UN ENTORNO GEOMÉTRICO PARA LA RESIGNIFICACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Diana del Carmen Torres Corrales; Gisela Montiel Espinosa; Omar Cuevas Salazar
Instituto Tecnológico de Sonora, (México)
Instituto Politécnico Nacional. (México)
d.torres@live.com.mx, gmontiele@cinvestav.mx, ocuevas@itson.edu.mx

Palabras clave: resignificación, razones trigonométricas, círculo, ingeniería
Key words: resignification, trigonometric ratios, circle, engineering

RESUMEN

La necesidad de organizar un nuevo escenario escolar para abordar lo trigonométrico, que no separara tajantemente el contexto geométrico de las razones del contexto analítico de las funciones, provocó la búsqueda por lograr la significación progresiva de las *razones trigonométricas* en estudiantes de Ingeniería del Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON). En ese sentido, se caracterizaron las propuestas de Moore (2009, 2010 y 2014) y de Vohns (2006), ya que permiten su significación progresiva en el *contexto del círculo,* principalmente porque devuelven a lo trigonométrico su naturaleza geométrica (Montiel, 2013). La perspectiva constructivista de Moore y el diseño de Vohns se articulan con la *epistemología basada en la actividad* que proponen Montiel (2011), Montiel (2013), Montiel y Jácome (en prensa), lo cual permitió el análisis de las dificultades y las construcciones de lo trigonométrico desde un enfoque teórico de corte social.

ABSTRACT

The need to develop a new school scenario for Trigonometry, one in which the geometric context of the *trigonometric ratios* isn't separated from the analytic context of the *trigonometric functions*, has led us to look for a way to achieve the progressive resignification of the *trigonometric ratios* in engineering students from the Sonora Institute of Technology (ITSON, Sonora, Mexico). In order to achieve this resignification, we use the teaching proposals from Moore (2009, 2010 & 2014) & Vohns (2006), because with their work, we can make use of the *unit circle* to return the geometric nature *trigonometric ratios* to define them in the natural context of the Trigonometry (Montiel, 2013). The constructivistic perspective of Moore and the teaching designs of Vohns are in line with the *activity based epistemology* of Montiel (2011 & 2013) and Montiel & Jacome (on press), this allowed us to seize the difficulties and the constructions made in Trigonometry from a social theoretical approach.

Antecedentes

Las dificultades de relacionar la razón trigonométrica, en ejercicios intramatemáticos y extramatemáticos en estudiantes de Ingeniería del Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON) motivaron la presente investigación. Una búsqueda bibliográfica, con el objetivo de identificar el estado de la investigación relacionada, arrojó evidencia de las dificultades que tienen los estudiantes al trabajar con las nociones trigonométricas de la escuela, desde el nivel secundaria hasta el nivel superior, y además se percibe la necesidad de organizar un nuevo escenario escolar para abordar lo trigonométrico, uno que no separe tajantemente el contexto geométrico de las razones, del contexto analítico de las funciones.

En ese sentido, se caracterizaron propuestas de Moore (2009, 2010 y 2014) y de Vohns (2006), ya que permiten la significación progresiva de las *razones en el contexto del círculo,* principalmente porque devuelven a lo trigonométrico su naturaleza geométrica (Montiel, 2013). La perspectiva constructivista de Moore y el diseño de Vohns se articulan con la *epistemología basada en la actividad* que proponen Montiel (2011), Montiel (2013), Montiel y Jácome (en prensa), lo cual permitió el análisis de las dificultades y las construcciones de lo trigonométrico desde un enfoque teórico de corte social.

Es por ello que, se planteó como objetivo "identificar si la resignificación de la razón trigonométrica, en este proceso de construcción geométrica, permite contrarrestar el fenómeno de aritmetización que se presenta en la Trigonometría escolar".

La *aritmetización trigonométrica*, que se ubica en el momento didáctico de nuestro interés, se refiere a la pérdida del proceso geométrico para la construcción de las relaciones trigonométricas, que aún expresadas como razones dejan de tener utilidad para expresar relaciones de proporcionalidad y se convierten en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados de un triángulo (Montiel, 2011).

En este sentido, se considera necesario cambiar sustancialmente la actividad matemática del estudiante, no sólo para evitar que evoque de memoria a las razones trigonométricas, aun sin claridad de por qué son necesarias, sino para provocar intencionalmente la construcción de significados que le den uso y sentido (resignificación), pero sobre todo desarrollen en particular su pensamiento trigonométrico.

Marco teórico

Desde la Socioepistemología la palabra *resignificar* se utiliza para referirse al proceso continuo de darle significado al saber matemático a través de sus usos, esto es, la significación que subyace a la actividad y no necesariamente al objeto matemático (Montiel y Buendía, 2012).

