

MODELACIÓN Y LA EMERGENCIA DE LA INTEGRAL

Mayra Rosalia Tocto Erazo, María Esther Magali Méndez Guevara

Universidad Autónoma de Guerrero. (México)

mayra.tocto@gmail.com, mguevara83@gmail.com

Palabras clave: integral definida, modelación, socioepistemología

Key words: definite integral, modeling, socioepistemology

RESUMEN

La presente investigación, que se encuentra en proceso, trata sobre la integral definida. Su objetivo principal es brindar un marco de referencia para aportar al rediseño del discurso matemático escolar desde una categoría de modelación. El estudio se formula bajo la Teoría Socioepistemológica, y pretende provocar la emergencia de la integral definida en la educación superior.

ABSTRACT

This report of research in process is about the definite integral. Its main objective is to provide a framework to contribute to the redesign of the school mathematical discourse from a category of modeling. The study is formulated under the Socioepistemological Theory, allowing the emergence of the definite integral in higher education.

■ Introducción

El discurso matemático escolar ha generado un fenómeno denominado *exclusión*, éste priva a los actores del sistema didáctico de la construcción social del conocimiento matemático, Soto (2010) estudio dicho fenómeno y puso en evidencia componentes que lo producen: la concepción de la matemática como un conocimiento acabado y continuo, carácter utilitario y no funcional del conocimiento, y la falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar. Esto no ha permitido llevar la matemática escolar a otros escenarios, y esto es, a nuestro entender, lo que Cordero (en prensa) denomina la pérdida del eslabón entre la matemática y lo cotidiano.

Por lo anterior, nuestra investigación busca elementos que permitan incluir a los actores del sistema didáctico en la construcción y desarrollo de conocimientos matemáticos, esto mediante la determinación de marcos de referencia para aportaren el rediseño del discurso matemático escolar.

En particular, nos preocupamos por el estudio de la integral definida, pues coincidimos con Alanís y Soto (2011) de que su enseñanza está caracterizada por un énfasis en una algoritmia desprovista de significados y una insistencia en la enseñanza formalista a sabiendas de las dificultades que trae consigo.

En nuestro énfasis por aportar un marco de referencia que permita resignificar la integral definida, y ligando los usos del conocimiento matemático a otras realidades, creemos que la modelación nos proveerá de esos elementos, pues a pesar de tener diferentes acepciones, se presume que la modelación está ligada a la realidad (Cordero, en prensa).

Sin embargo, la modelación a la que hacemos referencia no es la que realizan los matemáticos aplicados. Es una modelación para la matemática escolar, pues ambas tratan con comunidades diferentes; pero en común buscan hacer de la modelación una construcción en sí misma de conocimientos.

Para ubicar nuestra investigación, mostraremos un panorama de cómo está vista la modelación, además de investigaciones realizadas en torno a la integral. Esto nos permitirá plantear el bosquejo y avance mismo de nuestra investigación.

■ Acercamiento a la modelación e integral

Diferentes acepciones de modelación

La modelación, sin apellidos, se reconoce desde las discusiones filosóficas como “algo” inherente al desarrollo de la ciencia misma (Ferreirós y Ordoñez, 2002), sin embargo al paso del tiempo y con las especificidades de las áreas científicas, la modelación ha adquirido un apellido, Modelación Matemática y esta visión ha predominado en nuestra disciplina, la matemática educativa.

Estudios como los reportados por Biembengut y Hein (2004), toman la modelación matemática como un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático de algún fenómeno o situación problema. Así mismo defienden a la modelación matemática como un método de enseñanza y de investigación en Educación Matemática. Mientras que Blomhøj (2004), lo considera que el proceso de modelización está detrás de todo modelo matemático; esto significa que alguien de manera implícita o

explícita ha recorrido un proceso de establecer una relación entre alguna idea matemática y una situación real y de ahí que este sea determinante en la conceptualización de objetos matemáticos.

Es decir, podemos tener estudios que muestran que si se desarrolla o aplica el proceso de la modelación matemática, los problemas con respecto a la didáctica de la matemática o los aspectos cognitivos en tanto conceptos podrían mejorar considerablemente. Sin embargo, no se han cuestionado sobre cómo construir o incluir a la modelación como construcción desde los actores del sistema educativo mismo.

Una concepción diferente de modelación es la desarrollada en Cordero (2006, 2011), al concebir a la modelación como algo más robusto que una representación de la realidad o una aplicación de las matemáticas. Para Cordero, la modelación es en sí una construcción del conocimiento, una actividad que trasciende y se resignifica, que va a transformar al objeto en cuestión. Desde esta línea Méndez (2013) formuló una categoría para la modelación escolar basada en el *desarrollo de redes de usos del conocimiento matemático*, a saber: los usos de las tablas de datos, los usos de las gráficas y los usos de las expresiones analíticas. Esta categoría mostro su funcionamiento en diseños de situaciones específicas (variación, transformación y aproximación) que provocaron la caracterización de tipos de variación por una comunidad de estudiantes de educación media superior.

Así esta investigación toma la categoría de modelación escolar y robustece sus elementos, para elaborar un marco de referencia que resignifiquen los usos de la integral definida.

