ESTUDIO QUE PROMUEVE LA ARTICULACIÓN DE ARGUMENTOS ANALÍTICOS Y GEOMÉTRICOS EN COMBINACIÓN LINEAL DE MATRICES

Carlos Oropeza Legorreta, José Isaac Sánchez Guerra.
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM. (México)
coropeza96@hotmail.com, joejade@hotmail.com.
jlsoto@mat.uson.mx

Palabras clave: saber matemático, geometría, ingeniería didáctica
Keywords: mathematical knowledge, geometry, didactic engineering

RESUMEN

Estamos convencidos de que el estudio del álgebra lineal incluye una gran variedad de temas y conceptos que se encuentran íntimamente relacionados con otras asignaturas. El objetivo de este trabajo es precisamente mostrar parte de la articulación de argumentos de corte algebraico, vinculados con fundamentos de cálculo diferencial e integral y analizar regularidades de corte geométrico en contraste con los cálculos analíticos correspondientes al área generada por los vectores columna en la combinación lineal de matrices de 2x2. En el desarrollo se incluyen cuatro formas diferentes de solución utilizando: integrales, cálculo de polígonos regulares, determinantes y cálculo de paralelogramos.

ABSTRACT

We are convinced that the study of linear algebra includes a wide variety of topics and concepts intimately related with others subjects. The aim of this work is precisely show a part of the articulation of arguments of algebraic type, linked to fundaments of differential and integral calculus and analyze regularities of geometric type in contrast with analytical calculations corresponding to the area generated by the column vectors in linear combination of 2x2 matrices. In the development of this work we include four different solutions using: integrals, calculation of regular polygons, determinants and parallelogram calculation

Partiendo de la premisa de que en diversas universidades de México se ha realizado una serie de modificaciones en los planes y programas de estudio y a pesar de los intentos de adaptación en cuanto a necesidades, planeación, objetivos y demás propuestas, es necesario reconocer que álgebra lineal es y seguirá siendo considerada como una asignatura difícil de estudiar. En On the teaching of linear algebra, Dorier (2000) cita: “*es necesario reconocer que la enseñanza del álgebra lineal es percibida comúnmente como una falta de experiencia (Carlson, 1993; Hillel, 2000), la educación en álgebra lineal es un campo de investigación muy reciente*”.

Por otra parte, tomando como referente la experiencia adquirida en diversos cursos que hemos impartido durante poco más de quince años en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM, hemos observado algunas regularidades, entre las cuales se puede mencionar el hecho de que los estudiantes no pueden dar evidencias tangibles de un significado distinto a los desarrollos analíticos en la solución de un problema; es decir, tienen dificultades con el empleo de las propiedades de los números reales y con el uso de los conceptos básicos de álgebra. De tal suerte que hemos estructurado un supuesto como respuesta ante dicha dificultad: “*Un estudiante alcanza una idea clara y precisa del concepto de combinación lineal cuando es conducido a escenarios de representación geométrica, vía el diseño de una ingeniería didáctica*”. Por lo antes comentado el objetivo de este trabajo es precisamente la articulación de argumentos de corte algebraico, vinculados con fundamentos de cálculo diferencial e integral y analizar regularidades de corte geométrico en contraste con los cálculos analíticos correspondientes al área generada por los vectores columna en la combinación lineal de matrices de 2x2.

Nuestro estudio ya tiene otras etapas cubiertas pues el diseño de la situación didáctica se aplicó en un diplomado perteneciente a la UNAM, entre otras: la construcción del concepto de combinación lineal haciendo uso de la visualización como una herramienta didáctica; la exploración del funcionamiento y efecto del uso de aquellos elementos de carácter visual que se ponen en juego en el momento de trabajar la ingeniería didáctica y su conexión con las características específicas del concepto de combinación lineal. La idea original de nuestra propuesta de estudio surge del planteamiento establecido por Grossman (2008), en su libro de Álgebra Lineal (6ª. Edición), referente a la interpretación geométrica de un determinante de 2x2, donde se demuestra que el área del paralelogramo generada por los vectores columna es igual al valor absoluto del determinante de la matriz original. El planteamiento general de nuestro proyecto pretende demostrar que cuando una matriz es combinación lineal de un conjunto de matrices, se conserva la propiedad del cálculo de sus áreas respectivas. Sin embargo, actualmente no hemos podido llegar a dicha demostración; por ello presentamos los avances realizados del estudio.

