GEOMETRÍA DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES DE VARIABLE COMPLEJA

Anairis de la Cruz Benito, Catalina Navarro Sandoval, Marco Antonio Taneco Hernández.
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
iris1790@gmail.com, nasacamx@yahoo.com.mx, moodth@gmail.com

Palabras clave: función, función real, función compleja, gráficas
Key words: function, real function, complex function, graphics

RESUMEN

El presente reporte es el resultado de una investigación, cuyo propósito fue responder la siguiente pregunta: ¿cómo realizar la gráfica de una función de variable compleja, usando como base a la graficación de funciones reales?, teniendo en cuenta esto, se realizaron análisis de funciones reales y funciones complejas respectivamente. En particular en el caso de las segundas se tomaron subconjuntos simples del plano complejo, manejándolos como transformaciones que van de R^2 a R^2. Principalmente los resultados versaron en mostrar estrategias para la construcción de representaciones gráficas de funciones complejas elementales, tales como; la función lineal, cuadrática, cúbica y exponencial.

ABSTRACT

The present report is the result of a research; its purpose was answering the next question: how to realize the graph of a function of complex variable, using as base the graphic of real functions? Having in mind this, we realized analysis of real functions and complex functions, respectively. In particular in the case of seconds we took simple sub classifications of the complex plane, handling them as transformations that are from R^2 to R^2. Mainly the results were in show strategies to the construction of graphic representations of elemental complex functions, such as; the lineal function, quadratic, cubic and exponential.

Introducción

El tema de función está incluido en los planes y programas de estudio desde Nivel Básico hasta Nivel Superior, lo cual ha dado pie al desarrollo de diversas investigaciones tales como: Amaya (2008), Arrellano y Oktac (2009), Patiño (2009) por mencionar algunas, en las que se han atendido distintas cuestiones, por ejemplo, algunos autores analizan los cambios que experimentan la representación gráfica de una función cuando se hacen variar los parámetros que están involucrados en la expresión algebraica de la misma, otros han identificado y reportado las dificultades que presentan los estudiantes de Nivel Medio Superior, al hacer corresponder los registros gráfico y algebraico de algunas funciones. Por otro lado, de acuerdo con los niveles educativos cursados por los estudiantes, se espera que éstos tuvieran desarrollada la habilidad de graficar funciones, sin embargo, los resultados de algunas investigaciones evidencian lo contrario.

A través del análisis de estos artículos especializados en Matemática Educativa, se han detectado y estudiado diferentes problemas relacionados con la graficación de funciones de variable real, en este trabajo se atendió a las funciones elementales de variable compleja. Cabe señalar que para trabajar con estas últimas se consideró importante saber cómo graficar funciones en variable real, lo cual permitió dar el salto al análisis de las funciones anteriormente mencionadas.

En la enseñanza superior el tema de graficación de funciones de variable compleja se ha ido desplazando a un segundo plano, sin embargo, para este nivel educativo es un tema importante, debido a que es base para abordar otros más avanzados. Por lo que en este trabajo se presenta una especie de breviario, que muestra una serie de "pasos" que permiten "graficar" algunas funciones elementales de variable compleja. Concretamente consideramos a las funciones de variable compleja como transformaciones del plano R^2 en sí mismo. Con base en esto último se muestra la *geometría* que guardan algunas de estas funciones cuando son aplicadas a ciertos subconjuntos del plano R^2. Así mismo se muestra el análisis de dichas funciones cuando se hacen variar los parámetros que las acompañan. Al inicio del trabajo, las funciones elementales de variable real que se analizaron en la presente investigación fueron: función lineal, función cuadrática, función cúbica y función exponencial, mismas que se analizaron para funciones de variable compleja.

Problema y objetivo

El problema que motivó la realización de esta investigación fue el hecho de que los estudiantes de nivel licenciatura presentan dificultades en la graficación de funciones de variable compleja, por lo que el objetivo fue elaborar un manual-cuaderno que pudiera servir de apoyo al estudiante para el estudio del tema mencionado. Por tanto la pregunta de investigación clave fue ¿cómo realizar la gráfica de una función de variable compleja, usando como base a la graficación funciones reales?

Marco conceptual

Para esta investigación hemos considerado un marco conceptual, en el cuál se definen los conceptos fundamentales para este trabajo. De acuerdo con De la Cruz (2013) definimos los siguientes:

Función. Una función es una relación entre dos conjuntos *A* y *B* no vacíos en la cual cada elemento de *A* está conectado o relacionado con un único elemento de *B*.

Función real. Una función real de variable real es una colección de pares ordenados de números reales y puede, por tanto considerarse como un subconjunto de puntos en R^2.

