

## MODELACIÓN EN MATEMÁTICA ESCOLAR: EXPERIENCIAS CON ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN CÁLCULO DIFERENCIAL, INTEGRAL Y ECUACIONES DIFERENCIALES

**Francisco Javier Córdoba Gómez, Pablo Felipe Ardila Rojo**

Instituto Tecnológico Metropolitano. (Colombia)

fjcordob@yahoo.es, franciscocordoba@itm.edu.co, paboardila@itm.edu.co

**Palabras clave:** modelación, matemática realista

**Key words:** modelling, realistic mathematics

### RESUMEN

En el siguiente trabajo se presentan los resultados de la puesta en escena de tres prácticas de modelación con estudiantes de ingeniería en los cursos de cálculo diferencial, cálculo integral y ecuaciones diferenciales. En todos los casos mediante un trabajo experimental y práctico en el que los estudiantes participaron de manera activa, se pone en evidencia que la modelación como práctica favorece la interacción en el aula y la resignificación de conocimiento matemático escolar en un ambiente que fomenta la motivación y la participación. Si bien las experiencias se realizaron en tres asignaturas diferentes, sólo se presenta el trabajo en cálculo diferencial puesto que se evidenció una mayor participación de los estudiantes y además es la primera asignatura de las tres.

### ABSTRACT

The results of the three-staged modeling practices with engineering students in courses on differential calculus, integral calculus and differential equations are presented. In all cases by using an experimental and practical work in which the students participated actively, it shows that the modeling and practical favors interaction in the classroom and the redefinition of mathematical knowledge school in an environment that promotes motivation and participation. In this work, only the experience with the course of differential calculus will be presented because it was observed a more enthusiastic participation of students and this course is the first of them.

## ■ Introducción

Una de las características de los cursos de matemáticas, en general, en los diferentes niveles educativos es la escasa o insuficiente vinculación con actividades experimentales que logren articular los contenidos matemáticos con situaciones o fenómenos reales y cercanos a la cotidianidad y vivencias de los estudiantes, de tal forma que el conocimiento matemático sea puesto en un plano diferente al teórico y conceptual y emerja como una herramienta importante y de apoyo en otras áreas del conocimiento. Por su naturaleza, las prácticas procedimentales pueden considerarse a sí mismas el apoyo imprescindible del diseño de situaciones didácticas, donde la matemática no es pensada a través de objetos duros que los estudiantes deban construir sino a través de sus relaciones procedimentales con la modelación y los diferentes significados del conocimiento que aparecen a lo largo de la práctica. El objetivo de revalorar los conocimientos adquiridos, pone a los estudiantes en el proceso mismo de la construcción del conocimiento (Camacho y Sánchez, 2006).

A pesar de la importancia que se le ha conferido a las actividades experimentales, en las prácticas de modelación, en la clase de matemáticas no hay todavía una vinculación e integración de éstas en los currículos de matemáticas, tal como plantean López, Juárez y Arrieta (2007, p. 743) “la experimentación se ha mostrado como una práctica que conlleva a la generación de conocimiento científico. Sin embargo, es sorprendente cómo, en nuestros días, en los contextos escolares, la experimentación es una práctica poco usual”. En este mismo sentido Gallegos (2007, p.118), plantea lo siguiente:

El proceso de modelación existente en clase de matemáticas es mostrado a los alumnos de manera parcial evitando confrontarlos con etapas claves de esta práctica. La gran parte del tiempo, los alumnos no establecen el modelo lo cual le resta significado a la práctica. En resumen, el proceso de modelación existente en esta clase... no permite al alumno enfrentarse al acto de modelar de manera completa

En este sentido, la corriente de la Educación Matemática Realista le confiere una alta importancia a la modelación ya que en términos más precisos, no son los modelos en sí los que hacen posible el crecimiento de la comprensión matemática, sino las actividades de modelación de los estudiantes (Van den Heuvel, 2003). De esta forma las actividades iniciales de modelación, ejecutadas sobre problemas en contexto vinculados con la realidad de los estudiantes, permiten que estos últimos lleguen a realidades nuevas las que a su vez vuelven a ser objeto de nuevas actividades de modelación, es decir, la modelación se convierte de alguna forma en una espiral de comprensión de conceptos matemáticos ya que estimula la reflexión y la interacción en el aula al aparecer nuevas manifestaciones del modelo inicial que dan acceso a nuevas perspectivas, nuevas posibilidades de resolución de problemas y niveles más altos de comprensión (Córdoba, 2011).

