

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL CONTEXTO GEOMÉTRICO DEL CÍRCULO

Olivia Alexandra Scholz Marbán, Gisela Montiel Espinosa

Instituto de Educación Media Superior. Cinvestav-IPN. (México)

olivia.scholz@iems.edu.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Palabras clave: trigonometría, geometría, resignificación, experimentos de diseño

Key words: trigonometry, geometry, resignification, design experiments

RESUMEN

Reportamos una *investigación basada en el diseño* de una secuencia fundamentada teóricamente en elementos de la construcción social del conocimiento trigonométrico, enmarcados en la Socioepistemología, y en las ideas básicas inherentes, identificadas en una experiencia de resolución de problemas. El diseño provoca procesos de construcción geométrica en el contexto del círculo para la resignificación de lo trigonométrico. Haciendo uso de los *experimentos de diseño* se tomaron en cuenta consideraciones sociales e individuales en el análisis de los datos, a partir de los cuales se evidencia un avance en el manejo del lenguaje geométrico por parte de los estudiantes, de una resignificación de la razón trigonométrica y de la vinculación de lo trigonométrico con lo geométrico.

ABSTRACT

We report an investigation based on design of a sequence theoretically grounded in elements of the social construction of knowledge trigonometric, framed in Socioepistemology, and the basic ideas inherent in the trigonometry learning, identified in a problem-solving experience. The design causes geometric construction processes in the context of the circle to the resignification of trigonometry. Making use of design experiments took social and individual considerations in the analysis of the data, from which is evident an advance in the skills of geometric language by students, a resignification of the trigonometric ratio and linking it the trigonometric with the geometric.

■ Introducción

El estudio de la Trigonometría en la escuela presenta dificultades de aprendizaje como cualquier otro tema matemático escolar. En el nivel medio superior se inicia retomando el estudio de las razones trigonométricas, generalmente introducidas en el nivel básico-secundaria (en México), y se continúa hacia el estudio de las ecuaciones, las identidades y, finalmente, las funciones trigonométricas.

En esta tradición de enseñanza, como reporta y evidencia Montiel (2011, 2013; Montiel y Jácome, 2014), emerge el fenómeno de la *aritmización trigonométrica*, que se caracteriza por centrar la actividad trigonométrica en el procedimiento de operar números para encontrar un valor faltante en el triángulo rectángulo, dejándose de lado el estudio de lo trigonométrico como la naturaleza de la relación entre el ángulo y los lados del triángulo, en el contexto de las construcciones geométricas. De ahí que, como ya lo han reportado De Kee, Mura y Dionne (1996), se privilegia el significado de la razón trigonométrica como la división de longitudes en un triángulo rectángulo.

Considerando las dificultades reportadas y los resultados de innovación e investigación sobre el tema, se diseñó una secuencia didáctica con la cual poder estudiar el proceso de *significación progresiva* de los estudiantes en el desarrollo de actividades de construcción geométrica, en el contexto del círculo. Es decir, se provoca intencionalmente que la Trigonometría sea el estudio de los triángulos, en un sentido geométrico, y la operatividad (división) entre las longitudes del triángulo se introduce como herramienta para cuantificar la relación entre el ángulo central y la distancia entre dos puntos sobre la circunferencia, en un momento de institucionalización.

■ Fundamentación

La investigación se fundamenta en los elementos teóricos de la *construcción social de conocimiento trigonométrico* que propone Montiel (2011), particularmente en el momento al que denomina “de *anticipación*”, y las *ideas básicas inherentes* en el aprendizaje de la trigonometría documentadas por Vohns (2006).

A diferencia de la epistemología de prácticas que Montiel (2011) propone en el escenario histórico, la articulación de actividades en la secuencia diseñada pretende la matematización de una situación de cálculo de distancias (problema que se retoma de Vohns (2006) y se adapta para introducir a la razón trigonométrica y no a la ley de los cosenos). Al plantearse de inicio el problema real, sólo en forma verbal, se retoma el paso de *lo macro a lo micro*, donde los primeros esquemas o dibujos que elabora el estudiante evolucionarán hacia modelos geométricos.

