INTERSECCIÓN DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA Y LAS CIENCIAS SOCIALES: EL CASO DE LOS SEGUROS DE VIDA

María Rosa Rodríguez, Jesús Alberto Zeballos
Facultad de Ciencias Económicas. UNT. (Argentina)
mrrodriguez@face.unt.edu.ar, jesusalbertozeballos@gmail.com

Palabras clave: incertidumbre, probabilidad, tablas de mortalidad
Key words: uncertainty, probability, mortality tables

RESUMEN

La enseñanza de la Economía implica un problema pedagógico-didáctico: ¿Qué y cuánta Matemática resulta imprescindible en las teorías económicas? Una respuesta exige una profunda reflexión sobre la formación matemática de los profesores de Economía y de investigaciones en Educación Matemática.

Este trabajo muestra, de manera didáctica, la medición de la incertidumbre que involucran los seguros de vida. El asegurador determina el precio de la cobertura que brinda un seguro por medio de las Tablas de Mortalidad, estudiadas por la Matemática Actuarial.

Este tema evidencia la intersección de problemas económicos y poblacionales, utilizando conceptos matemáticos aplicables a la Educación Matemática en Economía.

ABSTRACT

The teaching of economics implies a pedagogical-didactic problem: What and how mathematics is essential in economic theories? An answer requires deep reflection on mathematics teacher training Economics and Mathematics Education Research.

These paper shows, didactic way, and the measurement uncertainty involving life insurance. The insurer determines the price of insurance coverage provided by the Mortality Tables, studied by the Actuarial Mathematics.

This issue highlights the intersection of economic and population problems using mathematical concepts applicable to Mathematics Education in Economics.

Introducción

La Matemática es un instrumento idóneo imprescindible para la explicación científica y para la modelación del mundo. En este trabajo la utilizamos para realizar un análisis de la muerte, que es el final cierto de todos nuestros afanes, rodeado de incertidumbre.

La Matemática tiene un rol crecientemente significativo en las Ciencias Sociales, de las cuales la Economía es la que posee el grado más alto de matematización, empleando una Matemática más compleja y Estadísticas más sofisticadas. Esto conlleva a un problema epistemológico y pedagógico-didáctico: ¿Qué y cuánta Matemática resulta imprescindible en las teorías económicas? (De Pablo, 2012).

Las siguientes propuestas surgieron de discusiones interdisciplinarias:

- Incrementar la motivación de los docentes de Matemática en la capacitación y el desarrollo de la investigación educativa en Economía.
- Aplicar el conocimiento didáctico ya desarrollado en Matemática e incorporarlo para optimizar el aprendizaje, tanto en Matemática como en Economía.
- Destacar que los mismos métodos matemáticos usados en Economía también son aplicados en la investigación educativa de ambas disciplinas.
- Inducir la motivación de los alumnos por el estudio de la Matemática en la aplicación de resolución de problemas económicos.
- Establecer la metodología cuantitativa para estudiar y explicar los procesos económicos en sistemas de fenómenos colectivos e individuales.
- Explicar y predecir, mediante teorías y modelos matemáticos, los procesos poblacionales, sociales, ecológicos e industriales.
- Exhortar a los profesores de Matemática a incrementar la creatividad en la aplicación de los conceptos matemáticos en los problemas económicos.
- Instar a que los profesores de Economía esclarezcan los instrumentos matemáticos aplicados o lograr un trabajo multidisciplinario, donde matemáticos y economistas interactúen en una suerte de retroalimentación.
- Proponer una revisión de los programas de Matemática para lograr el enfoque y la profundidad requerida en las aplicaciones de las Ciencias Económicas.

Esta integración de conocimientos muestra la necesidad de una profunda reflexión sobre la formación matemática especializada de los profesores de Economía y sobre los resultados de investigaciones en Educación Matemática. Por ello, es de fundamental interés destacar el importantísimo papel de la modelación y la Educación Matemática en la formación del profesor que las emplea, como los modelos conceptuales, gráficos, diagramáticos y matemáticos, que nos permiten integrar el conocimiento.

En este trabajo se utiliza la Matemática para describir, analizar y predecir resultados de procesos poblacionales y aborda de manera didáctica la medición de la incertidumbre involucradas en las operaciones de seguros de vida, estudiadas por la Matemática Actuarial. Concretamente el trabajo versa sobre el contenido de las Tablas de Mortalidad, en las cuales se apoya el asegurador con el objeto de determinar el precio de la cobertura que brinda un seguro sobre una base razonable (Ortega, 1987).

