UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL DETERMINANTE

Larissa Sbitneva, Nehemías Moreno, Melissa Cervantes, Rogelio Valdez
Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Cinvestav-IPN. (México)
larissa@uaem.mx, nehemias_moreno@live.com, melissa.e.cervantes@gmail.com, valdez@uaem.mx.

Palabras clave: determinante, representaciones, enfoque histórico-epistemológico
Key words: determinant, representations, historical epistemological approach

RESUMEN

Se presenta una propuesta didáctica que permite a los estudiantes de nivel superior lograr la comprensión del concepto de determinante que se aborda en los cursos de Algebra Lineal impartidos en la modalidad hibrida y/o presencial de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México, para diferentes carreras de la Facultad de Ciencias. Empleamos algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) para caracterizar la actividad matemática de los estudiantes, cuando resuelven problemas relacionados con determinantes, en términos de prácticas, configuraciones, epistémicas y cognitivas, de objetos primarios y de procesos activados en dichas prácticas (de acuerdo con la teoría EOS).

ABSTRACT

There is presented a didactic proposal which provides a learning guide in the frames of b-learning modality at the Morelos State University, Mexico, in order to help the graduate students to achieve the comprehension of the concept of determinant, being one of the most difficult abstract concepts of the Linear Algebra course imparted at the Faculty of Sciences for carriers of Mathematics, Physics and Computer Sciences. We rely upon some theoretical postulates of the Ontosemiotic Approach (OSA) in order to characterize the students mathematical activity, in the process of problems solving concerning determinants, in the terms of practices, configurations, epistemological y cognitive, as well as primary objects and processes activated during these practices (due to the OSA theory).

Introducción

Existen diversos trabajos de investigación donde se han analizado diferentes aspectos de la enseñanza del algebra lineal (AL) así como de su aprendizaje (Oktaç y Trigueros, 2010; Sierpinska, 2000) en los cuales se han abordado temas concretos tales como los de las ecuaciones lineales, transformaciones lineales o los de espacio vectorial, donde se ha señalado algunos obstáculos tales como la epistemología del AL, las didácticas que se han empleado y el uso de diferentes tipos de lenguaje.

En la investigación educativa realizada en el contexto presencial, el concepto de determinante es uno de los conceptos abstractos de AL que ha sido analizado escasamente, y en menor medida, lo ha sido en el contexto de la modalidad educativa hibrida. Cabe señalar que en éste último, la comprensión de los conceptos algebraicos se vuelve una tarea aún más compleja, ya que la mayor parte del tiempo los estudiantes tienen que construir su conocimiento a través de un proceso autodidacta frente a la computadora.

En el presente trabajo, se describe una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de determinante en la modalidad educativa híbrida elaborada con el propósito de que los estudiantes construyan los conceptos y les atribuyan significados, o bien sentidos correspondientes al contexto. En dicha propuesta se consideran algunos aspectos históricos del desarrollo de dicho concepto, con la intención de que los estudiantes comprendan a través de la práctica matemática realizada en el contexto tanto computacional como discursivo. En la descripción del proceso de aprendizaje relacionado con la puesta en marcha de nuestra propuesta didáctica se ha considerado al Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición y la instrucción matemática.

El concepto de Determinante (institucional)

El concepto de determinante resulta muy difícil para los alumnos, debido primordialmente a que es un concepto de naturaleza abstracta, con un estatus epistemológico diferente al de la mayoría de los conceptos que se enseñan en la universidad.

En varias fuentes el Determinante está definido usando diferentes representaciones:

(1) $|A| = \det(A) = |a_{ij}|_1^n = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1} \end{pmatrix}\right| = \sum(-1)^{s+t} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n},$

donde la suma se extiende sobre todas las sustituciones $\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \dots i_n \\ j_1 j_2 \dots j_n \end{pmatrix}$ distintas entre sí, donde el número s es el número de inversiones en la permutación de arriba y t, es el número de inversiones en la permutación de abajo.

