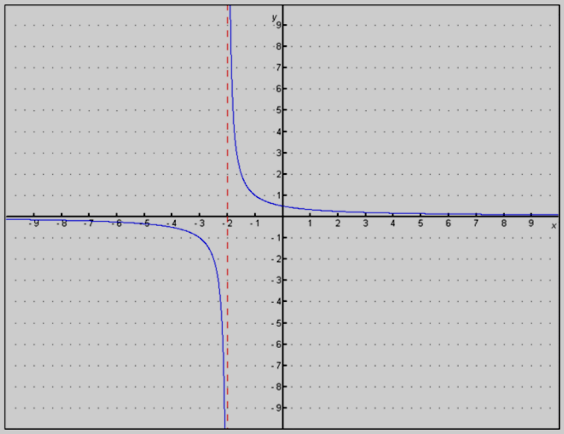
Donde $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$

(Nota: Explica que sucede en todas las posibles combinaciones cuando a y b son cero, positivos y negativos)

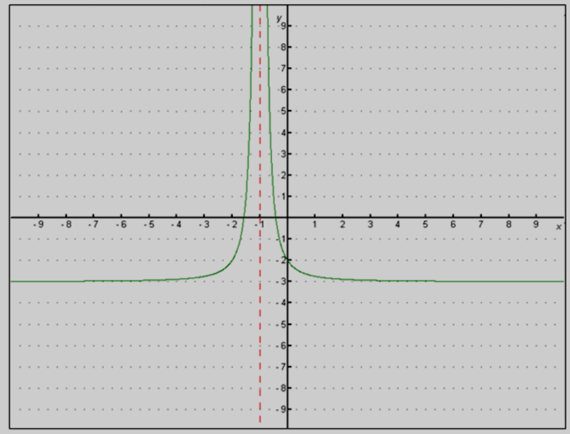
f. Elije y gráfica una serie de funciones $f(x)$ de la forma del ítem e, y verifica si las conjeturas dadas en dicho punto fueron correctas.

Actividad 8: observa las siguientes representaciones gráficas:

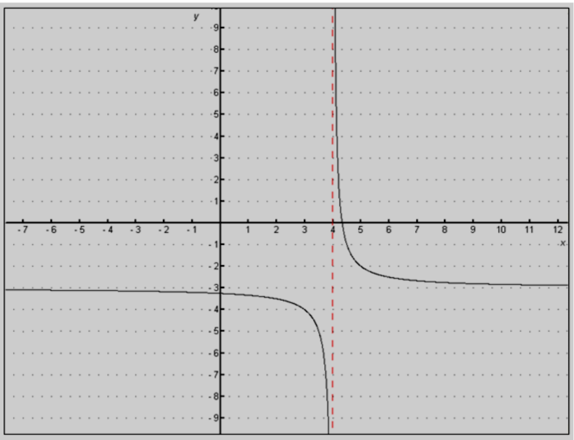
A.



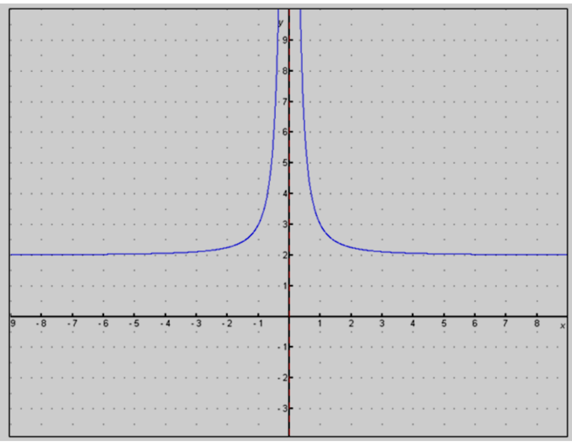
B.



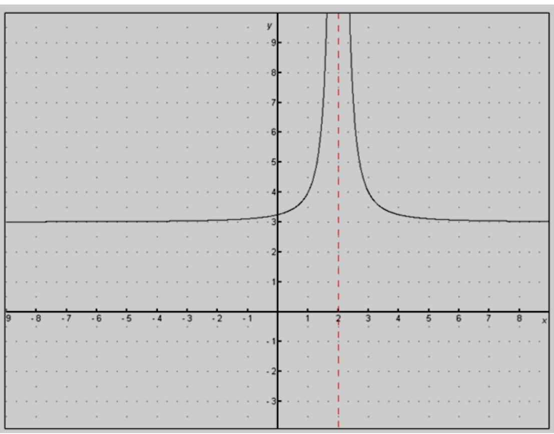
C.



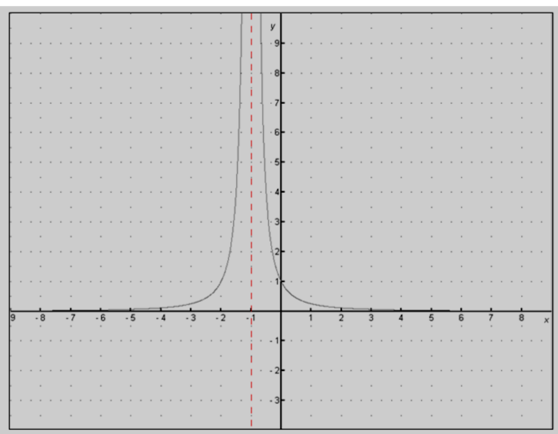
D.

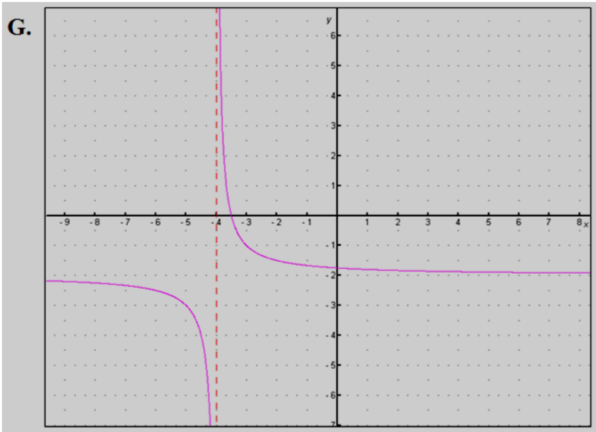


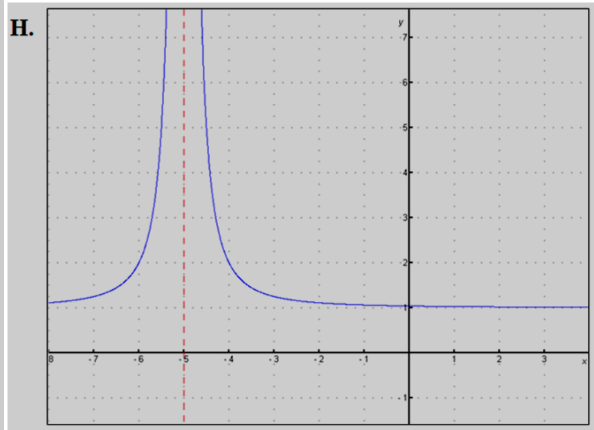
E.



F.







Asocia las gráficas A – H con su respectiva expresión algebraica. Justifica tu respuesta escribiendo por lo menos cuatro argumentos que expliquen tu selección (***Nota*:** dado que hay más gráficas que ecuaciones debes determinar la posible expresión algebraica de la gráfica que quede sin ecuación):

I. $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - 3$

II. $f(x) = \frac{1}{(x-6)^2} + 1$

III. $f(x) = \frac{1}{x+4} - 2$

IV. $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$

V. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 3$

VI. $f(x) = \frac{1}{2+x}$

VII. $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

VIII. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 3$

Aspectos conceptuales

Función racional

Este tipo de funciones se representa por medio de expresiones de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, tal que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas y $f(x)$ es irreducible o equivalente a una expresión irreducible.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}, \qquad y \quad q(x) \neq 0$$

Este tipo de funciones (racionales) demarcan un fuerte cambio conceptual en los estudiantes, por el hecho de iniciar el estudio de diversos procesos de discontinuidad en el dominio de las expresiones algebraicas estudiadas, lo cual no sucedía con el tipo de funciones estudiadas hasta el momento por ellos como son las funciones polinómicas.

La naturaleza de este tipo de funciones permite el estudio de nuevos conceptos matemáticos, los cuales no se dan en otro tipo de funciones como son:

- **Comportamiento asintótico**
- **Puntos abiertos**
- **Equivalencia de funciones**

Cuadro conceptual 1

SITUACIÓN 2: Asíntotas

OBJETIVO: que los estudiantes reconozcan las diferentes formas de comportamiento asintótico (horizontal, vertical y oblicua) de las funciones racionales tomando como punto de partida una característica propia del dominio de este tipo de funciones como es su posible discontinuidad.

Además, se emplean representaciones gráficas en sistemas cartesianos y expresiones algebraicas como el medio para reconocer el tipo de comportamiento asintótico de las funciones racionales a partir de ciertas características de las expresiones algebraicas como es la comparación entre los grados de las expresiones polinómicas que yacen en el numerador y denominador, y la relación gráfica que existe entre la gráfica de una asíntota con respecto a la gráfica de la expresión racional estudiada.

LOGROS:

- Reconoce la relación del dominio D_f de una función racional $f(x)$ con respecto al dominio de las expresiones polinómicas que la componen.
- Analiza y determina asíntotas verticales y horizontales a partir de valores de discontinuidad en el dominio y rango de una función racional.
- Determina la existencia y expresión de asíntotas oblicuas a partir de reconocer ciertos parámetros de regularidad en algunas expresiones racionales.
- Interpreta gráfica y analíticamente el tipo de comportamiento asintótico que puede sufrir una expresión racional a partir de la forma de la expresión algebraica.

Actividad 1: observa las siguientes expresiones

A. $p(x) = x^2 - 2x + 1$ $\quad q(x) = x$

B. $p(x) = x + 2$ $\quad q(x) = x^2 - 3$

C. $p(x) = 9x^2 + 2$ $\quad q(x) = 3x - 1$

D. $p(x) = 4x$ $\quad q(x) = 2x^2 + 3$

a. Determina los dominios D_p y D_q para cada una de los pares las funciones $p(x)$ y $q(x)$ dados en los literales A – D.

b. Determina un nuevo dominio D_{q^*}, el cual cumple la siguiente condición:

$$D_{q^*} = \{x \in q(x) : q(x) \neq 0\}$$

c. Efectúa en cada uno de los casos $D_p \cap D_{q^*}$

d. Organiza en cada uno de los ítems A, B, C, y D, las expresiones $p(x)$ y $q(x)$ presentadas de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, y determina el dominio D_f de cada una de estas.

e. ¿Son los resultados obtenidos en los literales c y d iguales? ¿Por qué?

f. Explica con tus palabras qué quiere decir la siguiente expresión

$$Dp_{/q} = D_f = \{x \in (D_p \cap D_q) \text{ tal que } q(x) \neq 0\}$$

Luego determina si estas a favor o en contra de ella y justifica tu respuesta.

Actividad 2: observa las siguientes expresiones algebraicas:

A. $y = \frac{2}{x+2}$

B. $y = \frac{2}{(x-1)^2}$

C. $y = \frac{x^2-2x+1}{x}$

D. $y = \frac{x+2}{x^2-3}$

E. $y = \frac{1}{x^2+1}$

F. $y = \frac{1}{x^2-1}$

G. $y = \frac{x^2-3}{2+3x-x^2}$

H. $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 3$

I. $y = \frac{9x^2+2}{3x-1}$

J. $y = \frac{4x}{2x^2+3}$

a. De las expresiones A – J establezca, de ser posible, todos aquellos valores de x que indeterminan la expresión.

b. Halla para cada una de las expresiones A – J su dominio D. ¿Qué puedes decir de estos en comparación con los valores de x determinados en el ítem anterior?

c. Para cada caso analiza cómo se comporta la función para los valores de x próximos a los puntos donde se indetermina $f(x)$. Justifica tu respuesta.

   a. ¿Crece de forma no acotada?

   b. ¿Se aproxima a un valor fijo?

   c. ¿Decrece de forma no acotada?

d. Realiza una gráfica que bosqueje el comportamiento de las funciones $y = f(x)$ ¿explica qué tuviste en cuenta al momento de realizarlo?

<u>Actividad 3</u>: Asíntotas horizontales y verticales

A. $y = \frac{2}{x+2}$

B. $y = \frac{4}{x^2} + 3$

C. $y = \frac{2}{x-3} + 2$

D. $y = \frac{x}{x^2-1} - 2$

E. $y = \frac{1}{(x+2)^2} + 3$

F. $y = \frac{x-1}{x+1}$

a. Para los literales A, B, C y F, de ser posible, expresa x en términos de y tal que la expresión resultante quede de la forma $x = g(y)$. Una vez despejada x establece todos los valores de y para los cuales la función $g(y)$ se indetermina.

b. Para los literales B, D y F, muestra que en la medida que x se hace cada vez más grande o más pequeño, la función se aproxima a un valor fijo. *Sugerencia:* Utiliza la calculadora para tabular los siguientes valores para x: 10, 100, 200, -10, -100 y -200.