Función compleja. Dado un subconjunto *S* del plano complejo *C*, se denomina función compleja de una variable compleja a una aplicación $f: S \rightarrow C$ al que a cada valor $z \in S \subset C$ le corresponde un único numero complejo *f (z).*

Gráfica de una función. La gráfica de una función *f* es el conjunto de parejas ordenadas

(*x, f(x)*) tales que *x* es un elemento del dominio de *f*.

Función lineal real. Toda función de la forma $f(x)= ax+b$ se llama función lineal.

Función cuadrática real. La función de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$, con $a \neq 0$ se llama función de segundo grado.

Función cubica real. Una función cúbica tiene la forma $f(x)=ax^3+bx^2+c+d$, con $a \neq 0$.

Función exponencial real. La función del tipo $f(x)=a^x$, donde $a>0$ y $a \neq 1$ se llama exponencial.

Función lineal compleja. Toda función de la forma $f(z)=\lambda z+\gamma$ se llama función lineal compleja, donde $\lambda, \gamma \in C$

Función cuadrática compleja. La función de la forma $f(z)= \lambda z^2 +\gamma z + \phi$, con $\lambda \neq 0$ y $\lambda, \gamma, \phi \in C$ se llama función cuadrática compleja.

Función cúbica compleja. Una función cúbica compleja tiene la forma $f(z)= \lambda z^3 +\gamma z^2 + \phi z+\mu$, con $\lambda \neq 0$ y $\lambda, \gamma, \phi, \mu \in C$.

Función exponencial compleja. Dado el número complejo $z=x+iy$, la función exponencial se define a través de la fórmula de Euler

$$f(z) \equiv \exp(z)= e^z= e^{x+iy}= e^x(cosy\ iseny)$$

■ Análisis de funciones reales

El análisis de las funciones reales se hizo considerando a estas como transformaciones de la forma $a(x + b)^n + c$ compuestas de desplazamientos verticales, horizontales, contracciones, dilataciones y alargamientos. Y se realizó considerando por separado a cada uno de los parámetros, así para cada una de las funciones.

En este apartado se presentan algunas representaciones gráficas de las funciones estudiadas en el trabajo.

Figura 1. Función lineal

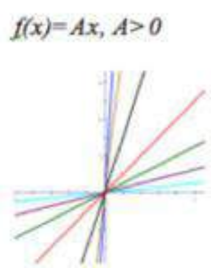


Figura 1. Función cuadrática

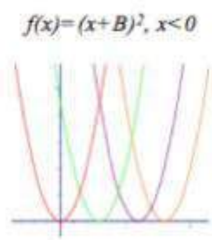


Figura 1. Función cúbica

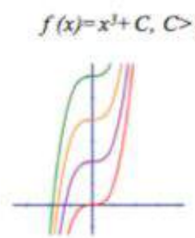
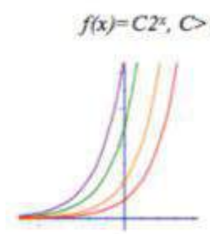


Figura 1. Función exponencial



Análisis de funciones complejas

El análisis se llevó a cabo para cada una de las funciones mencionadas anteriormente haciendo variar cada uno de los parámetros involucrados, aquí se presentan dos ejemplos: uno considerando la función cúbica $f\,(z)=\lambda z^3$ y el otro para la función exponencial $f(z)=e^z$.

La *estrategia* consistió en tomar subconjuntos *simples* del plano complejo C_z, que en este caso fueron rectas , para ver cómo son transformados bajo la función compleja $f(z)$ vista como transformación de R^2 a R^2

Función cúbica

La función cúbica compleja es de la forma $f\ (z)= \lambda z^3+\gamma z^2+\mu z+\alpha$, donde $\lambda,\ \gamma,\ \mu,\ \alpha$ son los parámetros complejos.

- Análisis de la función $f(z)=\lambda z^3$

Sean $z=x+iy$ y $\lambda= \alpha+i\beta$. Entonces

$$\lambda z^3= (\alpha+i\beta)(\ x+iy)^3=(\alpha x^3-3\alpha xy^2-3\beta x^2y+\beta y^3,\ 3\alpha x^2y-3\beta xy^2-\alpha y^3+\beta x^3)\text{-----------}(1)$$

Si tomamos λ= 0+i, entonces (1) implica

$$\lambda z^3= (-3x^2y+y^3,\ -3xy^2+x^3)\ \text{-------------}\ (2)$$

Consideremos el conjunto

$L_1= \{(t,1)\epsilon R^2 : t\epsilon R\}$ ver figura 5

Figura 5. Recta L_1 en C_z

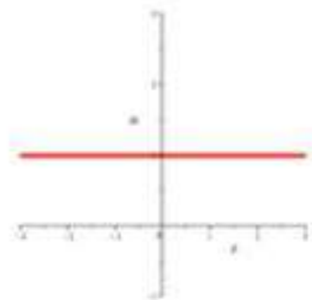
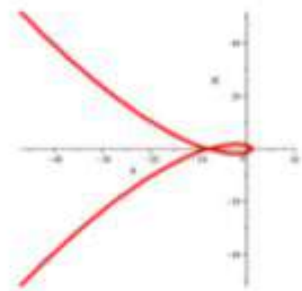