En ese sentido cada modelo representará una configuración de las posiciones posibles involucradas en el problema inicial, lo que constituye la actividad matemática situada en lo que Montiel (2011) denomina *contexto Estático-Proporcional*. Se espera entonces que las herramientas que se construyan o se introduzcan en la resolución sean del tipo *Geométrico-Numérico*, y se resignifique lo trigonométrico como lo que caracteriza a la relación entre ángulo y cateto.

Por otra parte, Vohns (2006) identifica distintos métodos de solución que utilizan los estudiantes y los denomina como *aproximaciones e ideas básicas inherentes*. Estos son: el *punto de vista geométrico*, la

aproximación empírica-numérica, el *punto de vista aritmético/algebraico* y la *aproximación trigonométrica*. Articulando con el planteamiento de Montiel (2011) éstas pueden ser vistas como los razonamientos (empírico, aritmético, algebraico y geométrico) que componen al pensamiento trigonométrico, y que explicarían la relación y relevancia de la Trigonometría en otras ramas de la matemática y otras áreas del conocimiento, no sólo al nivel de conceptos matemáticos.

■ Metodología

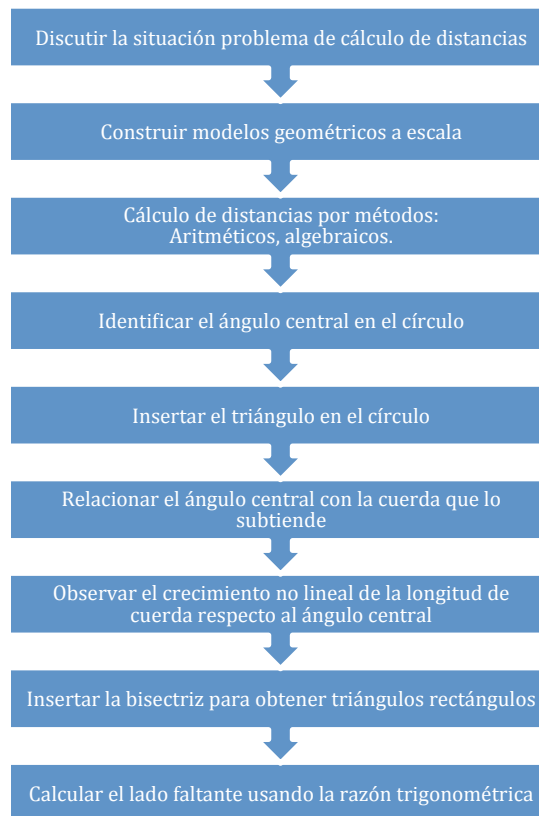
El trabajo se basa en la metodología de experimentos de diseño (ED), que tienen tanto un enfoque pragmático, que retoma de la Ingeniería, como una orientación teórica. Los ED se centran en un tema particular, desarrollando teorías locales mediante el estudio sistemático de las formas de aprendizaje y los medios que se relacionan con éstas (Cobb, Confrey, Lehrer, y Schauble, 2003). Se utilizan tareas instruccionales en un contexto definido y sirven de respaldo para estudiar las formas de aprendizaje, es decir, se sujeta a pruebas, revisiones y rediseños.

Cobb et al. (2003) se refieren a los ED como los que “conducen al desarrollo de teorías, y no sólo a lo que empíricamente se dice que funciona. Estas teorías son relativamente humildes ya que van destinadas a procesos de aprendizaje de dominios específicos” (p. 9). Elegimos esta metodología porque trabajaremos en un tema muy específico de la enseñanza del nivel bachillerato que es lo trigonométrico y aunque tal vez el trabajo no alcance para desarrollar una teoría, sí puede robustecer explicaciones teóricas o ser la base para desarrollarla, si otros profesores aplican, documentan y analizan la misma secuencia en otros grupos.