Fundamento teórico y metodología

En el cuerpo del trabajo proporcionamos de manera sintetizada los métodos aplicados para el cálculo de las áreas consideradas así como un acercamiento de las consideraciones realizadas en cada una de las soluciones establecidas. Por ello se puede esperar entonces que para un estudiante que inicia su formación, las aportaciones que se deriven del presente trabajo de investigación serían consideradas como un beneficio ya que contarían entonces con un planteamiento alterno que les proporcionaría flexibilidad al estudiar álgebra lineal.

El marco teórico utilizado en la investigación es la Teoría de Situaciones Didácticas, y como herramienta didáctica a la Visualización. La Teoría de Situaciones Didácticas, formulada inicialmente por Guy Brousseau (1997) y retomada, reformulada y enriquecida por una amplia comunidad de investigadores, fundamentalmente de la comunidad francesa de la Didáctica de las Matemáticas. Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica retomada por Farfán (1997), se caracteriza por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza: y por el registro de los estudios de caso y la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori.

El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases:
1. Análisis preliminares
2. Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas.
3. Experimentación.
4. Análisis a posteriori y evaluación.

En contraste, la visualización tiene diversas acepciones por los investigadores que se han encargado de estudiarla. Sin embargo, en este trabajo será considerada como: "La capacidad, el proceso, el producto de creación, interpretación, empleo de y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento" (Arcavi, 1999). En el trabajo además de reportar algunas exploraciones.

Desarrollo

Para el desarrollo de las actividades se proporcionan los datos de dos matrices A, B y la regla que debe guardar con respecto a C todas ellas de un tamaño de 2x2, de cada una se graficaron los vectores columna y el vector resultante de las dos primeras, el cual sirvió para construir el paralelogramo correspondiente a la matriz C que conserva la ecuación de la combinación lineal determinada por: $C = -2A + 2B$ en donde $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ y la gráfica respectiva es:

Figura 1. Gráfica que representa la combinación lineal entre las matrices

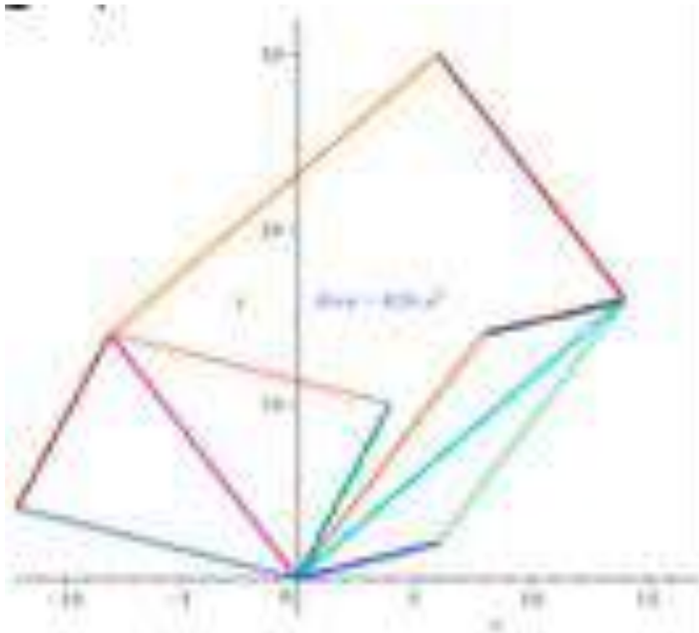
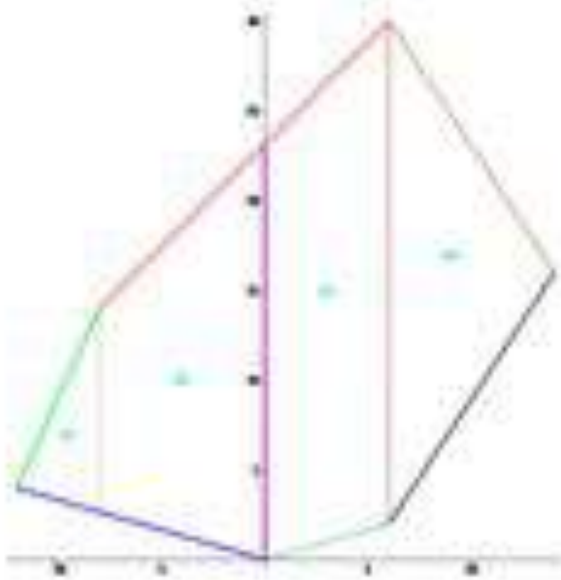


