MECANISMOS DE CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO: ESTUDIOS SOBRE PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Mario Adrián Caballero Pérez, Ricardo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
macaballero@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Palabras clave: variación, mecanismos de construcción, predicción.
Key words: variation, mechanisms of construction, prediction

RESUMEN

Dado que en Cálculo predomina una enseñanza centrada en objetos matemáticos el desarrollo de ideas variacionales se ve soslayado, lo que representa un obstáculo para desarrollar un *pensamiento y lenguaje variacional*. Abordamos esta problemática desde la teoría socioepistemológica, dado que nuestro interés se encuentra en el pasaje de la centración en los objetos, a las prácticas que generan conocimiento. Para ello, sostenemos será esencial identificar los elementos socioculturales que favorecen el estudio de lo variacional, y por tanto, propician el desarrollo de un *pensamiento y lenguaje variacional*. En el presente escrito describimos los avances realizados, con base en el análisis literario desde una visión socioepistemológica, a los trabajos de Piaget sobre causalidad y tiempo, y de Euler sobre el problema de los tres cuerpos.

ABSTRACT

Since in Calculus predominates a teaching centered mathematical objects, the development of variational ideas isn't disregarded, which is an obstacle to develop a *thinking and variational language*. We approach this problem from the socioepistemological theory, since our interest is in the passage of the focus on objects to the practices that generate knowledge. To do this, we hold will be essential to identify the socio-cultural elements that promote the study of the variational, and thus the development of a *thinking and variational language*. In this paper we describe the progress made, based on the literary analysis, from a socioepistomological view, to the work of Piaget on causality and time, and Euler on the problem of three bodies.

Introducción

Los estudios sobre enseñanza y aprendizaje del Cálculo han sido tema de interés en diversas investigaciones recientes de la Matemática Educativa, ello debido, parcialmente, a que suelen presentar dificultades diversas en su aprendizaje por parte de los estudiantes y aun de los propios profesores. Esta situación ha llevado al planteamiento de diferentes posturas para abordar la problemática relativa a las dificultades en el aprendizaje del Cálculo, algunas centradas más a la parte cognitiva, en cuanto a las construcciones mentales necesarias para la aprehensión de un concepto (Yerushalmy y Swidan, 2012), mientras que otras incorporan al aprendizaje del Cálculo ideas relativas a los diferentes dominios científicos o al uso de herramientas tecnológicas que posibiliten un acercamiento alternativo (Sánchez, García y Llinares, 2008). Consideramos que una constante en estas posturas es la de desarrollar sus investigaciones apegadas a lo que llamamos la *centración en los objetos matemáticos*, lo que provoca que conceptos y procedimientos del Cálculo sean concebidos como entidades abstractas, preexistentes y externas al estudiante, soslayando la construcción social del conocimiento matemático por parte del estudiante.

Nuestra postura tiene una premisa distinta, fundamentada en la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en donde el énfasis esta en las *prácticas* que hacen posible la construcción del conocimiento matemático, convirtiéndolo en una entidad funcional con valor de uso (Cantoral, 2013). Particularmente en el Cálculo estas prácticas se encuentran ligadas al estudio de la *variación*, pues este posee un carácter dinámico dado que surge de la necesidad de cuantificar cómo las cosas cambian (conceptos de variable y de función), la velocidad con la que se dan los cambios (la derivada), y la forma en cómo se acumulan los cambios (la integral) (Cantoral, 1990). Al considerar esta naturaleza específica, se reconoce una construcción compartida por el uso que es desarrollada por la línea de investigación de Construcción Social del Pensamiento Matemático, que cuenta con una serie de estudios relativos al desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar). Dichos estudios consideran significativo este carácter dinámico y las formas de "actuar y argumentar" sobre el cambio y la variación, y no sólo su manejo analítico.

Sin embargo, a pesar de que el cambio y la variación se encuentran en las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales, a partir de las cuales la predicción se construye socialmente (Cantoral, 2013), en la enseñanza actual se enfatiza el desarrollo de destrezas mecánicas, memorización de algoritmos y propiedades matemáticas que, si bien son esenciales, impiden apreciar el carácter variacional de los procesos del Cálculo. Para la Socioepistemología es preciso modificar esta centración para incorporar aquellas prácticas que permiten la construcción del conocimiento matemático. En lo referente al PyLVar, el interés está en desarrollar aquellas prácticas ligadas a la variación que generan la construcción del conocimiento matemático relativo al Cálculo.

