UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2014

SANDRA LORENA CHAVARRÍA BUENO

DE LAS ECUACIONES A LA TEORÍA DE GRUPOS, ALGUNOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

Materias o temas: Historia de las Matemáticas, Educación Matemática

DE LAS ECUACIONES A LA TEORÍA DE GRUPOS, ALGUNOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

SANDRA LORENA CHAVARRÍA BUENO

Trabajo de grado presentado al Programa Académico Licenciatura en Matemáticas y Física como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

DIRECTOR

Dr. Luis Recalde Caicedo

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA

PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2014

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

TÍTULO DEL TRABAJO:	DE LAS ECUACIONES A LA TEORÍA DE GRUPOS: ALGUNOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS
Se trata de:	Proyecto [ ] Informe Final [X]
Director:	LUIS C. RECALDE CAICEDO
1er Evaluador:	GUILLERMO ORTIZ RICO
2do Evaluador:	LUZ VICTORIA DE LA PAVA
Fecha y Hora	Año: 2014 Mes: 03 Día: 25 Hora: 08:00

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
SANDRA LORENA CHAVARRÍA BUENO	0630695	LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA 3487

EVALUACIÓN

Aprobado		Meritorio		Laureado	X
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:		Mes:		Día:		Hora:	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

FIRMAS:

	Guill Ortiz R	
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

OBSERVACIONES:		**RECOMENDACIONES:**		**RAZÓN DEL DESACUERDO – ALTERNATIVAS:**	

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

La recomendación de LAUREADO se sustenta en las siguientes razones:

- El trabajo sobrepasa el promedio de los estándares de un trabajo de pregrado.
- La estudiante muestra gran solvencia en la comprensión de temas complejos.
- Ha escrito la monografía con un alto grado de originalidad y en términos generales la escritura es impecable.
- Es un trabajo que se puede constituir en un referente de consulta tanto para profesores en ejercicio como estudiantes avanzados.
- Unanimemente se recomienda la elaboración de un artículo.

Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

Gdo

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.
b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: De Las ecuaciones a la teoría de grupos: algunos obstáculos epistemológicos

Autores:

Nombre: Sandra Lorena Chavarría Bueno — Firma: Sandra L. — C.C. 1130623483

Nombre: — Firma: — C.C.

Nombre: — Firma: — C.C.

Fecha: 25 de marzo de 2014

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIONES

RESUMEN

Desde un enfoque histórico-epistemológico se pretende mostrar cómo la evolución del pensamiento algebraico, a través de la resolución de ecuaciones, confluye en el surgimiento del concepto de grupo que se convierte finalmente en el concepto central de una disciplina tan importante en las matemáticas como es el álgebra moderna.

Se realiza un análisis histórico-epistemológico desde las apariciones más antiguas que se encuentran documentadas sobre la solución de ecuaciones, mostrando la vigencia e interés de la comunidad matemática durante un largo periodo por encontrar mejores y más eficientes métodos para resolver ecuaciones de la forma $p(n) = 0,\ n \leq 4,$ donde $p(n)$ es un polinomio en la variable $n,$ centrándonos con especial interés en la época comprendida entre los siglos XVI al XIX donde mostraremos que el cambio de perspectiva frente al problema de resolver ecuaciones de cualquier grado n trae como consecuencia la génesis de las llamadas estructuras algebraicas, en particular a la teoría de grupos.

Palabras Clave: Historia del álgebra, Resolución de ecuaciones, Obstáculos epistemológicos, Teoría de grupos, Estructuras algebraicas.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado está enmarcado en la línea de investigación de Historia y Educación Matemática considerando un enfoque de corte epistemológico.

En este trabajo, a través de un análisis histórico-epistemológico, se muestra cómo a lo largo de la evolución de la teoría de ecuaciones se gestan las bases teóricas del álgebra moderna, dejando finalmente un material de consulta para didactas, profesores, estudiantes y todo aquel que desee dar cuenta de los momentos históricos donde se presentaron obstáculos, retrocesos, cambios de enfoque y estancamientos en la constitución de la noción de grupo, que se revelará fundamental para la emergencia del álgebra moderna.

