

UNA SECUENCIA DE MODELACIÓN PARA LA INTRODUCCIÓN SIGNIFICATIVA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Octavio Augusto Briceño Silva, Gabriela Buendía Ábalos

Centro de Investigaciones de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. (México)

Colegio Mexicano de Matemática Educativa AC, (México)

octavioco11@gmail.com, buendiag@hotmail.com

Palabras clave: modelación, función, experimentos de diseño.

Key words: modeling, function, design experiments.

RESUMEN

Esta investigación gira alrededor de secuencias, donde la práctica de modelación se introduce en forma intencional y de esta manera se favorezca en los estudiantes un aprendizaje significativo sobre la función cuadrática y sus aspectos variacionales. El trabajo es propuesto y aplicado a estudiantes de inicios del bachillerato (12-13 años). La investigación es fortalecida por las contribuciones que se obtienen al usar la metodología de experimentos de diseño y el marco teórico que sustenta el trabajo es el de la Socioepistemología.

ABSTRACT

This research sequences orbits where modeling practice intentionally introduced and thus is favorable in students significant learning on the quadratic function and variational aspects. Work is proposed and applied to early high school students (12-13 years). The research is strengthened by the contributions are obtained by using the methodology of design experiments and theoretical framework underpinning the work is the Socioepistemology.

■ Introducción

Dentro de la investigación que sustenta este escrito se acoge la modelación como una práctica que ofrece las herramientas necesarias para establecer un vínculo entre contextos extra-escolares y los libros de texto junto con el discurso matemático escolar.

El uso de las gráficas que las secuencias buscan favorecer lleva a que el estudiante reconozca puntos clave e intervalos en ellas, que permitirán reconocer el comportamiento variacional del fenómeno tratado. El uso de tablas numéricas propicia un manejo visual y significativo del sistema numérico, dan organización a la información y pueden mostrar proporcionalidad entre las variables que intervienen, aspectos que apoyan en la resignificación de lo cuadrático y lineal.

Se pretende dar a conocer secuencias de aprendizaje en las que la modelación resignifica la función cuadrática para estudiantes que inician el trasegar en el precálculo favoreciendo la articulación entre el conocimiento científico (fenómeno físico de movimiento) y el conocimiento escolar (gráficas cartesianas) por medio del desarrollo de argumentos y herramientas variacionales que fomentan nuevos significados.

Los experimentos de diseño darán la pauta para el desarrollo de las actividades en las secuencias.

■ Aspectos teóricos

Para Cantoral y Farfán (2003) la Socioepistemología es el eje fundamental de investigación del pensamiento matemático y lenguaje variacional; el énfasis para explicar la construcción de conocimiento matemático está en las prácticas sociales, las cuales adquieren sentido en el campo de la variación y del cambio en los diferentes sistemas educativos. Los trabajos enmarcados en la Socioepistemología no se circundan en los conceptos, pero sí en las prácticas que lo anteceden y que se manifiestan en un contexto sociocultural específico. Importa cómo en ese contexto se usa el conocimiento, en la manera que se construye, qué razonamientos se asocian y qué clase de significados se comparten. Para Buendía y Montiel (2011) la Socioepistemología se constituye como un enfoque teórico para entender y comprender los fenómenos específicos que se relacionan con la transmisión de conocimiento matemático, reconociendo su naturaleza social a través del papel epistemológico que se le asignan a las prácticas sociales como normativas de ese conocimiento matemático.

La modelación determinada en un marco socioepistemológico nos permite que los estudiantes resignifiquen conceptos matemáticos tomando como base de esa resignificación el uso del conocimiento matemático. La práctica de modelación es el proceso de matematización en el aula, que lleva a que los fenómenos de la naturaleza (conocimiento científico) interactúen con (el conocimiento escolar) modelos matemáticos, dando las herramientas y argumentos necesarios que se van construyendo paulatinamente.