Respecto a esto, Caballero (2012) menciona que una de las tendencias en trabajos sobre PyLVar ha sido el diseño de actividades que propicien el desarrollo de estrategias variacionales. No obstante, los resultados muestran que la influencia de la enseñanza previa, sustentada en la *centración en los objetos matemáticos*, repercute en que los estudiantes no cuentan con las herramientas necesarias para hacer un estudio de la variación, por lo cual recurren al uso de definiciones o propiedades que no son recordadas correctamente, e incluso construyendo teoremas no válidos. De modo que, aunque el propósito sea una descentración de los objetos, esta enseñanza centrada en los objetos matemáticos representa en sí misma un obstáculo para el desarrollo del *pensamiento y lenguaje variacional*.

A pesar de ello, investigaciones enmarcadas en el PyLVar han evidenciado que el desarrollo de un *pensamiento y lenguaje variacional* es posible. Ejemplo de ello se puede consultar en (Caballero, 2012) donde algunos de los participantes, ante situaciones de variación continua en Cálculo, dan evidencia de haber desarrollado estrategias y formas de argumentación que les permitieron dar solución a las actividades propuestas. Empero, dichos participantes ya tenían desarrollado estas prácticas de la variación previo a la investigación, de manera que no se cuenta con información suficiente sobre la manera en que se da este desarrollo del *pensamiento y lenguaje variacional*. En este sentido, Camacho y Sánchez (2010) mencionan que un elemento esencial para desarrollar estas ideas de variación es incorporar a la enseñanza la idea de predicción de fenómenos. Si bien coincidimos con esta idea, es de destacar que esta incorporación no es directa, debido a la dificultad que *la centración en los objetos matemáticos* conlleva.

De manera que nuestro interés se encuentra en identificar aquellos elementos que permitan "romper" esta centración y generar estrategias y argumentaciones de lo variacional. Nos preguntamos entonces ¿cuáles son los mecanismos que facilitan el desarrollo de un *pensamiento y lenguaje variacional*? Nuestro objetivo por tanto es identificar y caracterizar estos mecanismos de construcción de conocimiento relativos al *pensamiento y lenguaje variacional*, entendiendo por mecanismo aquellos elementos de corte sociocultural que forman parte del pensamiento humano y favorecen el desarrollo de estrategias y formas de argumentación de lo variacional, que desde nuestra postura sostenemos se encuentra en la base de las prácticas propias de la variación.

■ Marco teórico

Tomamos como referente teórico a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, que postula que el conocimiento matemático tiene su origen en el conjunto de prácticas humanas que son aceptadas y establecidas socialmente (Cantoral, 2013), llamadas *prácticas sociales,* las cuales se entienden como normativas de la actividad humana. Son las prácticas las que favorecen la construcción del conocimiento matemático, lo que implica un énfasis distinto: pasar de los objetos a las prácticas. Así, la praxis desarrollada favorece el surgimiento y significación de un determinado concepto, noción o procedimiento.

En el Cálculo, esta praxis consiste de las prácticas propias la variación, Comparación, Seriación, Estimación y Predicción (Caballero, 2012), que surgen de la necesidad de predecir estados futuros. Al enfocar nuestra atención en las *prácticas sociales*, la teoría Socioepistemológica nos permite analizar el *pensamiento y lenguaje variacional* de las personas, y las prácticas ejercidas ante situaciones de variación por los grupos humanos, y no únicamente en la explicitación de fórmulas o teoremas, que no necesariamente dan cuenta del estudio de lo variacional. Asimismo, dada la naturaleza sistémica de la teoría, la Socioepistemología nos permite analizar las dimensiones Cognitiva, Didáctica, Epistemológica y Social de la variación.

Aspectos metodológicos

En este escrito reportamos los resultados preliminares obtenidos de un análisis literario a las obras de Piaget sobre la causalidad y el tiempo, así como de las obras de Euler y Newton sobre *el problema de los tres cuerpos.* El análisis a estas obras nos permitió postular mecanismos de construcción de conocimiento del pensamiento y *lenguaje variacional* que describiremos más adelante. Dicho análisis fue realizado bajo la perspectiva de la teoría socioepistemológica, de modo que centramos nuestro análisis en las prácticas y el rol que estas juegan en la construcción de conocimiento, así como en aspectos tanto cognitivos y didácticos, como sociales y epistemológicos del conocimiento, de tal manera que el análisis se robustece de estas cuatro dimensiones.

