LA CENTRACIÓN EN LOS OBJETOS MATEMÁTICOS COMO DIFICULTAD EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Mario Adrián Caballero Pérez, Ricardo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
macaballero@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Palabras clave: variación, pensamiento y lenguaje variacional, profesores
Key words: variation, thinking and variational language, teachers

RESUMEN

Los resultados de investigaciones enmarcados en el *pensamiento y lenguaje variacional* han mostrado la existencia de dificultades en profesores para abordar situaciones de variación, pero no se ha estudiado las razones que las originan. En este trabajo nos propusimos analizar esas causas mediante un conjunto de actividades que permitieron analizar las estrategias de respuesta a las que recurrían los profesores. Los resultados muestran que las dificultades para desarrollar un *pensamiento y lenguaje variacional* son causadas por la centración en los objetos matemáticos, lo que impide observar el carácter variacional del Cálculo, y propicia forzar el uso de teoremas o propiedades matemáticas para dar respuesta a situaciones de variación.

ABSTRACT

Research results framed in *thinking and variational language* have shown the existence of difficulties on teachers to carry out variational situations, but have not studied the reasons for those difficulties. In this paper we set out to analyze these causes through a set of activities that helped to analyze the strategies that teachers used. Results show that the difficulties in developing a *thinking and variational language* are caused by the focus on mathematical objects, which prevents to analyze the variational nature of calculus, and promotes the use forced of theorems or mathematical properties to respond to situations of change.

Introducción

En el presente escrito exponemos los resultados derivados de una investigación que tenía por objetivo analizar las causas que originan el surgimiento de dificultades en profesores de bachillerato al llevar a cabo actividades enmarcadas en el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar). Consideramos el estudio de la variación como un elemento necesario en el aprendizaje del Cálculo, pero que no es propiciado en los salones de clase, ya que existe una preferencia en la enseñanza por una práctica algorítmica de naturaleza algebraica, que si bien logra disminuir el porcentaje de estudiantes reprobados, no logra una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos del Cálculo (Reséndiz, 2006).

Dado que el profesor juega un papel fundamental como gestor del aprendizaje del alumno consideramos necesario que tenga desarrollado este *pensamiento y lenguaje variacional* para poder propiciarlo en sus alumnos. Sin embargo, los trabajos sobre profesores muestran que existen dificultades para abordar satisfactoriamente situaciones de variación. Por ejemplo, en el trabajo de González (1999), se propone una actividad para decidir sobre el signo de la primera y segunda derivada, a la que responden usando recursos memorísticos, como la idea de pendiente y concavidad, pero ante el signo de la tercera derivada presentan dificultades y errores en sus respuestas, que se manifiestan en el uso de "teoremas factuales", que consisten en afirmaciones basadas en las propiedades de los signos de la primera y segunda derivada y que son extrapolados para argumentar sobre la tercera derivada. No se recurre en ningún momento al estudio de la variación presente en las gráficas, lo que permitiría construir argumentos sólidos para responder a la actividad.

Consideramos no se ha explorado lo suficiente las razones que originan el surgimiento de estas dificultades, aspecto esencial para cualquier propuesta que pretenda incorporar ideas variacionales al conocimiento del profesor. Es por ello que en este trabajo nos enfocamos en analizar cuáles son las causas que ocasionan esas dificultades a los profesores para desarrollar un *pensamiento y lenguaje variacional*.

Nuestra hipótesis sostiene que las causas que originan estas dificultades para desarrollar un pensamiento variacional en profesores de bachillerato consiste en que ante una situación que involucra el estudio de la variación y el cambio, el pensamiento de los profesores los lleva a centrarse en utilizar algún conocimiento matemático que dominen y que previamente los condujo a un resultado satisfactorio, de manera que su uso garantice poder responder a las situaciones que se le plantean.

Esto se manifiesta mediante el uso de propiedades, teoremas o reglas matemáticas, o en la centración por encontrar y usar expresiones analíticas de funciones que le permitan desarrollar sus respuestas, sin detenerse a realizar un análisis de las causas que originan los fenómenos descritos en esas situaciones, es decir el cambio y la variación. Para corroborar nuestra hipótesis diseñamos un conjunto de situaciones de que nos permitieron identificar las estrategias de respuesta a las que recurren los profesores, y de las cuales identificamos aquellas que no corresponden a un *pensamiento y lenguaje variacional* y las analizamos a partir de la hipótesis planteada.