Figura 2.- Calculo de áreas planas por medio de la integral definida



La figura resultante formada por el perímetro obtenido de la combinación lineal entre las matrices se dividió en cuatro partes tal como se muestra en la figura 2. En este apartado, por cuestiones de espacio, sólo se presenta material correspondiente al primer método empleado. Cada una de las áreas se calculó mediante integrales utilizando el siguiente planteamiento: $\int_a^b [y_n - y_m] dx$

En la figura 1 se muestra el paralelogramo formado con la resultante total y se encuentran por separado las partes con las que se trabaja. Para poder saber el área de cada figura se necesitó primero encontrar la pendiente de cada recta con $(y - y_1) = m(x - x_1)$, donde la ecuación de la pendiente queda determinada por la expresión $y = mx + b$.

A continuación se muestra el cálculo de dos de las pendientes:

Pendiente #1: $(x_1, y_1) = (-12, 4)$

$$(x_2, y_2) = (-8, 14)$$

$$m = \frac{14-4}{-8+12} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$(y-4) = \frac{5}{2}(x+12)$$

$$y - 4 = \frac{5}{2}x + 30$$

$$y_1 = \frac{5}{2}x + 34$$

Pendiente #2: $(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$(x_2, y_2) = (-12, 4)$$

$$m = \frac{4-0}{-12-0} = \frac{4}{-12} = \frac{2}{-6} = \frac{1}{-3}$$

$$(y-0) = \frac{1}{-3}(x+0)$$

$$y_2 = -\frac{1}{3}x$$

En las siguientes figuras se encuentran en planos separados cada una de las partes del paralelogramo anterior con su respectiva área.

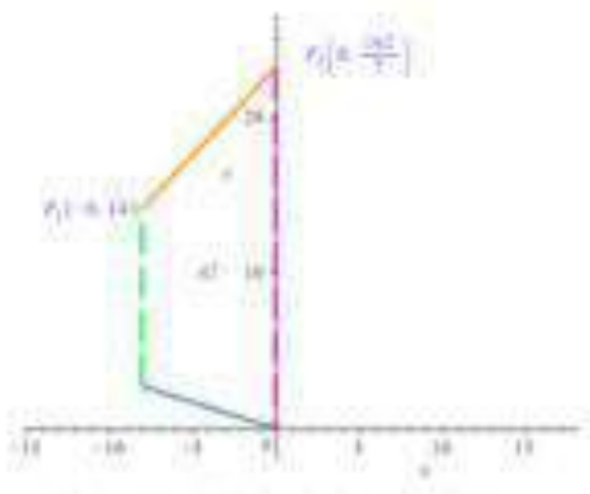
A continuación de muestra el resultado del área encontrada de la primera parte:

$$A_1 = \int_{-12}^{-8} (y_1 - y_2) dx = \frac{\mathbf{544}}{\mathbf{24}} \boldsymbol{u^2}$$

