

ELEMENTOS DE DISEÑO PARA UNA CLASE DE MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

Ruth Rodríguez, Samantha Quiroz

Tecnológico de Monterrey. (México)

ruthrdz@itesm.mx, samanthaq.rivera@gmail.com

Palabras clave: modelación matemática, tecnología, ecuaciones diferenciales, circuitos

Key words: mathematical modeling, technology, differential equations, circuits

RESUMEN

El presente estudio presenta una propuesta de diseño alternativo para una clase de Ecuaciones Diferenciales basada en la Modelación Matemática, enmarcado en el contexto del tema de Circuitos Eléctricos. Dentro de la propuesta se reconoce a la Modelación Matemática como el medio para el uso o construcción de modelos que permiten resolver problemas en contextos cotidianos y situaciones propias de la ingeniería. La evidencia que se conforma está relacionada con la descripción del diseño de la actividad en base a un esquema de proceso de modelación y los resultados obtenidos durante la implementación de ésta en futuros ingenieros de segundo año.

ABSTRACT

The aim of this study is to analyze an alternative design for a proposal for a Differential Equations Course based on Mathematical Modeling. This study is framed in the context of electrical circuits. The mentioned proposal recognizes the Mathematical Modeling as a means for using or building models to solve problems in everyday contexts and specific situations for future engineers. The evidence presented is related with descriptions of the activities and the results of implementations through a modeling process schema.

■ Introducción

Desde hace aproximadamente 35 años se ha acentuado la búsqueda de la incorporación de fenómenos de la vida real en el aprendizaje de las matemáticas dentro de las aulas de clase de diferentes niveles educativos (Blum y Niss, 1991; Pollak, 1969). Diversos currículos apuntan al reconocimiento de la matemática como asignatura importante sólo en la medida en que pueda servir a los alumnos para la resolución flexible de situaciones de su vida cotidiana (Secretaría de Educación Pública, 2009). Por tal motivo, la modelación matemática puede ser considerada el medio mediante el cual se usan o construyen modelos matemáticos de fenómenos diversos y ésta ha sido el foco de atención de estudio de numerosas investigaciones.

A pesar de ello, persisten aun críticas que señalan que las ideas expresadas en el debate educativo y de innovaciones en el currículo, aun distan de la práctica diaria de la enseñanza de las matemáticas, y que las actividades que genuinamente se trabajan mediante modelación matemática siguen siendo raramente encontradas en las aulas de clase (Niss, Blum, y Galbraith, 2007).

La presente investigación tiene precisamente como objetivo la descripción del proceso de diseño, implementación y resultados obtenidos de una clase basada en modelación matemática. Los resultados se dividen en dos grandes apartados. En primer lugar se detalla los fundamentos teóricos y la manera en que fueron diseñadas las actividades que pudieran llevar a los alumnos a transitar en cada uno de las etapas presentes en los tres diferentes dominios del ciclo de modelación elegido (Rodríguez, 2010). En segundo lugar se describe el proceso de implementación de la clase y la descripción de las actividades (Rodríguez, Quiroz, e Illanes, 2012; Rodríguez, 2013).

Por último se concluye exponiendo de que manera los resultados podrían aportar elementos para aclarar el funcionamiento de algunas de las etapas del ciclo de modelación matemática elegido y con ello tener mayor información para el desarrollo futuro de secuencias didácticas en otras situaciones de aprendizaje; para otro nivel educativo y para otro tema matemático.