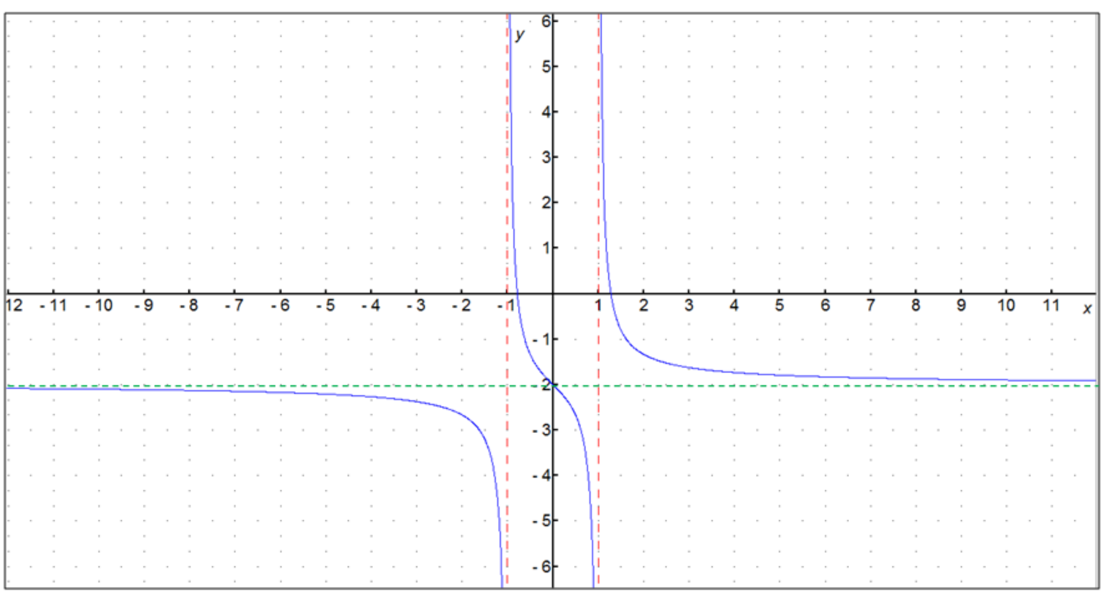
c. Determina el dominio D en cada una de las funciones $y = f(x)$ presentadas anteriormente.

d. Qué puedes decir con respecto a la continuidad de estas expresiones, es decir, ¿existen acaso valores x del dominio tales que la función $y = f(x)$ no se encuentre definida?

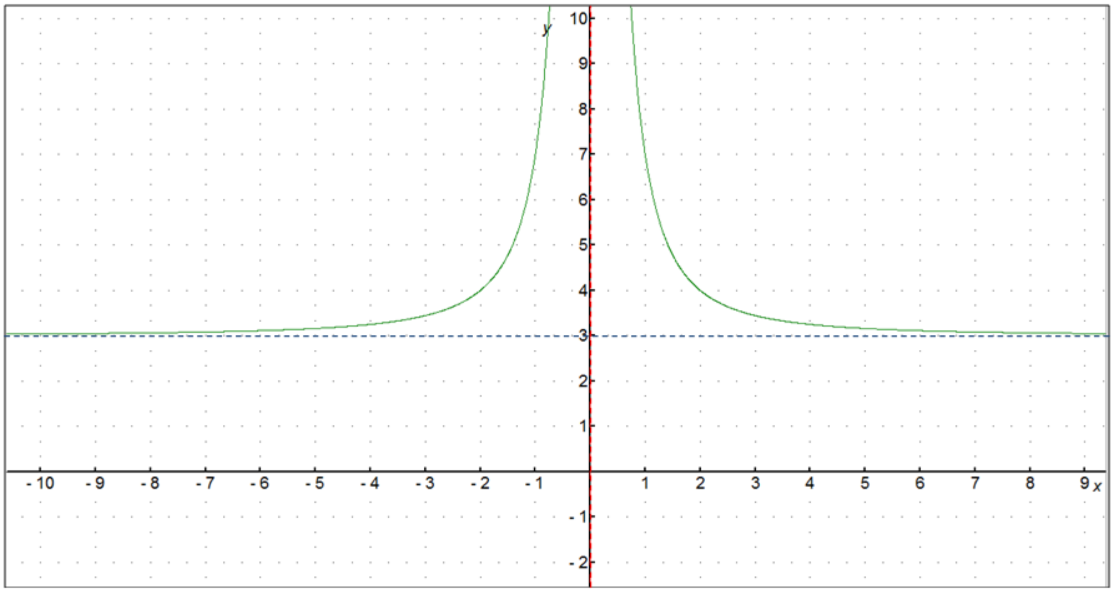
e. Determina cómo es el comportamiento de cada una de las funciones alrededor de los puntos donde es discontinua.

- Cuántos intervalos componen el dominio D en cada función.
- Es su comportamiento creciente o decreciente.
- Cómo es su concavidad antes y después del valor x de discontinuidad.

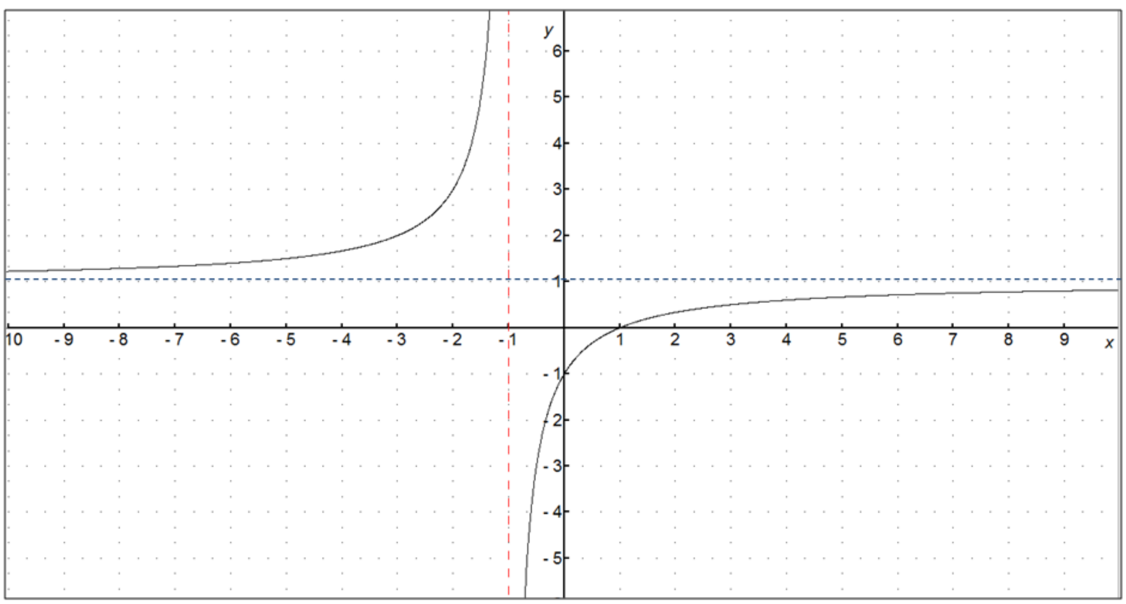
f. Identifica la gráfica correspondiente a los literales B, D y F. Justifica tu elección.



Expresión:________



Expresión:_________



Expresión:_________

<u>Actividad 4</u>: asíntotas oblicuas

a. Efectué las siguientes divisiones entre polinomios e identifica el cociente en cada caso (observa el ejemplo para el literal A).

A. $y = \frac{x^2+x-2}{x+1}$

B. $y = \frac{x^2-3x+1}{x-1}$

C. $y = \frac{x^2+3}{x}$

D. $y = \frac{x^2-x+3}{x-2}$

E. $y = \frac{x^2-3x+1}{x+2}$

F. $y = \frac{5+4x^2}{x-5}$

Ejemplo:

A. $y = \frac{x^2+x-2}{x+1}$

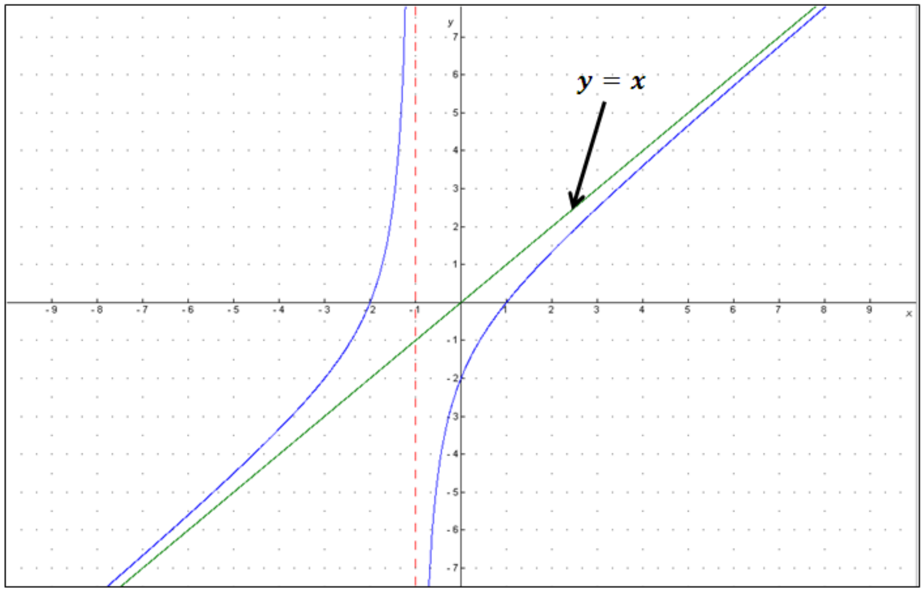
Efectuamos la división:

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^2 & +\,x & -\,2 & x+1 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -\,x & & x \\ \cline{1-3}
0 & 0 & -2 &
\end{array}
$$

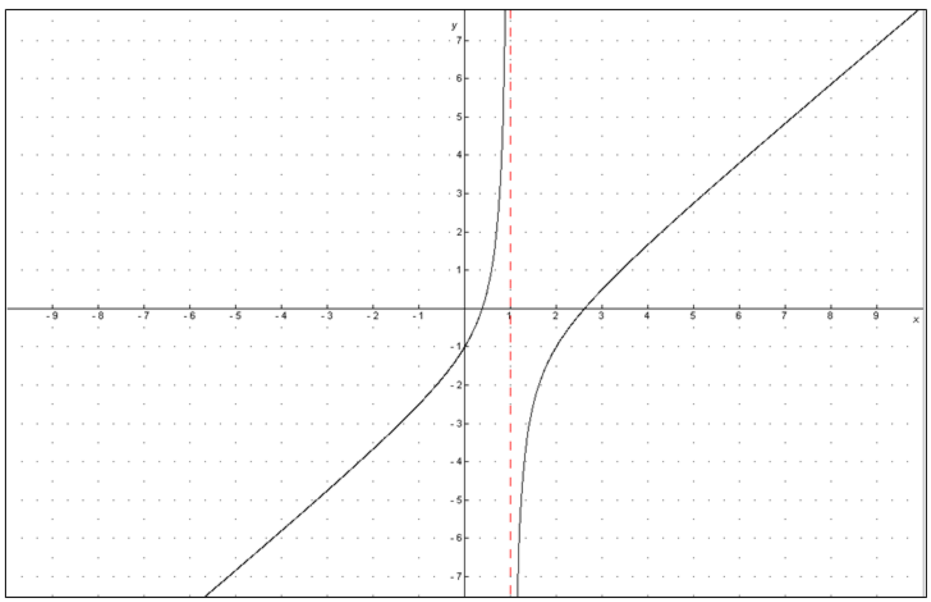
Cociente $C(x) = x$

b. A continuación se presenta la gráfica de cada una de las funciones racionales $y = f(x)$ del ítem **A**, grafique sobre cada uno de los sistemas de coordenadas cartesianas la función $y = C(x)$, donde $C(x)$ es el cociente que se obtuvo de las divisiones entre polinomios efectuadas en el ítem anterior.