Figura 6. $f[L_1]$ en C_W



Encontramos el conjunto imagen de $L_{1,}$ evaluando los pares ordenados de la forma *(t,1)* en la expresión (2). Así:

$$f[L_1]=\{(x,y) \in R^2: x=-3t^2+1,\ y=-3t^2+t^3,\ t \in R\}$$

En la imagen 6, en la cual se puede observar la transformación del conjunto L_1 bajo la función cúbica $f(z)=\lambda z^3$, con λ= 0+i. Esta transformación de L_1 representa una forma gráfica llamada Folium de descartes (rectas que se intersectan a sí mismas).

Sea ahora el conjunto

$$L_2= \{(t,-1) \in R^2: t \in R\}$$

Figura 7. Recta L_1 en C_z

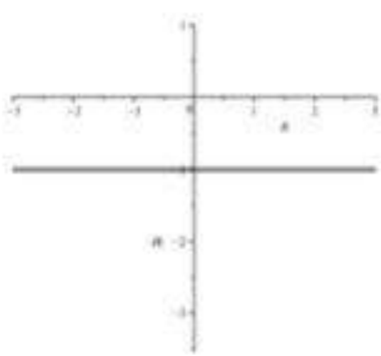
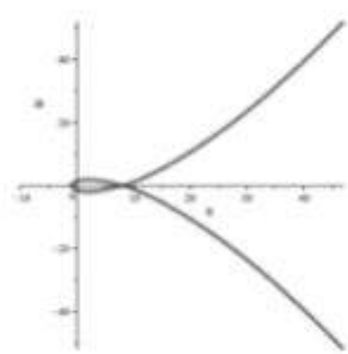


Figura 8. $f[L_2]$ en C_W



Nótese que L_2 constituye una recta paralela al eje real en el plano C_Z, además es simétrica a L_1. (Ver figura 7)

Análogamente a como procedimos anteriormente, el conjunto imagen de L_2 bajo la función compleja (2) es

$$f[L_2]=\{(x,y) \in R^2: x=-3t^2+1,\ y=-3t^2+t^3,\ t \in R\}$$

Obsérvese imagen 8, donde se puede ver la transformación que sufrió el conjunto L_2, bajo el efecto de la función cúbica $f(z)=\lambda z^3$, con $\lambda= 0+i$.

Observación: Notemos que el efecto de la función compleja (2) sobre las rectas paralelas al eje real y simétricas entre sí, fue deformarlas en curvas, con la particular característica de que éstas vuelven a ser simétricas, pero ahora respecto del eje imaginario. El resultado del análisis que hizo sobre esta función puede consultarse en la tabla 1.

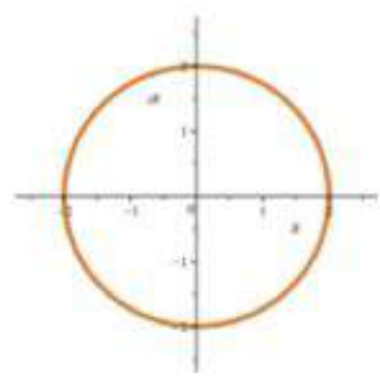
Función exponencial

La representación gráfica de la imagen 10 muestra el efecto que tuvo el subconjunto

$L_1=\{z \in C_z : z = ln(2)+iy,\ y \in R\}$, que representa una recta paralela al eje imaginario del plano C_z (Ver imagen 9), bajo la función $f(z) = e^z$. Se puede apreciar que la recta se transformó en una circunferencia de radio 2 en el plano C_w.

Figura 9. Recta L_1 en C_z

Figura 10. $f[L_2]$ en C_W



Observación: El radio del circulo que resulta en el plano C_w depende de la exponencial del valor que tomamos para x en el plano C_z, en este caso tomamos $x = ln(2)$, por tanto el radio de la circunferencia resultó ser 2.

Resultados del análisis de las funciones de variable compleja

Enseguida se muestra la tabla 1, en la que se enuncian los resultados obtenidos del análisis de cada una de las funciones descritas anteriormente.

Tabla 2. Resumen de las observaciones y análisis del problema 4 del Examen de Cierre.