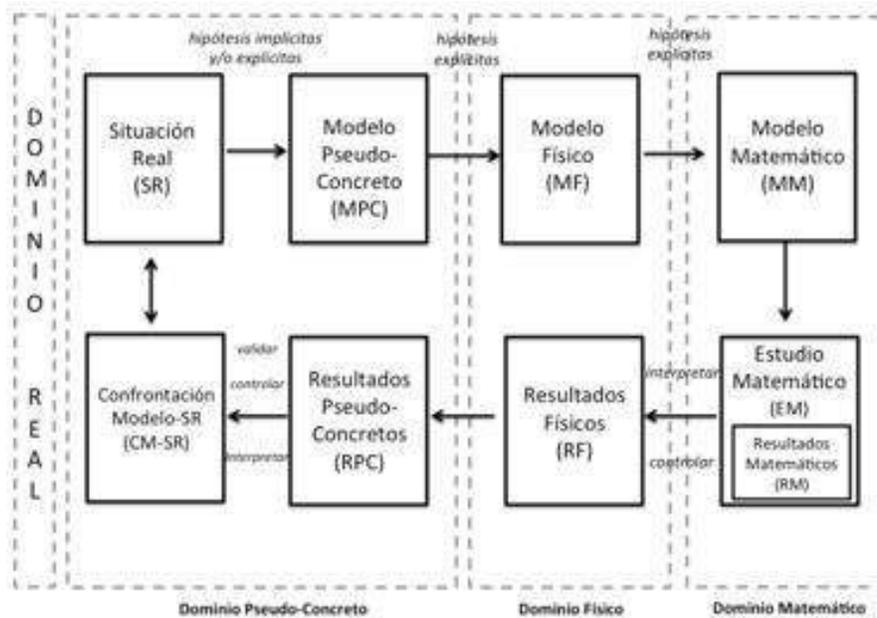
■ Marco teórico

Hace más de dos décadas, los trabajos de Blum y Niss (1990) y posteriormente de Henry (2001), reportaban la importancia de la vinculación entre las matemáticas escolares y la “realidad” (contextos extra-matemáticos) a través del proceso de modelación matemática. Aunados a estos estudios y tomándolos como antecedentes fundamentales de su investigación, Rodríguez (2010) define a la modelación matemática, desde un enfoque educacional, como la construcción y el uso de conceptos y modelos a través de una tarea asociada a un contexto real de modelación de acuerdo a las perspectivas previamente identificadas por Kaiser y Sriraman (2006).

Un contexto “real” de modelación se refiere a aquellos contextos cotidianos, sociales, culturales, de consumo o de otras ciencias en los cuales los estudiantes se ven enfrentados a la identificación y manipulación de datos, a la simplificación y abstracción de cantidades y variables con miras a la construcción de un modelo de resolución (Ochoa, Alexander, Suárez, Rico, Mario, 2010).

Para su estudio, la modelación matemática será representada gráficamente a través de un diagrama presentado por Rodríguez (2010) que involucra cuatro dominios diferentes en los cuales están insertos ocho etapas principales (Ver Figura 1).

Figura 1. Ciclo de modelación de Rodríguez (2010)



La importancia de dicho esquema estriba, entre otros, en el reconocimiento de un dominio físico que apoya el paso entre el dominio *pseudo-concreto* (basado en estudios de Henry, 2001) que describe esa etapa intermedia entre el pasar de la “realidad” y el modelo matemático. Se reconoce de esta manera a la modelación matemática como un proceso cíclico donde el alumno transita con el propósito de buscar el aprendizaje significativo de cierto contenido matemático.

Por otro lado, se tiene identificada y ampliamente reportada en la literatura la problemática existente en la enseñanza y aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales (ED). En particular, se ha puesto énfasis en el significado que los alumnos pueden conferirle a este objeto matemático y a la solución de la misma. Uno de los principales, es el trabajo realizado en el aula escolar con representaciones numéricas o gráficas de la solución de una ED, habiendo una preponderancia importante de métodos analíticos para la resolución de ED (Arslan, Chaachoua, y Laborde, 2004; Artigue, 1989; Blanchard, 1994).

Nuestra propuesta parte de la idea de diseñar actividades en base al esquema de modelación matemática propuesto inicialmente (Ver Figura 1) dando a los alumnos la posibilidad de conocer la situación “real” o cotidiana a modelar; proponer representaciones alternativas de la ED y finalmente hacer un juego de representaciones que permitan dotar de significado al objeto matemático.

Un reto principal de los profesores que diseñan situaciones basadas en modelación es el conocer el dominio extra-matemático en el cual se pretende modelar, que demanda no sólo el estudio al respecto sino dar respuesta a una serie de cuestionamientos y dudas de aspectos no matemáticos, sino referentes al fenómenos en cuestión, que los alumnos pueden generar. Aunque puede escucharse complicado, es un reto factible a ser superado por un profesor interesado en innovar, en enfrentarse a la incertidumbre pero sobre todo preocupado por mostrar a sus alumnos ese aspecto instrumental de la matemática; tan valioso y clarificador en el significado de la ED. A pesar de esfuerzos realizados, actualmente se tiene un hueco importante por trabajar en lo que respecta al trabajo con docentes y la generación de situaciones didácticas donde apliquen la modelación matemática. Por lo anterior, la presente investigación pretende aportar en mostrar el proceso de elección de actividades relacionadas con modelación matemática para la enseñanza de un curso de ED. Se reportan los resultados obtenidos en el aprendizaje de los alumnos y con ello el aporte de elementos para la indagación de criterios importantes que conduzcan al armado de secuencias didácticas basadas en un contexto real de modelación.