Este trabajo se desarrolla en cinco capítulos, los cuales están concentrados temáticamente así:

En el capítulo 1 se hace un recorrido desde las huellas primitivas de pensamiento algebraico donde se evidencian algunos atisbos de estructuras algebraicas, iniciando con los babilonios y egipcios, quienes desarrollan unos primeros métodos de solución de problemas cotidianos que serán analizados desde una mirada algebraica actual. El trabajo de Euclides también hará parte de los temas abordados en este primer capítulo. Se identifican elementos importantes en su obra alrededor de la resolución de ecuaciones y la constitución de estructura algebraica.

En el capítulo 2 situamos el inicio de lo que actualmente se conoce como álgebra en los árabes, específicamente en el trabajo de Al-Khowarizmi. Esta postura será justificada a lo largo de este capítulo y a la luz de los aportes de su obra.

También trabajamos alrededor de la obra de Cardano y sus contemporáneos. Se plantea cómo el método de resolución por medio de radicales, que propone Cardano para las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, es el motivo que impulsa a los matemáticos de la época a la búsqueda de resolución de ecuaciones de quinto grado en adelante.

Este hallazgo deja trazadas unas líneas de interés, que a pesar de su motivación real centrada en la emergencia de los métodos de solución de ecuaciones, termina desembocando en ejemplos particulares de lo que a la postre se convertiría en los conceptos de grupo, semigrupo, grupo normal y acercamiento a otras estructuras principales en el álgebra moderna.

El capítulo 3 inicia con una las primeras demostraciones del teorema fundamental del álgebra hecha por Gauss, además se muestra un caso particular de ecuaciones que se pueden resolver por el método de radicales.

En este capítulo se presenta el cambio de enfoque que le dio Lagrange a la resolución de ecuaciones por el método de radicales. Lagrange logra obtener un método, llamado la resolvente, en el que subyacen todos las técnicas, hasta el momento conocidas, para encontrar la solución por radicales de las ecuaciones hasta cuarto grado. Lagrange creyó poder extender su método a las ecuaciones de grado mayor o igual que cinco, sin lograrlo. Los matemáticos, durante más de dos siglos y en particular los geómetras, estuvieron buscando la solución para una ecuación de quinto grado o mayor por medio de radicales.

Aún después del cambio de perspectiva dado por Lagrange en su intento fallido de encontrar la solución por medio de radicales de la ecuación de grado cinco, se continúa en la búsqueda del método desde la perspectiva geométrica y analítica. Es desde esta última que Abel consigue demostrar la imposibilidad de resolver, en general por medio de radicales, la ecuación de quinto grado o mayor. Al final de este capítulo, se destaca el cambio de vista filosófico de la comunidad matemática, lo que genera el advenimiento de una larga cadena de resultados en esta misma dirección.

En el capítulo 4, partiendo de la demostración sobre la imposibilidad de resolver por medio de radicales las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco, se da respuesta a la pregunta: ¿Cuándo una ecuación es resoluble por medio de radicales? Para la época ya era claro, gracias al trabajo de Gauss en esta dirección, que algunas familias particulares de ecuaciones de grado mayor a cuatro eran resolubles por radicales; el interés de los matemáticos se enfoca ahora en caracterizar de manera general las ecuaciones de quinto grado y mayores, que sí son resolubles por radicales. Este problema es resuelto finalmente por Evariste Galois; su memoria es el contenido central de este capítulo.

Seguidamente se muestra cómo a partir del trabajo de Galois se da lugar a la constitución del concepto de grupo. A esta altura del trabajo damos una mirada hacia atrás y se presentan las primeras estructuras de grupo que se encuentran en la historia, como los grupos abelianos y los grupos de permutaciones; además se expone cómo el concepto de grupo cumple un papel unificador entre la geometría y el álgebra.

Finalmente en el capítulo 5, se presentan algunas posturas, a la luz de nuestro análisis, de tipo didáctico. Mostramos cómo el referente geométrico se convierte en una fuente de obstáculos para el pensamiento algebraico; a este obstáculo de tipo epistemológico se le llama **Insistencia del referente geométrico**. A lo largo de este trabajo, también se observa una búsqueda constante, por parte de los matemáticos, del método para solucionar cualquier ecuación, lo cual se va fortaleciendo a medida de que tienen éxito en sus hallazgos, este hecho se caracteriza con más profundidad en este capítulo y se establece como un obstáculo epistemológico al que se le llama el **Paradigma de la solución**.