También se puede encontrar la definición basada en el principio de inducción:

(2) $\det(a_{ij}) = a_{11}|A_1^1| - a_{12}|A_1^2| + a_{13}|A_1^3| - \dots + (-1)^n a_{1,n+1}|A_1^{n+1}|,$

donde $|A_j^i|$ denota el valor del determinante que se obtiene de la tabla inicial al omitir los elementos de la i-ésima fila y j-ésima columna.

Además el determinante se presenta mediante la siguiente regla de cálculo simplificada:

(3) $d = \det(a_{ki}) = \sum \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$

donde la suma es respecto a todas las permutaciones $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ de los números $1, 2, 3, \ldots, n$, y el signo, más o menos, se toma dependiendo de la paridad de la permutación. En la mitad de los miembros se toma más y en la mitad se toma menos.
Esto presenta un problema “de representaciones múltiples de un mismo objeto matemático” (Font, Godino y D’Amore, 2007 p.12).

■ Marco teórico y metodológico

Se emplea el "Enfoque Ontosemiótico" del conocimiento matemático (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), para caracterizar la actividad matemática que realizan los estudiantes, para resolver los problemas propuestos, en términos de prácticas y configuraciones epistémicas y cognitivas de objetos primarios, así como de procesos activados en dichas prácticas. En el EOS, se entiende por práctica matemática la realización de una secuencia de acciones, sujetas a reglas matemáticas.

En el caso que nos interesa, la tarea de resolver sistemas de ecuaciones lineales, para la realización de la práctica, el alumno necesita interpretar y realizar ciertas representaciones, las cuales son la parte ostensiva de una serie de definiciones, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos que permiten la solución del problema. Al conjunto formado por las definiciones, las proposiciones, los procedimientos, las representaciones y los argumentos utilizados, se le llama configuración de objetos primarios. Se distingue entre configuraciones epistémicas cuando se trata de la configuración que realizaría un experto (perspectiva institucional) y configuraciones cognitivas cuando se trata de las que realiza cada alumno (perspectiva personal). Por otra parte, si se aplica la perspectiva proceso-producto a los componentes de las configuraciones, además de prácticas y configuraciones se toma en cuenta, para analizar la actividad matemática realizada al resolver el problema, algunos procesos como el de visualización (Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato, 2012), idealización (Font y Contreras, 2008), significación etc..

La investigación realizada, que culmina con la propuesta didáctica, se inscribe dentro de un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004), puesto que se trata de un estudio de tipo exploratorio en el que se considera la observación de variables cuantitativas (grado de corrección de las respuestas: correctas, parcialmente correctas e incorrectas) y cualitativas (tipo de solución). Para el estudio cualitativo nos apoyamos en la técnica de Malaspina y Font (2010), la cual permite describir sistemáticamente las configuraciones epistémicas y cognitivas (problema, representaciones, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en las prácticas de solución del problema. Primero se describe una configuración epistémica de referencia (correspondiente a un experto), después la configuración cognitiva de los alumnos y por último se hacen comparaciones entre ambas.

■ Participantes

Los participantes fueron 13 alumnos, de entre 19 y 21 años de edad, de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México. Estos alumnos fueron convocados a través de un concurso abierto sobre la resolución de problemas que consideran a los determinantes. Por cuestiones de espacio, el cuestionario no se presenta en éste trabajo.

Diseño del cuestionario

La tarea propuesta a los estudiantes fue un cuestionario de 10 preguntas en el que se describían diferentes problemas cuya resolución requería el conocimiento del concepto de determinante y sus propiedades. Se seleccionaron dichas tareas porque, la actividad que realizan los alumnos para resolverlas pone en funcionamiento los elementos esenciales de la comprensión del concepto de determinante.

La propuesta didáctica

Las configuraciones cognitivas inferidas de las respuestas que dieron los alumnos al cuestionario, fueron comparadas con las configuraciones epistémicas correspondientes. Por cuestiones de espacio, y por el interés de resaltar la viabilidad de nuestra propuesta didáctica, el conjunto de configuraciones no se presentan en este escrito. Sin embargo, señalamos que la presencia (o no) de algunos elementos de ésta en las configuraciones cognitivas de los estudiantes, se utilizó como criterio para establecer aquellos conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que no fueron tomadas en cuenta por los estudiantes, los cuales son indispensables para la resolución de problemas que involucran determinantes.

