ESPACIOS DE TRABAJO GEOMÉTRICO CON ACODESA: DOS EJEMPLOS

José Luis Soto Munguía
Universidad de Sonora. (México)
jlsoto@mat.uson.mx

Palabras clave: profesores, espacios de trabajo, actividades didácticas
Key words: teachers, working space, didactical activities

RESUMEN

Se reporta aquí una experiencia de diseño de actividades didácticas, dirigidas a profesores de Matemáticas en servicio. El diseño está basado en la metodología ACODESA, propuesta por Fernando Hitt, pero la puesta en escena toma como referencia lo que Kuzniak ha llamado un Espacio de Trabajo Geométrico. Las actividades se han propuesto a grupos de profesores de Escuelas Secundarias (grados 7 a 9), durante algunos cursos de formación. Se describen aquí dos de las actividades diseñadas y se analizan las dificultades enfrentadas por los profesores para responderlas.

ABSTRACT

This paper reports a design experience of didactic activities addressed to Mathematic teachers. The design is based on the ACODESA methodology proposed by Fernando Hitt, although in the experimental phase we take what Kuzniak has called Space of Geometric Work as the main reference. The activities have been proposed to groups of Junior High School teachers (grades 7th to 9th), during some training courses. We describe here two of the designed activities and we analyze the difficulties the teachers face to solve them.

Introducción

En los últimos diez años nuestro país ha promovido una reforma curricular general, que gira alrededor del *enfoque por competencias*. En particular en Matemáticas, la reforma ha replanteado los programas de estudio y se propone modificar los materiales de enseñanza y la práctica docente. El diseño de materiales, coherentes con los postulados generales es una labor incipiente hasta ahora; mientras que la transformación radical de las prácticas docentes, es el mayor reto de la reforma en curso.

El presente trabajo reporta una experiencia de diseño para la formación de profesores de matemáticas de Escuelas Secundarias y de Bachillerato, en el marco de la reforma mencionada. Nuestro trabajo se ha centrado en el diseño de actividades didácticas para profesores; hemos tomado para ello la metodología ACODESA (Hitt & Cortés, 2009) como base del diseño para construir lo que Kuzniak y colaboradores han llamado Espacios de Trabajo Geométrico (Kuzniak & Viever, 2010; Houdement, 2007). Describimos aquí algunos ejemplos sobre este diseño y analizamos las experiencias que los profesores han tenido con ellos.

Propósitos y referencias teóricas

Nos propusimos diseñar y experimentar actividades didácticas en geometría, guiados por la Metodología ACODESA, propuesta por Fernando Hitt, que recomienda partir de una situación problema, entendida como:

> "…la situación debe ser simple, fácil de entender (ello no implica que sea fácil de resolver), ella debe provocar la reflexión y por tanto no puede ser un ejercicio. La matemática que debe utilizarse no necesariamente debe ser explicitada en el enunciado" (Hitt y Cortés, 2009).

Para desarrollar a partir de esta situación, una actividad didáctica siguiendo los cinco pasos relacionados con la gestión en el aula:

"1. Trabajo individual (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema),
2. Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales),
3. Debate (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones funcionales),
4. Regreso sobre la situación (trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión).
5. Institucionalización. Proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales." (Hitt y Cortés, 2009).

Hemos considerado, por otra parte, la noción de Espacio de Trabajo Geométrico (ETG), definida por Kuzniak (2013) como "[un espacio] organizado para asegurar el trabajo de personas resolviendo problemas geométricos". La actividad a desarrollar en estos espacios, puede concebirse en dos dimensiones: la epistemológica y la cognitiva. En la primera, se contemplan tres características de la actividad geométrica, a saber:

1) Un espacio real y local, integrado por objetos concretos.
2) Un conjunto de artefactos tales como instrumentos de dibujo o software.