Resultados preliminares

Causalidad y tiempo

Dentro del Cálculo y del Análisis Matemático la noción del tiempo se encuentra presente de manera implícita, ya sea en problemas físicos o sociales, en los que el tiempo siempre ha jugado un papel importante, particularmente en el PyLVar. Si el cambio y la variación implican la modificación entre dos estados, el tiempo resulta ser la duración de esa modificación. Por tanto, todo proceso de cambio y variación involucra la noción de tiempo. Piaget considera al tiempo como “la coordinación de los movimientos, ya sea físicos-espaciales o incluso aquellos internos que son las acciones simplemente esbozadas, anticipadas o reconstruidas por la memoria” (Piaget, 1978). De manera que su génesis esta en el conjunto de operaciones que permiten la coordinación de movimientos y la forma en cómo se realizan, donde la causalidad es aquello que permite esta coordinación y el énfasis esta en las relaciones que se establecen.

Esta causalidad se encuentra en la base del *razonamiento causal, que* consiste en los procesos mentales que permiten la explicación de las causas que originan algún fenómeno, lo que implica mostrar qué transformaciones se produjeron y cómo ciertos aspectos del resultado corresponden a transmisiones del estado inicial (Piaget, 1977). La noción de causalidad que el sujeto construye representa la posibilidad de que existan relaciones entre los hechos observados, de modo que una explicación causal dependerá de la elección de los elementos que el sujeto considera esenciales en una situación en particular, con el fin de inferir relaciones para explicar la ocurrencia de los hechos observados. Sostenemos que el estudio de lo variacional precisa del *razonamiento causal*, ya que ante un fenómeno de variación continua, en donde se busca la predicción de estados futuros, se deberá identificar las transformaciones realizadas (aquello que cambia) y las relaciones entre las variables involucradas (la variación que se presenta).

Por esta razón, Caballero (2012) analiza el *razonamiento causal* y concluye que el uso de ideas variacionales es obstaculizado por razones similares al *razonamiento causal*, ya que las personas centran la atención en reproducir una acción (como aplicar una propiedad o regla matemática) para conseguir un resultado, dejando de lado el estudio de las causas que lo originan (el cambio y la variación del fenómeno). El pensamiento de los individuos los lleva a centrarse en conocimientos que previamente condujeron a un resultado satisfactorio, lo que hace que no se enfoquen en estudiar las causas del fenómeno, es decir la variación involucrada. En cierto modo, no eligen adecuadamente los elementos esenciales desde los cuales construir una explicación causal, o en otras palabras una explicación variacional.

Sostenemos que un mecanismo de construcción de conocimiento del *pensamiento y lenguaje variacional* se encuentra relacionado con el razonamiento causal y con el desarrollo de la noción de tiempo. Esto debido a que al considerar situaciones de variación, como por ejemplo en el caso de fenómenos físicos, encontramos que el tiempo requiere de una abstracción similar a la variación. Así, en situaciones de variación continua los movimientos a los que se refiere Piaget consisten en cambios de estado perceptibles, mientras que las operaciones que permiten la coordinación de estos movimientos radican en una seriación que permita reconocer el patrón de variación que experimenta una variable respecto de otra, así como de los órdenes de variación que afectan. Daremos cuenta de lo anterior con ejemplos dentro del Cálculo.

Dada una situación que involucre el estudio gráfico de la derivada, en un principio es posible fijarse en el cambio que experimenta algún elemento de la gráfica, como las alturas de las ordenadas. Sin embargo, percibir el cambio no es suficiente, se requiere de poder medirlo y expresarlo, es decir, estudiar la variación. Por ejemplo, en la primera actividad presentada en (Caballero, 2012) se pregunta por el valor numérico de la primera derivada de una gráfica, para lo cual es necesario analizar su comportamiento (creciente o decreciente). En esta situación, la pregunta lleva a analizar una variación de primer orden, dado que es suficiente establecer las diferencias entre las alturas de la gráfica. No obstante, en las actividad 2 se pregunta ahora por el valor numérico de la segunda derivada respecto de dos graficas que se intersecan en un punto. Esta situación implica analizar una variación de segundo orden, pues ahora no es suficiente establecer las diferencias de las alturas, sino que simultáneamente se requiere establecer las diferencias de las diferencias antes analizadas. En otras palabras, analizar cómo cambia el cambio, lo que exige un razonamiento causal en la medida que los órdenes de variación están relacionados causalmente, esto es, el comportamiento variacional de una función, y por tanto la forma de la gráfica, es consecuencia del comportamiento de sus órdenes de variación.