1. DESARROLLO PRIMITIVO DE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

El álgebra es muy generosa. Siempre nos dice más de lo que le preguntamos.

D'Alembert

1.1 Las primeras huellas de pensamiento algebraico

De la resolución de ecuaciones se encuentran evidencias que datan aproximadamente del año 2000 a. C. Los papiros egipcios son algunas de las fuentes primarias que aún se conservan; como el papiro de *Rhind*, llamado inicialmente Papiro *Ahmes*, escrito aproximadamente en el siglo XVII a.C., el cual plantea y resuelve diferentes problemas de tipo práctico tales como: repartir pan, cervezas y calcular áreas de terrenos; tales situaciones desde una mirada actual conducen a ecuaciones lineales.

Los egipcios también se plantearon problemas un poco más generales, en los que se avizora una especie de incógnita, los cuales enfrentaban por medio de técnicas previamente establecidas, entre las cuales sobresale la llamada "Regla de falsa posición". Con esta técnica hallaban la solución a problemas concretos que correspondían a ecuaciones lineales de la forma $ax = b$. La regla consistía en asignarle un valor cualquiera a la incógnita, calcular el resultado y aplicar una regla de tres simple.

A continuación se presenta el enunciado del problema 25 del *Papiro de Ahmes*, en el que se puede advertir el empleo de la llamada álgebra retórica:

Una cantidad y la mitad de esta cantidad es igual a 16. ¿Cuál es esa cantidad?

Sin alejarse del contexto, se presenta en el lenguaje algebraico actual el problema anterior:

$$x + \frac{1}{2}x = 16.$$

Para resolver esta ecuación lineal, procedían a dar un valor cualquiera a la incógnita, a la que denominaban *aha* que traduce montón. Si tomamos $x = 4$ entonces:

$$4 + \frac{1}{2}(4) = 6\,.$$

De donde concluían que x es a 16, como 4 es a 6. En notación moderna se puede escribir así:

$$\frac{x}{16} = \frac{4}{6},$$

$$x = \frac{4 \times 16}{6}\,,$$

$$x = \frac{32}{3}\,.$$

Se puede visualizar un asomo de pensamiento algebraico en los trabajos de los egipcios, puesto que en ésta, y otras técnicas usadas por ellos, se manifiesta una sencilla abstracción de tipo algorítmico.

Contemporáneos a los egipcios se encuentran los babilonios, cuyos hallazgos son más numerosos, pues a diferencia de los papiros, los babilonios trabajaban en tablas de arcilla, lo que ha permitido tener más documentación sobre ellos. Se sabe que los babilonios también trabajaban con el método de falsa posición, pero además resolvieron con un procedimiento similar, llamado regla de doble falsa posición, problemas particulares que, desde un lente moderno, corresponden a ecuaciones de la forma:

$$ax + b = c\,.$$

Esta fórmula consiste en asignarle dos valores cualesquiera a la incógnita, en este caso se tomaran m_1 y m_2 y se reemplazan en la ecuación así:

$$am_1 + b = c,$$

$$am_2 + b = c,$$

llamando p a la ecuación $am_1 + b = c$ y q a la ecuación $am_2 + b = c,$ se plantea la siguiente proporción:

$$\frac{p}{m_1 - x} = \frac{q}{m_2 - x},$$

de donde, despejando x, se obtiene:

$$x = \frac{pm_2 - qm_1}{p - q}.$$

Este método fue retomado y complementado por los árabes Al-Qalasadi (1423-1494) y Beda Eddin (1547-1622) con un esquema gráfico que mostraba las posiciones de cada término y sus signos correspondientes.

A pesar de que se encuentra similitud en los desarrollos matemáticos de los Egipcios y los Babilonios, una de las diferencias consiste en que aunque ambos estaban interesados en resolver problemas de tipo práctico como repartir tierras, objetos, calcular áreas de terrenos, etc., se encuentran problemas planteados por los babilonios que desde una mirada actual, equivalen a ecuaciones cuadráticas.