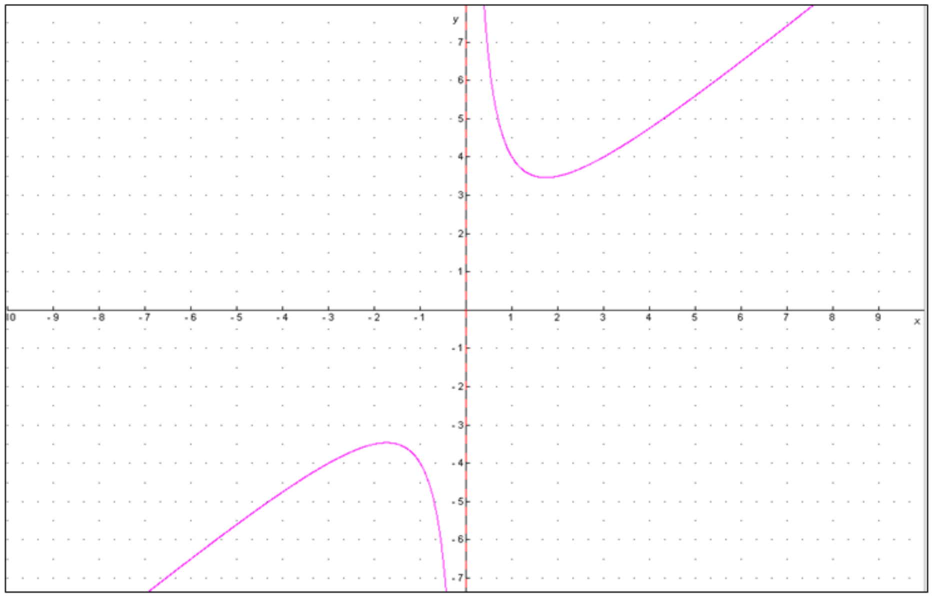
A. $y = \frac{x^2+x-2}{x+1}$



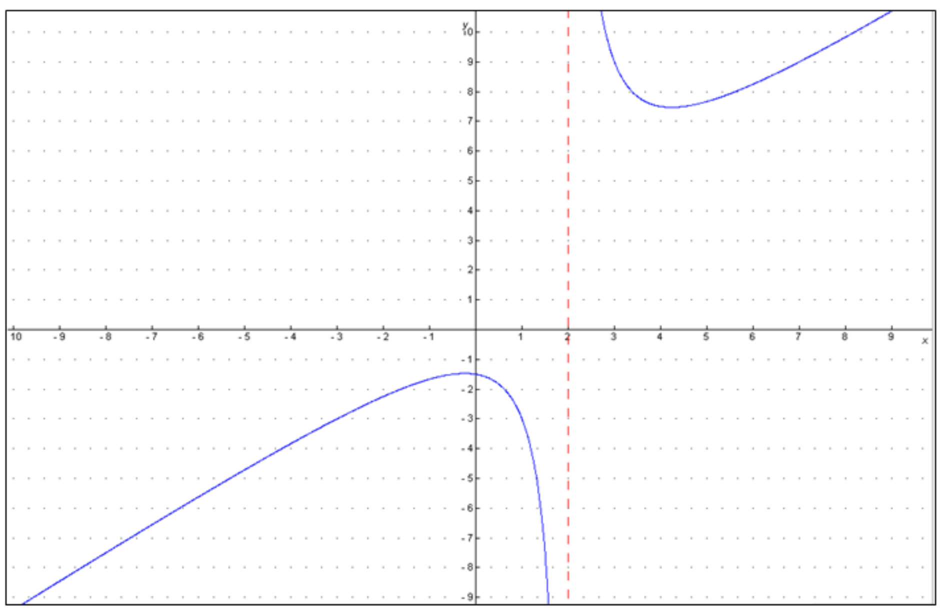
B. $y = \frac{x^2-3x+1}{x-1}$



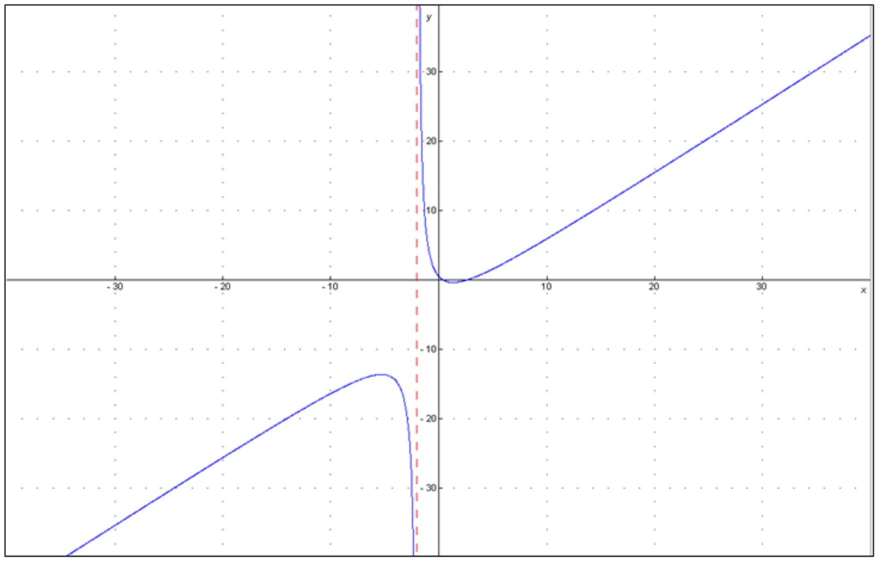
C. $y = \frac{x^2+3}{x}$



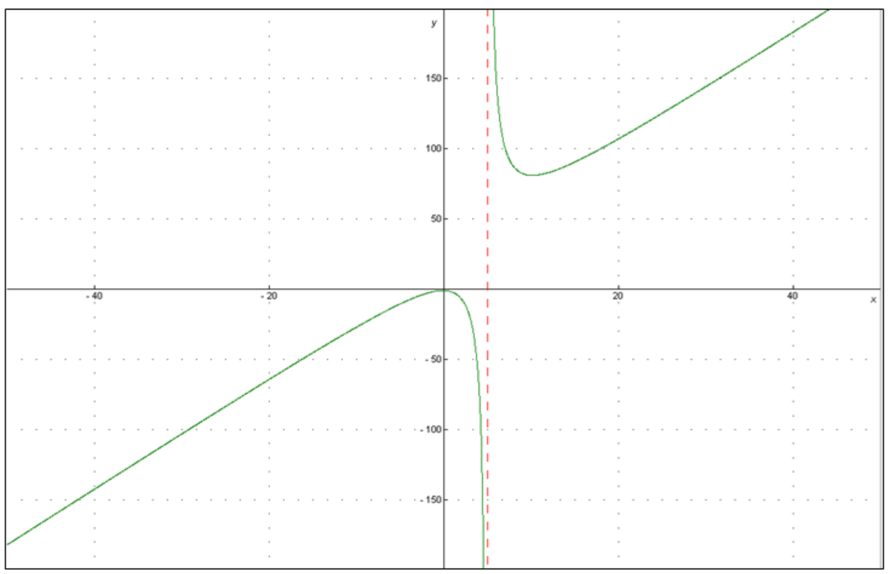
D. $y = \frac{x^2-x+3}{x-2}$



E. $y = \frac{x^2-3x+1}{x+2}$



F. $y = \frac{5+4x^2}{x-5}$



c. ¿Qué puedes decir del comportamiento de cada una de las expresiones racionales A- F con respecto la recta $y = C(x)$?

- ¿Se intersectan $y = f(x)$ y $y = C(x)$ en algún punto?
- ¿Es correcto afirmar que si los valores del dominio $f(x)$ toma valores muy grandes (o muy pequeños) $y = C(x)$ se aproxima a $f(x)$? Justifica tu respuesta.

Aspectos conceptuales

Comportamiento asintótico

Las asíntotas en las funciones racionales $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ son una implicación del comportamiento de estas a través de los casos donde $p(x) \neq 0$, $q(x) = 0$ y la relación entre los grados de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$.

Ahora, sea la función racional $f(x)$ definida como:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0} \text{ donde } a_n \neq 0 \text{ y } b_m \neq 0$$

en su expresión simplificada (irreducible), luego si:

- $q(x^*) = 0$ para $x^* \in \mathbb{R}$, entonces $x = x^*$ es una **asíntota vertical** (si la indeterminación es de la forma $f(x) = \frac{n}{0}$ para $n \in \mathbb{R}$ y $n \neq 0$).
- Si $x^* \in \mathbb{R}$ es una raíz simple de $q(x^*) = 0$, las ramas laterales de la asíntota $f(x) = a$ tienen sentidos distintos, una hacia $+\infty$ y otra a $-\infty$. Mientras que si a es una raíz doble, ambas ramas van hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$.
- Si el grado de $p(x)$ es una unidad mayor al grado de $q(x)$, entonces existe una **asíntota oblicua**, la misma, tanto si $x \to +\infty$ como si $x \to -\infty$.
- $n < m$, entonces el eje x es **la asíntota horizontal**, es decir $y = 0$.
- $n = m$, entonces la **asíntota horizontal** es la recta igual al cociente de los coeficientes principales de $p(x)$ y $q(x)$ dados por a_n y b_m respectivamente $\left(y = \frac{a_n}{b_m}\right)$.
- $n > m$, entonces la gráfica no tiene asíntotas horizontales.

Caracterizando de esta manera los tres tipos de comportamiento asintótico de las funciones racionales: *vertical*, *horizontal* y *oblicuo*.

Consideración para graficar asíntotas oblicuas: sea una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, en la que el grado de $p(x)$ es mayor en una unidad al grado de $q(x)$. Si se escribe $f(x)$ de la forma:

$$f(x) = ax + b + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Entonces la recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de $f(x)$.

Donde $y = ax + b$ es el cociente al efectuar la división entre los polinomios $p(x)$ y $q(x)$.

Cuadro conceptual 2

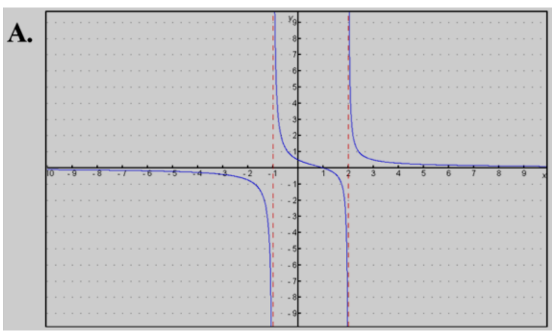
<u>Actividad 5</u>: teniendo en cuenta los aspectos teóricos presentados en el Cuadro conceptual 2 respecto al comportamiento asintótico de las funciones racionales, evalúa tu comprensión:

a. Considerando cada una de las representaciones gráficas A-H, completa la tabla 2.5 determinando:

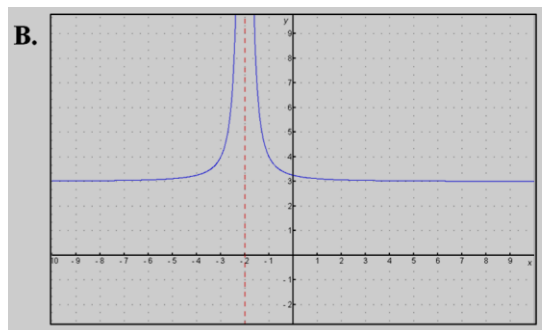
   I. ¿Cuál expresión algebraica le corresponde a cada una de las representaciones gráficas A-H de las presentadas en la tabla **expresiones algebraicas 2.5**?

   II. Determinando que tipo de comportamiento asintótico (vertical, horizontal y oblicuo) presenta cada una de las representaciones gráficas A-H; estableciendo la expresión algebraica de estas asíntotas.

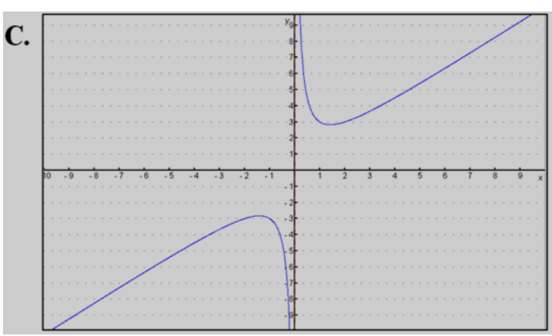
A.



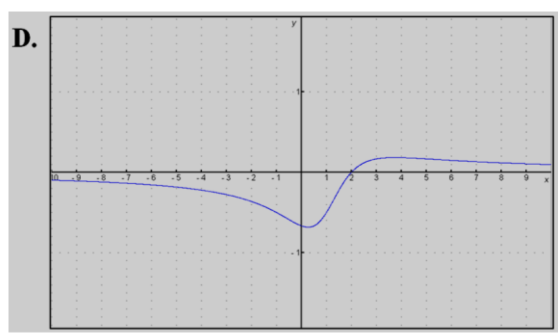
B.



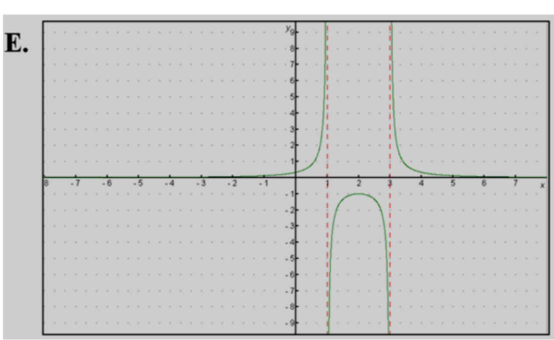
C.



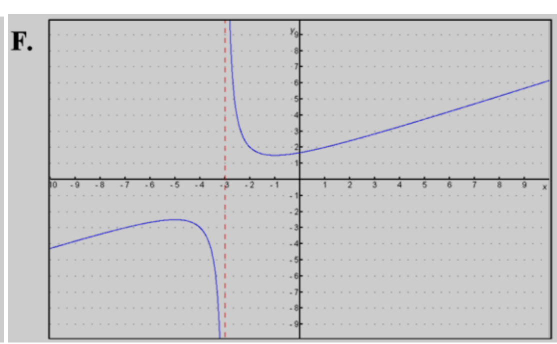
D.