■ Método

El presente investigación está enmarcada dentro de un enfoque cualitativo de tipo descriptivo puesto que pretende en todo momento comprender el fenómeno a estudiar (Hernández, Baptista, y Fernández, 2010). La recolección de datos se llevó a cabo en una universidad privada al norte de México. La población está compuesta un grupo de alumnos de diversas ingenierías que cursan la materia de Ecuaciones Diferenciales. Para el análisis de lo ocurrido se eligieron seis estudiantes que trabajan en dos equipos de trabajo y que conforman la muestra seleccionada. El curso de ED que se imparte en la universidad ha formado parte de un proceso de rediseño desde el año del 2008 con el propósito de enfatizar el aprendizaje de este tópico a través de modelación matemática. El objetivo primordial del curso es mostrar al alumno el que la ED no es solo un objeto matemático a estudiar sino además una herramienta útil para modelar fenómenos en diversos contextos propios de la ingeniería (físicos, químicos, biológicos, sociales, etc.).

Dentro de las acciones realizadas para el rediseño del curso se incluyen el trabajo con diversas herramientas tecnológicas (Maple, Mathematica, Wolfram Alpha, calculadoras TI Nspire CX CAS, sensores, simuladores, etc.) La elección de la tecnología para cada una de las sesiones del curso está relacionada directamente con el propósito mismo de la clase y con el contexto del fenómeno en que se requiere modelar.

El contexto elegido para el presente estudio es de naturaleza eléctrica y propone el análisis de problemas relacionados con la carga y la descarga de un capacitor en un circuito eléctrico Resistencia-Capacitor (RC). Este fenómeno permite poner en juego cuestiones importantes sobre el análisis de ED que pueden ser resueltas mediante el método de ED lineal primer orden. El orden de las sub-actividades propuestas para la actividad estuvo basada en el esquema de modelación matemática (Rodríguez, 2010). La implementación de las actividades planeadas se llevó a cabo en dos sesiones de una hora y media cada una. Durante las sesiones, las investigadoras tuvieron el rol de docente de la clase por lo que su participación se considera activa. La recolección de datos se realizó mediante observaciones directas y videograbaciones que posteriormente fue transcrita.

■ Diseño de la secuencia didáctica

Posterior a la implementación de la actividad, ésta fue sometida a discusión por un grupo de expertos en el área de ingeniería eléctrica y mecánica de la institución.

Las actividades elegidas estuvieron en todo momento vinculadas con cada etapa del ciclo de modelación matemática:

- Etapa de presentación de la Situación Real (SR)
- Etapa de formación del Modelo Pseudo-concreto (MPC)
- Etapa de formación del Modelo Físico (MF)
- Etapa de formación del Modelo Matemático (MM)
- Etapa de Estudio y Resultados Matemático (RM)
- Etapa de Resultados del Modelo Físico (RMF)
- Etapa de Resultados del Modelo Pseudo-concreto (RMPC)
- Etapa de Confrontación del Modelo con la Situación Real (CM-SR)

Cada actividad tenía el propósito de apoyar al alumno en cada etapa del proceso de modelación matemática así como en sus transiciones. Se presentan en la Tabla 1 las actividades elegidas para cada contexto así como las etapas y transiciones a las cuales se vincularon.