Partiendo del principio de resignificación de la Socioepistemología y fundamentados en la epistemología de prácticas (ver Tabla 1) propuesta por Montiel (2013, 2011; Montiel y Jácome, en prensa) se bosqueja, a manera de hipótesis, las 4 condiciones de Resignificación (RSG) desde una perspectiva de evidencia en la acción (Molina, 2013):

1) Condición existente que pretende ser transformada: el fenómeno de aritmetización de la razón trigonométrica.
2) Cambios que operen en condiciones estratégicas: generar un diseño y una organización didáctica fundamentadas en la epistemología de prácticas de lo trigonométrico.

3) La probabilidad inicial efectiva de una transformación es inversamente proporcional a la consistencia de la condición que desea ser transformada: se analizará la actividad matemática desde el individuo a través de sus prácticas.
4) El proceso de transformación siempre supone un intercambio activo con el contexto: un entorno geométrico para dar coherencia a las nociones matemáticas.

Tabla 1. Principios básicos para la construcción social del conocimiento trigonométrico en un escenario histórico.

	Práctica Social		
	Anticipación	**Predicción**	**Formalización**
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía	Matematización de la Física	Matematización de la Transferencia de Calor
Contexto	Estático-Proporcional	Dinámico-Periódico	Estacionario-Analítico
Lenguaje	Geométrico-Numérico	Curvas-Ecuaciones	Funciones-Límites
Racionalidad	Helenística- Euclidiana	Física-Matemática	Física-Matemática
Herramienta	Razón Trigonométrica	Función Trigonométrica	Serie Trigonométrica
Variables	(longitud) q en ángulos (en grados)	(distancia) x tiempo (radián-real)	(temperatura) t tiempo (real)
Escala de tiempo	Finita	Infinitesimal-Infinito	Infinito

Nota. Fuente: Montiel (2011).

En estos tres momentos de construcción social del conocimiento trigonométrico, Montiel (2011) identifica dos cambios en el paradigma que rige la actividad matemática y que son necesarios para (1) estudiar el movimiento (en el paso de la anticipación a la predicción) y (2) estudiar la transferencia del calor (en el paso de la predicción a la formalización). El presente trabajo fundamentará la intervención didáctica y su análisis en el primer momento de construcción, que se caracteriza por enmarcar la actividad humana relacionada al estudio de fenómenos celestes, no directamente manipulables (lo *macro*), en un contexto donde no se matematizaba el movimiento en sí, sino sólo las posiciones en el tiempo de los cuerpos celestes (lo *estático*).

■ Metodología

La metodología llevada a cabo se fundamenta en los experimentos de diseño de Cobb (2000) (ver Tabla 2). A manera de caracterización, se enmarca en “Experimento de Diseño para la Resignificación de lo Trigonométrico”, donde se diseñó una *secuencia didáctica* que consta de 5 actividades divididas en dos apartados: tres actividades didácticas introductorias y dos actividades didácticas de la razón trigonométrica.

Las *actividades didácticas introductorias*, buscan que el estudiante desarrolle el pensamiento proporcional, y el uso coherente de otras nociones matemáticas que son premisa para introducir a la razón trigonométrica; basadas en situaciones problema y con el empleo de materiales manipulables (regla, compás, transportador y listón).

Las *actividades didácticas de la razón trigonométrica*, pretenden que el estudiante adopte nuevos significados, poniéndolos en uso, dando por tanto su resignificación. Por lo que no se enfatizan en el dominio de las técnicas, sino en el análisis de datos, es decir en la problematización y por tanto no pretende subsanar las deficiencias del sistema, es decir, sustituir lo estudiado en la secundaria y el bachillerato.

Además se ha generado una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA), con base en los resultados reportados en la revisión bibliográfica y las consideraciones teóricas para fundamentar la investigación, la cual propone los siguientes momentos por los que se hará transitar al estudiante para lograr la resignificación de lo trigonométrico:

1. Manejo situacional de la medida angular.
2. Estudio del círculo, sus partes y sus relaciones.
3. Estudio del triángulo en el círculo (aproximaciones y razonamientos de Vohns).
4. Análisis de la proporcionalidad.
5. Matematización de lo trigonométrico.

Resultados

La población bajo estudio fue un grupo de 4 estudiantes de Ingeniería (ver Tabla 2), quienes participaron de forma voluntaria al ser invitados en la asignatura de Fundamentos de Matemáticas (semestre Enero-Mayo 2014, de las 13 horas de lunes a viernes).