Elementos teóricos

Para lograr nuestro objetivo nos apoyamos de la teoría Socioepistemológica, dado que nos interesó analizar las prácticas propias del estudio de la variación que favorecen y permiten el surgimiento y significación de un determinado concepto, noción, proceso o procedimiento (Cantoral, 2013). Esta teoría se fundamenta en que son las prácticas las que favorecen la construcción del conocimiento matemático, lo que implica un énfasis distinto que caracteriza a esta teoría: pasar de los objetos a las prácticas. Este enfoque se sustenta en la tesis de que los objetos son creados en ejercicio de prácticas normadas socialmente (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006), llamadas prácticas sociales, entendiéndolas como normativas de la actividad humana.

Este énfasis en las prácticas evidencia la importancia de salir de un dominio propiamente matemático, para incorporar otras prácticas de referencia (ingeniería, medicina, biología, etc.) que permiten dar sentido y significado a los conceptos bajo estudio, que en Cálculo hacen referencia a las practicas propias de la variación que tiene su génesis de la practica social del *Praedicere*.

Para poder identificar qué estrategias usadas por los profesores corresponde al uso de un *pensamiento y lenguaje variacional*, y cuáles no, se necesitaron criterios para realizar esta diferenciación, para lo cual se realizó una caracterización de los elementos que conforma el PyLVar. Esta sub-línea de investigación enfatiza en el carácter variacional de las ideas matemáticas y no únicamente en su manejo simbólico y analítico. La idea base de esta línea es el estudio del cambio y la variación, nociones que dieron vida y permitieron el desarrollo de las ideas del Cálculo. El interés por estudiar el cambio en los fenómenos se deriva de una necesidad inherente al ser humano, la necesidad de predecir estados futuros, para lo cual se requiere identificar aquello que cambia, cuantificar ese cambio y analizar la forma en que se dan esos cambios. Algunos elementos que conforman el PyLVar son presentados en Caballero y Cantoral (2013):

Situación Variacional (SV): Entenderemos por una situación variacional al conjunto de problemas cuyos tratamientos demandan la puesta en juego de estrategias variacionales y que requieren establecer puntos de análisis entre diversos estados del cambio.

Argumentos Variacionales (AV): Estos argumentos son utilizados por las personas cuando "hacen uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando. Son este tipo de argumentos los que permiten dar explicación a las SV.

Códigos Variacionales (CV): Consisten en la expresión oral o escrita del cambio y la variación, y que son articulados para generar los AV. Estos códigos pueden consistir en frases, dibujos, tablas o ademanes, que dan cuenta del análisis variacional que se realiza.

Estrategia Variacional (EV): Consiste en una forma particular de razonar y actuar ante una *SV*. Permiten encarar y explicar dichas situaciones al reconocer aquello que cambia, cómo y cuánto cambia dentro del sistema:

- *Comparación:* Establece diferencias entre estados, uno anterior y uno posterior, o bien, dos estados de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar cambios y poder analizarlo con base en las características de su variación.
- *Seriación:* Consiste en analizar varios estados y no únicamente dos, con el objetivo de encontrar una relación o propiedad entre ellos.
- *Predicción:* Anticipar comportamientos, estados o valores, posterior al análisis de la variación en estados previos, de manera que se sintetiza y abstrae esta información en modelos predictivos.
- *Estimación:* A partir de conocer la variación de un fenómeno en estados previos, se proponen nuevos estados o comportamientos a corto plazo de manera global, a diferencia de la *Predicción*, donde los estados propuestos son locales.

Estructura Variacional (EstV): Conocimientos matemáticos o científicos que se usan en una SV en conjunto con EV para realizar el estudio de lo variacional.