## ■ La modelación y su importancia

La modelación es un proceso en el cual un problema no matemático es resuelto a través de la aplicación de las matemáticas (Kaiser & Maaß, 2007). Para Castro y Castro (2000) la modelación (modelización) matemática es una forma de resolver de problemas de la vida real en la que no solo se tiene en cuenta su solución, sino que exige la utilización de otras habilidades matemáticas para llegar a un rango de respuestas que describen la conducta del fenómeno considerado y que da a quien resuelve sentido de

participación y control en los procesos de solución. Esto hace que la modelación matemática sea un poderoso instrumento de aprendizaje significativo, a tener en cuenta para trabajar en el aula.

La modelación permite enriquecer la comprensión de fenómenos extramatemáticos ya que proporciona diversas representaciones de dichos fenómenos y dota de sentido las diferentes actividades matemáticas (Molyneux-Hodgson et al, 1999, citado en Suárez, 2008).

Para Bassanezi (1994) el uso de la modelación en la enseñanza conduce al aprendizaje de contenidos matemáticos que están conectados a otras formas de conocimiento. El trabajo con la modelación matemática no intenta simplemente ampliar el conocimiento sino desarrollar una forma particular de pensar y actuar: produciendo conocimiento, aunando abstracciones y formalizaciones interconectadas a fenómenos y procesos empíricos considerados como situaciones problemáticas. Según Blomhøj (2004), las actividades de modelación pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar (al aprendiz) a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir conceptos matemáticos. Así mismo, la modelación tiene como finalidad describir y analizar algún fenómeno de la vida diaria con el fin de: motivar el trabajo con las matemáticas y experimentar la matemática como medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria.

## ■ Metodología

En cada uno de los cursos se planteó un problema de aplicación en el que se pudiera implementar la práctica de modelación. El número de estudiantes fue aproximadamente 130: 70 de cálculo diferencial, 30 de cálculo integral y 30 de ecuaciones diferenciales. Los estudiantes recibieron una guía y los materiales respectivos. En el caso de cálculo diferencial se planteó un problema de dimensiones necesarias para maximizar el volumen de una caja; para cálculo integral la situación propuesta fue determinar el volumen de líquido en un tanque usando como referencia la altura del líquido en el mismo tanque. En el curso de ecuaciones diferenciales se plantea a los estudiantes el problema de enfriamiento de Newton. Una vez realizada la actividad y con los datos obtenidos, se les pide que encuentren el modelo matemático que representa la situación. La información fue recolectada mediante las producciones escritas de los estudiantes y grabaciones de video y audio, cuando fue necesario. En cada curso, los estudiantes se agruparon por equipos de manera voluntaria. Por cuestiones de espacio, sólo se muestra la actividad y su secuencia para el curso de cálculo diferencial, ya que en los demás cursos, se siguió el mismo esquema.

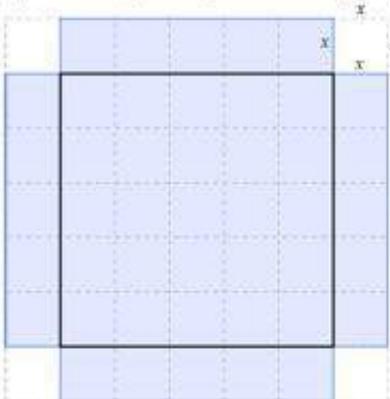
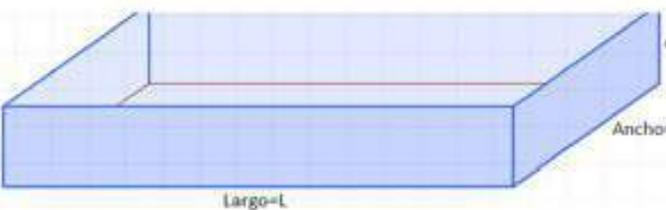
## ■ Cálculo Diferencial

### **Momento 1: ambientación y entrega de materiales**

En la figura 1 se observa el material entregado a cada uno de los equipos e indicaciones

Figura 1. Material entregado a los equipos.