Tabla 1. Construyendo un Circuito eléctrico RC y modelarlo a través de una ED

No.	Actividad propuesta	Etapas y transiciones del ciclo de modelación
0	Formar al grupo en equipos de tres personas. Entregar un formato de práctica por equipo, que se utilizará a lo largo de la sesión.	
1	Plantear al grupo el siguiente problema: Se quiere calcular la función de carga en todo tiempo de un circuito eléctrico con un capacitor de $1000 \mu F$ y resistencias de 330Ω . Posteriormente nos interesa saber ¿cuál es su carga cuando han pasado 1.5 segundos?, ¿Qué pasa con la carga cuando ha pasado mucho tiempo?, ¿cómo es la gráfica que modela el fenómeno estudiado?, ¿porqué?	Etapa de presentación de la Situación Real (SR).
2	Promover la discusión de los conocimientos previos de los alumnos para construir un primer modelo de una ecuación diferencial que modela el circuito eléctrico RC en términos pseudo-concretos.	Etapa de formación del Modelo Pseudo-concreto (MPC)
3	Discutir grupalmente los conocimientos previos de los alumnos para construir el modelo de una ecuación diferencial de un circuito eléctrico RC.	Etapa de formación del Modelo Físico (MF) y su transición hacia la Etapa de formación del Modelo Matemático (MM)
4	Armar por equipos un circuito eléctrico RC. Conectar el sensor de la Calculadora y observar la gráfica que se forma en la carga y descarga del capacitor.	Etapa de formación del Modelo Físico (MF) y su transición hacia la Etapa de Resultados del Modelo Físico (RMF)
5	Realizar una actividad donde se analizan las gráficas de carga y descarga del capacitor elaboradas por los alumnos y se les pide analizarlas.	Etapa de Estudio y Resultados Matemático (RM) y su transición hacia la Etapa de Resultados del Modelo Físico (RMF)
6.	Resolver un problema por equipo que involucra la	Etapa de Estudio y Resultados Matemático (RM),

No.	Actividad propuesta	Etapas y transiciones del ciclo de modelación
	utilización del modelo elaborado en un Circuito RC con entrada constante	su transición hacia la Etapa de Resultados del Modelo Físico (RMF) y a su vez su transición hacia la Etapa de Resultados del Modelo Pseudo-concreto (RMPC)
7	Contestar individualmente un problema en el que se les pide determinar la carga y la corriente de un circuito RC con entrada variable.	Etapa de Confrontación del Modelo con la Situación Real (CM-SR) (Ver Figura 2)

■ Implementación en el aula

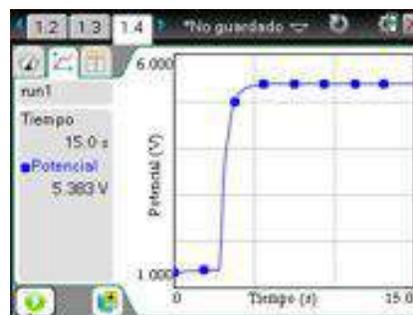
El planteamiento de la pregunta inicial pareció ser una motivación para los alumnos quienes iniciaron rápidamente con la expresión de sus conocimientos previos que los llevaron a la formación de un modelo físico (establecido a través de la Ley de Kirchoff) mediante el debate de todos los alumnos y la maestra.

Ambos equipos observados (tres alumnos cada uno) lograron el armado del circuito eléctrico utilizando el material que se proporcionó. El uso del material tecnológico se realizó de manera intuitiva no registrándose problemáticas a pesar de que para algunos de los estudiantes representaba la primera ocasión en que trabajaban con dichos materiales.

Se pudo apreciar que la gráfica generada por el sensor y la calculadora permitió la reflexión sobre el significado de la solución de la Ecuación Diferencial planteada al inicio de la clase. El análisis de la solución en una representación gráfica se vio reforzada por el detalle de lo ocurrido numéricamente puesto que el mismo sensor proveía de una tabla con el registro por fracciones de segundo sobre la carga del capacitor.

En las discusiones al momento de resolver la ED de manera analítica, se dejó ver que los alumnos enfatizaban aspectos de la solución gráfica que debía reflejarse al momento de su resolución analítica. Por ejemplo, cuando se les preguntó a los estudiantes que pasaría con la carga en el capacitor después de haber pasado mucho tiempo, los alumnos estaban de acuerdo en que la carga en el capacitor se estabilizaría, esto es, estaría igualado a un valor constante, que debería representar el voltaje de las baterías (ver Figura 2).

Figura 2. Pantalla de la gráfica generada por el sensor de voltaje



Luego de que los alumnos encontraron en cada equipo la solución, se institucionalizó la respuesta mediante el intercambio de procedimientos a manera grupal.

La actividad permitió a los alumnos reflexionar sobre su respuesta en el dominio físico, y señalar cómo cada término de la solución analítica representaba un aspecto dentro del circuito eléctrico que ellos mismos habían armado.

En el planteamiento de un problema final, donde se pedía calcular la carga en un capacitor dentro de un circuito con entrada de voltaje no constante, los alumnos tuvieron la oportunidad de validar su modelo y con ello reflexionar en términos del contexto mismo la respuesta del dominio matemático.