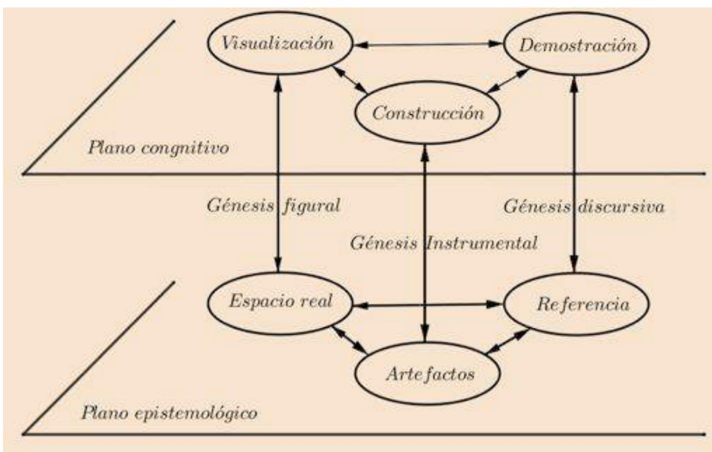
3) Un marco teórico de referencia basado en definiciones y propiedades.

En la segunda se incluyen tres procesos cognitivos relacionados con la actividad geométrica:

1. El proceso de visualización, conectado a la representación de los objetos del espacio real, mediante la génesis figural.
2. El proceso de construcción, que involucra el uso de artefactos (regla, compás, software, etc.) a través de la génesis instrumental.
3. El proceso deductivo que conduce a la demostración y que está basado en el marco teórico de referencia.

En la Figura 1, se representan con planos las dimensiones cognitiva y epistemológica y los elementos que integran cada uno de ellos, así como las relaciones que guardan entre sí.

Figura 1



Para entender, clarificar y organizar los resultados de la actividad geométrica, Kuzniak toma de Kuhn (1966) la noción de *paradigma*, entendida como el conjunto de creencias, concepciones, reglas, etc., que una comunidad científica comparte.

Aunque Kuzniak (2013) se refiere a tres paradigmas geométricos, describiremos aquí solamente dos de ellos, porque son los de mayor interés en nuestro trabajo.

■ El Paradigma de la Geometría Natural (Geometría I)

En este paradigma predominan los objetos reales y sus características, que pudieran no distinguirse bien de los objetos geométricos. Sus fuentes de validación son estos objetos reales y los argumentos usados para apoyar una proposición podrían ser experimentales, aunque esto no excluye los argumentos deductivos. Aquí lo más importante es presentar argumentos convincentes, aunque no estén basados en sistema axiomático alguno. Es válido entonces usar las mediciones con instrumentos como reglas graduadas o transportadores, las características observadas en los trazos con regla y compás, los resultados obtenidos cortando o doblando dibujos sobre papel. Se trata en síntesis de una geometría cuya naturaleza es empírica y tiene su origen histórico en la resolución de problemas prácticos y en los métodos desarrollados para resolverlos.

El paradigma de la Geometría Axiomática Natural (Geometría II)

En este paradigma, el modelo a seguir es la Geometría Euclidiana clásica, los juicios están basados en los objetos geométricos existen una vez definidos en el sistema y aunque sus representaciones pueden aproximar objetos reales, su existencia y sus propiedades dependen de las reglas establecidas previamente en el sistema axiomática. Aunque los objetos que entran en juego en ambos paradigmas están ligados a la realidad, la naturaleza de estos es muy diferente en cada uno de ellos.

Actividades didácticas

Las dos actividades reportadas aquí, están incluidas en el Material del Participante (Ibarra et al, 2012) utilizado como material de enseñanza en un programa de formación de profesores. Tal como se contempla en la metodología ACODESA, en ambas actividades se ha partido de una situación problema y la actividad en el aula se ha organizado conforme a las recomendaciones de esta metodología: trabajo individual, en equipo, grupal, individual (reconstrucción y auto-reflexión) y grupal (institucionalización).

Las dos actividades se describen a continuación:

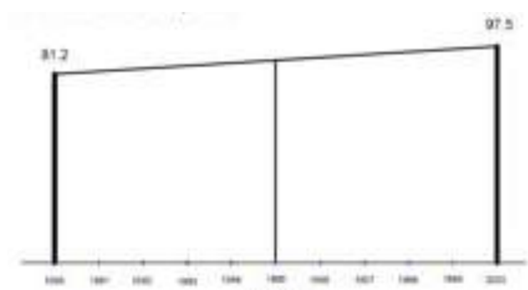
La media aritmética

En esta primera actividad la situación problema se ha planteado a partir de los datos que se muestran en la Figura 2.