A partir de la puesta en escena de la secuencia didáctica se obtuvieron los datos sobre el proceso de construcción de significados de la razón trigonométrica, y estos se registraron en video y en las hojas de trabajo que los estudiantes entregaron conforme resolvían las tareas de cada actividad.

El diseño puede consultarse en (Scholz, 2014). Por cuestiones de extensión, del presente documento, presentamos la trayectoria hipotética de aprendizaje (Figura 1), configurada a partir de la fundamentación teórica y los resultados de investigaciones antecedentes, que guió el diseño de la secuencia de actividades.

A grandes rasgos, la experiencia se inicia planteando una situación problema de cálculo de distancias, que mediante construcciones geométricas en el contexto del círculo, además del empleo de la aritmética y el álgebra, condujera a la introducción de la razón trigonométrica para cuantificar la relación entre ángulo central y cuerda.

Figura 1. Trayectoria hipotética de aprendizaje.

■ Experiencia de Intervención

Las condiciones iniciales de la situación problema se modificaron varias veces, con base en la evidencia de varias puestas en escena, tal como propone Cobb (2000) para refinar el diseño. El grupo en el que se aplicó la secuencia, cuyo análisis se reporta aquí, fue el grupo 201 de la asignatura de Matemáticas II turno matutino, del IEMS -DF plantel Carmen Serdán. En el grupo estaban inscritos 27 estudiantes, pero a la secuencia sólo asistieron 21, de los cuales 12 eran mujeres y 9 eran hombres. Cinco de ellos ya habían realizado la secuencia de actividades el semestre anterior, por lo que esta vez fungieron como responsables de equipo, su función era orientar y apoyar a los integrantes de un equipo a lo largo del desarrollo de las actividades.

Fueron necesarias 7 sesiones de clase para llevar a cabo la experiencia didáctica, de una hora y media cada una; 4 de ellas se desarrollaron en un salón tradicional y las 3 restantes en el aula digital (con una computadora por estudiante).

Al planear el experimento de diseño se contemplaron actividades en equipo y actividades individuales, aunque sabemos que en nuestras aulas la actividad individual muy rara vez se logra como tal, porque los estudiantes tienden a trabajar en grupo (respondiendo en voz alta, por ejemplo), consultando sus

resultados con sus compañeros, intercambiando puntos de vista y apoyándose en las propuestas de sus compañeros, incluso cuando el docente realiza una pregunta dirigida a un alumno en específico, suele contestar otro compañero o varios de ellos. Dada esta situación para el análisis de datos desde la perspectiva individual se tomarán los registros de las actividades, de cada estudiante, en sus hojas de trabajo. Esto no quiere decir que no se cumpla la parte de la perspectiva individual que menciona Cobb (2000), porque los estudiantes sí reorganizan sus creencias matemáticas y desarrollan su razonamiento matemático, sino que asumimos que al plantearlo en sus hojas de trabajo están aceptando lo discutido en el grupo.

La organización de los registros, para convertirlos en datos, la realizamos tomando como primera base el marco interpretativo que plantea Cobb (2000). Con una adaptación de este marco y nuestra fundamentación teórica se analizaron los datos por actividad de la secuencia.

Retomando el marco interpretativo adaptado tenemos:

Tabla 1. Marco interpretativo adaptado para la organización de registros.