■ Aspectos variacionales

Los aspectos variacionales en el estudio de la función cuadrática se establecen como elementos de análisis en el desarrollo de la investigación. Cada uno de estos aspectos y el conjunto de ellos encierran el objetivo de la investigación: discutir cómo la modelación favorece los aspectos variacionales en los fenómenos físicos presentados en las secuencias.

Tiempo como variable independiente. El tomar fenómenos físicos para el estudio de la variabilidad de la función cuadrática, implica reconocer el tiempo como variable independiente para analizar la variación de otro componente como distancia o altura al poner un objeto cualquiera en movimiento. Trabajos como el de Díaz (2005) reconocen al tiempo como algo connatural que tiene que ver con estados distintos de acuerdo al paso del tiempo, donde hay un antes y un después de una misma cosa a la que se le detectan estados diferentes.

Uso de la gráfica. El uso que se le puede dar a la gráfica en fenómenos de movimiento permite relaciones de una manera más coherente debido a la visualización del comportamiento del fenómeno tratado. También podemos pensar en nuestro caso que el estudiante para esbozar la gráfica utiliza el plano cartesiano usando cuadrícula. Por otra parte tomar puntos clave facilita la consecución de los intervalos de tiempo o distancia, porque éstos permiten realizar interpretaciones y cálculos de movimiento del objeto. Buendía (2012) comenta que una estrategia de resolución cuando se plantean tareas a través de gráficas es la identificación de puntos clave o significativos, ya sea numéricamente para utilizarlos en fórmulas o de forma gráfica, para hallar las coordenadas de intersección.

Uso de tablas a través de una secuencia numérica. Las tablas favorecen la visualización de datos porque a partir de ellas se puede llegar a determinar el tipo de proporcionalidad que presentan los datos y en algunos casos el comportamiento del movimiento. El tomar intervalos de tiempo iguales permite observar en las tablas si la distancia o altura aumenta o disminuye en el transcurrir del tiempo. Arrieta (2003) en su trabajo de investigación llama numerización de los fenómenos a aquellas prácticas de modelación donde se parte de la recolección de datos numéricos de un fenómeno y luego se realizan prácticas de predicción para construir así modelos numéricos.

■ Metodología

La metodología escogida para la aplicación de las secuencias son los experimentos de diseño. De acuerdo a Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble (2003) la investigación de diseño surge ante la necesidad de metodologías que permitan obtener argumentaciones basadas en la evidencia de contextos naturales, de abordar cuestiones teóricas sobre la naturaleza del aprendizaje en un determinado contexto y de producir resultados de investigación a partir de la evaluación formativa. La mayoría de los experimentos de diseño de aula se conceptualizan como casos del proceso de apoyo a los grupos de aprendizaje de los estudiantes en un dominio de contenido particular.

Secuencia 1. La actividad se basa en el estudio del desplazamiento que sufre un automóvil de un punto determinado a otro. Esta actividad tiene el propósito de que el estudiante analice el movimiento de un objeto para que busque y encuentre las diferentes relaciones entre lo que ve y piensa plasmándolo en el desarrollo de cada una de las preguntas propuestas. La secuencia consta de siete preguntas donde los aspectos variacionales de la función cuadrática propuestos con anterioridad se consideran.