Tomar 4 hojas de cartulina de forma cuadrada de 25 cm de lado. Recortar en la primera, segunda y tercera hojas, y en cada esquina, cuadrados de  $x=3$  cm,  $x=3.5$  cm y  $x=5$  cm respectivamente. Luego se doblan las pestañas para formar una caja sin tapa. Ver figuras.

**RECORDAR:** el volumen de un prisma recto, como el de una caja, es:  $Volumen = L \times A \times H$

**Preguntas previas:**

¿Crees que cambie el volumen de la caja si cambia la medida del lado de los cuadrados que se recortan en cada esquina? \_\_\_\_\_

Por qué?

### ■ Momento 2: la experimentación y la toma de datos

Con los materiales suministrados, cada equipo inicia la etapa experimental para completar la siguiente tabla a partir de los datos obtenidos (figura 2):

Figura 2. Tabla con datos del volumen para diferentes longitudes de lados recortados

II. Completar la siguiente tabla, midiendo las dimensiones de la caja. Estos serían los **datos reales**:

Longitud cortada $x$ (cm)	Volumen obtenido $cm^3$
3	
3.5	
5	

Una vez se les ha entregado el material y las instrucciones, los estudiantes inician la construcción de las cajas. En las figura 3 se observa a los estudiantes en la elaboración de las cajas de cartulina:

Figura 3. Elaboración de las cajas.



Una vez los estudiantes han elaborado las cajas proceden a determinar el volumen de cada una de ellas para completar la tabla. Para la pregunta: *¿Qué observas del comportamiento del volumen, que crees que está sucediendo?*, se muestra una de las respuestas (figura 4)

Figura 4. Registro de datos

II. Completar la siguiente tabla, midiendo las dimensiones de la caja. Estos serían los datos reales:

Longitud cortada $x$ (cm)	Volumen obtenido $\text{cm}^3$
3	1,083 $\text{cm}^3$
3,5	1,134 $\text{cm}^3$
5	1,425 $\text{cm}^3$

¿Qué observas del comportamiento del volumen, que crees que está sucediendo?

El comportamiento de los 3 volúmenes es que en 3 y en 5 disminuyen los valores, mientras que en 3,5 aumentan los valores.

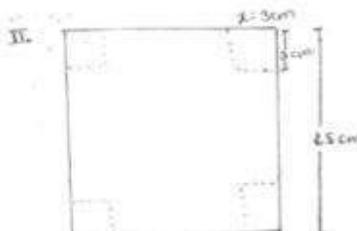
### ■ Momento 3: Manejo de datos y procedimientos matemáticos

Una vez realizada la fase inicial experimental, se procede a la construcción del modelo matemático (figura 5).

Figura 5. Elaboración del modelo por parte de un equipo.

III. Resuelve y responde las siguientes preguntas:

1. Deducir una expresión general que determina el volumen de la caja en función de la longitud  $x$  del lado de los cuadrados recortados en las esquinas



$L_1 = 25 - 2x$      $L_2 = 19$   
 $L_3 = 25 - 2(25)$

Por ser un cuadrado los lados tienen las mismas dimensiones. Así:

Ancho =  $25 - 2x \rightarrow 19$   
 Largo =  $25 - 2x \rightarrow 19$

Volumen =  $19 \times 3 \times 19$   
 $V = 1089 \text{ cm}^3$

III. La fórmula es

$$V(x) = (25 - 2x)^2 \cdot x + V_0 = [25^2 - 2(25)(2x) + (2x)^2] \cdot x$$

$$V(x) = (25^2 - 100x + 4x^2) \cdot x$$

$$V(x) = 625x - 100x^2 + 4x^3$$

Luego de realizada la práctica, las conclusiones de uno de los equipos se muestran en la figura 6.

Figura 6. Conclusiones de un equipo.