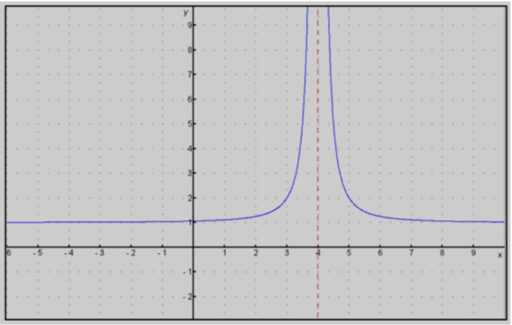
E.



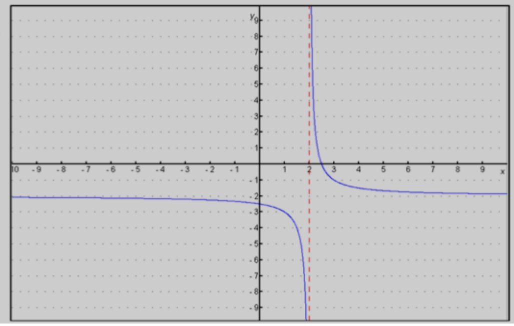
F.



G.



H.



$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-2x+3}$$

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)(x-1)}$$

$$f(x)=\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}$$

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x}$$

$$f(x)=\frac{1}{(x-4)^2}+1$$

$$f(x)=\frac{x^2+5x+10}{2(x+3)}$$

$$f(x)=\frac{1}{(2+x)^2}+3$$

$$f(x)=\frac{2}{-4+2x}-2$$

Expresiones algebraicas 2.5

Gráfica	Expresión algebraica	Comportamiento asintótico					
		Asíntota vertical	Ecuación asíntota vertical	Asíntota horizontal	Ecuación asíntota horizontal	Asíntota oblicua	Ecuación asíntota oblicua
A		Si __ No __		Si __ No __		Si __ No __	
B		Si __ No __		Si __ No __		Si __ No __	
C		Si __ No __		Si __ No __		Si __ No __	
D		Si __ No __		Si __ No __		Si __ No __	
E		Si __ No __		Si __ No __		Si __ No __	
F		Si __ No __		Si __ No __		Si __ No __	
G		Si __ No __		Si __ No __		Si __ No __	

Tabla 2.5

b. Teniendo en cuenta los datos de la Tabla 2.5, contesta las siguientes preguntas:

I. ¿Qué características tienen las expresiones algebraicas de una función racional $f(x)$ cuando esta presenta un comportamiento asintótico vertical? Justifica tu respuesta.

II. ¿Qué características tienen las expresiones algebraicas de una función racional $f(x)$ cuando esta presenta un comportamiento asintótico horizontal? Justifica tu respuesta.

III. ¿Qué características tienen las expresiones algebraicas de una función racional $f(x)$ cuando esta presenta un comportamiento asintótico oblicuo? Justifica tu respuesta.

IV. ¿Puede una función racional $f(x)$ presentar más de un comportamiento asintótico a la vez? Justifica tu respuesta.

V. ¿Puede una función racional $f(x)$ tener un comportamiento asintótico horizontal y oblicuo a la vez? Justifica tu respuesta.

<u>Actividad 6</u>: Comprueba y determina

a. Determine si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos y justifica tu respuesta

I. Es la recta $y = f(x) = 2$ una asíntota vertical de la función racional $f(x) = \frac{2x+3}{4-2x}$ ( )

II. La recta $x = 0$ es una asíntota vertical de la función racional $f(x) = \frac{3}{2x}$ ( )

III. La expresión $f(x) = \frac{x+3}{x-2} + 4$ solo tiene asíntotas verticales ( )

IV. La expresión $f(x) = \frac{x^2}{x+4}$ tiene una asíntota oblicua ( )

b. ¿Qué tanto has comprendido?

I. Realiza el bosquejo de la gráfica de una función racional $f(x)$ que satisfaga todas las condiciones siguientes:

- $x = 1$ es una asíntota vertical.
- $y = 2$ es una asíntota horizontal.
- El dominio D_f de la función es todo $\mathbb{R} - \{1\}$
- El rango R_f de la función es todo $\mathbb{R} - \{2\}$
- En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es decreciente
- En el intervalo $(1, \infty)$ la función es cóncava hacia arriba

II. Formé una función racional $f(x)$ que tenga a $y = x + 1$ como asíntota oblicua, $x = -2$ como asíntota vertical, que pase por el origen y el punto $(-3, 0)$.

SITUACIÓN 3: Equivalencia de funciones

OBJETIVO: reconocer las restricciones que debe tener el dominio de una expresión algebraica que se ha obtenido al simplificar una función racional para que estas sean equivalentes.

Este análisis del dominio de las funciones racionales, permite diferenciar entre dos tipos de discontinuidad, por un lado está el comportamiento asintótico analizado en Situación 2 y por otro el caso de los puntos abiertos, que son el objeto de análisis en esta situación, el cual es propio de las funciones racionales que no están en su forma irreducible.

LOGROS:

- Reconoce los dos tipos de indeterminación que pueden sufrir las funciones racionales, como son las formas $\frac{0}{0}$ y $\frac{a}{0}$ donde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- Teniendo en cuenta el tipo de discontinuidad, determina si la expresión es irreducible o no.
- Establece relación entre el tipo de discontinuidad que sufre una función racional con respecto a las dos formas de discontinuidad asíntota vertical ó abierto.
- Establece la equivalencia de dos expresiones algebraicas a partir de la restricción de sus dominios D_f.

<u>Actividad 1</u>: observa las siguientes expresiones algebraicas

A. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$

B. $f(x) = \frac{-9+x^2}{7x-21}$

C. $f(x) = \frac{16x^2+8x+1}{4x+1}$

D. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3}$

E. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

F. $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$

G. $f(x) = \frac{5x^2+3x}{x-7}$

H. $f(x) = \frac{1+x-2x^2}{x-1}$

a. Determina los valores de x que hacen que el denominador de cada una de las expresiones $f(x)$ sea cero.

b. Sustituye los valores obtenidos en el ítem anterior en cada una de las expresiones y detecta si está se indetermina de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{a}{0}$ para $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

c. Observa la siguiente expresión:

$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$ Para el caso donde $x = -2$ y $x = 1$

Donde para ambos casos de x, se puede observar que al sustituirlos en la expresión $f(x)$ esta se indetermina de la forma $\frac{0}{0}$:

I. ¿Es posible factorizar y simplificar la expresión $f(x)$? Si___No___

II. En caso de que la expresión $f(x)$ se pueda factorizar y simplificar, determina cual es esta nueva expresión simplificada $i(x)$ ¿presenta esta nueva expresión $i(x)$ el mismo tipo de indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ que $f(x)$? En caso que $i(x)$ no presente el mismo una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ ¿determina cual es el tipo de indeterminación que presenta, y si al igual que $f(x)$ esta se puede simplificar?

Notación

Sea $f(x)$ una función racional, la cual como se ha estudiado hasta el momento puede presentar una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{a}{0}$ para $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Ahora, si la expresión algebraica $f(x)$ presenta una indeterminación de la forma $\frac{a}{0}$ para $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, implica que está en su forma irreducible y se denota como $i(x)$.

d. ¿Qué puedes decir de aquellas expresiones que se indeterminan de la forma $\frac{0}{0}$ y de la forma $\frac{a}{0}$?

- ¿Si la expresión se indetermina de las forma $\frac{0}{0}$ se puede simplificar?
- ¿Si la expresión se indetermina de las forma $\frac{a}{0}$ se puede simplificar?

e. Simplifica cada una de las expresiones racionales $f(x)$ presentadas anteriormente mediante las viñetas A-H, de ser posible, en su expresión irreducible $i(x)$.

f. Completa la Tabla 3.1 presentada a continuación, determinando los dominios D_f y D_i de las funciones $f(x)$ y $i(x)$ estudiadas en el ítem anterior:

	D_f	D_i
A.		
B.		
C.		
D.		
E.		
F.		
G.		
H.		

Tabla 3.1

g. Teniendo en cuenta aquellas expresiones $f(x)$ que se pudo simplificar en el ítem **e**. en una expresión $i(x)$, contesta las siguientes preguntas justificando tus respuestas:

I. ¿Qué tipo de indeterminación presentaba $\frac{0}{0}$ ó $\frac{a}{0}$ para $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$?

II. ¿Son los dominios de la expresión inicial $f(x)$ e $i(x)$ iguales? (Utiliza los resultados obtenidos en la Tabla 3.1)

III. *Responda verdadero o falso*. Si los dominios de $f(x)$ y su correspondiente $i(x)$ son distintos entonces sus gráficas son distintas. (   )

IV. *Responda verdadero o falso*. Si los dominios de $f(x)$ y su correspondiente $i(x)$ son distintos entonces las expresiones $f(x)$ y $i(x)$ son equivalentes. (   )

Aspecto conceptual

Equivalencia de funciones: Las funciones racionales $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con $q(x) \neq 0$, se puede indeterminar de la forma $\frac{0}{0}$, dada esta situación, implica que la expresión inicial $f(x)$ puede ser simplificad a su expresión irreducible $i(x)$.

Pero ¿Qué características debe tener $i(x)$ con respecto a $f(x)$ para qué sean ambas expresiones equivalente?, estos criterios se han hecho invisibles en la actividad matemática generada por los estudiantes por el hecho de centrar su atención solo en la manipulación de algoritmo, desconociendo que para ser estas dos expresiones $f(x)$ y $i(x)$ equivalentes, sus dominio debes ser iguales, es decir, que se debe restringir el dominio D_i de la expresión resultante $i(x)$ de simplificar la expresión $f(x)$ con respecto al dominio de la expresión inicial $f(x)$ denotado por D_f.

Ante esto se puede decir que las expresiones $f(x)$ y $i(x)$ son equivalentes solo cuando se cumple que el $D_f = D_i$.

De esta manera, la equivalencia de funciones ha conllevado a problematizar dos tipos de discontinuidades con respecto a las funciones racionales $f(x)$ como es: la discontinuidad por comportamiento *asintótico vertical* y la discontinuidad por *puntos abiertos*.

- **Discontinuidad por comportamiento asintótico vertical:** se da en el caso donde la expresión racional $f(x)$ en su forma irreductible $i(x)$ presenta indeterminaciones de la forma $\frac{a}{0}$ con $a \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$, donde todos aquellos valores de x que hacen que la expresión del denominador de $i(x)$ se denominan asíntotas verticales de $f(x)$.
- **Discontinuidad por puntos abiertos:** se da en aquellas situaciones donde la expresión irreductible $i(x)$ de la expresión racional $f(x)$, ya no presenta problemas de discontinuidad en su dominio lo cual si ocurre con la expresión $f(x)$, luego para que sean $f(x)$ y $i(x)$ equivalentes se restringe el dominio de $i(x)$ bajo las características del dominio de $f(x)$.

Cuadro conceptual 3

<u>Actividad 2</u>: teniendo en cuenta las expresiones racionales presentadas en la Actividad 1, contesta las siguientes preguntas de la **a** a la **g**:

a. Para cada una de las expresiones seleccionadas del ítem **a**, completa las siguientes tabla comparativas de datos:

Expresión A

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$									
$i(x) =$ ________									

Tabla 3.2.1

Expresión B

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x) = -\frac{9+x^2}{7x-21}$									
$i(x) =$ ________									

Tabla 3.2.2

Expresión E

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$									
$i(x) =$ ________									

Tabla 3.2.3

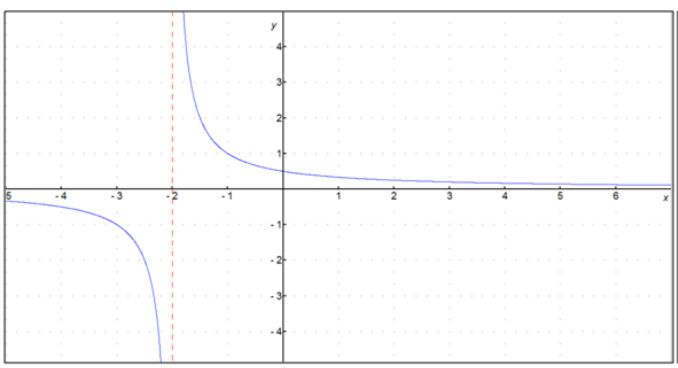
Expresión G

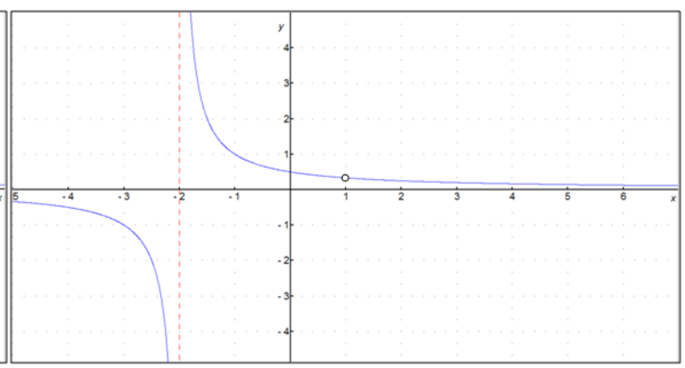
x	-2	-1	0	1	2	3	6	7	8
$f(x) = \dfrac{5x^2 + 3x}{x - 7}$									
$i(x) =$ __________									

Tabla 3.2.4

b. Teniendo en cuenta las Tablas anteriores (3.2.1-3.2.4) determina cuál es su respectiva representación gráfica, marcando con una **X** la que consideras correcta de los siguientes pares de gráficas presentadas para cada expresión seleccionada (**A**, **B**, **E**, **G**, **H**). Justifica tu elección dando por lo menos tres argumentos del porqué de tu elección.