Con esto brindamos una estrategia metodológica que resulta de gran utilidad a los profesores de Matemática en las Ciencias Sociales no sólo en el tema de los seguros de vida, sino también en cualquier otro que combine azar, certeza e incertidumbre.

El concepto de azar está asociado a la idea de desconocimiento y hace referencia a situaciones fortuitas e imprevisibles. El azar se vincula al concepto de incertidumbre, que se refiere a la falta de certeza en el conocimiento de un determinado hecho.

Esta incertidumbre, respecto de un evento, puede ser analizada bajo ciertos resultados contenidos en un *Espacio Muestral*, que se compone de todos los datos posibles en un experimento aleatorio. Nuestro interés consiste en asignar un número a cada evento de un experimento no determinista que mida la posibilidad de su ocurrencia. La Teoría de la Probabilidad nos permite medir esa posibilidad a través de números reales que reúnen ciertas características denominados probabilidades.

Vinculada con los cálculos probabilísticos se encuentra la Matemática Actuarial, que es una matemática aplicada a las operaciones financieras inciertas, en las que algunos de sus elementos se hallan sujetos a una eventualidad, es decir a la ocurrencia de un suceso futuro, azaroso e incierto. Los seguros caen en esta categoría de operaciones puesto que el asegurador abonará al beneficiario una indemnización en caso de siniestro, muerte, invalidez, etc., todos ellos acontecimientos inciertos.

La ocurrencia azarosa e incierta del comportamiento de la muerte y de la sobrevivencia es estudiada en Demografía, campo del conocimiento que permite medir la vida de los individuos a través de la construcción de esquemas teóricos llamados tablas de mortalidad (también conocidos como tablas de vida). Los procesos demográficos determinan la estructura de una población y su evolución y están referidos a los nacimientos, defunciones y migraciones (Palladino, 2010).

Las tablas de vida pueden ser completas o abreviadas y su marco temporal está dado por el tiempo biométrico, que es la edad de los individuos que integran el colectivo teórico.

Es importante destacar la diferencia entre dos acepciones del tiempo:

a) Tiempo "físico": es una fecha determinada de un instante concreto o de un momento.
b) Tiempo "biométrico": es la "medida de vida" de los individuos que integran la población en estudio. Este tiempo viene dado por la edad del individuo.

Lo que se ha llamado tiempo biométrico, la edad, será el elemento fundamental en las tablas de mortalidad, que nos servirá para distinguir los distintos grupos dentro de un colectivo. Esta distinción está completamente expresada en el concepto de variable. Un número dado de individuos puede tener una edad $\boldsymbol{x}$ en cierta fecha; pero esa misma edad $\boldsymbol{x}$ habrá sido alcanzada en un momento anterior por otro número de individuos, y otros la alcanzarán en el futuro.

Tablas de mortalidad

Las tablas de mortalidad definidas como un instrumento para medir las probabilidades de vida y de muerte de una población en función de la edad, constituyen una herramienta para evaluar el grado de posibilidad futura de sobrevivir o de fallecer.

Una tabla de mortalidad o de vida se representa en una tabla de valores numéricos para ciertos valores de la variable independiente ***x = 0, 1,….., n*** años. Es un modelo fundamental para la determinación actuarial de los valores económicos asociados con seguros de vida y planes de pensiones (Cunningham, Herzog, London, 2011). Las tablas de vida son, en esencia, una forma de combinar tasas de mortalidad de una población de diferentes edades en un modelo estadístico, que se utilizan principalmente para medir el nivel de mortalidad de la población involucrada” (Siegel y Swanson, 2004).

En una tabla de mortalidad tenemos un grupo de individuos recién nacidos, a los que se les hace un seguimiento con la finalidad de registrar los decesos que van aconteciendo hasta que el grupo se extingue por completo. Se debe destacar que la única causa de variación en el número de individuos es la muerte, por lo cual la cantidad de personas que integran el colectivo solo decrece. Obviamente un seguimiento de este tipo, es decir a tiempo físico, es materialmente imposible y, de poder realizarse, carecería de utilidad ya que durante el transcurso del tiempo que demandaría el monitoreo, las condiciones de vida pueden variar por avances tecnológicos, servicios de asistencia sanitaria, etc.

Las tablas se pueden clasificar según los intervalos de edades en:

- Completas: las distintas funciones biométricas se elaboran para cada año.
- Abreviadas: las funciones biométricas se calculan por grupos generalmente quinquenales.

Las tablas completas constituyen un método más simple y contienen la información de cada año, desde el nacimiento hasta el último año de edad aplicable. La esperanza de vida es igual a la suma de los supervivientes, más 0,5 de los decesos, para tener en cuenta los fallecidos durante el intervalo.