Cálculo de la segunda área y su correspondiente figura:

Figura 3.- Calculo de la segunda área

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_{-8}^{0} (y_3 - y_4)\,dx \\
&= \int_{-8}^{0} \left[\left(\frac{8}{7}x + \frac{162}{7}\right) - \left(-\frac{1}{3}x\right)\right] dx \\
&= \int_{-8}^{0} \left(\frac{8}{7}x + \frac{162}{7} + \frac{1}{3}x\right) dx \\
&= \frac{8}{7}\int_{-8}^{0} x\,dx \\
&+ 34\int_{-8}^{0} dx + \frac{1}{3}\int_{-8}^{0} x\,dx = \left[\frac{8}{14}x^2 \right.\\
&\left. + \frac{162}{7} + \frac{1}{6}x^2\right]\Big|_{-8}^{0} \\
&= \left[\frac{8}{14}(0)^2 + \frac{162}{7}(0) + \frac{1}{6}(0)^2\right] \\
&- \left[\frac{8}{14}(-8)^2 + \frac{162}{7}(-8) \right.\\
&\left. + \frac{1}{6}(-8)^2\right] \\
&= -\left[\frac{8}{14}(64) - \frac{1296}{7} + \frac{1}{6}(64)\right] \\
&= -\left[\frac{512}{14} - \frac{1296}{7} + \frac{64}{6}\right] \\
&= -\left[\frac{512}{14} - \frac{2592}{14} + \frac{64}{6}\right] \\
&= -\left[-\frac{2080}{14} + \frac{64}{6}\right] \\
&= -\left[\frac{-12480 + 896}{84}\right] = \frac{11584}{84} \\
&= \frac{2896}{21}u^2
\end{aligned}
$$



En la figura 3 se muestra la segunda parte del paralelogramo con sus respectivos puntos.

De manera similar se realizaron los cálculos correspondientes para:

Área tres: $A_3 = \int_0^6 (y_5 - y_6)dx = \frac{\mathbf{3222}}{\mathbf{21}}\boldsymbol{u^2}$ y área cuatro: $A_4 = \int_6^{14} (y_7 - y_8)dx = \mathbf{112}\ \boldsymbol{u^2}$

Por lo tanto, tenemos que al sumar las áreas encontradas obtenemos el área total de:

$$AT = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{544}{24} + \frac{2896}{21} + \frac{3222}{21} + 112 = \mathbf{426}\boldsymbol{u^2}$$

Método de polígonos regulares

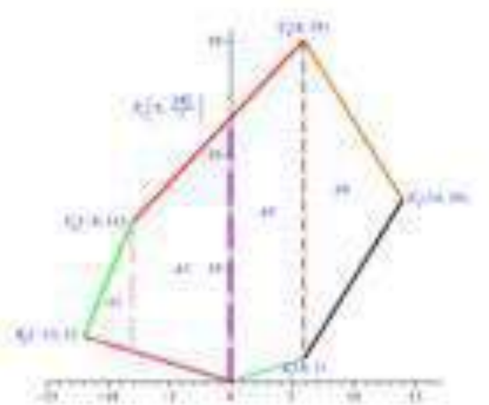
Otra de las estrategias utilizadas para realizar el cálculo de áreas es a partir del método de polígonos regulares que toma como base la siguiente expresión:

$AT = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{vmatrix}$ y que nos permite obtener el área total a partir de realizar un solo cálculo.