Tabla 2. Resumen de las observaciones y análisis del problema 4 del Examen de Cierre.

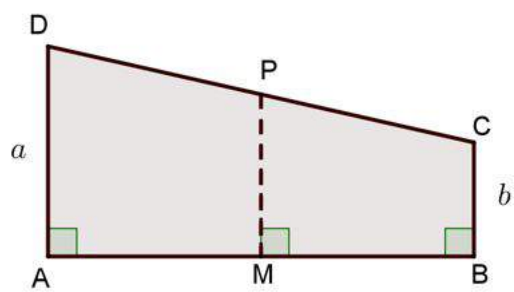
Después de algunos cuestionamientos planteados con el propósito de que el profesor analice la información contenida en la gráfica de la Figura 2, por ejemplo, se plantea el problema de estimar el número de habitantes que vivían en México en el año 1995 (dato no contenido en la Figura 2). Para resolver este problema, se propone la representación esquemática mostrada en la Figura 3:

Figura 3



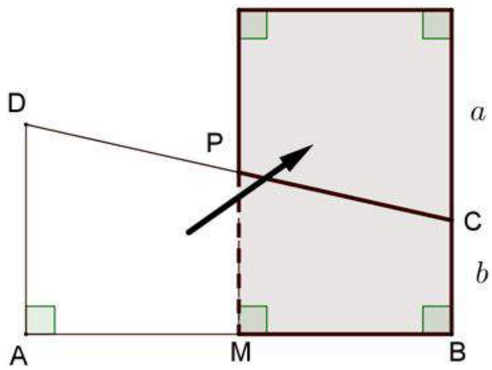
Pero la parte principal de la actividad se refiere a encontrar la relación general que existe entre la medida del segmento MP y las medidas de los segmentos AD y BC (ver Figura 4).

Figura 4



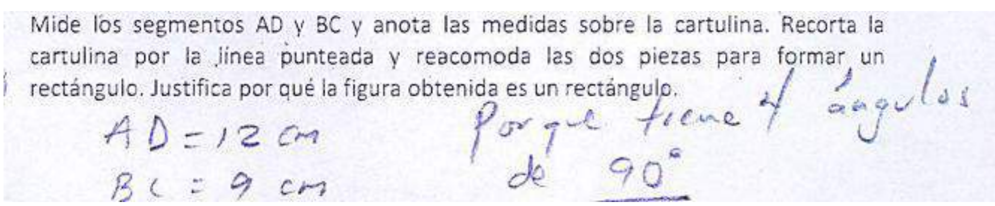
Se llega así al problema siguiente: dado un trapecio como el de la Figura 4, con M como punto medio de AB, expresar la medida de PM en términos de *a* y *b*. En esta actividad se han repartido a los profesores trapecios trazados en cartulina, como los de la Figura 4, pero con diferentes medidas para AD y BC. Midiendo los lados AD, MP y BC con una regla, han podido conjeturar la relación que existe entre ellos, pero no han podido justificar esta relación. Después se les ha propuesto recortar las figuras sobre el segmento PM y luego formar con las dos piezas obtenidas, un rectángulo como el mostrado en la Figura 5. Con algunas dificultades, han logrado identificar que el nuevo polígono de la Figura 5 es un rectángulo en el que PM=(*a*+*b*)/2.

Figura 5



Sin embargo cuando se les ha pedido una argumentación deductiva para explicar por qué la nueva figura geométrica es un rectángulo, ninguno de los 24 profesores participantes han podido formularla. Las dos respuestas siguientes (Figuras 6a y 6b) ilustran el hecho de que los profesores se mantienen en el paradigma de la Geometría I y muy lejos del paradigma de la Geometría II.