■ Conclusión

A través de este ejemplo de diseño que hemos sistematizado para otras actividades, se logró guiar a los alumnos entre las diversas etapas del ciclo de modelación matemática, donde se resaltan diversos aspectos. En primero lugar, el contexto elegido, que definió el planteamiento de la pregunta inicial, fue decisivo para guiar la sesión de clase. El contexto eléctrico permitió lograr una motivación entre los alumnos quienes lo reconocían como un fenómeno presente en la práctica cotidiana de un ingeniero aunque era lo suficientemente conocido por algunos de ellos, lo cual propuso un reto en modelarla.

Para la resolución del problema, el trabajo en colaborativo tuvo un papel importante puesto que fue a través de éste, como los alumnos armaron el circuito eléctrico físico y dieron respuesta a la problemática planteada. La riqueza de las discusiones permitió a los investigadores analizar la utilidad y facilidad del uso de la tecnología seleccionada y del diseño originalmente planteado. El variar/transitar en diversas representaciones de la solución de la ED permitió a los alumnos comprender mejor la relación existente entre el modelo físico y los resultados de la manipulación del modelo matemático.

El diseño de situaciones basadas en modelación matemática exige del profesor un conocimiento profundo del propio ciclo de modelación, el reconocer sus etapas y las transiciones de éste. Por ello, consideramos que es fundamental que desde la formación de docentes se fomente el trabajo con actividades de diseño e implementación de este tipo de secuencias didácticas; así como la constante actualización, documentación y mejora de las mismas.

■ Referencias bibliográficas

- Arslan, S., Chaachoua, H., y Laborde, C. (2004). Reflections on the teaching of differential equations, What effects of the teaching of algebraic dominance? In *Memorias del X Congreso Internacional de Matemática Educativa* (pp. 15–29). Sevilla, España.
- Artigue, M. (1989). Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles du premier cycle universitaire. In *Cahier du séminaire de Didactique des Maths et de l'Informatique de Grenoble* (pp. 183–209). Grenoble: IMAG.

- Blomhøj, M. (2004). *Mathematical modelling, A theory for practice*. (B. Clarke, D. Clarke, G. Emmanuelsson, B. Johanansson, D. Lambdin, F. Lester, K. Walby, Eds.), *International Perspectives on Learning* (pp. 145–159). Suecia: National Center for Mathematics Education.
- Blum, W., y Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling : Can it be taught and learnt? *Mathematical Modelling*, 1(1), 45–58.
- Blum, W., y Leiss, D. (2006). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example “Filling up.” In Haines et al. (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood Publishing.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, Modelling, applications, and links to other Subjects - state, trends and issues in Mathematics instruction. In: *Educational studies in mathematics 22* (pp. 37-68). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht: Dorfler
- Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l’enseignement. In *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 149–159). Bessançon: Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.
- Hernández, R., Baptista, P., y Fernández, C. (2010). *Metodología de la investigación*. México, D.F.: McGraw-Hill.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302–310. doi:10.1007/BF0265 2813
- Niss, M., Blum, W., y Galbraith, P. (2007). Introduction. *Modelling and applications in mathematics education, The 14th ICMI Study*, 10(1), 3–32. doi:10.1007/9780387298221
- Ochoa, A. J., Suárez, R., Rico, C., Mario, C., (2010). ¿Realidad en las matemáticas escolares?: Reflexiones acerca de la “realidad” en modelación en educación matemática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 29 (pp.1-17). Medellín, Colombia: Fundación Universitaria Católica del Norte.
- Pollak, H. (1969). How can we teach applications of Mathematics? *Educational S*, 2(2), 393–404. doi:10.1007/BF00303471
- Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13(4-1), 191–210. Disponible en <http://www.clame.org.mx/relime.htm>
- Rodríguez, R. (2013). Innovation in the Teaching of Mathematics for Engineers through Modeling and Technology: a Mexican Experience. *Proceedings of the American Society of Engineering Education (ASEE) International Forum*. Atlanta, GA: USA. <http://www.asee.org/public/conferences/27/papers/8339/view>
- Rodríguez, R., Quiroz, S., e Illanes, L. (2012). Competencias de Modelación y uso de Tecnología en Ecuaciones Diferenciales. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*. Disponible en <http://www.clame.org.mx/documentos/alme26v.2.pdf>
<http://www.clame.org.mx/documentos/alme26v.2.pdf>
- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2009). *Plan de Estudios 2009*. México, D.F.: Secretaría de Educación Pública.