Figura 4.- Paralelogramo completo

$$AT = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -12 & 4 \\ -8 & 14 \\ 6 & 30 \\ 14 & 16 \\ 6 & 2 \\ 0 & 0 \\ -12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[(-12)(14) + (-8)(30) + (6)(16) + (14)(2) + (6)(0) + (0)(4)] - [(-12)(0) + (0)(2) + (6)(16) + (14)(30) + (6)(14) + (-8)(4)] = \frac{1}{2}[-168 - 240 + 96 + 28 + 0 + 0] - [0 + 0 + 96 + 420 + 84 - 32] = \frac{1}{2}[-284] - [568] = \frac{1}{2}[-852] = \mathbf{426u^2}$$



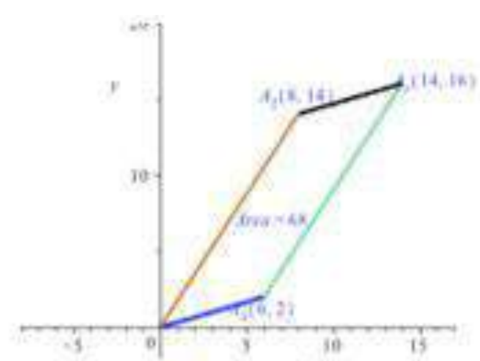
Método de determinantes

Una manera distinta de realizar el cálculo de las áreas es a partir del planteamiento realizado por Grossman que toma como base a los determinantes ($A = |detA|$).

A continuación se representa el cálculo de una de las áreas y su correspondiente figura:

Figura 5.- Paralelogramo formado por 2A

$$2A = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 14 \end{vmatrix} = 84 - 16 = \frac{68}{2} = 34$$



Como se puede observar en la figura 5 podemos verificar que la resultante correspondiente a la matriz A tiene las coordenadas (14, 16).

Al aplicar el mismo método para las otras matrices, se tiene como resultado que:

2B=68

2C=324

Estos tres valores de las áreas calculadas al sumarlas nos da un total de 426 unidades como se demuestra a continuación con el siguiente planteamiento:

$$\left|\det\frac{2A}{2}\right| + \left|det\frac{2B}{2}\right| + |detC| = AT$$

$$426u^2 = 34 + 68 + 324 = AT$$

Método del paralelogramo B X H

Otra forma de calcular el área de los polígonos generados es encontrando la altura y la base de cada paralelogramo a partir de la fórmula $A = b\ x\ h$, para encontrar los puntos que son coincidentes con la altura se utilizó la siguiente expresión.

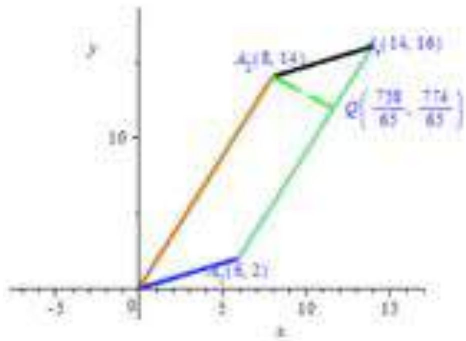
$Q = \left(\frac{-cdetA}{c^2+a^2}, \frac{adetA}{c^2+a^2}\right)$ misma que se extiende a: $Q = \left(\frac{(b)detA}{a^2+b^2} + a, \frac{(-a)\det A}{a^2+b^2} + b\right)$

Finalmente los puntos *Q* encontrados con la fórmula correspondiente a cada caso se utilizaron para calcular las alturas con la fórmula de distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para obtener la longitud de las bases de los paralelogramos también se utilizó el cálculo de la distancia entre dos puntos. A continuación se muestra la figura 6 y el procedimiento para encontrar la altura correspondiente:

Figura 6.- Altura del primer paralelogramo



$$Q=\left(\frac{-4(-136)}{(-12)^2+(4)^2},\frac{-12(-136)}{(-12)^2+(4)^2}\right)=\left(\frac{544}{160},\frac{1632}{160}\right)$$

$$d=\sqrt{\left(\frac{544}{160}\right)^2+\left(\frac{1632}{160}\right)^2}=\frac{17}{5}\sqrt{10}$$

$$d=\sqrt{(-8-4)^2+(14-10)^2}=4\sqrt{10}$$

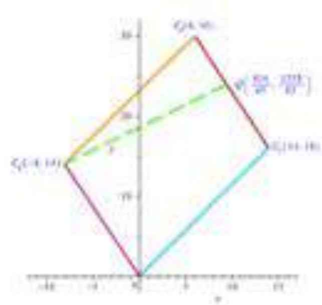
$$A_2=b\cdot h=\frac{17}{5}\sqrt{10}\cdot 4\sqrt{10}=\mathbf{136}$$