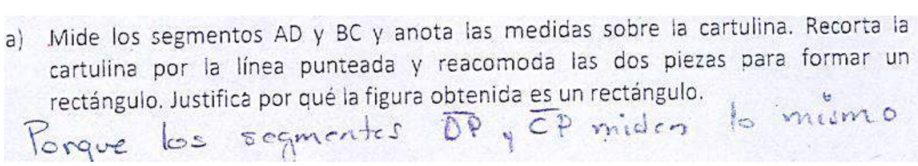
Figura 6a.


Mide los segmentos AD y BC y anota las medidas sobre la cartulina. Recorta la cartulina por la línea punteada y reacomoda las dos piezas para formar un rectángulo. Justifica por qué la figura obtenida es un rectángulo.

AD = 12 cm
BC = 9 cm

Porque tiene 4 ángulos de 90°

Figura 6b.


a) Mide los segmentos AD y BC y anota las medidas sobre la cartulina. Recorta la cartulina por la línea punteada y reacomoda las dos piezas para formar un rectángulo. Justifica por qué la figura obtenida es un rectángulo.

Porque los segmentos $\overline{DP}$ y $\overline{CP}$ miden lo mismo

La construcción de un arco de centro inaccesible

En la segunda situación problema, propuesta a los profesores, se discute y aplica un método para trazar arcos en la construcción de una edificación y posteriormente se pide justificar el método geométricamente. Primeramente se explica el método utilizado para construir un arco (Figuras 7-9), cuyo centro es inaccesible. Al construir un arco como éste, en una edificación, se usan barrotes de madera para construir un ángulo apropiado (Figura 8), con otros barrotes, este ángulo puede ser reproducido para localizar otros puntos que estarán sobre el mismo arco, hasta obtener los puntos necesarios para armar la cimbra, sobre la que descansará el arco. El método es simulado en el aula utilizando tiras de cartón y chinchetas para trazar en papel algunos puntos del arco, con medidas a escala. Los profesores han logrado simular el método en papel sin mayores problemas. Pero los únicos intentos por dar una justificación del método, recurrieron al teorema que garantiza la igualdad de ángulos inscritos que son subtendidos por la misma cuerda (Figura 10). Con la ayuda del instructor, los profesores lograron formular el teorema inverso al que estaban usando, pero ninguno de ellos pudo demostrar dicho teorema, ni formular algún argumento que pudiera corresponder al paradigma de la geometría II.

Figura 7

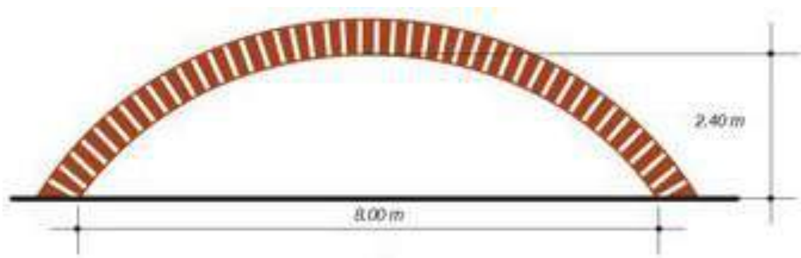


Figura 8

Figura 9

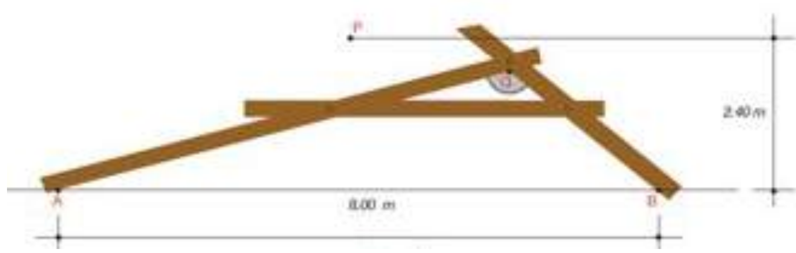
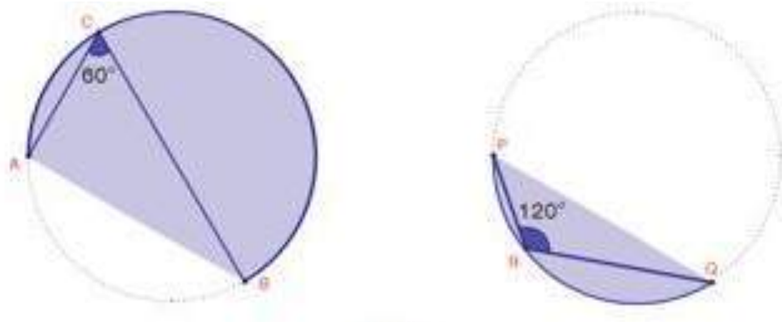