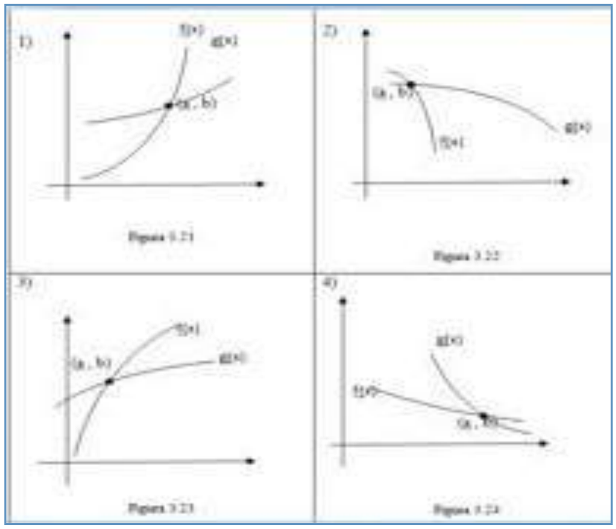
■ Aspectos metodológicos

Se diseñaron actividades en las que el estudio de la variación es necesario para llegar a una solución válida, considerando para ello graficas con comportamientos similares, de manera que el uso de las propiedades de la primera y segunda derivada no era suficiente. También se preguntó por el valor numérico de la segunda derivada, ya que en el discurso matemático escolar no hay una herramienta directa, se requiere de un análisis de la variación.

La población consistió de profesores de bachillerato que habían ofertado un curso de Cálculo Diferencial o Integral, de instituciones tanto públicas como privadas de México, siendo cinco hombres y una mujer, con edades entre 26 y 35 años, y entre 3 y 8 años de experiencia docente. Se entregó a los profesores las actividades diseñadas y se procedió a identificar aquellas estrategias que reflejan un uso de ideas variacionales, y aquellas que no, para lo cual nos basamos en la caracterización realizada al PyLVar. Presentamos ejemplos de dos actividades de un total de cuatro:

Actividad 2: A continuación se presentan segmentos de las gráficas de dos funciones f y g, las cuales se cortan en mismo punto. ¿Es $f''(a)$ mayor, menor o igual a $g''(a)$? Detalla el razonamiento empleado en cada inciso.

Figura 1: Actividad 2



Actividad 3: Realiza el bosquejo de las gráficas para dos funciones f y g que cumplan con las características señaladas. En cada caso, argumenta porque las gráficas en cuestión reflejan fielmente las características correspondientes.

Figura 2: Actividad 3.

1) $f(-3) = g(-3) = 2$

$f'(x) < 0, g'(x) < 0, (-4 < x < -2)$

$f''(x) > g''(x) > 0, (-4 < x < -2)$

2) $f(5) = g(5) = -3$

$f'(x) > 0, g'(x) > 0, (3 < x < 7)$

$0 > g''(x) > f''(x), (3 < x < 7)$

3) $f(0) = 3, g(0) = -2$

$f'(x) < 0, g'(x) > 0, (-2 < x < 2)$

$f''(x) > 0, g''(x) > 0, (-2 < x < 2)$

4) $f(-2) = -4, g(-2) = -1$

$f'(x) > 0, g'(x) < 0, (-5 < x < 0)$

$f''(x) < 0, g''(x) < 0, (-5 < x < 0)$

Resultados

De las respuestas de los profesores se identificaron estrategias de respuesta que agrupamos en nueve tipos, y dividimos en dos grupos como se muestra en la siguiente tabla:

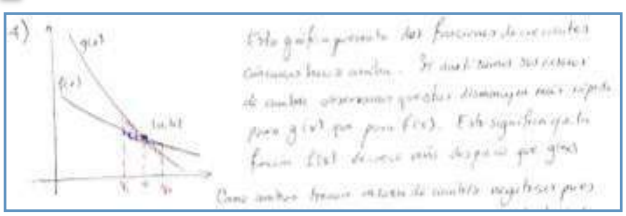
Tabla 1: Tipos de estrategias de respuesta identificadas.

	Descripción	
Grupo 1	Analiza las inclinaciones (pendientes) de las rectas tangentes para determinar en qué punto la primera derivada es mayor.	V1
	Analiza la variación de la primera derivada para determinar en qué gráfica la segunda derivada es mayor.	V2
	Analiza la forma de la gráfica para determinar cual presenta mayor variación	V3
	Identifica el tipo de variación indicada y realiza las gráficas considerando que reflejen esa variación	V4
	Analiza la variación en los datos proporcionados para encontrar algún patrón o comportamiento.	V5
	Utiliza las características particulares de funciones específicas para analizar la variación de la gráfica.	V6
Grupo 2	Propone una función específica de la que conoce, o encuentra, su expresión analítica para operar con ella.	NV1
	Establece una o más propiedades que relacionan el valor de la derivada con alguna característica de la gráfica.	NV2

El grupo 1 consta de las estrategias que hacen uso de un pensamiento variacional para responder a las actividades, en tanto que el grupo 2 consiste en aquellas estrategias que no hacen uso de un pensamiento variacional. Esta diferenciación se realizó con base en el análisis de las respuestas y tomando en cuenta la caracterización del Pylvar.