Tabla 2. Población bajo estudio de la secuencia didáctica

Nombre	Programa educativo	Edad	Semestre cursado	Actividades adicionales
Alfredo	IIS	19	2	Fútbol soccer
Carlos	IEM	20	0	Básquetbol
David	IC	22	1	Negocio propio
Manuel	IC	19	2	Ninguna

La edad de los estudiantes varía entre los 19 y 22 años, de los cuales *Carlos* cursaba el semestre cero (modalidad que permite explorar la vida universitaria, condicionando al alumno a aprobar un cierto porcentaje de las asignaturas para ser admitido como alumno regular a la universidad), *David* el primer semestre, *Alfredo* y *Manuel* el segundo semestre. Solamente *Manuel* es estudiante de tiempo completo (es decir, no trabaja ni realiza actividades adicionales que le demanden tiempo específico), *Alfredo* y *Carlos* son deportistas de alto rendimiento (entrenan de 4 a 6 horas diarias dependiendo de su rutina y si participan en competencias) y *David* posee un negocio propio de ropa deportiva y tiene la Licenciatura de Negocios Internacionales.

Actividad 1. La porción de pizza correcta

Se logran *prácticas de medición, comparación y geometrización,* ya que los cuatro estudiantes reconocieron que existe una necesidad de medición en el sentido de porción-longitud, por lo cual hicieron uso de la proporción al utilizar la escala de la figura de la pizza y el material proporcionado para medir (ver Figura 1), sin embargo solo dos de ellos (Alfredo y David) utilizaron la unidad de medida (cm) para el radio y la longitud de arco. También reconocieron que el *radio* es un concepto que tienen claro, reconocen que es una longitud que se mide del centro de la pizza a la orilla. El *ángulo* es, para todos los estudiantes, lo que determina la porción de una rebanada de pizza y la *abertura* que tiene ésta (es la esquina, dijo uno de ellos). La *longitud de arco* es la orilla circular, redonda o curva de una porción de pizza (ver Figura 2).

Figura 1. Uso de regla, transportador y cordón para medir radio, ángulo y longitud de arco, respectivamente.

Figura 2. Significados de radio, ángulo y longitud de arco de una porción de pizza.


De acuerdo a la figura anterior, describe brevemente qué significan las siguientes dimensiones de una porción de pizza:

Alfredo
Radio: Es del centro a cualquier parte de la orilla de la pizza
Ángulo: Es la abertura del centro a la orilla de la pizza
Longitud de arco: Es el largo de la orilla de la pizza

Carlos
Radio: [illegible]
Ángulo: La punta de la rebanada
Longitud de arco: orilla de la rebanada

David
Radio: La orilla de cada pedazo de pizza, o desde el centro de la pizza hacia la orilla.
Ángulo: La abertura de cada pedazo.
Longitud de arco: La medida de la curvatura de cada pedazo.

Manuel
Radio: De la orilla a el centro
Ángulo: La abertura
Longitud de arco: la orilla de la rebanada.

Actividad 2. La medición del ángulo

Se logran *prácticas de experimentación, medición y comparación*, relacionando la medición de ángulos (en grados y radianes), a través de sus elementos (ángulo, radio, diámetro, perímetro, π, radián), y las relaciones entre ellos; además, se efectuaron cálculos matemáticos para sus equivalencias. Esto provocó que los estudiantes experimentaran la medición del radián a través de la manipulación de materiales de medición (ver Figura 3) y reconocieran el concepto de π y sus equivalencias (ver Figura 4).

Figura 3. Manipulando elementos de una circunferencia.

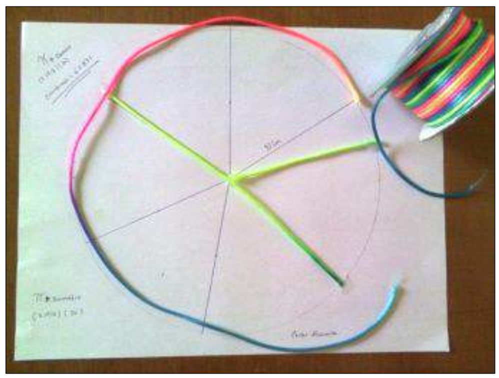


Figura 4. Equivalencia de un ángulo en grados y radianes.