La pregunta que nos llevó a plantear la secuencia de actividades para la comprensión del concepto de determinante fue: ¿Cómo lograr que el estudiante comprenda este concepto a través de las prácticas computacionales?.

Para lo cual, diseñamos un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes pudiesen lograr una comprensión adecuada del concepto de determinante a partir de un enfoque deductivo: primero, se parte de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales de "2×2", el cual, suponemos desde un principio, es un conocimiento que resulta familiar para los estudiantes, segundo, en el caso "3×3" realmente se descubre la regla de cálculo especifica. Posteriormente, se busca que a través de un proceso de generalización, los estudiantes conciban la noción de determinante para los casos de sistemas de ecuaciones de $n > 3$.

Fase 1: técnicas operacionales en el caso "2×2"

En esta fase se ofrece un método que permite a los estudiantes obtener soluciones de sistemas de ecuaciones lineales de una manera más eficaz. Primero se realiza un análisis lógico de la representación de un sistema lineal considerando la forma más simple del sistema, que permite obtener la solución de inmediato.

Los estudiantes aplican una variedad de métodos basados en sus conocimientos previos, y el resultado es igual en todos los casos. Sin embargo es preciso modificar sus técnicas a favor del método de eliminación (deben realizar las operaciones entre incógnitas del mismo género, y tomar en cuenta el número de operaciones en total, es decir, la complejidad del algoritmo). Los estudiantes tienen que estar convencidos que el "método de eliminación" es el más eficaz. Además se hace énfasis en las siguientes técnicas operacionales típicas:

Emplear un sistema de representaciones de ostensivos más efectivo en términos operacionales. Por ejemplo,

$$\begin{cases} aX + bY = d \\ \alpha X + \beta Y = \delta \end{cases},$$

donde se emplean los primeros símbolos del alfabeto latino para la primera ecuación y los del griego, para la segunda ecuación. Estos se distinguen claramente en la escritura en el pizarrón o en el cuaderno.

Es preciso resaltar que cuando se trata de las reglas de cómo operar (manipular) los ostensivos en las tareas y circunstancias específicas estas son objetos matemáticos no-ostensivos (Font *et al*, 2007, p. 14). En nuestro caso son las reglas de operación (manipulación) de ecuaciones lineales (registros ostensivos), donde los estudiantes tienen que hacer una inspección de sus acciones para notar lo siguiente:
•Al multiplicar (o dividir) ambas partes de una igualdad, por el mismo factor (distinto del cero), la igualdad no cambia.

Al sumar (o restar) los términos izquierdo y derecho de una igualdad a los términos correspondientes de la otra igualdad, las relaciones entre las incógnitas se conservan.

Prácticas discursivas: las reglas mencionadas, son *axiomas o nociones comunes* en los principios de Euclides, y se formulan en el lenguaje de equivalencia de los sistemas: se introducen tres tipos de transformaciones elementales. Cabe destacar, que en el sistema de registros diferente, como las representaciones de sistemas en la forma matricial, la formulación de equivalencia de sistemas se cambia al lenguaje algebraico correspondiente a las operaciones con matrices elementales.

Así el sistema inicial de 2×2, se transforma en el sistema más simple:
$\begin{cases} (a\beta - \alpha b)X = (d\beta - \delta b) \\ (a\beta - \alpha b)Y = (a\delta - \alpha d) \end{cases}$, donde se observa que el coeficiente $(a\beta - \alpha b)$ (por casualidad es el mismo en ambas ecuaciones) *determina* cuándo se puede obtener la solución única, es decir, si este coeficiente no es igual cero.