Perspectiva Grupal	Perspectiva Individual
Normas sociomatemáticas (NSm): <i>qué cuenta como actividad matemática, como explicación aceptable, como argumento o solución a la actividad</i>	Actividad, creencias y valores matemáticos
Prácticas matemáticas en el aula (PMS): <i>Formas de hacer matemáticas y usar las herramientas matemáticas</i>	Usos, significados y razonamientos

■ Resultados

Basándonos en los análisis realizados de las actividades que conforman la secuencia de actividades propuesta, se reconoce que los estudiantes logran, a partir de trabajar en el contexto geométrico del círculo, resignificar lo trigonométrico y la noción escolar de razón trigonométrica, al no presentarla sólo como una división de longitudes del triángulo rectángulo sino como una herramienta para cuantificar la relación que guarda la longitud de cuerda con el ángulo central que la subtiende, teniendo como datos la medida del ángulo y del radio del círculo.

Se evidenció la resignificación de lo trigonométrico cuando los estudiantes no identifican que pueden usar la razón trigonométrica para resolver el problema planteado en ninguna de sus etapas, ni al inicio con el problema, ni al llegar a la etapa final cuando se introduce la bisectriz para obtener los triángulos rectángulos. Por ello, caracterizaremos los resultados de la experiencia como un proceso de significación progresiva.

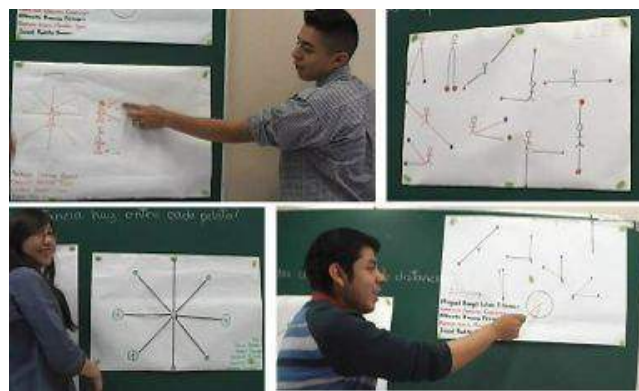
Los estudiantes transitan de la representación del problema usando las medidas reales (macro) a la construcción de un modelo situacional (micro), que si bien en un principio no es un modelo a escala,

inmediatamente se dan cuenta de la importancia de realizarlos a escala. Esto se observa en las Figuras 2 y 3. Estos modelos a escala, de naturaleza estática, son necesarios para calcular la distancia entre dos objetos si no se cuenta con un procedimiento matemático para la situación específica (por ejemplo como el caso del teorema de Pitágoras cuando la configuración de posiciones es un triángulo rectángulo). Para usar la medición en lugar de una operación, requieren tener el modelo que guarde relación proporcional con la situación real del problema.

Figura 2. Los estudiantes representan la situación problema.



Figura 3. Los estudiantes representan la situación problema en un modelo situacional.



Al introducir el círculo, el ángulo central y la cuerda que subtiende al ángulo central en el modelo geométrico a escala, mediante la herramienta computacional, los estudiantes asocian la distancia que necesitan calcular con el ángulo central y observan la relación que existe entre ellos. Parte fundamental de analizar esta relación consistió en destacar que el *crecimiento constante del ángulo no produce un crecimiento constante en la longitud de la cuerda*, además que para ángulos mayores a 180° la longitud

de la cuerda se repite, lo que a futuro puede robustecer el significado de la propiedad periódica de las funciones trigonométricas.

Las actividades logran que el estudiante vincule lo trigonométrico con lo geométrico al ponerlo en situación de construcción, a lo largo del desarrollo de la solución de la situación problema, la razón trigonométrica surge de la necesidad de calcular la distancia de la cuerda que subtiende al ángulo central del círculo dado que la relación entre ellos no es proporcional, pero la relación entre la longitud de la cuerda y el radio del círculo sí lo son.

La evidencia y el análisis muestran que se puede establecer una secuencia de actividades para que los estudiantes logren vincular lo trigonométrico con lo geométrico favoreciendo tanto el desarrollo de su lenguaje geométrico como la comprensión de lo trigonométrico y promover que la razón trigonométrica no es sólo la división de las longitudes de un triángulo, dotando de sentido al estudio de la Trigonometría al devolverle la parte de la construcción geométrica, lo que se muestra en las Figuras 4 y 5.