De modo que el estudio de situaciones de variación continua en Cálculo exige de un análisis simultáneo de los órdenes de variación. Esto sin embargo plantea un reto debido a que, si bien el cambio puede ser percibido, la variación no, esta requiere ser “medida” y por consiguiente requiere una abstracción. Se necesitan de estrategias que permitan hacer esta “medición” para argumentar sobre la variación, y más aún, que permitan estudiar simultáneamente los diferentes órdenes de variación. Convenimos en llamar a estas estrategias *Coordinación de variaciones simultáneas, y* lo postulamos como mecanismo de construcción de conocimiento relativo al *pensamiento y lenguaje variacional.*

Consideramos que el estudio de la obra de Piaget sobre *causalidad* y el *desarrollo de la noción de tiempo* brindará elementos para caracterizar este mecanismo, debido a que el estudio simultaneo de los órdenes de variación exige poner en juego un razonamiento causal, en el sentido de establecer relaciones entre estados sucesivos que expresan un comportamiento, que en el sentido de Piaget corresponde a movimientos y cuya coordinación requiere de operaciones propias del razonamiento causal.

Problema de los tres cuerpos

Isaac Newton en sus *Principia* plantea el problema de predecir las posiciones y las velocidades en cualquier instante de tiempo para dos cuerpos en el espacio (sistema Sol - Tierra) que se atraen mutuamente conociendo sus posiciones y velocidades iniciales. Dicho problema fue resuelto por el mismo Newton, considerando *n* partículas de masas diferentes y resolviendo el caso particular para $n = 2$, mediante la formulación de su Ley de la Gravitación Universal, cuyas soluciones se pueden consultar en (Cantoral, 1990). No obstante, al considerar el mismo problema ampliándolo a tres cuerpos en el espacio (sistema Sol - Tierra - Luna), conocido como el problema de los tres cuerpos (PTC), este se quedó por mucho tiempo sin una solución general.

El PTC fue estudiado por diferentes matemáticos, destacan entre ellos Euler, Bernoulli, Lagrange y Poincaré, quienes propusieron soluciones particulares al problema. Centraremos nuestra atención en este artículo en la solución particular propuesta por Leonhard Euler conocida en la literatura especializada como *el problema de los tres cuerpos restringido* (Olvera, 2008). El contexto de Euler que dio pie al tratamiento del PTC, se encuentra normado por el desarrollo de la empresa marítima y la búsqueda de formas que permitirían circunnavegar los mares adecuadamente. En ese tiempo el cálculo de la longitud era fácilmente realizado utilizando las efemérides de las lunas jovianas de Júpiter, en donde Euler contribuyó con métodos de perturbaciones para su cálculo. Sin embargo para los capitanes era poco práctico observar a Júpiter mientras navegaban, por lo que la solución propuesta era fijarse en los movimientos lunares; sin embargo las perturbaciones sufridas por la órbita lunar no seguían un patrón discernible, lo que dificultaba el cálculo adecuado de las efemérides (Olvera, 2008).

Para encarar el PTC, Euler considera el movimiento de dos masas grandes y la tercera pequeña, al nivel que se puede tomar tan pequeña como se quiera, una masa infinitesimal, Con esto el tercer cuerpo se verá afectado por las fuerzas gravitacionales de los otros dos, y al mismo tiempo afectará a esos dos cuerpos. Al considerar la tercera masa despreciable, Euler logra tratar el problema como un sistema de dos masas, debido a que la influencia gravitacional del tercer cuerpo es despreciable, dado que su masa es muy pequeña comparada con la de los otros dos cuerpos. Así, el Sol y la Tierra toman el papel de las dos primeras masas y la Luna toma el papel del tercer cuerpo de tamaño despreciable respecto de las primeras. De esta forma, Euler predice las posiciones y velocidades de los tres cuerpos, y aunque estas soluciones son una aproximación a las reales fueron de ayuda para el desarrollo de la Mecánica Celeste.