Figura 10



Conclusiones

Al analizar los resultados de las actividades geométricas realizadas por los profesores, ha resultado evidente que sus respuestas se corresponden, casi exclusivamente, con en el paradigma de la Geometría I. Mientras se planteaban problemas que podían resolverse haciendo mediciones, trazos, recortes o cálculos numéricos, las respuestas de los profesores eran muy eficientes y cada vez que se pedían justificaciones sobre las soluciones encontradas para estos problemas, ellos podían extenderse con argumentos centrados en las características de las acciones ejecutadas. Sin embargo cuando se solicitaba justificar la certeza de alguna proposición planteada sobre objetos geométricos, los profesores mostraban serios problemas para ofrecer respuestas dentro del paradigma de la Geometría II. Estas dificultades de los profesores pudieran tener consecuencias particularmente graves en su práctica docente, puesto que difícilmente podrían valorar las respuestas de sus estudiantes ubicables en el paradigma de la Geometría II y quizás ni siquiera identificarlas como tales. Llama la atención que en otro de los problemas, no reportado aquí, en el cual se explicaban los trazos con regla y compás, necesarios para construir la tangente a una circunferencia desde un punto exterior a ella, los profesores no pudieron ofrecer los argumentos deductivos para justificar que la construcción era correcta, y cuando el instructor expuso una demostración usando el método de reducción al absurdo, algunos profesores opinaron que este no era un "verdadero problema geométrico", puesto que se estaban haciendo supuestos insostenibles sobre la falsedad de la construcción. Esta escasa familiaridad con los métodos deductivos para formular una demostración, ofrece un panorama bastante pesimista sobre las posibilidades de los profesores para responder a las exigencias del paradigma de la Geometría II.

En términos generales, podemos decir que en la organización de un ETG, la mayor dificultad es lograr la articulación coherente entre el Paradigma de la Geometría Natural y el de la Geometría Axiomática Natural. Esta dificultad está también relacionada con la inconsistencia entre el ETG personal de los profesores y el ETG institucional, que exige un razonamiento deductivo en Geometría, pero que los profesores evidentemente han descuidado, tanto en su trabajo docente, como en la resolución de problemas como actividad formativa.

Referencias bibliográficas

Hitt, F. & Cortés, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas, *Revista digital Matemática, Educación e Internet* 10(1). Consultado el 18 de agosto de 2014 en http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/.

Houdement, C. (2007). Geometrical Working Space, a tool for comparison, In Demetra Pitta-Pantazi & George Philippou (Eds) *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 5*, (972-981). Larnaka, Cyprus: erme.

Ibarra, S., Villalba, M., Armenta, M., Del Castillo, A., Grijalva, A., Soto, J., Urrea, M. y

Ávila, R. (2012). *Material del Participante*. Consultado el 18 de agosto de 2014 en http://pmme.mat.uson.mx/BAEM/2012/MATERIAL%20DEL%20PARTICIPANTE.pdf.

Kuhn, T.S. (1966). *The structure of scientific revolutions, 2nd ed*. Chicago: University of Chicago Press.

Kuzniak, A. & Vivier, L. (2010). A french look on the greek Geometrical Working Space at secundary school level. In Viviane Durand-Guerrier, Sophie Soury-Lavergne

& Ferdinando Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 6*, (pp. 686-695). Lyon, France: INRP.

Kuzniak, A. (2013). Teaching and learning Geometry and beyond… In Behiye Ubuz, Çiğdem Haser, Maria Alessandra Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 8*, (pp. 33-49), Antalia, Türkiye: Middle East Technical University.