Figura 1: Movimiento de un auto de un punto (B) a otro (C) y su regreso

1. Si dos autos se ponen en movimiento al mismo instante uno va en forma horizontal moviéndose de B-C a C-B y otro a través de una montaña, las distancias que recorren son las mismas y el tiempo transcurrido también es idéntico ¿Cómo serían sus trayectorias? Dibújelas. Se quiere llevar los puntos marcados en el movimiento de ida y regreso horizontal (B, G, H, I, C) al movimiento del auto en montaña. Discuta con sus compañeros dónde los localizaría. Márquelos
2. Tomando el tramo B-G y el I-C de ida Al comparar los tiempos gastados en esos tramos ¿Cómo serían y porqué?
3. Si tomo esos mismos tramos pero de regreso C-I y G-B ¿Cómo sería la comparación de los tiempos con respecto al movimiento de ida?
4. Si le pidieran llevar el movimiento del auto F a una gráfica teniendo como magnitudes el tiempo y la distancia ¿Cómo lo haría? Esbócela
5. Compara la gráfica que obtuvo con la de otros compañeros ¿Qué diferencias encuentras?
6. Tomando intervalos de tiempo pequeños en el movimiento que hace el auto de ida y regreso medir las distancias recorridas, y plasmarlas en una tabla. ¿Cómo cree que es la relación de los datos numéricos del tiempo referente a la altura? Comente
7. ¿Cómo cree que sería la gráfica del movimiento teniendo en cuenta la situación del numeral anterior? ¿Tiene alguna similitud con la esbozada anteriormente por usted? Compara la gráfica y de su opinión.

Secuencia 2. En esta secuencia se presenta una actividad también de movimiento pero ahora en desplazamiento vertical el lanzamiento de una pelota hacia arriba. La secuencia consta de siete preguntas, las cuales hacen relación a los aspectos variacionales.

1. Realice los siguientes lanzamientos con una pelota: un lanzamiento vertical y uno que forme una curva. Suponiendo que se demoran los movimientos igual tiempo en caer y llegan a la misma altura. Discuta con sus compañeros Tomando unos puntos cualesquiera en el lanzamiento vertical, transportarlos al otro movimiento ¿dónde los ubicaría? Dibuja en una hoja las dos trayectorias y localiza los puntos.
2. ¿Cómo llevarías el movimiento que hace la pelota al lanzarla verticalmente desde el punto de partida (P) hasta que llega nuevamente a su inicio a una gráfica?

3. Discutir con sus compañeros sobre el lanzamiento de la pelota hacia arriba un instante antes de llegar la pelota al punto donde se regresa y ese mismo intervalo de tiempo después que se regresa ¿Cómo serían las alturas en esos puntos y qué pasa con el tiempo transcurrido? ¿Por qué sucede eso?
4. Si tomamos un intervalo pequeño de tiempo después del lanzamiento y ese mismo momento de tiempo, pero antes de caer ¿Qué piensa sobre las alturas en ese intervalo y a qué se debe?

Para realizar la siguiente actividad los estudiantes toman una pelota y realizan un lanzamiento vertical hacia arriba. Con anterioridad se han marcado en una regleta que se coloca valores numéricos con el propósito de medir las alturas en un determinado tiempo.

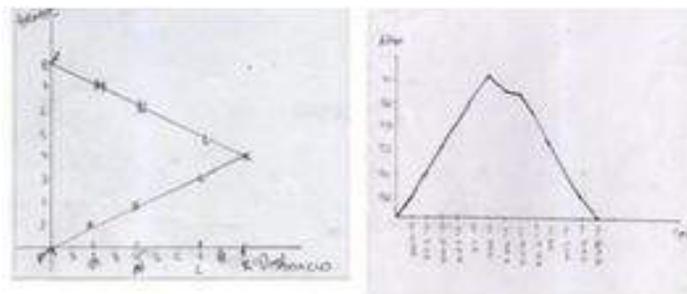
5. Tomando intervalos de tiempo pequeños, medir las alturas correspondientes y mostrarlas en una tabla. Deben ser más de diez tomas. ¿Cómo cree que es la relación de los datos numéricos del tiempo referente a la altura? Comente
6. ¿Cómo cree que sería la gráfica del movimiento teniendo en cuenta la situación del numeral anterior? tiene alguna similitud con la esbozada anteriormente en el numeral 2? Compara su gráfica con la obtenida por otros grupos y de su opinión
7. Si le pidieran comprobar que el modelo gráfico que se obtuvo es el indicado para el fenómeno mostrado de lanzamiento vertical ¿Qué debes hacer?