Figura 4. Los estudiantes identifican distintos métodos de solución.

4. ¿Puedes calcular la distancia entre las pelotas para cualquier ángulo dentro de la circunferencia?

Si. Explica cómo

Viendo que tipo de triángulo se origina tengo.

4. ¿Puedes calcular la distancia entre las pelotas para cualquier ángulo dentro de la circunferencia?

Si. Explica cómo

formando un triángulo rectángulo y después usando razones trigonométricas

4. ¿Puedes calcular la distancia entre las pelotas para cualquier ángulo dentro de la circunferencia?

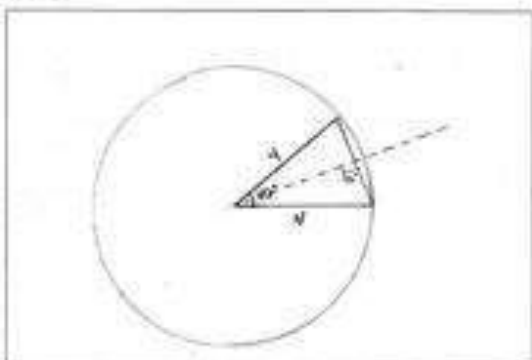
Si. Explica cómo

Si, porque hay operaciones que se pueden hacer ya que si el ángulo es de 90° se puede utilizar el problema de pitágoras y en el resto. Razones Trigonométricas.

Figura 5. Los estudiantes usan razón trigonométrica para calcular la medida de la cuerda.

3. Realiza las operaciones necesarias para obtener la distancia para cada uno de los dos modelos propuestos. Utiliza el compás, el transportador y la regla para construir el modelo mostrado en el plano.

Modelo 1



Realiza las operaciones en este espacio

$$\text{Sen } 20^\circ = \frac{C.O.}{4}$$

$$(3.65)2 = 7.3$$

$$(3.65)4 = C.O.$$

$$3.65 = C.O.$$

Con esta investigación, además de los resultados relativos a la resignificación de lo trigonométrico, damos evidencia de la posibilidad de romper con la tradición escolar de iniciar el estudio de lo trigonométrico desde el contexto del triángulo rectángulo y en su lugar comenzar con una situación problema de cálculo de distancias que se modela en el proceso de diversas construcciones geométricas, con lo que podríamos evidenciar que es posible un rediseño del discurso trigonométrico escolar. Esta ruptura no la proponemos en un sentido de oposición, sino en respuesta a los fenómenos didácticos reportados como consecuencia de la tradición escolar.

Si bien la propuesta del diseño está pensada para resignificar lo trigonométrico en el bachillerato es cierto que puede apoyar el aprendizaje de los temas geométricos y los conocimientos previos requeridos para abordar el tema de la razón trigonométrica.

Además se puede extender para continuar con el estudio de la Trigonometría de los temas de bachillerato que son las funciones trigonométricas, aprovechando el hecho de que los estudiantes ya están trabajando en el contexto del círculo, lo que suponemos hará más natural la transición al estudio de las funciones trigonométricas. Esto podría ser una nueva pregunta de investigación ¿favorece el aprendizaje de las funciones trigonométricas el hecho de trabajar lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo?

■ Referencias bibliográficas

- Cobb, P. (2000). The importance of situated view of Learning to the Design of Research and Instruction. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp 45-82). Westport CT: Ablex.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher* 32(1), 9-13.
- De Kee, S., Mura, R. y Dionne, J. (1996) La compréhension des notions de sinus et cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics* 16(2), 19-22.
- Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática Bolema* 28(50), 1193-1216.
- Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Montiel, G. (2013). *Desarrollo del Pensamiento Trigonométrico*. México: Secretaría de Educación Pública.
- Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry—an empirical approach. *ZDM Mathematics Education*, 38(6), 498-504.