Conclusiones

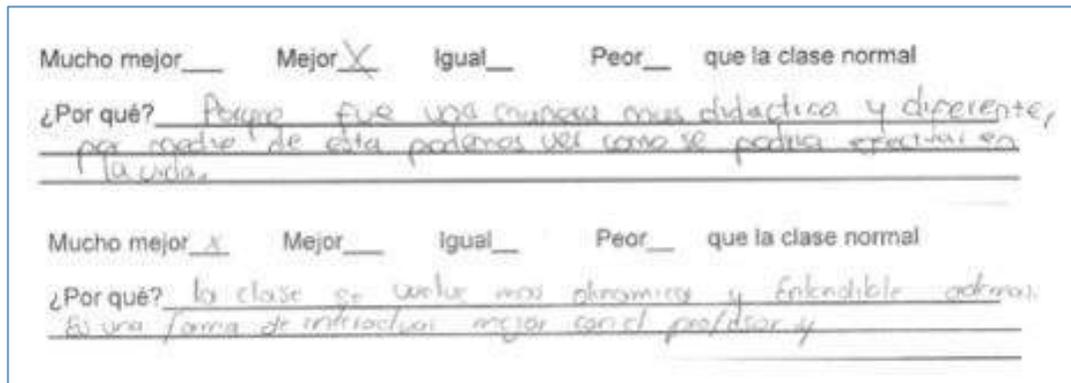
- Usando las matemáticas se pueden hallar maneras de reducir material y aumentar ganancias en una empresa.
- Podemos encontrar máximos y mínimos de una manera física.
- Las cajas quedaron con la medida exacta matemática y físicamente.

### ■ Valoración de la actividad por parte de los estudiantes

Un aspecto importante es que casi la totalidad de los estudiantes valoraron la actividad de manera muy positiva frente a la clase tradicional. A continuación se presentan algunas respuestas (figura 7). Frente a la pregunta:

*Frente a las actividades normales de clase, la práctica de modelación que se ha realizado en el grupo te ha parecido:*

Figura 7. Valoración de la actividad.



### ■ Consideraciones finales

La actividad despertó un gran interés y motivación en los estudiantes, pues para ellos era la primera vez que en un curso de matemáticas se hacía una actividad experimental. Una vez realizadas las actividades experimentales, la información recogida permitió establecer algunos elementos comunes y de comparación en los diferentes grupos e identificar al mismo tiempo dificultades conceptuales y de conocimientos previos. Esta investigación, si bien trabaja en el área de matemáticas y se hacen prácticas experimentales, se enmarca en el campo de la Educación Matemática, y por lo mismo el análisis de la información recogida se basa en aspectos cualitativos, no generalizables pero que sí dan cuenta de la realidad retratada en los cursos escogidos para tal fin.

Se pudo observar que los estudiantes, en los cursos de cálculo diferencial y ecuaciones diferenciales, resignificaron la derivada como una razón de cambio y como un modelo que permite describir comportamientos, tanto en la optimización como en un proceso de enfriamiento, pues ya no consideraron ese conocimiento aislado sino que lo pudieron integrar a una actividad real. En cálculo integral el uso de geometría e integrales les permitió proponer una solución.

Es importante aclarar, que no se pretende con esta investigación, al menos por ahora, determinar el número de estudiantes que aprueban o no una asignatura cuando se implementan prácticas de modelación en las clases de matemáticas. El impacto que se busca determinar es cuál es la percepción y

el nivel de motivación e interés que despierta en los estudiantes una práctica de modelación en clase de matemáticas, ya que al haber motivación e interés el proceso de aprendizaje se puede ver favorecido lo que de manera directa favorecerá el desempeño académico.

### ■ Referencias bibliográficas

- Bassanezi, R. (1994). Modelling as a Teaching-Learning Strategy. *For the Learning of Mathematics*, 14(2), 31-45.
- Castro, E. y Castro E. (2000). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Barcelona: Universidad de Barcelona e Instituto de Ciencias de la Educación
- Córdoba, F. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical Modelling. A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby & K. Walby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). Suecia: National Center for Mathematics Educations.
- Camacho, A y Sánchez, B. (2006). Modelación en el aula del concepto de diferencial. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 399-405. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Gallegos, R. (2007). La enseñanza de la modelación en clase de física y de matemáticas. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20*, 114-119. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
- Káiser, G. & Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classromm-problems and opportunities. En Blum, W., Galbraith, P., et al. (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14<sup>th</sup> International Commission on Mathematical Instruction* (pp 99-108). Australia.
- López, C., Juárez, M. y Arrieta, J. (2007). Las prácticas de modelación virtual. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20*, 741-746. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
- Suárez, L. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultado de un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). *El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje*. Recuperado el 05 de marzo de 2011 de <http://www.correodelmaestro.com/ anteriores/2009/septiembre/incert160.htm>