■ Análisis de resultados

El análisis de las propuestas didácticas se realiza a través de los aspectos variacionales los cuales permitieron formar un engranaje entre estudiante-práctica de modelación- ambiente-y profesor para llegar a la consecución de los objetivos propuestos en este trabajo de investigación. Para este análisis se toman como referencia algunos resultados propuestos por los estudiantes de las dos secuencias dadas.

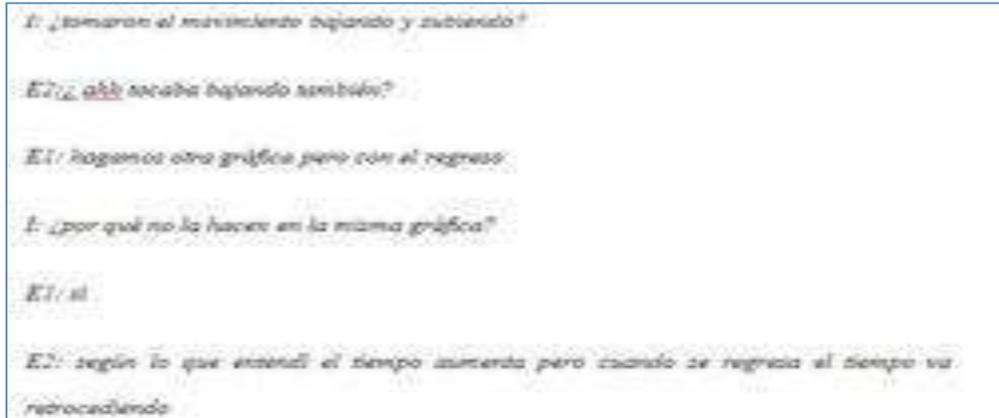
El tiempo como variable independiente: A través de la modelación se quiere relacionar el conocimiento científico (trayectorias visibles a la imaginación) con el conocimiento escolar (el tiempo como variable independiente). Se estableció que en su mayoría los estudiantes reconocen que el tiempo es una magnitud que siempre es positiva y no tiene regreso, siempre va aumentado, esto se puede mostrar en las dos gráficas de la figura que corresponden a la pregunta 2 y 6 respectivamente de la secuencia (2).

Figura 2: El tiempo como variable.



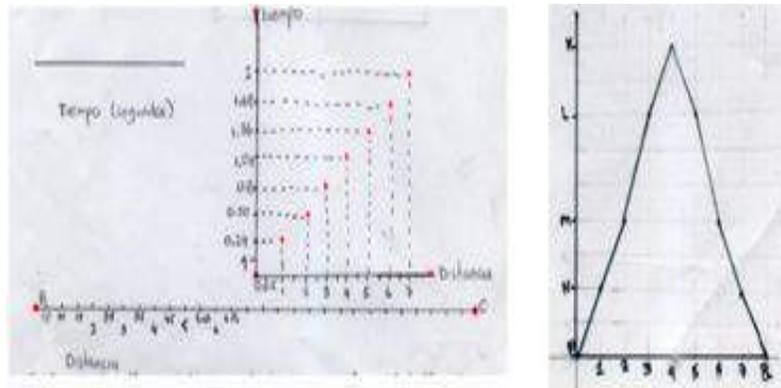
Toman el tiempo en algunas ocasiones como si fuera una distancia que puede aumentar y en otras regresar, como se manifiesta a continuación:

Figura 3: El tiempo como distancia.