Las tablas de mortalidad son expresiones matemáticas, obtenidas de las funciones biométricas elementales y analizan el recorrido de un grupo de individuos (hipotético) a través del tiempo biométrico indicando el decrecimiento desde su origen hasta su extinción.

Funciones biométricas elementales

La edad inicial es por lo general cero, pero podría no serlo; por ello se simboliza la edad en la cual se inicia la tabla con α y a la última con ω. También, se dice que esta edad representa el “infinito actuarial” ya que es la edad a la cual ningún individuo sobrevive.

Se consideran las siguientes funciones biométricas:
La *función Sobrevivientes,* que se representa con $\mathrm{l_x}$ mide la cantidad de individuos que alcanza a cumplir exactamente la edad x. La letra l se toma del vocablo inglés *living* que significa viviente.

La única causa de variación de esta función son los decesos a lo largo del tiempo biométrico disminuyendo la cantidad de individuos y $\mathrm{l_x}$ es una función decreciente.

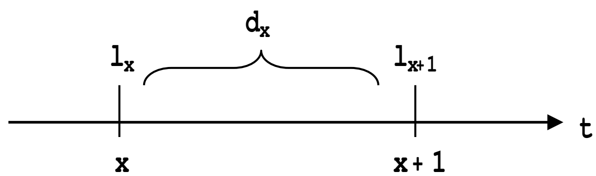
$$l_\alpha > l_{\alpha+1} > \ldots > l_x > \ldots > l_{\omega-1} > l_\omega \quad \text{para} \quad \omega > \omega-1 > \ldots > x > \ldots > \alpha-1 > \alpha$$

La función Decesos mide el número de bajas que va produciendo la muerte. Se simboliza con d_x. La letra d deriva de la palabra inglesa *dying,* que significa moribundo y da el número de individuos que fallecieron después de cumplir la edad x y antes de cumplir la edad $x+1$. En cuanto a su crecimiento se trata de una función con altibajos de acuerdo con la mortalidad en las distintas etapas de la vida.

La función sobreviviente es esencialmente decreciente mientras que la función decesos presenta altibajos, según las diferentes etapas de la vida.

En un diagrama temporal se aprecia la relación entre los sobrevivientes y los decesos:

Se observa que $d_x = l_x - l_{x+1}$ (1)



Se puede mostrar que el valor inicial en la tabla de mortalidad es equivalente a la suma de todas las defunciones ocurridas.

En (1) si se considera la suma en ambos miembros:

$$\sum_{x=0}^{\omega} d_x = \sum_{x=0}^{\omega} (l_x - l_{x+1}) \Rightarrow \sum_{x=0}^{\omega} d_x = l_0 - l_{\omega+1} \Rightarrow \sum_{x=0}^{\omega} d_x = l_0 = l_\alpha$$

Donde $l_{\omega+1} = 0$ ya que ω es el infinito actuarial.

La función promedio de sobrevivientes L_x mide el número de personas que habiendo cumplido la edad x no alcanzaron aún la edad $x+1$. Bajo el supuesto de que los fallecimientos están distribuidos igualmente a lo largo del año, este promedio de sobrevivientes se puede aproximar como el número de individuos que alcanzaron la edad x menos el 50% de los decesos acaecidos durante el transcurso del año biométrico.

$$L_x \approx l_x - 0.5\ d_x$$
$$L_x \approx l_{x+1} + 0.5\ d_x$$
$$L_x + L_x \approx l_x - 0.5\, d_x + l_{x+1} + 0.5\ d_x \Rightarrow 2\, L_x \approx l_x + l_{x+1} \Rightarrow L_x \approx \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$$

Esta expresión da un valor aproximado de L_x, promedio aproximado de sobrevivientes.

La función Tasa central de mortalidad constituye la información básica para la construcción de una tabla de vida, y viene dada por: $m_x = \frac{d_x}{L_x}$

Surge de dividir la cantidad de decesos de personas de edad x pero que aún no cumplieron la edad $x+1$ en el promedio aproximado de sobrevivientes L_x

Si remplazamos d_x y L_x por sus expresiones respectivas se obtiene:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{\frac{l_x + l_{x+1}}{2}} \qquad \text{o} \qquad m_x = \frac{2\, d_x}{l_x + l_{x+1}}$$

■ Cálculo de probabilidades

Para la construcción de las tablas de vida se recurre al cálculo de probabilidades que relaciona los datos aportados por las funciones biométricas (Meyer, 1992).