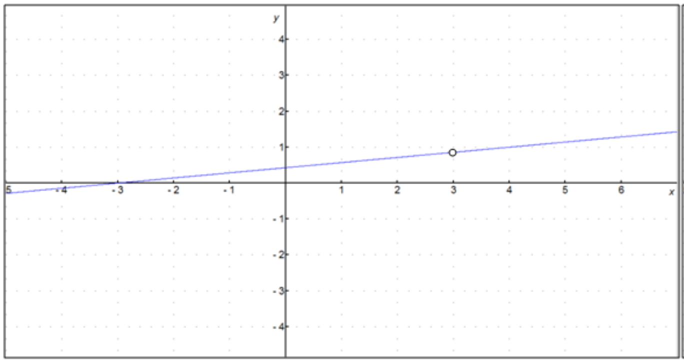
Expresión A



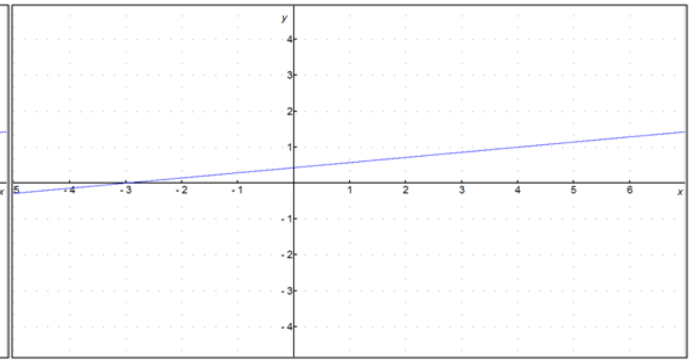


I._____ **II._____**

Expresión B

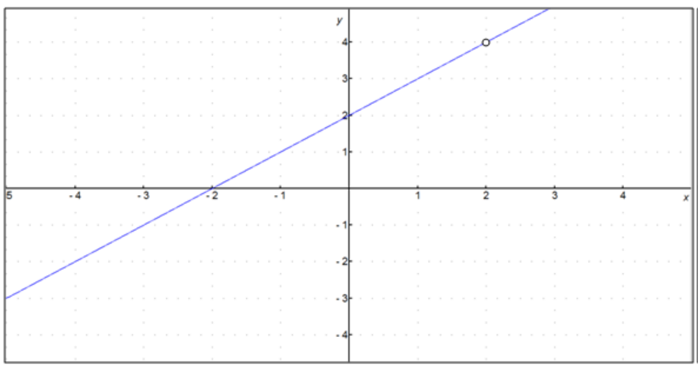


I.____

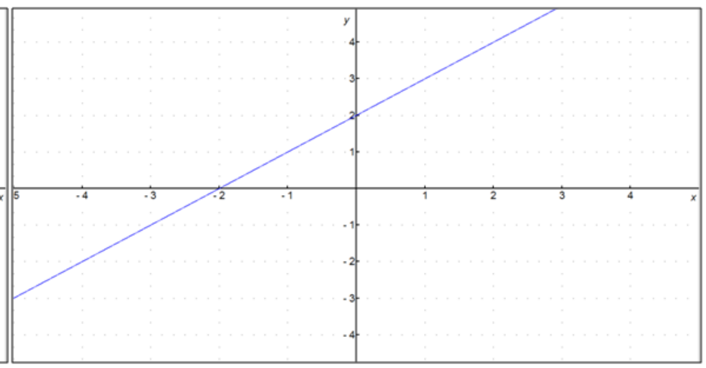


II.____

Expresión E

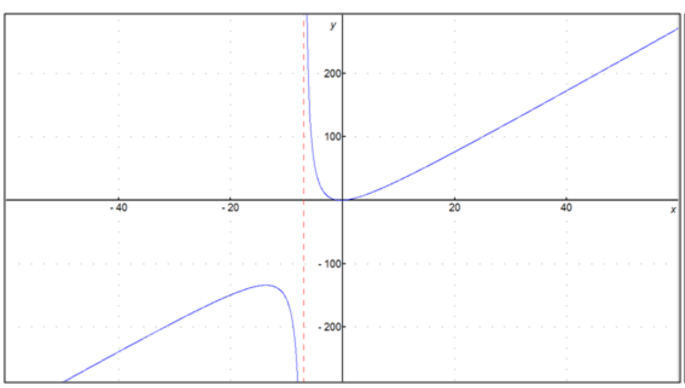


I.____

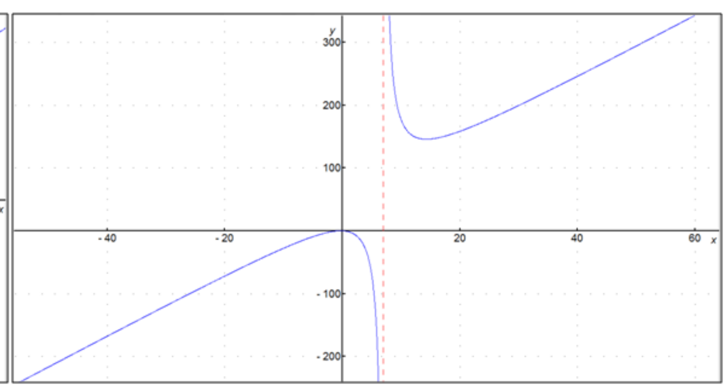


II.____

Expresión G



I.____



II.____

c. Que restricción crees que se debe hacer en cada uno de los pares de expresiones $f(x)$ e $i(x)$ de tal manera que estas sean equivalentes (expresarlo de forma algebraica)

d. En la **Expresión A**, que puedes decir del comportamiento de $f(x)$ e $i(x)$ en el caso donde $x = -2$ y $x = 1$. (contesta teniendo en cuenta los datos registrados en la Tabla 3.2.1 y la gráfica seleccionada en el ítem **b.**)

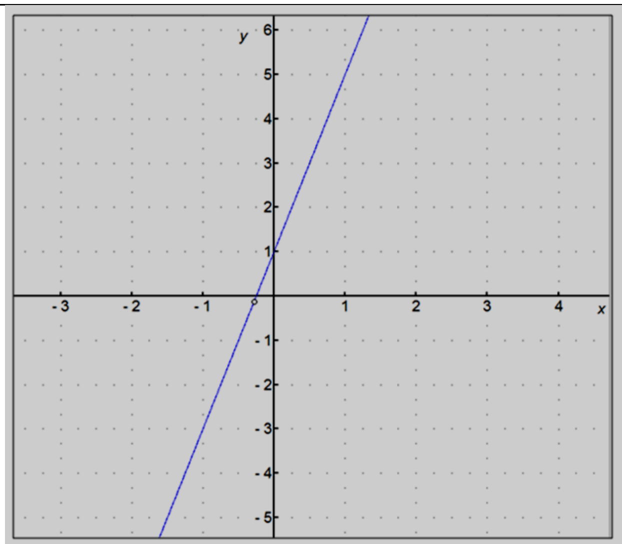
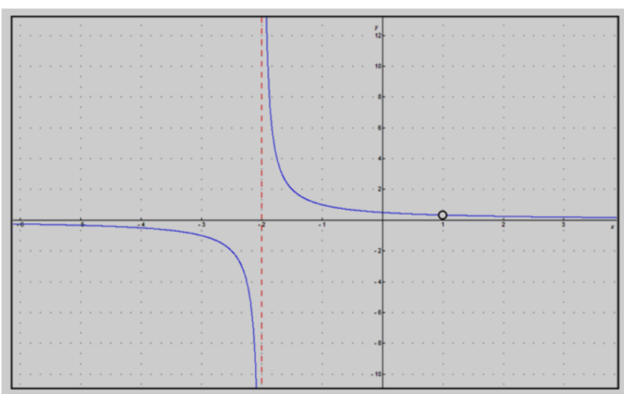
e. En la **Expresión B**, que puedes decir del comportamiento de $f(x)$ y $i(x)$ en el caso donde $x = 0$ y $x = 3$. (contesta teniendo en cuenta los datos registrados en la Tabla 3.2.2 y la gráfica seleccionada en el ítem **b.**)

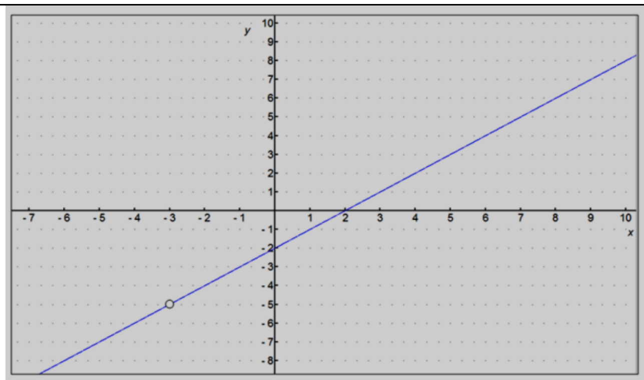
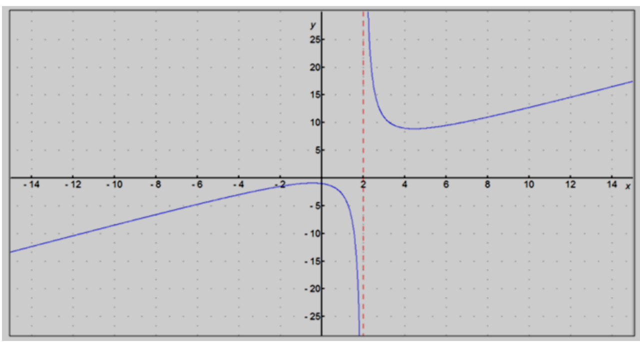
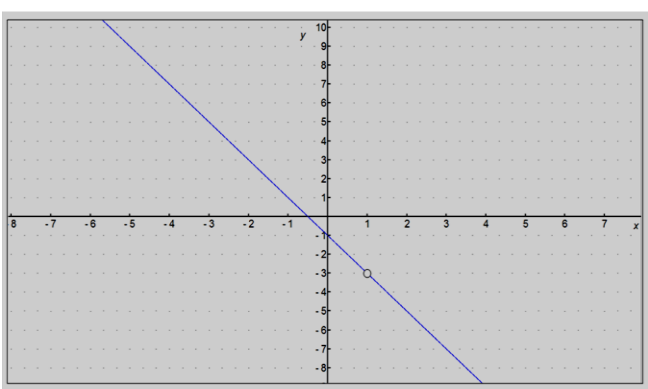
f. En la **Expresión E**, que puedes decir del comportamiento de $f(x)$ y $i(x)$ en el caso donde $x = -2$. (contesta teniendo en cuenta los datos registrados en la Tabla 3.2.3 y la gráfica seleccionada en el ítem **b.**)

g. En la **Expresión G**, que puedes decir del comportamiento gráfico y algebraico de las expresiones $f(x)$ y $i(x)$ ¿consideras que se debe hacer restricciones sobre alguna de ellas para qué sean ambas equivalentes?