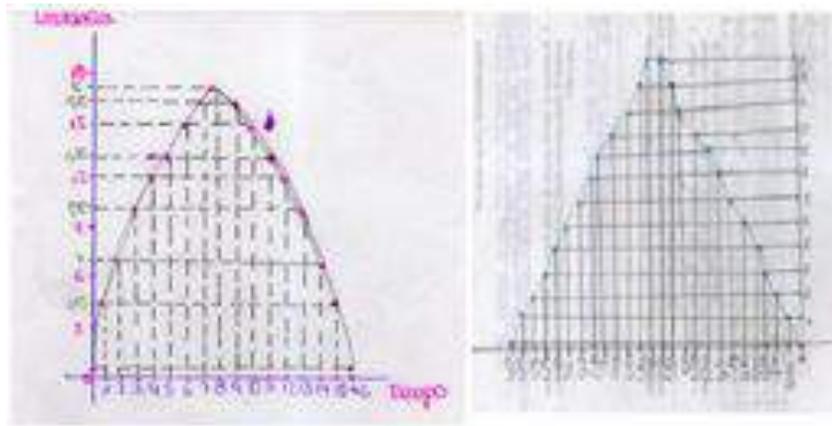
Uso de la gráfica: intervalos y puntos clave. El estudiante establece intervalos como el caso del tiempo con otra variable ya sea distancia o altura determinando parejas como se observa en las gráficas de la figura de la derecha donde toma el tiempo y lo une con el valor correspondiente de distancia. Podemos constatar en la primera gráfica de la figura obtenida de la secuencia (1) pregunta 4 que el estudiante reconoce los cambios que sufren los objetos en movimiento ya sean cualitativos o cuantitativos llevando intervalos y puntos de forma unidimensional a bidimensional. En la segunda gráfica correspondiente a la secuencia (2) pregunta 2, el estudiante toma los puntos del movimiento de la pelota y lo traslada a una gráfica, estableciendo puntos bidimensionales en forma numérica y posicional.

Figura 4: Asociación de intervalos.



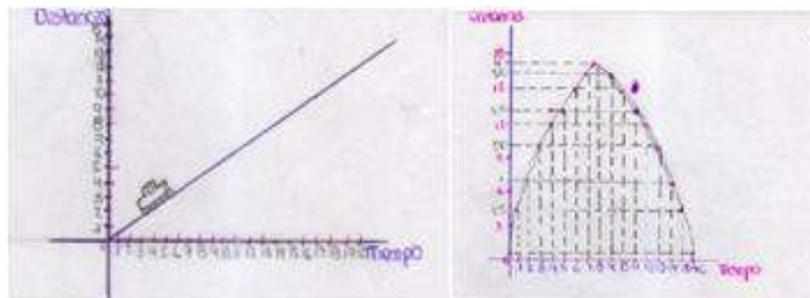
En la primera gráfica de la figura podemos ver que los valores de la variable dependiente no están dados en forma proporcional ni secuenciales aunque sí lo hace para el tiempo. En la segunda gráfica de la figura vemos que el estudiante pareciera estar trabajando en lo que institucionalmente se conoce como el segundo cuadrante. Sin embargo no es así porque los valores del eje x no son negativos entonces podemos decir que el estudiante indiferentemente toma para graficar cualquier cuadrante sin hacer distinción de éste, mostrando que le interesa es realizar la gráfica.

Figura 5: Resignificando puntos clave.



El estudiante cuando compara las gráficas reconoce que los puntos clave y los intervalos lo ayudan a romper con la linealidad en los fenómenos que se presentan, reconociendo que no todos los fenómenos tienen comportamiento lineal. Esto se observa cuando el estudiante realiza comparación de las gráficas.

Figura 6: Comparación de gráficas.



Secuencias numéricas. En la primera tabla establece valores de tiempo secuenciados y para cada uno de ellos halla el valor correspondiente de la otra variable, esta tabla corresponde al movimiento del auto secuencia (1) pregunta 6. En la segunda tabla correspondiente a la secuencia (2) pregunta 5 establece la

proporción entre sus datos mientras que en la primera establece puntos de inflexión como el punto bidimensional donde sucede el regreso.