Función lineal	$f(z)=\lambda z$	Toda recta en *Cz* es girada justamente $\vartheta=arg(\lambda)$ grados, medidos positivamente.
	$f(z)=z+\gamma$	Dado $\gamma= a + ib$ entonces: 1. Si $a > 0$, la gráfica de $f(z)=z+\gamma$ se desplaza *a* unidades hacia la derecha sobre el eje real. 2. Si $a < 0$, la gráfica de $f(z)=z+\gamma$ se desplaza *a* unidades hacia la izquierda sobre el eje real. 3. Si $b > 0$, la gráfica de $f(z)=z+\gamma$ sube *b* unidades sobre el eje imaginario. 4. Si $b < 0$, la gráfica de $f(z)=z+\gamma$ baja *b* unidades sobre el eje imaginario
Función cuadrática	$f(z)=\lambda z^2$	La función $f(z)=\lambda z^2$ siempre transformará rectas en parábolas. Si un par de rectas son simétricas, ya sea con respecto al eje real o al eje imaginario, entonces este par será transformado bajo *f* en la misma parábola.
	$f(z)=z^2+\gamma$	La función $f(z)=z^2+\gamma$ siempre transformará rectas en parábolas, y más aún las rectas que son simétricas ya sea respecto del eje real o del eje imaginario, siempre irán a dar a una misma parábola.
Función cúbica	$f(z)=\lambda z^3$	Si $Re\lambda=0$ y $Im\lambda\neq 0$, entonces las rectas que son simétricas respecto al eje real en el plano *Cz*, resultan ser simétricas pero ahora respecto del eje imaginario en el plano *Cw,* y son llamadas "Folium de Descartes". Las rectas simétricas al eje imaginario en el plano *Cz* bajo la función $f(z)=\lambda z^3$ también resultan ser simétricas pero ahora con respecto al eje real en el plano *Cw*. Si $Re\lambda\neq 0$ y $Im\lambda=0$, entonces las rectas paralelas al eje real bajo la función $f(z)=\lambda z^3$ son transformadas también en curvas simétricas respecto al mismo eje. Análogamente las rectas simétricas al eje imaginario se transforman en curvas simétricas respecto al mismo eje. Si $Re\lambda\neq 0$ y $Im\lambda\neq 0$ entonces la simetría respecto a algún eje de rectas en *Cz* no se conserva bajo la función compleja $f(z)=\lambda z^3$.
	$f(z)=z^3+\gamma$	Si $Re\gamma\neq 0$ y $Im\gamma=0$, entonces las rectas que son simétricas respecto al eje real en el plano *Cz* bajo la función $f(z)=z^3+\gamma$ son transformadas en curvas que guardan cierta simetría en el plano *Cw* respecto al mismo eje. Para las rectas simétricas al eje imaginario sucede algo similar, las rectas son transformadas en curvas que vuelven a ser simétricas al mismo eje. Ahora si $Re\gamma=0$ y $Im\gamma\neq 0$, entonces las rectas paralelas al eje imaginario que son simétricas en el plano *Cz* al aplicarles la función $f(z)=z^3+\gamma$ resultan también ser simétricas en el plano *Cw*, y para las rectas paralelas y simétricas al eje real también se conserva cierta simetría respecto al mismo eje. Si $Re\gamma\neq 0$ y $Im\gamma\neq 0$ entonces ni las rectas paralelas y simétricas a algún eje resultan ser simétricas bajo la función $f(z)=z^3+\gamma$.
Función exponencial	$f(z)=e^x$	La función exponencial transforma rectas horizontales en semirrectas.
		La función exponencial transforma rectas verticales en circunferencias.

Tabla 1.

En la tabla 1 se puede apreciar que para algunas de las funciones analizadas se obtuvieron resultados similares a las funciones de variable real.

Para el caso de las funciones: lineal y cuadrática el resultado obtenido es semejante al ya conocido en variable real.

La función lineal compleja convierte subconjuntos en rectas que son rotadas un cierto número de grados (se específica el número de grados en la Tabla 1), resultado similar para el caso de la función lineal de variable real.

En lo que se refiere a la función cuadrática compleja, los subconjuntos considerados son trasformados en parábolas, al igual que en variable real, con la diferencia de que estas son rotadas un cierto número de grado al aplicarles dicha función compleja.

Para la función cúbica compleja se obtuvieron curvas, fenomeno que se repite en el caso de la función real, a excepción de que las curvas que resultan en la función compleja se intersectan a si mismas, en tanto que en variable real son curvas simples.

La última función analizada fue la función exponencial compleja, la cual arrojó representaciones completamente distintas de las que se conocen en variable real. Dado que en variable real las transformaciones resultan ser curvas simples, y en variable compleja los subconjuntos bajo la exponencial son transformados en semirrectas, o en su defecto en circunferencias.

Referencias bibliográficas

De la Cruz, A. (2013). *Geometría de algunas funciones elementales de variable compleja.* Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Amaya, T. R. (2008). Transformaciones básicas de las funciones. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 487-495. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Arrellano, F. y Oktac, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 357-365. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Patiño, D. (2009). Estudio de comportamientos análogos de funciones algebraicas y trigonométricas usando transformaciones gráficas. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 131-139. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.