Actividad 3: Gráficas de funciones equivalentes:

Para cada de las siguientes gráficas, determina cuál par de expresiones son equivalentes para cada una de las gráficas justificando las razones que te llevo a escoger dicho par. (**Nota:** tenga en cuenta sus dominios $D_f \ y \ D_i$):

Gráfica	Opciones de par de expresiones equivalentes
	a. $f(x) = \frac{16x^2+8x+1}{4x+1}$ con $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$ e $i(x) = \frac{1}{4x+1}$ con $D_i = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ b. $f(x) = \frac{16x^2+8x+1}{4x+1}$ con $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ e $i(x) = 4x + 1$ con $D_f = \mathbb{R}$ c. $f(x) = \frac{16x^2+8x+1}{4x+1}$ con $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ e $i(x) = 4x + 1$ con $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$
	a. $f(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)}$ con $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ e $i(x) = \frac{1}{x+2}$ con $D_i = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ b. $f(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)}$ con $D_f = \mathbb{R}$ e $i(x) = \frac{1}{x+2}$ con $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ c. $f(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-1)}$ con $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ e $i(x) = \frac{1}{x+2}$ con $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$
	a. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3}$ con $D_f = \mathbb{Z} - \{3\}$ e $i(x) = x - 2$ con $D_i = \mathbb{R} - \{-3\}$ b. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3}$ con $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$ e $i(x) = x - 2$ con $D_i = \mathbb{R} - \{-3\}$

	c. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3}$ con $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$ e $i(x) = x - 2$ con $D_i = \mathbb{R}$
	a. $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$ con $D_f = \mathbb{Z}$ e $i(x) = x + 2$ con $D_i = \mathbb{R}$ b. $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$ con $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ e $i(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$ con $D_i = \mathbb{R} - \{2\}$ c. $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$ con $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ e $i(x) = \frac{x^2+2}{x-2}$ con $D_i = \mathbb{R}$
	a. $f(x) = \frac{1+x-2x^2}{x-1}$ con $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ e $i(x) = -2x - 1$con $D_i = \mathbb{R} - \{1\}$ b. $f(x) = \frac{1+x-2x^2}{x-1}$con $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ e $i(x) = -2x - 1$ con $D_i = \mathbb{R}$ c. $f(x) = \frac{1+x-2x^2}{x-1}$con $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ e $i(x) == -(2x - 1)$ con $D_i = \mathbb{R} - \{1\}$

<u>Actividad 4</u>: Síntesis

a. Justifica y explica con un ejemplo específico por qué los siguientes enunciados no son ciertos, en cada caso $f(x)$ es una función racional de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$:

   I. Si $f(a)$ es una función racional tal que $p(a) \neq 0$ y $q(a) = 0$ entonces la gráfica de $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = a$.

   II. El dominio de $f(x)$, es la intersección de los dominios $p(x)$ y $q(x)$.

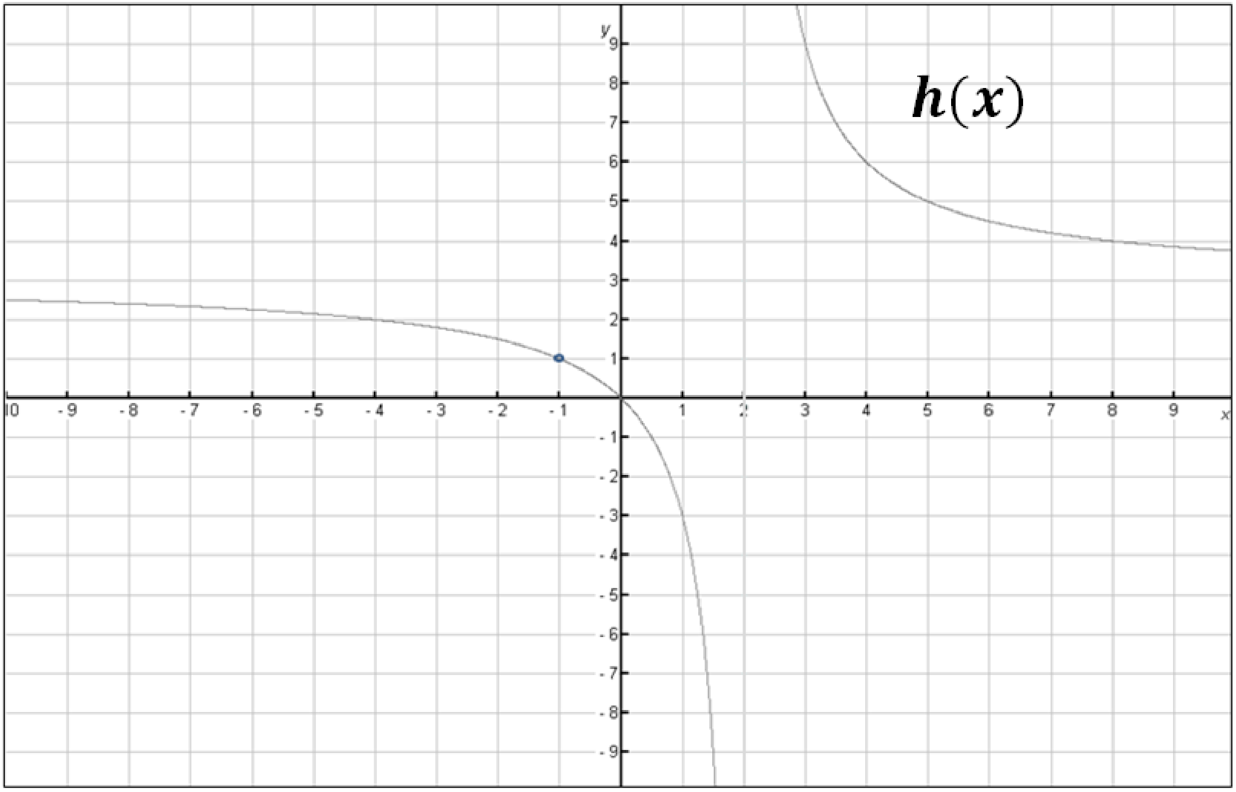
   III. Es suficiente que una función racional esté indeterminada en $x = a$ y $x = b$ para concluir que tiene dos asíntotas verticales en $x = a$ y $x = b$.

   IV. Las funciones racionales $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ y $g(x) = x - 1$ son equivalentes porque $g(x)$ es el resultado de simplificar algebraicamente $f(x)$.

   V. Una expresión racional $f(x)$ solo puede tener un tipo de discontinuidad, ya sea por abierto o comportamiento asintótico, pero nunca los dos a la vez.

b. Explica la diferencia entre la gráfica de $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x-a}$ y la de $g(x) = x - b$

<u>Actividad 5</u>: Teniendo en cuenta la gráfica de $h(x)$, resuelva las preguntas **a-g**:



Gráfica3.5: gráfica de $h(x)$

a. ¿Es $h(x)$ continua en todo $\mathbb{R}$? Justifica tu respuesta.

b. ¿ $h(-1) = 1$? Justifica tu respuesta.

c. *<u>Marca con una X la respuesta correcta.</u>* $h(x)$ en $x = 2$ presenta una discontinuidad de la forma

- ○ $\frac{0}{0}$
- ○ $\frac{a}{0}$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

d. Halla el dominio D_h de la función racional $h(x)$ representada en la gráfica.

e. Determina cuál o cuáles de las siguientes expresiones algebraicas $h(x)$ le corresponde a la gráfica. Justifica tu elección dando por lo menos cuatro argumentos.

A. $h(x) = \frac{3x^2}{x+1}$

B. $h(x) = \frac{3x}{(x-2)^2} + 3$

C. $h(x) = \frac{3x^2+3x}{(x+1)(x-2)}$

D. $h(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)}$

E. $h(x) = \frac{3x}{x-2}$

f. Determina qué condiciones deben cumplir las expresiones racionales $f(x) = \frac{3x(x+1)}{(x+1)(x-2)}$ y $g(x) = \frac{3x}{x-2}$ para poder decir que son equivalentes.

g. Según la elección que hayas realizado en el ítem **e**, halla todas las asíntotas verticales, y horizontales de la función $h(x)$, luego ubícalas en la gráfica 3.5.

SITUACIÓN 4: Contextos y conjunto de referencia

OBJETIVO: que los estudiantes reconozcan contextos en los cuales las funciones racionales aparecen como medio de modelación de la actividad matemática a desarrollar y cómo el empleo de contextos permite resaltar el papel del conjunto de referencia.

LOGROS:

- Reconoce contextos distintos de los matemáticos, en los cuales las funciones racionales actúan como medio de solución de la actividad matemática.
- Reconoce conceptualmente la diferencia ente dominio de una expresión y conjunto de referencia, y la forma como estos se relacionan.
- Determina algebraicamente el dominio de una expresión teniendo en consideración el conjunto de referencia C_r en la cual se presenta la expresión.
- Reconoce el comportamiento gráfico de una expresión según el conjunto de referencia C_r en la cual esta se presenta.

<u>Actividad 1</u>: Puzle matemático

El grupo de inteligencia militar **PREE**, le ha dado a Emilia la información que el grupo de invasores contempló en el momento de implantar ciertos $Virus$ sobre las armas tecnológicas empleadas por el **PREE**.

Esta información proviene de un informante que el PREE infiltro en las filas del grupo de invasores, el cual encontró unos pergaminos donde se estaban las claves codificadas para desactivar los $Virus$ implantados por este grupo (invasores), de tal forma que el **PREE** pueda recuperar todas sus armas tecnológicas.

Una vez recopilada esta información, Emilia se debe encargar de descifrar y desactivar los tres $Virus$ implantados por los invasores. A continuación presentamos la descripción que los invasores dieron a los $Virus$ implantados, la cual se encontraba en el pergamino encontrado por el infiltrado del PREE:

	$\boldsymbol{Virus}$	**Opciones**
1	$\dfrac{3y}{2y-\dfrac{2}{y}}$	**{1, 0, 5, -3, 2, 7, -2}**
2	$2x+1-\dfrac{5}{3}x$	**{0, -1, -7, 3/4, 2, -3/4, 8}**
3	$\dfrac{x-2}{5x-3}$	$x \in \mathbb{Z}^{+}$

Datos presentados en el pergamino

Una vez Emilia revisa estos datos, debe determinar para cada uno de los $Virus$, cuales son las opciones (o valores) que permiten desactivarlos, y estos son todos aquellos que no indeterminan la expresión, y que hacen que el $Virus$ sea diferente de dos y cero. Una vez determinados estos valores se deberá comunicase con el capitán y responderle los siguientes interrogantes, para ello requiere de tu ayuda.

a. ¿Cuáles son las opciones que permiten desactivar cada uno de los $Virus$?

b. ¿Por qué $\frac{4}{9}$ no sirve para desactivar el $Virus$ **3**?

c. ¿Cómo halló los valores que desactivaban los $Virus$?

<u>Actividad 2</u>: Algunos contextos

Un gerente de una empresa estima que las utilidades de ésta dependen fundamentalmente del salario del conserje, según la relación:

$$U(s) = \frac{100s - 5s^2}{1+s}$$

Dónde s es el salario anual del conserje en unidades de cien mil pesos, y $U(s)$ es la utilidad, en la misma unidad monetaria[10].

Responda y realice:

a. Determina cuáles son las variables que intervienen en la situación.

b. Teniendo en cuenta el contexto de la situación determina, ¿Cuál es el dominio de la función $U(s)$? ¿puede tomar valores negativos? Justifica tu respuesta.

[10] Situación tomada de **funciones y gráficas (1)**, recuperada el 21 de junio de 2012 en: http://matesup.utalca.cl/modelos/2clase/2_1_Funciones.pdf

c. Teniendo en cuenta lo que respondiste en el literal **b.**, marca con una **X**, cuál de las dos siguientes representaciones gráficas es la más apropiada para ilustrar el comportamiento gráfico de la situación. Justifica tu respuesta dando por lo menos tres argumentos del porque de tu elección.