■ Fase 2: técnicas operacionales en el caso "3×3"

El problema de cómo encontrar el sistema más simple para el caso 3×3, coloca a los estudiantes en una situación semejante al de estar en la zona próxima de Vygotsky, debido a que los manuales avisan sobre la complejidad del proceso, sugerido como análogo, y solo presentan las formulas finales poco entendibles. Sin embargo con las técnicas operacionales típicas, se puede alcanzar la meta, Es característico que en la solución de problemas más complicados se usan las soluciones obtenidas anteriormente.
Para conservar la misma presentación como en el caso de 2×2, aplicamos los resultados obtenidos seleccionando las dos últimas de las tres ecuaciones, para las incógnitas x e y.

$$\begin{cases} ux + vy + wz = t \\ ax + by + cz = d \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \end{cases} \quad \begin{cases} ax + by = d - cz \\ \alpha x + \beta y = \delta - \gamma z \end{cases}.$$

Introducimos el símbolo Δ, que sustituye término "determinante", y la representación $\Delta = a\beta - \alpha b$ $=\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$ que facilita expresar las incógnitas del sistema más simple.

Entonces si $\Delta \neq 0$, existe una solución única expresada por $x = \frac{\begin{vmatrix} (d-cz) & b \\ (\delta-\gamma z) & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}}$, $y = \frac{\begin{vmatrix} a & (d-cz) \\ \alpha & (\delta-\gamma z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}}$, donde se emplean las fórmulas de Cramer en una representación simbólica para los determinantes.

El éxito logrado con estas técnicas recibe la siguiente explicación:

> Una representación ostensiva, por una parte tiene un valor representacional: es algo que se puede poner en lugar de algo distinto de él mismo y, por otra parte, tiene un valor instrumental: permite realizar determinadas prácticas que con otro tipo de representación no serían posible. (Font *et al*, 2007, p. 13).

Ahora sustituimos las expresiones para x e y en la primera ecuación y observamos que el coeficiente frente a la incógnita z, tiene la siguiente estructura: $u\begin{vmatrix} b & c \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} - v\begin{vmatrix} a & c \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} + w\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$. Debido a que es un valor que *determina* la existencia de la solución para la incógnita z, lo denotamos por Δ y llamamos al determinante del sistema de 3×3. Así tenemos $\Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = u\begin{vmatrix} b & c \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} - v\begin{vmatrix} a & c \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} + w\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$.

Esta es una representación instrumental en la forma de las tablas, cuyas entradas son coeficientes del sistema, que nos indica implícitamente la regla para calcular este determinante.

Estas representaciones facilitan la presentación de las soluciones mediante fórmulas, usualmente llamadas fórmulas de Cramer. Finalmente, tenemos

$\Delta z = \Delta_z = \begin{vmatrix} u & v & t \\ a & b & d \\ \alpha & \beta & \delta \end{vmatrix}$, donde $\Delta_z = u\begin{vmatrix} b & d \\ \beta & \delta \end{vmatrix} - v\begin{vmatrix} a & d \\ \alpha & \delta \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$, según la regla de cálculo del valor del determinante.

Para las otras dos incógnitas se sugiere otra técnica estándar de los casos semejantes (sustitución cíclica), que permite extender los resultados obtenidos para la incógnita z, a saber, renombramos las incógnitas junto con sus coeficientes, por ejemplo, "y" por "z", luego la columna tres en el sistema va a ocupar el lugar de la columna dos. Luego se aplica el patrón de formar las tablas en la expresión para la incógnita correspondiente.

Vale la pena enfatizar, que las fórmulas de Cramer publicadas en 1750 presentan las soluciones en la forma desarrollada para los casos de 2×2 y de 3×3, sin embargo, para el caso general de n×n, solo se usa la descripción en palabras de tipo instrucciones de como formar numeradores y el denominador, omitiendo justificación alguna. Por eso se llama esta fase histórica del siglo XVIII como empírica (según Bourbaki).

■ Conflicto semiótico: Prácticas discursivas

Por la analogía con el caso del sistema de 2×2, uno puede sugerir que si el determinante de un sistema de 3×3 es cero y todos los determinantes, en la parte derecha del sistema más simple equivalente al inicial, $\Delta x = \Delta_x$, $\Delta y = \Delta_y$, $\Delta z = \Delta_z$, son ceros, entonces existe una infinidad de soluciones: Pero, en general, esto no es cierto aún en el caso 3×3.