Probabilidad de vida

Para saber cuántos individuos de un total inicial de l_x llegan a cumplir la edad $x+1$ se considera el espacio muestral $S = \{M, V\}$ al final del período.

M representa los decesos y V los sobrevivientes. Como los eventos M y V son mutuamente excluyentes y complementarios, cumplen que $M \cap V = \phi$ y $M \cup V = S$

Los números cardinales correspondientes a esos eventos $\#S = l_x$, $\#V = l_{x+1}$, $\#M = d_x$

permiten calcular la probabilidad de ocurrencia del evento V: $P(V) = \frac{\#V}{\#S} = \frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x$ que es la probabilidad de que una persona de edad x alcance la edad $x+1$.

Se puede hallar la probabilidad del evento H de que una persona de edad x llegue a cumplir la edad $x+n$, para ello llamamos $V_1, V_2, \ldots, V_n$ a los eventos definidos como: "un individuo de edad x alcanza la edad $x+1$", "un individuo de edad $x+1$ alcanza la edad $x+2$", "un individuo de edad $x+n-1$ alcanza la edad $x+n$", respectivamente.

Para que un individuo de edad x alcance a cumplir la edad $x+n$ debe cumplirse que alcance la edad $x+1$ y teniendo $x+1$ años de edad alcance a cumplir $x+2$ años y así sucesivamente.

$$P(H) = P(V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n) =$$
$$P(H) = P(V_1)\ P(V_2) \dots P(V_n) = p_x\ p_{x+1}\ p_{x+2} \cdots p_{x+n} = {}_n p_x$$
$${}_n p_x = \left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right)\left(\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}\right)\cdots\left(\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}}\right) = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Probabilidad de muerte

Como el evento *M* es el complemento de *V*, la probabilidad de muerte $q_x = 1 - p_x$

Por hipótesis *M* y *V* son sucesos mutuamente excluyentes y complementarios:

$$M \cup V = S \qquad P(M \cup V) = P(S) \qquad P(M) + P(V) = 1$$
$$q_x + p_x = 1 \qquad q_x = 1 - p_x \qquad q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$
$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{\frac{l_x + l_{x+1}}{2}} = 2\frac{(l_x - l_{x+1})/l_x}{(l_x + l_{x+1})/l_x} = 2\frac{1-p_x}{1+p_x} = \frac{2q_x}{1+p_x} = \frac{2q_x}{2-q_x}$$

También se puede obtener la probabilidad de que una persona de edad x no llegue con vida a la edad $x+n$ $\quad {}_{/n}q_x = 1 - {}_n p_x$

Se pueden relacionar ambas probabilidades, si se busca la probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a la edad $x+m$ pero que no viva para cumplir $x+m+n$ años ${}_{m/n}q_x = {}_m p_x \cdot {}_{/n}q_{x+m}$ con m < n

■ La tasa instantánea de mortalidad

La tasa de mortalidad (probabilidad de muerte) q_x calcula $q_x = \dfrac{d_x}{l_x} = \dfrac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$

Sea 1/ t $1/_{t}$ una fracción del año biométrico, entonces se puede definir una tasa de mortalidad sub-periódica $q_{x(\frac{1}{t})}$ $q_{x(\frac{1}{t})}$ con periodo 1/ t $1/_{t}$ $\quad q_{x(\frac{1}{t})} = \dfrac{l_x - l_{x+(1/t)}}{l_x}$

La respectiva tasa anual de mortalidad $q_x^{(t)}$ se obtiene multiplicando esta tasa de mortalidad sub-periódica por *t* $\quad q_x^{(t)} = t\ q_{x(\frac{1}{t})} = t\ \dfrac{l_x - l_{x+(1/t)}}{l_x}$

Si se consideran períodos de tiempo cada vez más pequeños, la variable t t se hace cada vez más grande y al suponer que t t crece indefinidamente, se obtiene una tasa anual llamada tasa instantánea de mortalidad μ_x con $\mu_x = \lim\limits_{t\to\infty} q_x^{(t)}$

Esta tasa es también conocida como fuerza de mortalidad. La hipótesis es que la mortalidad conserva su intensidad en cada infinitésimo de tiempo.

La tasa μ_x se corresponde con la tasa q_x del campo discreto. q_x y μ_x son medidas anuales de mortalidad. q_x lo hace en función de las muertes observadas en un año biométrico, mientras que la tasa instantánea lo hace en cada momento de ese año.