Investigaciones sobre la integral

Esta sección muestra estudios que se preocupan por caracterizar la enseñanza y aprendizaje de la integral, y por otro lado, investigaciones que plantean como salvar aquellas deficiencias.

Llorens y Santoja (1997), consideramos importante tener presente que el discurso matemático escolar provoca que el concepto de la integral: generalmente sea identificado como la "primitiva", se suele identificar con la regla de Barrow, y no se logra integrar el concepto de área con el de integral. Un ejemplo de ésta última caracterización, es que la interpretación de la integral como área se use sólo cuando se pida expresamente en ejercicios "Calcular el área encerrada por la gráfica de...", pero casi nunca de manera espontánea; pero también sucede en sentido contrario.

En Alanís y Soto (2011) se realizó una caracterización de la enseñanza del cálculo integral como:

- Énfasis en una algoritmia desprovista de significados.
- Conceptualiza la integral basada únicamente en la noción de área.
- Priva de afinidad con otras ciencias de las cuales el cálculo es subsidiario.
- Emplean los diferenciales por sus bondades didácticas.
- Emplea la tecnología como recurso para salvar esas dificultades.

Reconocen que tal caracterización resulta incompleta, y esto evidencia una falta de medios que propicien construir el proceso mismo de integración y con esto se logre su apropiación o bien, darle significados.

Por otro lado, Cordero (2005) discute la noción de acumulación, como medio para resignificar la integral. Esta investigación, sugiere situaciones de enseñanza que enfoquen más la atención en situaciones específicas de variación continua y cambio, y no directamente en los conceptos de función derivada o suma de Riemann. Además se menciona tres nociones importantes: área, medida y movimiento; como elementos relevantes que ante una situación geométrica, contiene una resignificación de la integral. Estos son elementos que nos permitirán ir robusteciendo la categoría de modelación escolar para proveer del marco de referencia que buscamos.

Cabañas (2011), planteó la noción de conservación de área como opción para dar una resignificación de la integral definida mediante un desarrollo de usos, contextos y procedimientos del área. Los *usos del área* que emergieron de las explicaciones y justificaciones de los estudiantes al actuar sobre las *transformaciones geométricas* fueron: la medición, comparación, conservación y representación del área; el contexto, fueron los polígonos convexos y no convexos; y los procedimientos se sustentaron en: el uso de fórmulas, relaciones matemáticas generales como las relaciones de paralelismo y de congruencia, la descomposición y recomposición de polígonos, los movimientos, y construcciones que simulaban el uso de regla y compás. Los *usos del área* que pusieron en juego en las *transformaciones analíticas* por medio de sus argumentos, fueron: las medición, comparación, estimación y representación del área; el contexto, las funciones polinómicas continuas y positivas, un intervalo cerrado y la partición del intervalo; y los procedimientos se sustentaron en: métodos de aproximación por exceso y por defecto, sumas de Riemann, y métodos y técnicas de integración principalmente. Esta nos provee de otro escenario del cuál podríamos echar mano para nuestro diseño.

Por otro lado, Buendía (2012) reconoce que es factible hacer una discusión relacionando los usos de las gráficas velocidad vs. tiempo como base para resignificar la integral.

De la revisión bibliográfica realizada hasta el momento, tomamos la postura de modelación como algo más que un método de enseñanza o aplicación de conocimientos matemáticos, sino como una construcción de conocimiento matemático en sí mismo. De manera que retomando la categoría de Méndez, nos preguntamos: ¿Cómo la modelación escolar permite la emergencia de la integral definida? Buscamos generar un marco de referencia que permita aportar en el *rediseño del discurso matemático escolar* en torno a la integral definida al modificar o añadir elementos de manera que propicie la emergencia de la integral. Los autores antes citados nos dan una luz sobre cómo potenciar el uso de gráficas para la resignificación de la integral, de manera que desde ahí seguiremos avanzando.

■ Elementos teóricos

La Teoría Socioepistemológica (TSE) busca intervenir en el sistema didáctico desde una perspectiva múltiple, que además del estudio de la epistemología del conocimiento, agregar la dimensión sociocultural, los procesos cognitivos y los mecanismos de institucionalización vía su enseñanza (Cantoral, 2013). La problemática fundamental es el discurso matemático escolar conocimiento y, la TSE, plantea su rediseño basado en la Construcción Social del Conocimiento.

Las prácticas sociales juegan un papel importante bajo esta perspectiva, pues no sólo es caracterizar lo que hace el ser humano, sino las causas del porqué lo hace, describir las circunstancias de cómo y

cuándo lo hace, en dónde y por qué lo hace y como se auto concibe haciéndolo. Así, se parte de la premisa de que la modelación es una práctica social generadora de conocimientos y que articula prácticas con herramientas matemáticas propias de una comunidad (Méndez, 2013).

De manera que esta investigación aportará elementos que robustezcan a la TSE con un marco específico para la integral definida, tomando sus avances y reflexiones teóricas.