Ejemplo del grupo 1 es solución del Profesor D a la actividad 2, pues hace uso de la estrategia de Seriación al analizar el comportamiento variacional de las gráficas en una vecindad cercana al punto de intersección, y con base en ello determina el tipo de variación que presenta, para después usar la estrategia de Comparación para determinar cuál gráfica presenta mayor variación. Para ello se apoya en el uso de la pendiente de la tangente y de la forma en que crece o decrece, lo que corresponde a una EstV. El uso de esta estrategia permite la generación de CV apreciables en frases como "alrededor del punto *a* los cambios de *x* con respecto de *y* son mayores en $\mathrm{f(x)}$ que en $\mathrm{g(x)}$".

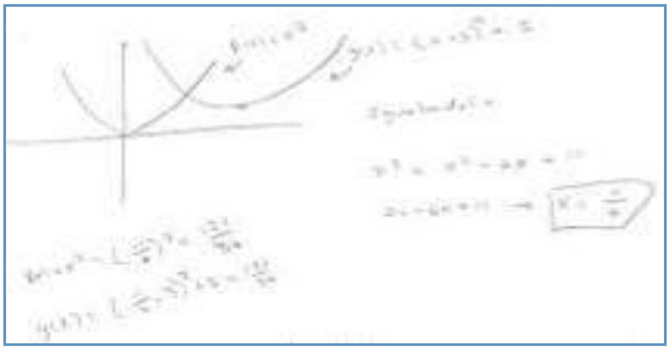
Figura 2: Respuesta del Profesor D a la actividad 2



Si analizamos sus razones de cambio observamos que estas disminuyen más rápido para g(x) que para f(x). Esto significa que la grafica f(x) decrece más despacio que la función g(x).

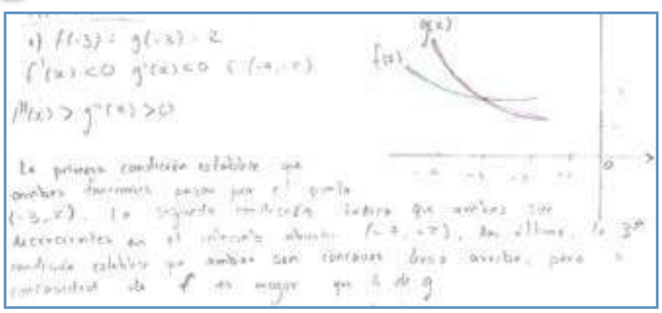
Por otro lado, del grupo 2 observamos que la estrategia NV1 consiste en asumir que las graficas corresponden a un tipo particular de función, y establecer una expresión analítica, aun cuando se haga sobre supuestos no validos. En el caso de profesor C en la actividad 2, asume que las gráficas corresponden a funciones cuadráticas, y propone expresiones analíticas para encontrar su derivada y ver en cuál la segunda derivada es mayor. Esto vuele innecesario recurrir a la variación, pues el profesor se apoya en el "hecho" de que las funciones son cuadráticas.

Figura 3: Respuesta del Profesor C a la actividad 2



La segunda estrategia del grupo 2 es la NV2, que consiste en establecer propiedades matemáticas que permitan al profesor proporcionar una respuesta a las actividades planteadas. No obstante, el uso que se observó de estas propiedades en las actividades no fue siempre valido, y en muchas ocasiones, las mismas propiedades eran incorrectas. Por ejemplo, en la respuesta del profesor A la actividad 2, se plantea de manera implícita la propiedad "*a mayor concavidad mayor valor de la segunda derivada*".