Figura 7.- Tercer paralelogramo con su altura

A continuación se muestra la tercera sección (figura 7) generada por la resultante de los vectores.

$$x=\frac{(14)(324)}{(-8)^2+(14)^2}-8=\frac{4536}{260}-8=\frac{614}{65}$$

$$y=\frac{(8)(324)}{(-8)^2+(14)^2}+14=\frac{648}{260}+14=\frac{1558}{65}$$



$$d=\sqrt{\left(-8-\frac{738}{65}\right)^2+\left(14-\frac{1558}{65}\right)^2}=\frac{162\sqrt{65}}{65}$$

$$||A_3||\sqrt{(-8)^2+(14)^2}=\sqrt{260}=2\sqrt{65}$$

$$A_3=b\cdot h=\frac{162\sqrt{65}}{65}\cdot 2\sqrt{65}=\mathbf{324}$$

Nota: Por cuestiones de espacio no fue posible presentar todos y cada uno de los cálculos realizados en nuestro estudio.

Análisis

En el desarrollo del presente trabajo se puede verificar que los cálculos de las áreas producidas por los vectores columna son coincidentes en los diferentes métodos utilizados, eso ha permitido producir otras condiciones para continuar nuestro estudio pues a los estudiantes les ha parecido muy atractiva esta regularidad. A pesar de que hasta este momento no hemos podido verificar la coincidencia entre la combinación lineal de matrices y sus respectivas áreas, nos sirvió para replantear la propuesta diseñada y lograr explorar otras características. Por ejemplo actualmente nos estamos analizando la factibilidad de involucrar un programa de cómputo que pueda permitir alcanzar dicha coincidencia.

■ Reflexiones

Hasta el momento hemos recibido diversos cuestionamientos que permiten replantear nuestra propuesta y continuar con nuevos estudios relacionados a potenciar el uso de la visualización en álgebra lineal.

Atender a las estrategias que posibilitan el tener un aprendizaje de las matemáticas sustentado en la articulación de los saberes y el plantear un diseño así como su ejecución puede propiciar un acercamiento más tangible que se vuelva atractivo para el estudiante. El uso del software matemático puede favorecer en algunos casos al esclarecimiento del concepto estudiado y estimula la intención en la adquisición del mismo. El diseño de situaciones orientadas a la construcción del concepto combinación lineal no resulta sencillo, debido a las características propias del álgebra lineal y su incidencia en el discurso matemático escolar.

■ A futuro

Debido a que nuestro estudio se sigue desarrollando aún no podemos caracterizar las condiciones que se deben cumplir para lograr la coincidencia entre la combinación lineal de las matrices y la extensión de las áreas correspondientes.

Consideramos de suma importancia ejecutar la puesta en escena de la situación didáctica en diversos sistemas educativos, ya sean privados o públicos, para fortalecer las regularidades observadas y poder contrastar la hipótesis propuesta.

Por otra parte se hace necesario extender el estudio con los elementos considerados en la combinación lineal en cuanto al número y dimensión de las matrices involucradas.

■ Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52*(3), 215-241.

Brousseau, G.(1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Dorier, J.-L.(Ed) (2000). *On the teaching of linear algebra.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Farfán, R.M. (1997). Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hoffman, K y Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal.* México: Prentice-Hall Interamericana.

Grossman, S. I. (2008). *Álgebra Lineal.* México: Mc Graw Hill – Interamericana Editores.

Winter, D. J. (1992). Matrix Algebra. USA: Macmillan Publishing Company.