■ Fase 3: las técnicas operacionales generales

De acuerdo con EOS, el objeto del determinante considerado como emergente de un sistema de prácticas, puede considerarse como unitario y con un significado holístico.

La generalización del concepto del determinante requiere el cambio de nomenclatura de los coeficientes, que sea más cómodo para operar.

■ Práctica discursiva: Cambio de registro

Los historiógrafos mencionan que en 1693, Leibnitz en su comunicación con L'Hopital, le escribe que debido a una representación de los coeficientes con dos números, observó una regla general para calcular los determinantes. Sin embargo no lograron el resultado correcto y no fue publicado.

Para el caso general, se puede partir de modo análogo de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$\sum_{i=1}^{i=n} a_{ki}x^i = b_k, k = 1,\dots,n,$ donde el determinante del sistema es $d = \det(a_{ki}) \neq 0$.

La solución del sistema es $x_j = \frac{d_j}{d}$, donde d_j es el determinante que se obtiene del determinante del sistema al sustituir j-esima columna por la columna de los términos libres.

Luego se pueden seguir dos caminos:

A) Aplicar las reglas de cálculo de determinantes obtenidas de la resolución de los sistemas. Por ejemplo, para el determinante de 4×4, si uno sigue la técnica de reducción al caso anterior, $n = 3$, la regla de cálculo del valor numérico asignado a la tabla de los coeficientes, se puede explicar como un procedimiento siguiente: nos movemos a lo largo del primer renglón, multiplicando los elementos a_{1j} por el determinante de la tabla de 3×3 obtenida al eliminar el primer renglón y la j-ésima columna de la tabla de coeficientes del sistema, y después sumando todos estos términos, pero alternando los signos positivo y negativo, negativo antes de a_{12} y a_{14}. Generalizando, por inducción, obtenemos la definición (2).

B) Investigamos la estructura de los sumandos para dar la definición directa para el caso general de $n\times n$, como una alternativa a la definición que usa el principio inductivo. Para detectar un patrón, primero usamos las representaciones para el sistema de 3×3 con los símbolos a, b, c, para las entradas de los renglones, y $1, 2, 3$, como sus subíndices que indican el número del renglón, que corresponde al número de la ecuación del sistema inicial. Con estos cambios la expresión para el determinante es:

Det $(a^{\uparrow}, b^{\uparrow}, c^{\uparrow}) = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2\, b_1\, c_3 + a_2\, b_3\, c_1 + a_3\, b_1\, c_2 - a_3\, b_2\, c_1$, donde a, b, c, con las flechas denotan las columnas de la tabla de coeficientes.

Primera observación: no se repiten los símbolos de los elementos de la misma columna, es decir, cada sumando contiene una sola entrada de cada columna (denotada respectivamente por a, o por b, o por c).

Segunda observación: no se repiten los subíndices $1, 2, 3$, es decir, no se repiten las entradas de las filas correspondientes a la numeración con subíndices.

Tercera observación: los signos se cambian cada vez que se cambia el orden de los subíndices de los factores denotados por a, b y c.

Necesitamos detectar el patrón de estos cambios. Se nota que los signos están relacionados con "desórdenes" en los subíndices, comparando con el orden natural $1, 2, 3$.

Podemos contar cuántas transposiciones (cambios de la posición de dos índices adyacentes) hay que efectuar para obtener el orden natural. Así naturalmente llegamos a la necesidad de conocimientos de combinatoria y de la teoría de permutaciones y sustituciones.

Agradecimientos: Nuestro trabajo ha sido realizado en el marco del Proyecto de Investigación PICA14 con apoyo de la Secretaría de Investigación de la UAEM a través de la Dirección General de Desarrollo de la Investigación.

■ Referencias bibliográficas

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). Enfoque Ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática. Versión ampliada del artículo. *For Learning of Mathematics*, 27(2).

Font, V. y Contreras, Á. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 69(1), 33-52.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135.

Godino, J., Cajaraville, J., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias,* 30 (2), 109–130.

Johnson, R. y Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: a research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33(7), 14–26.

Malaspina, U. y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, 75(1), 107–130.

Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 373-385.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. En J-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.