Ilustración 1:______

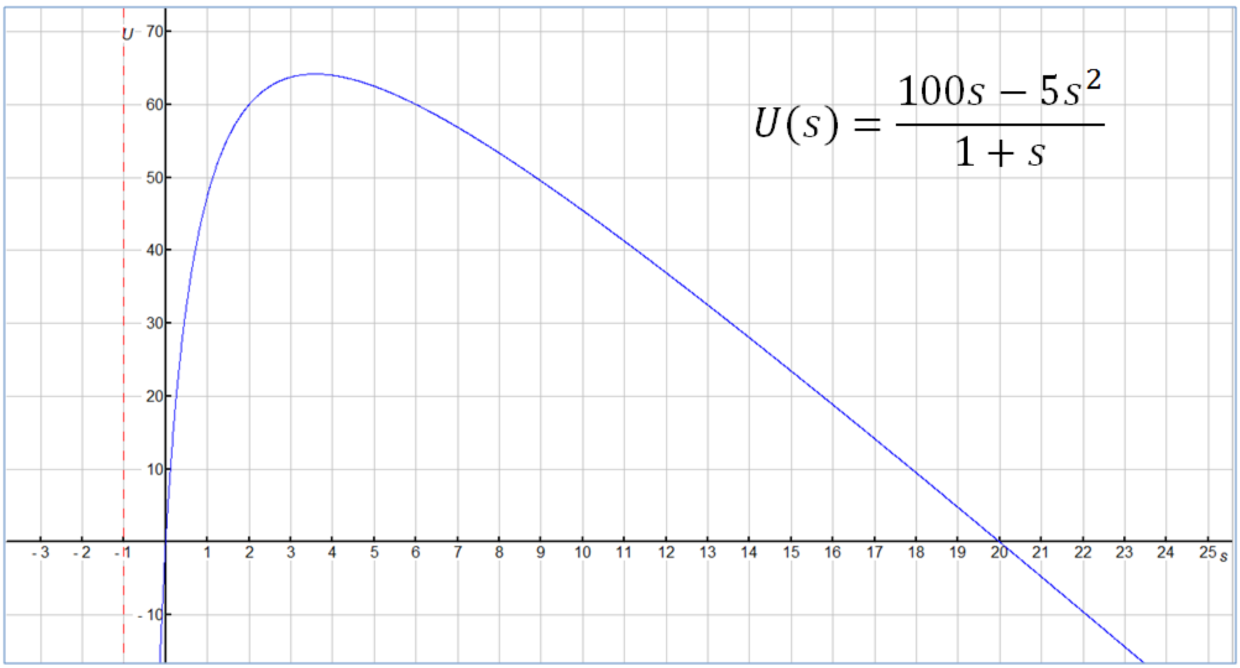
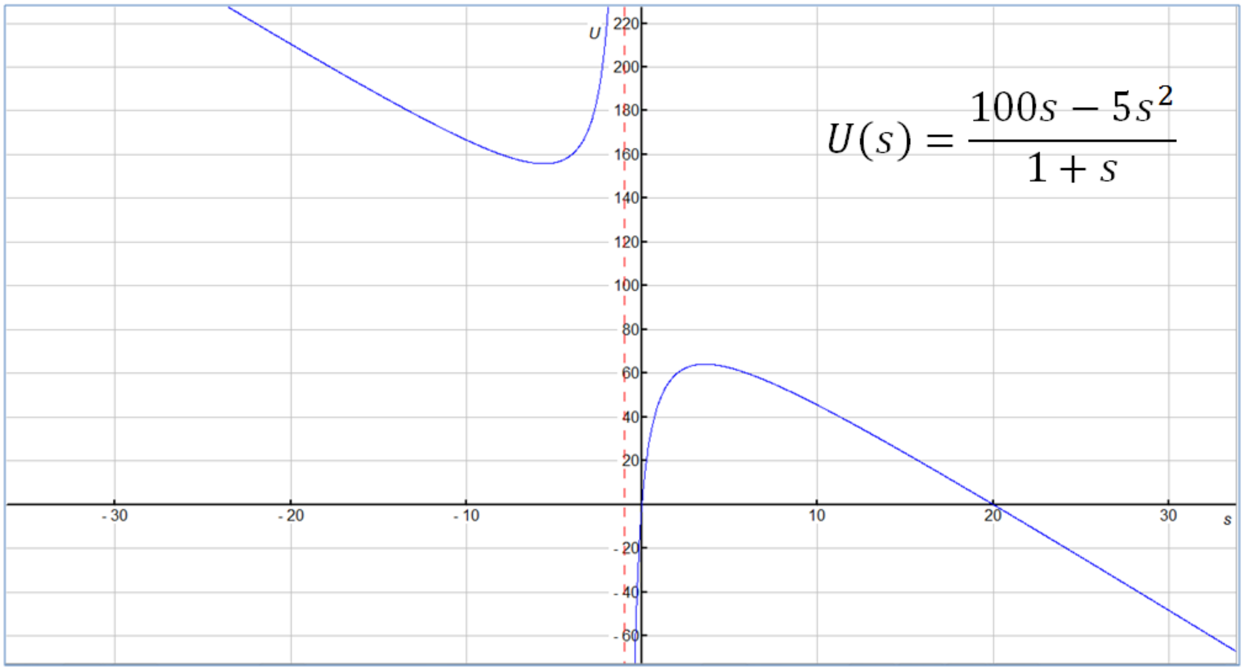


Ilustración 2:______



d. Reflexiona y contesta las siguientes preguntas:

I. ¿Según el contexto del problema, que significa que $s = -10$?, ¿tiene sentido hablar de este tipo de valores negativos para s?

II. Si s representa el salario que devenga el conserje de la empresa, entonces ¿tiene sentido que este tome valores negativos? Justifica tu respuesta.

III. ¿crees que la elección hecha en el ítem **c.** fue la correcta?

e. Teniendo en cuenta la **Ilustración 1** del ítem **c.**, determina cual es el valor aproximado de la función $U(s)$ para los siguientes valores de s, y completa la Tabla 4.2:

s	**0**	**1**	**2**	**4**	**6**	**10**	**15**	**20**	**22**	**23**
$U(s)$										

Tabla 4.2

Considerando la información de la Ilustración 1 y la Tabla 4.2, contesta las preguntas I-VIII:

I. Qué sucede cuando $s = 0$

II. Qué puedes decir con respecto a la utilidad de la empresa cuando el salario del conserje es de doscientos mil.

III. ¿Si el salario del conserje es mayor a seiscientos mil, entonces el margen de utilidad de la empresa es cada vez más eficiente?

IV. ¿Qué sucede con el margen de utilidad de la empresa cuando el salario del conserje oscila entre cien mil y trescientos mil?

V. Para que la empresa tenga una utilidad eficaz ¿cuál crees que debe ser el salario del conserje?

VI. ¿Crees que es rentable para la empresa pagarle al conserje un salario de 2'000.000? Justifica tu respuesta.

VII. ¿Puede tener la empresa un margen de utilidad mayor a los 4'000.000 de pesos? En caso de que sea posible, determine cuál debe ser el salario del conserje.

VIII. Describe con tus palabras que sucede con la utilidad de la empresa cuando el conserje devenga un salario mayor a los dos millones de pesos.

Aspectos conceptuales

Dominio y conjunto de referencia

Se debe distinguir *dominio de una función* D_f con respecto al *conjunto de referencia* C_r de tal forma que dada una función $f(x)$ el:

- **Conjunto de referencia C_r:** Es el conjunto de cuyos elementos se nutre la variable independiente.
- **Dominio de la función D_f:** es un subconjunto del conjunto de referencia, el cual está constituido por todos aquellos valores le dan sentido a la función $f(x)$ dependiendo de las características de su expresión algebraica o del contexto en el cual se ha presentado.

Ante esto, el dominio D_f de la expresión es un subconjunto del conjunto de referencia C_r, es decir:

$$D_f \subseteq C_r$$

El conjunto de referencia C_r Vs gráfica de una función: El conjunto de referencia C_r determina la forma como se va a comportar gráficamente una función $f(x)$, de manera que si este conjunto es continuo, como el caso de $\mathbb{R}$, entonces el trazo gráfico de la expresión también lo es, pero si por el contrario este conjunto no es continuo como es por ejemplo $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, entonces para estos casos el trazo gráfico de la expresión no será continuo, sino que será una sucesión de puntos.

Cuadro conceptual 4

<u>Actividad 3</u>: Determinando el dominio

Teniendo en cuenta las definiciones de *conjunto de referencia* $\boldsymbol{C_r}$ y *dominio de una función* $\boldsymbol{D_f}$, resuelve:

a. Considerando el conjunto de referencia C_r al cual corresponde cada una de las siguientes funciones $f(x)$, determine su dominio D_f**:**

I. $f(x) = \frac{2-x}{x^2+x-12}$ $\quad C_r = \mathbb{R}$ $\quad D_f =$

II. $f(x) = \frac{2-x}{x^2+x-12}$ $\quad C_r = \mathbb{N}$ $\quad D_f =$

III. $f(x) = \frac{2-x}{x^2+x-12}$ $\quad C_r = \mathbb{Z}$ $\quad D_f =$

b. ¿El dominio D_f de la función $f(x) = \frac{2-x}{x^2-x-12}$ es el mismo sin importar su conjunto de referencia C_r? Justifica tu respuesta.

c. Selecciona entre las opciones que aparecen a continuación el dominio que corresponde a cada una de las funciones $f(x)$ presentada en la Tabla 4.3 teniendo en cuenta el conjunto de referencia C_r.

Opciones de Dominios D_f	
I. $D_f = \mathbb{Z} - \{0\}$	V. $D_f = \mathbb{N}$
II. $D_f = \mathbb{Z}^+$	VI. $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$
III. $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{N} - \{\boldsymbol{2}\}$	VII. $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{Z} - \{\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{2}\}$
IV. $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}$	

Expresiones algebraicas $f(x)$	Conjunto de referencia C_r	Dominio D_f
$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$	$C_r = \mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{1}{x+1}$	$C_r = \mathbb{Z}^+$	
$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)(x-2)}$	$C_r = \mathbb{Z}$	
$f(x) = x^2 - 5x + 6$	$C_r = \mathbb{N}$	
$f(x) = 3x + 2$	$C_r = \mathbb{R}$	
$f(x) = \frac{2}{x} + 5x$	$C_r = \mathbb{Z}$	
$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)(x-2)}$	$C_r = \mathbb{N}$	

Tabla 4.3

d. Representa gráficamente la expresión $f(x) = \frac{1}{x}$ para los casos donde $C_r = \mathbb{R}$ y $C_r = \mathbb{Z}$ ¿Qué puedes decir con respecto a estas dos gráficas?

e. ¿Son siempre iguales el conjunto de referencia C_r y el dominio D_f de una expresión algebraica?

f. ¿Es cierto que $C_r \subset D_f$? (justifica tu respuesta)

<u>Actividad 4</u>: Contexto

a. Sea un rectángulo de dimensiones x de largo y y de ancho, el cual tiene un área de $180cm^2$ y perímetro P. Contesta:

   I. Determina las expresiones algebraicas que dan razón del área y del perímetro del rectángulo en término de sus dimensiones x y y.

   II. Expresa el perímetro P en términos de la dimensión x del rectángulo, la cual se denotara como $P(x)$.

   III. ¿Cuál es el valor mínimo y máximo que puede tomar la variable x? Justifica tu respuesta.

   IV. Determina el dominio D_P de la expresión $P(x)$ de modo que esta tenga sentido según el contexto (**Nota:** recuerda que la dimensión x también se relaciona con el área del rectángulo)

   V. Observa la expresión $P(x)$ obtenida en el ítem II, según lo estudiado en la Situación 2 ¿qué tipo de comportamiento asintótico presenta esta expresión?

   VI. Completa la siguiente Tabla 4.1:

x	**0**	**10**	**25**	**50**	**75**	**100**	**125**	**150**	**180**
$P(x)$									

Tabla 4.1

   VII. Según el contexto del problema, ¿tiene sentido hablar de $x = 0$ y $x = 180$? Justifica tu respuesta.

   VIII. Teniendo en cuenta los ítems IV, V y VI, bosqueja una representación gráfica que de razón del comportamiento del perímetro P del rectángulo con respecto a su dimensión x.

b. La ley de Boyle dice que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del mismo:

I. Dé una función que modele la ley de Boyle.

II. Construya la gráfica considerando que $k = 1$

III. Qué ocurre con la presión del gas a medida que su volumen aumenta

IV. Si el volumen no puede ser negativo y cero, entonces que restricciones se debe hacer con respecto al dominio de tal forma que el modelo tenga sentido.

En el capítulo siguiente se presentarán las conclusiones que se obtuvieron en el desarrollo del trabajo, con las cuales se intenta dar respuesta a la pregunta de investigación plateada y los objetivos trazados en este trabajo de grado.

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES

A continuación se presentan las conclusiones que se obtuvieron respecto a la pregunta de investigación planteada y los objetivos trazados para el desarrollo del trabajo de grado; de modo que para dar respuestas a estos, se contempló el análisis de las situaciones y actividades diseñadas para estudiantes de grado noveno, evidenciando en éste uno de los grandes y frecuentes problemas que atraviesan constantemente los docentes en el momento de diseñar y planear la forma cómo van a desarrollar y presentar los objetos matemáticos de interés en su clase, como es la selección de contextos, actividades y presentación teórica de los mismos.

De forma que circundan en medio de la etapa de diseño de actividades constantes preguntas sobre cuál puede ser la forma más eficaz de presentar estos objetos a los estudiantes, si es pertinente definirlos y luego ejercitar su apropiación por medio de diversas actividades, o por el contrario, si es más eficiente que estos objetos sean formalizados a través de su aparición y necesidad explicita en la resolución de situaciones particulares.

De esta manera, en pro de dar respuesta a la pregunta de investigación frente a la formación de pensamiento variacional, se debe considerar y romper el esquema en el tipo de actividades que se proponen a los estudiantes, de tal forma que estas no se limiten solo a la manipulación de los diferentes algoritmos matemáticos puestos en juego, sino que por el contrario los algoritmos sean concebidos como un medio o herramienta para la solución de las situaciones y ejercicios planteados, haciendo fuerte hincapié en las competencias de **formulación**, **comunicación** y **razonamiento**, de manera que los estudiantes empleen medios para mostrar los procedimientos y razones que lo llevaron a contemplar la forma de solucionar las diversas situaciones.

Para lograr éste cambio en las actividades propuestas a los estudiantes, se empleará la articulación de los registros semióticos de representación gráfico y algebraico; aclarando, que al resaltar este tipo de competencias en los estudiantes, no se desvirtúa la potencialidad de las otras (formulación, comparación y ejercitación de procedimientos), ya que de alguna manera estas aparecerán en medio de los tratamientos realizados por ellos en su actividad matemática, pero el hecho de contemplar con mayor prioridad las competencias de razonamiento, comunicación y formulación, consiste en que las actividades se desvinculen del solo hecho de generar respuestas correctas a nivel algorítmico, lo cual no es una evidencia potente para considerar el nivel de aprehensión que los estudiantes han adquirido de los objetos matemáticos estudiados en sus diversos procesos de enseñanza y de aprendizaje.