Figura 7: Secuencias numéricas en las tablas

Tiempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Distancia	0,05	0,20	0,45	0,80	1,25	1,80	2,45	3,20	4,05	5,00	6,05

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50																																																																																																																																																						
0,05	0,20	0,45	0,80	1,25	1,80	2,45	3,20	4,05	5,00	6,05	7,20	8,45	9,80	11,25	12,80	14,45	16,20	18,05	20,00	22,05	24,20	26,45	28,80	31,25	33,80	36,45	39,20	42,05	45,00	48,05	51,20	54,45	57,80	61,25	64,80	68,45	72,20	76,05	80,00	84,05	88,20	92,45	96,80	101,25	105,80	110,45	115,20	120,05	125,00	130,05	135,20	140,45	145,80	151,25	156,80	162,45	168,20	174,05	180,00	186,05	192,20	198,45	204,80	211,25	217,80	224,45	231,20	238,05	245,00	252,05	259,20	266,45	273,80	281,25	288,80	296,45	304,20	312,05	320,00	328,05	336,20	344,45	352,80	361,25	369,80	378,45	387,20	396,05	405,00	414,05	423,20	432,45	441,80	451,25	460,80	470,45	480,20	490,05	500,00	510,05	520,20	530,45	540,80	551,25	561,80	572,45	583,20	594,05	605,00	616,05	627,20	638,45	649,80	661,25	672,80	684,45	696,20	708,05	720,00	732,05	744,20	756,45	768,80	781,25	793,80	806,45	819,20	832,05	845,00	858,05	871,20	884,45	897,80	911,25	924,80	938,45	952,20	966,05	980,00	994,05	1008,20	1022,45	1036,80	1051,25	1065,80	1080,45	1095,20	1110,05	1125,00	1140,05	1155,20	1170,45	1185,80	1201,25	1216,80	1232,45	1248,20	1264,05	1280,00	1296,05	1312,20	1328,45	1344,80	1361,25	1377,80	1394,45	1411,20	1428,05	1445,00	1462,05	1479,20	1496,45	1513,80	1531,25	1548,80	1566,45	1584,20	1602,05	1620,00	1638,05	1656,20	1674,45	1692,80	1711,25	1729,80	1748,45	1767,20	1786,05	1805,00	1824,05	1843,20	1862,45	1881,80	1901,25	1920,80	1940,45	1960,20	1980,05	2000,00

■ Comentarios finales

La investigación nos lleva a generar una base de significados alrededor de elementos variacionales para la significación de la función cuadrática en un contexto socioepistemológico. La aplicación de secuencias es realizable en el aula de clase para estudiantes entre 12-13 años que hasta ahora comienzan el trasegar en el precálculo.

En las investigaciones donde la modelación es tomada como una práctica es factible que se resignifique conocimiento matemático usando los experimentos de diseño como complemento, de forma que no solo es valioso lo que el estudiante plasma en un escrito, sino que además sus relaciones con el medio y con sus semejantes, sus formas de expresar y de proponer brindarán respuestas a algunos interrogantes de la investigación no observables en el discurso escolar cotidiano.

El uso de gráficas en intervalos y puntos clave permitió a los estudiantes reconocer que tanto los puntos clave como los intervalos ayudan a que se rompa con la linealidad en los fenómenos que se presentan, dando a conocer que no todos los fenómenos tienen comportamiento lineal.

El uso de secuencias numéricas les permitió a los estudiantes un ordenamiento de datos y observar su relevancia en la graficación, donde observan el comportamiento curvo de algunos fenómenos como el presentado en la investigación.

El tener como referente los experimentos de diseño permitió reconocer las posturas de los estudiantes en las secuencias expuestas.

■ Referencias bibliográficas

- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada. DME, Cinvestav-IPN, México.
- Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Red de revistas científicas de América latina, el Caribe, España y Portugal*, 24(2), 9-35
- Buendía, G. y Montiel, G. (2011). Propuesta metodológica para la investigación Socioepistemológica. *Memorias de la XIV escuela de invierno en matemática educativa* (pp. 443-454). México.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa. Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa*, 6(1), 27- 40.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13
- Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa*, 8 (2), 145-168. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.