■ Una categoría de modelación

La unidad mínima de la teoría que tomaremos deviene de lo explicitado por Méndez (2013), que nos llevó a entender tres categorías que preceden:

- Comportamiento tendencial de las funciones (Cordero, 1998)
- Modelación - Graficación (Suárez, 2008)
- Numerización de los Fenómenos (Arrieta, 2003)

De las dos primeras categorías, se retoma la importancia del potente uso de las gráficas en la construcción de conocimiento y como esta puede caracterizar comportamiento de variación y cambio; y de la última categoría, se retoma la importancia de la toma de datos experimentales, para el análisis local de variaciones y determinaciones de condiciones iniciales. De este modo, se formuló esta categoría de modelación escolar y tiene como elementos: la experimentación, variación local y global, y ajustes y tendencias (Figura 1).

Los elementos del eje de la categoría, son enlazados por prácticas como interpretar, analizar, especular, graficar, calcular, organizar, postular, adaptar, consensuar, entre otros. Esta categoría provoca el uso de tablas de datos, uso de gráficas y de expresiones analíticas y su desarrollo en red. Los usos serán los argumentos que emplean los actores para organizar comportamiento de fenómenos, mediante la comparación de dos estados de este en el tiempo, los cambios de condiciones en un experimento y sus implicaciones en las variaciones de su gráfica hasta llegar al estudio de operaciones de corte lógico-formal.

Fig. 1. El eje de la categoría de modelación (Méndez, 2013, p. 61)



Esta categoría se puso en juego en diseños de situaciones de transformación, variación y aproximación (Tabla 1).

Tabla 1. Esquema general de la categoría en las situaciones (Méndez, 2013, p. 63).

Desarrollo de la red de usos de conocimientos matemáticos	Situaciones de aproximación, variación y transformación
Resignificación	De los usos de gráficas, tablas numéricas y expresiones analíticas para caracterizar tipos de comportamiento: lo lineal, lo cuadrático y lo exponencial.
Procedimientos	Identificación de patrones de construcción, condiciones iniciales, variación global y local que caracterizan tipos de variación. Estudio del cambio de un estado final con respecto a su estado inicial de una variación. Caracterización de los efectos al cambiar las condiciones iniciales de la experimentación (variación de parámetros) en las herramientas de predicción.
La experiencia	La gráfica como un argumento de construcción y distinción. La justificación funcional distingue lo que es lineal de lo que no es lineal. La caracterización de comportamientos mediante aspectos gráficos y numéricos.
Argumentación	La modelación

Grosso modo hemos mostrado el panorama actual de la investigación, y de alguna manera el camino que estamos siguiendo para lograr nuestro objetivo. En tanto que la metodología que sigue nuestra investigación y por la cual se validará es la Ingeniería didáctica, adecuada a nuestros objetivos y elementos teóricos.

Cabe mencionar que estamos trabajando en la implementación de los elementos que caracterizan a la integral definida y en la elaboración de las actividades del diseño, sin embargo aún faltan detalles, lo que si podemos adelantar es que usaremos gráficas de comportamientos lineales y trascendentales.

■ Consideraciones finales

Tenemos identificados elementos para robustecer y dar estructura a al marco de referencia para la integral desde la modelación escolar y nos queda en adelante, diseñar y probar por medio de nuestros instrumentos que dicho marco funciona.

Hemos definido la comunidad con la que trabajaremos y al momento pensamos en dos momentos del diseño, el primero consiste en argumentar sobre los comportamientos de un móvil mediante el análisis de la gráfica y el segundo con un trabajo puramente gráfico que involucra dos objetos en movimiento.

Agradecimientos. Esta investigación es parte del proyecto Promep “Modelación escolar y la construcción social de conocimiento matemático” con folio UAGRO-PTC-052.

■ Referencias bibliográficas

- Alanís, J. A. y Soto, E. (2011). La integral de funciones de una variable: Enseñanza actual. *Revista el Cálculo y su enseñanza*, 3, 1-6.
- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Biembengut, M. S. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16 (2), 105-125.
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling – A theory for practice. En Clarke, B., Clarke, D., Emanuelsson, G., Johnansson, B., Lambdin, D., Lester, F., Walby, A. y Walby, K. (Eds.). *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. (pp. 145-159). Suecia: National Center for Mathematics Educations.
- Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, 24 (2), 9-35.
- Cabañas, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa.
- Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 1(1), 56-74.
- Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una Socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (3), 265-286.
- Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 20 (1), 59-79.
- Cordero, F. (2011). La Modelación y la Graficación en la Matemática Educativa Escolar. En L. M. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta & A. R. Hernández-Ulloa (Coords.). *Razonamiento Matemático, Epistemología de la Imaginación: (Re)pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa* (pp. 377-399). Editorial Gedisa, Barcelona y Cinvestav, México.
- Cordero, F. (en prensa). *Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: El Eslabón de la Matemática y el Cotidiano*.
- Ferreirós, J. y Ordoñez, J. (2002). Hacia una filosofía de la experimentación. *CRÍTICA, Revista Hispanoamericana de filosofía*, 102(34), 47-86.
- Llorens, J. L. & Santoja, F. J. (1997). Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 5(1), 61-76.
- Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: La modelación para la matemática escolar*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Suárez, L. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultado de un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.