De esta manera se puede concluir respecto a cada uno de los objetivos específicos planteados para la investigación del trabajo de grado que:

- **Con relación a los objetivos específicos 1 y 2**

La articulación de los conceptos de dominio, comportamiento asintótico, equivalencia de funciones, y la variable didáctica conjunto de referencia, tiene como vertebra principal para su articulación el concepto de dominio, lo cual se mostrara a continuación:

- ✓ **Dominio ↔ comportamiento asintótico:** la relación entre estos dos conceptos se da ante la posible indeterminación de la expresión racional $y = f(x)$ en su dominio, donde dado el caso de que esto ocurra, si la indeterminación de la expresión es de la forma $\frac{a}{0}$ para $a \neq 0$ entonces existe una asíntota vertical en este punto del dominio.

  Ahora para el caso de las asíntotas horizontales, su estudio se realizó de forma similar al de las asíntotas verticales, donde para este caso se toma la expresión algebraica en función de y (se despeja la expresión $f(x)$ en términos de y) y una vez despejada la expresión, se determina aquellos valores donde la nueva expresión presenta posibles problemas de discontinuidad, de forma que acota el rango de la expresión.

- ✓ **Dominio ↔ equivalencia de funciones:** la equivalencia de funciones en un primer instante se estudia bajo la operación cognitiva de tratamiento de expresiones algebraicas racionales las cuales se deben llevar a su expresión irreducible $i(x)$.

Para determinar si ésta es la expresión irreducible de la función inicial $y = f(x)$, se inicia con los alumnos el estudio de ciertas características cognitivas alrededor de este concepto las cuales desligan la actividad de ser tan solo procesos rutinarios y repetitivos de manipulación de algoritmos, como es el tipo de indeterminación que sufre la expresión y la implicación que esta tiene.

Una vez se haya realizado la reflexión sobre las implicaciones del tipo de discontinuidad respecto a las expresiones algebraicas inicial y final, se problematiza la característica esencial para determinar que dos expresiones son o no equivalentes como es la restricción de su dominio respecto al de la expresión inicial.

Este tipo de restricciones (del dominio) permite presentar a los estudiantes dos características de la equivalencia de funciones en relación a la discontinuidad de la expresión inicial como son la discontinuidad por comportamiento asintótico vertical como se mencionó anteriormente y por puntos abiertos.

La discontinuidad por puntos abiertos se da en el caso donde la expresión final o irreducible $i(x)$ de la función inicial $f(x)$ exime valores de su dominio en los cuales la expresión inicial presentaba discontinuidad, ante este hecho se consideran estos puntos por la restricción del dominio para determinar la equivalencia de las funciones como valores de discontinuidad por punto abierto.

Por lo mencionado anteriormente, también se puede establecer que hay una fuerte relación conceptual entre la equivalencia de funciones y el comportamiento asintótico, a partir del tipo de indeterminación que presente la función estudiada en sus valores de discontinuidad de su dominio.

- ✓ **Dominio ↔ conjunto de referencia:** el estudio y caracterización de la variable didáctica conjunto de referencia en los procesos de enseñanza y de aprendizaje es de vital importancia, ya que por medio de esta se puede dar razón a una de las exigencias estipuladas por el MEN (2006) en dichos procesos, como es que los objetos matemáticos estudiados sean significativos y útiles para los estudiantes en su actividad como sujeto social y político de forma que estos objetos no queden solo en su naturaleza abstracta.

  Esta variable didáctica al igual que los conceptos de comportamiento asintótico y equivalencia de funciones se relaciona por medio del concepto de dominio, ya que el conjunto de referencia es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar una expresión (conjunto macro), mientras que el dominio son todos aquello valores de este conjunto de referencia que le da sentido a la expresión.

- ✓ Por medio de lo estipulado por el MEN (2006) en sus Estándares Básicos de Competencias, el pensamiento variacional es aquel que se encarga del estudio de los procesos de cambio y la determinación de ciertos aspectos de regularidad en el comportamiento de los objetos matemático; de modo que en el diseño de las actividades que se van a presentar a los estudiantes de grado noveno respecto a las funciones racionales, se contempla una gran cantidad de actividades que promueven el desarrollo de este pensamiento.

De esta manera la formación y desarrollo del pensamiento variacional por medio de actividades que empleen el estudio de las funciones racionales, se genera a partir de promover tareas donde los estudiantes deben determinar ciertos patrones de comportamiento al modificar algunas características de una representación gráfica determinando los cambios que esto genera en su expresión algebraica, siendo estas de gran potencialidad en la formación de dicho pensamiento, puesto que obliga al estudiante a generalizar cognitivamente el comportamiento de un grupo de funciones por la aprehensión de aquellas parámetros que lo determinan.

- **Con relación a los objetivos específicos 3 y 4:**
    - Respecto a este objetivo específico, se encontró que el empleo de más de un tipo de representación semiótico alrededor de los objetos de estudio, permite generar una gran diversidad de actividades para los estudiantes las cuales no se limiten solo al uso excesivo de algoritmos matemáticos, sino que además permita el espacio para generar situaciones donde la actividad se dé en términos de procesos de **reflexión** y **argumentación** más que manipulación. Esto se puede evidenciar en aquellas actividades donde el punto de partida de los estudiantes es el comportamiento gráfico de una expresión racional $f(x)$, en la cual ellos pueden conjeturar y hacer predicciones sobre los aspectos topológicos que perciben de estos (características o unidades significativas de la función), los cuales son posteriormente formalizados.

Una vez se reconozca la importancia y la potencialidad que ofrece el registro gráfico en la formación de pensamiento matemático en los estudiantes, se evidencia que éste permite que los estudiantes **exploren**, **relacionen** y **reconozcan** ciertas características y parámetros de los objetos matemáticos estudiados a través de él; lo cual posteriormente repercute en la madurez de su pensamiento variacional, al permitir que ellos reconozcan la forma como puede cambiar el comportamiento de una representación gráfica al modificar algún parámetro percibido en él y la repercusión que estos cambios tienen en otros tipos de representación del mismo objeto matemático.

- El tipo de actividades respecto a las funciones racionales que se deben presentar a los estudiantes con el fin de desarrollar en ellos el pensamiento variacional, no debe estar sujetas a realizar de forma exhaustiva solo actividades de manipulación de algoritmos, sino que por el contrario se debe valer en procesos de **reflexión** y **argumentación** que den razón de la forma como se están conceptualizando los aspectos teóricos de las funciones racionales; además estás deben permitir que los estudiantes puedan **conjeturar** ciertas generalidades en relación a su comportamiento en valores muy lejanos o a los cambios que se pueden evidenciar ante la alteración de uno de sus parámetros, pudiendo de esta manera clasificar algunas funciones racionales en pequeños grupos o familias según sus características.
- La enseñanza de las funciones racionales por medio de procesos de reflexión y argumentación de los estudiantes en relación a los aspectos que ellos perciben del objeto matemático en las representaciones de estas a partir de su intuición, se debe

realizar por medio de contextos **dinámicos**, que permitan que los objetos puedan ser tratados y manipulados por los estudiantes a partir de la intuición que ellos tengan respecto al comportamiento de este, permitiendo así que hagan predicciones y conjeturas alrededor del objeto puesto en juego las cuales se validan y formalizan posteriormente.

Cabe aclarar, que el empleo y selección de estos contextos debe ser cuidadoso, puesto que en ocasiones se cae en el error de creer que la única característica que se debe contemplar para decir que un contexto que evoca una situación real es significativo, es a partir de que en su enunciado se mencionen objetos de la vida real que sean conocidos por los estudiantes descuidando la coherencia de los objetos matemáticos implícitos en él. De este modo, se puede decir que un contexto es significativo, en la medida que los objetos matemáticos que estén implícitos en él sean coherentes y tengan sentido dentro de la experiencia real que se está evocando, a tal punto que de ser necesario, pueda ser validada su veracidad por los estudiantes a partir de procesos experimentales.

Ante esto, se debe fomentar en las actividades propuestas la implementación pluri-registro respecto a los registros algebraico y gráfico, de modo que se promueva la objetivación de los objetos matemáticos en los estudiantes, a partir de hacer en ellos evidente la distinción entre el objeto estudiando y su representación; resaltando la importancia de estos registros en la formación de pensamiento matemático de los estudiantes, al igual que su potencialidad en la resolución de situaciones particulares.

Por otra parte, el fomentar actividades de empleo pluri-registro a los estudiantes, permite rescatar la potencialidad del registro gráfico en el desarrollo de pensamiento matemático en los estudiantes, sacándolo del lugar sombrío que ha sido relegado al considerarse como un paso final de la actividad matemática el cual carece de reflexión y potencialidad en la presentación de las características pertinentes entorno al objeto de estudio. Invisibilidad que se ha generado por la linealidad con que frecuentemente aparecen los registros de representación (algebraica→gráfico) en las actividades presentadas a los estudiantes, haciendo hincapié en dos procesos de conversión, o como lo menciona Azcárate y Deulofeu (p. 63) en dos *procedimientos de traducción*, los cuales seguramente admiten un aprendizaje más mecánico y menos interpretativo al considerar la representación gráfica como el instante final de la actividad matemática de los estudiantes sin promover situaciones donde este registro sea el insumo de reflexión y análisis de los estudiantes.

Para finalizar, se deja la posibilidad de extrapolar estas actividades en dominios numéricos más amplios al de los números enteros $\mathbb{Z}$, donde se debe mencionar que en este caso s trabajo sobre los números enteros $\mathbb{Z}$ a razón de facilitar el desarrollo de las actividades por los alumnos ya que están diseñadas para ser trabajadas con lápiz y papel; pero en el caso de poder mediar estas situaciones por el empleo de CAS y TIC'S, se puede ampliar el dominio numérico en el cual se desempeña las actividades al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, puesto que a diferencia del lápiz y papel, estos sistemas permiten realizar las transformaciones de las representaciones de manera dinámica y no por el trazo punto a punto como sucede en el caso de este trabajo de grado.

Bibliografía

Azcárate, C. & Deulofeu, P. (1990) *Funciones y gráficas*. En: Matemáticas: Cultura y Aprendizaje (26). Editorial Síntesis

Blanco, L.J.(1993) Una clasificación de problemas matemáticos. *Épsilon* n.25. Sevilla. 49-60.

Bruner, J. (1997). *Pedagogía popular*. (F. Díaz, Trad.). La educación puerta a la cultura (pp. 63-83). Madrid, España.: Visor.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2003) *Visualización y pensamiento matemático*. Recuperado el día 01 de Noviembre de 2011, del sitio web: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/(Cantoral-Montiel2003)-ALME16-.pdf

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano, Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Vega, M. Trad.) Universidad del Valle, Instituto de Educación Matemática. Colombia. (Trabajo original publicado en 1995).

Guerrero, F., Lurduy, O. & Sánchez, N. (2006) *La práctica docente a partir del modelo DECA y la teoría de las situaciones didácticas*. Recuperado el día 23 de Septiembre de 2012, del sitio web: http://www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-Fernando-Gerrero.pdf
Lacasta, E. & Pascual, J. (1998) *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid, España: Síntesis, S.A.

Mello, M. (2001) *Organizar el conocimiento matemático en el marco de la Planificación por Áreas integradas*. Recuperado el día 23 de Septiembre de 2012, del sitio web: http://ipes.anep.edu.uy/documentos/areas/mate.pdf

Lerner, N. & Sobel, M. (2006) *Precálculo* (6ta Ed.). México: Pearson educación.

MEN (1997) *Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas -TIMSS- Colombia.* Bogotá, Colombia: Creamos alternativas.

MEN (1998) *Lineamientos Curriculares.* Bogotá, Imprenta nacional de Colombia: Santafé de Bogotá. Recuperado el 12 de Marzo del 2011 de http://www.mineducacion.gov.co

MEN (2006) *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Imprenta nacional de Colombia: Santafé de Bogotá.

Pinzón, M. & Vásquez, D. (s.f) Notas de clase: Números Reales y Funciones. Cali, Colombia: Universidad del Valle

Planchart, O. (s.f). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad autónoma del estado de Morelos, Cuernavaca, México. Recuperado el 20 de Agosto de 2011. Disponible en: http://ponce.inter.edu/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf

Porras, F. (2011). *El Concepto de Función en la Transición Bachillerato Universidad*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Rees, P., Rees, C. & Spark, F. (2006) *Álgebra* (10a Ed.). México.: Mc. Graw-Hill.

Torres, L. & Calderón, L. (2010). *El dominio de la variable: Variable didáctica en el álgebra escolar*. En: Revista EMA, 5 (3), 252-266. BOGOTÁ Colombia: Una empresa docente.

Valoyes, L. & Malagón, M. (2006). *Formación de pensamiento algebraico en la educación escolar* (2da Ed.). Cali, Colombia.: Merlín.

Velasco, M. C & Mejía, M. F (2010) Módulo II: Las matemáticas su enseñanza y aprendizaje. *Pensamiento Numérico y Aritmética en la Escuela Grados 6° a 9°*. Compilación. Programa de fortalecimiento de las competencias docentes y estudiantiles. Hacia una nueva cultura educativa en el Municipio de Santiago de Cali. Edición Ligia Amparo Torres.

Vasco, C. (2008, Septiembre). *Reflexiones sobre la didáctica escolar*. En: Revista el educador, 2, 24-28.