Figura 3: Respuesta del profesor F a las actividad 1

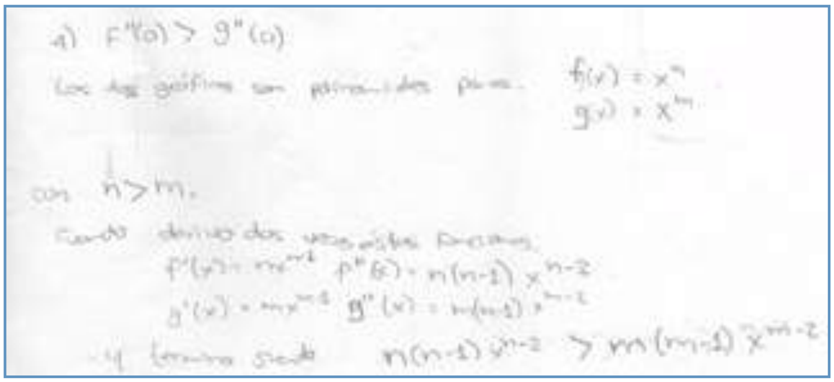


(…) La 3° condición establece que ambas son cóncavas hacia arriba pero la concavidad de f es mayor que la de g.

Desde lo variacional, esta mayor concavidad a la que refiere el profesor corresponde a un menor valor de la segunda derivada, debido a que por la forma que presenta (un curva mas "acostada" y parecida a una recta en el punto de interés) indica que los incrementos son menores a los de una gráfica que presente una gráfica más curveada, sin embargo el profesor parece no darse cuenta de ello, pues se limita a usar la propiedad mencionada.

Otro ejemplo de la centración en el uso de propiedades lo encontramos en las respuestas del profesor F a la actividad 2, donde analiza los valores de los exponentes de funciones polinomicas que considera corresponde a las graficas presentadas:

Figura 4: Respuestas del profesor F a la actividad 2



Este análisis consiste en suponer que las gráficas corresponden a funciones polinomiales con exponente par m y n, en donde la función con mayor exponente será aquella cuya gráfica este “más horizontal” Después el profesor deriva estas funciones polinomiales y compara, según los valores de m y n, las expresiones resultantes para determinar cuál tiene mayor valor de la segunda derivada. Estas acciones del profesor parecen corresponder a un pensamiento variacional debido a que se comparan las expresiones analíticas para determinar cual posee mayor valor de la segunda derivada. No obstante, observamos que esta estrategia no es usada para analizar la variación, sino que sirve como justificación para el uso de una propiedad, que consiste en que la segunda derivada con mayor valor corresponde a la función con exponente más grande. El profesor usa la estrategia de Comparación para verificar el resultado que se obtiene, no para generar el argumento de respuesta, como seria bajo un *pensamiento y lenguaje variacional*.

Conclusiones

Los resultados derivados del análisis a las respuestas de los profesores permiten concluir que el uso de las estrategias del grupo 2 era “forzado”, en el sentido de que se debía asumir datos extras que no eran siempre válidos, como suponer que las gráficas correspondían a una función en particular, o en hacer uso de propiedades que no eran validas en ese contexto. En ese sentido observamos un fenómeno de *adherencia* del conocimiento matemático (Soto, Gómez, Silva y Cordero, 2012), cuya característica es que no permite cuestionar ni trastocar la matemática escolar, lo que repercute en no reconocer otras epistemologías que permitan generar prácticas y usos del conocimiento matemático, en particular, relativos al cambio y la variación.

La centración en este tipo de estrategias no permite al profesor adaptarse a las características de cada situación, sino que se ven en la necesidad de forzar su uso a cada situación, y por tanto esta centración en los objetos matemáticos provoca una *exclusión* a los profesores (Soto, Gómez, Silva y Cordero, 2012) respecto de las prácticas propias de la variación, en favor de métodos algebraicos que no consideran el estudio de la variación ni propician la búsqueda de la predicción como practica inherente a la actividad humana.

Consideramos importante proporcionar a los profesores, tanto en su formación inicial como continua, escenarios donde se resignifique el conocimiento matemático relativo al Calculo mediante el estudio del cambio y la variación, y que permita “romper” con la centración en los objetos matemáticos e incorporar el uso de practicas variacionales.

Referencias bibliográficas

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos el pensamiento y lenguaje variacional. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1197-1205.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. México: Gedisa Editorial.

Cantoral, R.; Farfán, R.; Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número Especial, 83-102.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de maestría no publicada, Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN, México.

Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 435-458.

Soto, D., Gómez, K., Silva, H. y Cordero, F. (2012). Exclusión, Cotidiano e Identidad: Una problemática fundamental del aprendizaje de la matemática. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 1041-1048. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.