Actividad 3. La longitud de arco

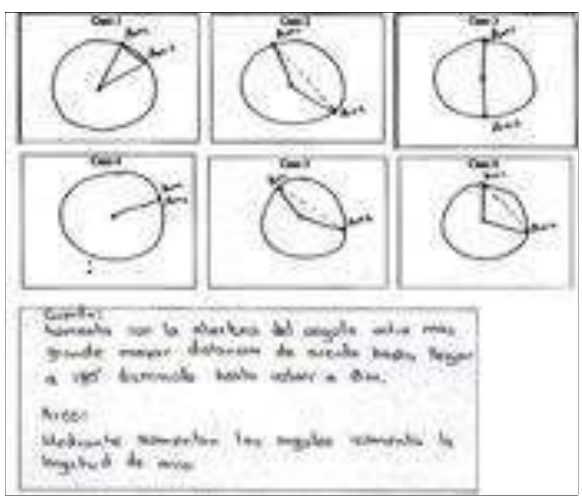
Se logran *prácticas de medición*, relacionando los elementos de la circunferencia y generando una representación física de lo solicitado. Realizando despejes se logra un modelo matemático para sintetizar los elementos (radio y ángulo) que intervinieron en su medición. Lo cual provocó que los estudiantes reconocieran que no es sencillo mediar la longitud de arco en ocasiones, y necesitan una fórmula para calcularla y obtener la respuesta precisa (ver Figura 5).

Figura 5. Estableciendo el modelo para calcular la longitud de arco.

Actividad 4. La ciclopista

Se lograron *prácticas de manipulación* de la situación para inferir en soluciones al problema y de *geometrización inicial*, a través del uso de las configuraciones del triángulo en el círculo: cuando el ángulo es de 0°, 90°, <90°, 180°, 270° y 360°, aún con la dificultad de clasificar los triángulos, y también *prácticas de anticipación*, al generar aproximaciones y comparaciones de la cuerda y el arco cuando varía el ángulo central (ver Figura 6).

Figura 6. Configuraciones individuales de las posiciones entre ciclistas (extracto).



■ Actividad 5. Matematizando el problema de los ciclistas

Se generan las *prácticas de medición, comparación, geometrización, aproximación y anticipación*, al matematizar la situación problema de la ciclopista bajo el contexto proporcional del triángulo en el círculo, haciendo uso de las razones trigonométricas.

Se da la vinculación de la actividad con los contenidos matemáticos que se aplican en otras asignaturas, evidencia de ellos es lo que algunos estudiantes mencionaron verbalmente:

- eso se parece a las fórmulas del seno, coseno y tangente, que usamos en Mecánica General, Dibujo, Física, Cálculo, para determinar distancias-;
- entonces el seno, coseno y tangente no son fórmulas nada más-; -las razones trigonométricas siempre se repiten cuando el ángulo es el mismo, aunque las medidas sean más grandes o chicas-;
- la hipotenusa del triángulo rectángulo es lo mismo que el radio del círculo-.

■ Conclusiones

Con la realización de cada actividad didáctica, los estudiantes evolucionaron en lenguaje y uso de herramientas, utilizaron su conocimiento previo y éste fue resignificado, en tanto fue dotado de nuevas experiencias en contextos extramatemáticos, al estudiarse con materiales didácticos manipulables, al reconocer conceptos matemáticos y reflexionar sobre su origen y uso.

De manera particular los estudiantes estaban resignificando cuando no identificaban a la herramienta matemática para responder a una pregunta y no aplicaban el conocimiento en juego, sino que continuaban con la actividad que le da un nuevo contexto de significación, en distintas ocasiones.

Concretamente se identificó la resignificación de lo trigonométrico cuando: (1) en diferentes momentos los estudiantes evocaron lo trigonométrico -se resuelve con el triángulo rectángulo, con el seno, coseno o tangente, con el ángulo y la cuerda-, pero no plantearon una resolución matemática; (2) se continuó el trabajo de triángulos en el círculo, para que a través de aproximaciones se identificara empíricamente que sin importar las medidas del triángulo y el círculo, las razones trigonométricas siempre guardan una relación proporcional (al referirse al mismo ángulo) y que es el ángulo central lo que determina la distancia entre dos puntos de referencia (cuerda), así como que el valor de las cuerdas para ciertos ángulos es el mismo.

■ Referencias bibliográficas

Cobb, P. (2000). The importance of a Situated View of Learning to the Design of Research and Instruction. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* 45-82.

Molina, N. (2013). Discusiones acerca de la resignificación y conceptos asociados. *Patrimonio: Economía Cultural y Educación para la Paz 3*, 39-63.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* 55-82. México: Lectorum.

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico*. México: Secretaría de Educación Pública.

Montiel, G. y Jácome, G. (en prensa). Significado trigonométrico en el profesor. Aceptado para su publicación en *Boletim de Educação Matemática (Bolema).*

Moore, K. (2009). An investigation into precalculus students' conceptions of angle measure. *Paper presented at the Twelfth Annual Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education Conference, Raleigh.* USA: North Carolina State University.

Moore, K. (2010). The role of the radius in students constructing trigonometric understandings. In P. Brosnan, D. B. Erchick y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 815-822. Columbus, OH: The Ohio State University.

Moore, K. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education 45(1),* 102-138.

Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry–an empirical approach. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38(6),* 498-504.