Se puede mostrar que la fuerza de mortalidad es igual a $-\dfrac{\mathrm{d}\ln l_x}{\mathrm{dx}}$

Pues $\mu_x = \lim\limits_{t\to\infty} q_x^{(t)} = \lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{t}\,\dfrac{l_x - l_{x+(1/t)}}{l_x} = \lim\limits_{t\to\infty} -\dfrac{1}{\frac{1}{\mathrm{t}}}\,\dfrac{l_{x+(1/t)} - l_x}{l_x}$

$\dfrac{1}{\mathrm{t}} \to 0$ $\frac{1}{\mathrm{t}} \to$ 0cuando $\mathrm{t} \to \infty$ $\mu_x = \lim\limits_{1/t\to\infty} -\dfrac{1}{l_x}\,\dfrac{l_{x+(1/t)} - l_x}{\frac{1}{t}} = -\dfrac{1}{l_x}\dfrac{\mathrm{d}l_x}{\mathrm{dx}} = -\dfrac{\mathrm{d}\ln l_x}{\mathrm{dx}}$

La tasa instantánea de mortalidad es una tasa anual, calculada bajo la hipótesis de que la muerte conserva la misma intensidad en cada infinitésimo de tiempo. Como puede observarse, es la derivada logarítmica de la función de supervivencia con signo contrario.

Con estos conceptos se construyen las tablas de vida, que despejan el azar y la incertidumbre que involucran los conceptos de sobrevidas y decesos de los individuos integrados al colectivo teórico. A través de dichas tablas se pueden estimar los seguros de vida de las personas.

■ Conclusiones

Para protegerse de las contingencias de muerte, enfermedad e invalidez, los hombres han creado los seguros de vida. El cálculo del monto de las prestaciones y contraprestaciones originadas por estos seguros, exige asignar valores numéricos que se obtienen mediante la Teoría de las Probabilidades y logra despejar la incertidumbre.

En este trabajo mostramos los cálculos probabilísticos que determinan las primas de seguros de vida. En cuyo caso, se utilizan los valores de las probabilidades de vida y de muerte para un cierto conjunto de personas de una determinada región. Dichas probabilidades evalúan la mortalidad para distintas cohortes (generaciones) de individuos.

A partir de las funciones biométricas de supervivencia, mortalidad, etc., se construyen las tablas de mortalidad para establecer el monto de las prestaciones. La tasa instantánea de mortalidad constituye un valor continuo de la tabla y una medida precisa de la mortalidad.

Las tablas de vida o de mortalidad han sido utilizadas por demógrafos, actuarios y otros investigadores no sólo para estimar seguros de vida, sino también para la resolución de diversos problemas, entre ellos, estimación del nivel y tendencia de la mortalidad, estudios de la fecundidad, estructura poblacional, análisis de la fuerza laboral, previsionales, etc.

Los recursos matemáticos útiles en las investigaciones y aplicaciones para Economía y las Ciencias Sociales son los mismos a los que recurre la investigación educativa para facilitar el aprendizaje en diversas disciplinas.
El tratamiento de este tema evidencia cómo confluyen problemas económicos poblacionales y procesos de cambio social. Ellos fueron expuestos con conceptos matemáticos aplicables a la Educación Matemática en Economía.
La construcción de redes de colaboración multidisciplinaria con una comunicación asertiva y la convicción de colaboración en trabajo de equipo facilitan diversificar los métodos de enseñanza–aprendizaje y los de investigación para la solución de múltiples problemas.

■ Referencias bibliográficas

Cunningham, R., Herzog, T. y London, R. (2011). *Models for Quantifying Risk*. USA: Actex Publications.

De Pablo, J. C. (2012). ¿Qué y Cómo Deberíamos Enseñar en las Escuelas de Economía? *Publicación de la Academia Nacional de Ciencias Económicas (Anales de la ANCE, 2012).* Buenos Aires.

Meyer, P. (1992). *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. México: Addison - Wesley Iberoamericana.

Ortega A. (1987). *Tablas de Mortalidad*. San José de Costa Rica. Centro Latinoamericano de Demografía (CELADE).

Palladino, A. (2010). *Introducción a la Demografía*. Resistencia: Universidad Nacional del Nordeste.

Siegel J. S. and Swanson, D. A. (2004). *The Methods and Materials of Demography*. Second Edition. New York: Elsevier Academic Press.

Vicente Merino A., Aparicio G., Hernández J., Caballero A. y Moreno J. (2010). *Elementos de Matemática Actuarial sobre Previsión social y Seguros de Vid*a. Recuperado el 05 de Junio de 2013 de http://www.ucm.es/info/sevipres/P1/02/1_2_1.php