De la solución propuesta por Euler al PTC identificamos un mecanismo que guía la actividad humana para dar predicciones sobre un sistema, al que hemos llamado *principio estrella* (P*). Este principio se manifiesta en su actuar mediante los mecanismos de constantificación estudiados por Cantoral (1990). El primer nivel de constantificación se refiere a la elección de las variables que afectan significativamente al sistema en cuestión, pudiendo despreciar otras. En el caso de Euler, este nivel se observa en la selección de las variables posición inicial, velocidad, masa, y atracción gravitacional, así como la elección de la dimensión de análisis en configuración colineal, modelo donde los cuerpos en cuestión se mueven sobre una línea recta, despreciando otras variables como las masas y atracción gravitacional de los demás planetas del sistema solar, así como el movimiento planetario en un modelo tridimensional.

El segundo nivel de constantificación se refiere a la elección del nivel de variación que se estudiará, de manera que se puede considerar que un fenómeno involucra únicamente variaciones de primer orden (por ejemplo comportamiento lineal), y despreciar los siguientes órdenes de variación, o bien, considerar interviene una variación de segundo orden (por ejemplo comportamiento cuadrático), y despreciar ordenes de variación mayor. En el PTC resuelto por Euler observamos este nivel de constantificación al momento de elegir que la masa del tercer cuerpo sea muy pequeña con relación a la masa de los otros dos cuerpos, dado que al hacer esto, los efectos gravitacionales del tercer cuerpo no afectan significativamente a los otros dos, y en ese sentido, los órdenes de variación son acotados y besto permite analizar su variación y establecer predicciones sobre el movimiento.

Sostenemos que en los niveles de constantificación descritos, particularmente en el segundo nivel, el P* se hace presente, debido a que en este nivel se elige el orden de variación a estudiar, eligiendo siempre la mínima variación que sea necesaria para lograr la predicción de un sistema. Consideramos que esto tiene su génesis en la limitante de orden fisiológico para manejar variaciones de orden mayor a tres (Cantoral, 2013), lo cual hace que en la actividad humana se busque siempre la mínima variación para la predicción. De manera que, al sostener que el P* posibilita hacer predicciones, lo vinculamos al *pensamiento y lenguaje variacional*, dado que es la predicción el eje central de su desarrollo, y aun mas, lo postulamos como mecanismo de construcción de conocimiento relativo a este.

■ Reflexiones a futuro

Hasta el momento hemos identificado dos mecanismos de construcción del *pensamiento y lenguaje variacional,* los cuales procederemos a caracterizar mediante las dimensiones de la Socioepistemología. Una vez caracterizados se realizará el diseño de un conjunto de actividades de variación con el propósito de analizar la forma en que aparecen estos mecanismos en las prácticas, argumentos, y formas de proceder de estudiantes de bachillerato y en la transición a la educación superior. Se pretende contrastar las resoluciones de aquellos individuos que muestren un *pensamiento y lenguaje variacional* con aquellos que no lo manifiestan, para poder indagar con detalle en la función que desempeñan. Esta diferenciación se realizará con base en el modelo de interacción de los elementos del PyLVar presentado en Caballero (2012).

Los resultados que se esperan obtener, contribuirán al entendimiento del desarrollo del *pensamiento y lenguaje variacional*, lo que permitirá diseñar situaciones que incorporen los mecanismos de construcción necesarios para su desarrollo en actividades escolares, de manera que mediante la incorporación de estos mecanismos se favorezca el desarrollo de ideas y argumentos variacionales que permitan tratar con situaciones de cambio.

■ Referencias bibliográficas

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædiciere y lo Analítico"*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. México: Gedisa Editorial.

Camacho, A. y Sánchez, B. (2008).Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267- 296.

Olvera, A. (2008). Euler: navegante de mares y planetas. *Miscelanea matmática*, *46*, 27-48.

Piaget, J. (1977). Causality and Operation. En J. Piaget y R. Garcia (Eds.), *Understanding Causality* (pp. 1-10), United States of America: Norton Library.

Piaget, J. (1978). *El desarrollo de la noción de tiempo en el niño*. México: Fondo de Cultura Económica.

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11* (2), 267-296.

Yerushalmy, M. y Swidan, O. (2012). Signifying the accumulation graph in a dynamic and multi-representation environment. *Educational Studies in Mathematics 80*, 287-306.