Aunque no hay evidencia de que los babilonios hayan logrado abstraer una fórmula para resolver las ecuaciones cuadráticas a las que ellos se enfrentaban, al revisar distintos problemas se puede ver que la técnica que utilizaban subyace en lo que hoy conocemos como la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

> Se han encontrado muchos registros de alrededor del año 1600 a. C. que muestran que los problemas de ecuaciones lineales eran muy elementales para ellos y en cambio podían resolver problemas que involucraban ecuaciones cuadráticas y cúbicas usando fórmulas desarrolladas exprofeso. De estas tablillas es posible concluir que los babilonios podían resolver ecuaciones cuadráticas con un método que es, en esencia, el que nosotros aprendemos en la secundaria: el de la fórmula general. (Dávila Rascón, 2002, pág. 13)

A continuación se presenta, en términos generales, el método empleado por los babilonios para resolver problemas, en los que se encuentran implícitas ecuaciones cuadráticas, cabe recordar que al igual que los egipcios se trabajaba en álgebra retórica y que lo que se hace aquí es una traducción a un lenguaje algebraico simbólico.

Los babilonios podían encontrar dos números x e y tales que la suma y producto estén dados:

$$x + y = s\,,$$

$$xy = p\,,$$

para ello tomaban la mitad de la suma y la elevaban al cuadrado:

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2,$$

seguidamente le restaban el producto y tomaban la raíz cuadrada de este resultado:

$$\sqrt{\boldsymbol{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}},$$

finalmente los dos valores se encontraban restándole o sumándole $\frac{s}{2}$ al resultado anterior:

$$x = \left[\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}\ \right].$$

$$x = \left[\frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}\ \right].$$

Se puede corroborar que en estos pasos resuelve una ecuación cuadrática, pues si tomamos

$$x + y = s\ ,$$

multiplicando a ambos lados por x y remplazamos $xy = p$, se obtiene:

$$x^2 + p = sx,$$

que equivale a tener

$$x^2 - sx + p = 0\,.$$

Como se mencionó antes, al hacer un análisis detenido de las soluciones que se encuentran por este método, se puede notar que los babilonios no tenían una conciencia del algoritmo que se planteaban para resolver sus problemas, inclusive consideraban cada problema como nuevo, lo que se puede ver es que esos algoritmos era muy similares a los que se utilizan actualmente para la resolución de ecuaciones cuadráticas:

Si se toman las soluciones:

$$x = \left[\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}\ \right],$$

$$x = \left[\frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \;\right],$$

se puede escribir una expresión que contenga a ambas soluciones, pues note que la diferencia entre ellas es un signo:

$$x, y = \left[\frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \;\right],$$

la anterior expresión equivale a tener:

$$x, y = \left[\frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \;\right],$$

Esta fórmula es la formula general para resolver ecuaciones cuadráticas donde el término cuadrático es 1, los babilonios trabajaban con este tipo de ecuaciones, se puede notar que al tener una ecuación cuadrática de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0\,,$$

si se dividen todos los términos por el coeficiente del término cuadrático, en este caso sería dividir por a, quedaría como lo planteaban los babilonios, esto permite ver la cercanía que tuvieron a la formula general para resolver ecuaciones cuadráticas.

Los babilonios no solo resolvieron problemas que corresponden actualmente a ecuaciones a partir de la suma y el producto, como se acaba de observar, sino también con la diferencia y el producto. Estos problemas no solo llaman la atención por su avance y habilidad de los babilonios para la resolución de ecuaciones, sino que deja ver que este método les permitió avanzar hasta lograr resolver ecuaciones cúbicas de la forma:

$$\boldsymbol{x^3 = a} \quad \text{y} \quad x^3 + x^2 = a\,. \qquad \textbf{\textit{1.1}}$$

Para esto los babilonios construyeron unas tablas con todos los posibles resultados obtenidos al remplazar en las ecuaciones 1.1 los números del 1 al 30. Para las ecuaciones de la forma:

$$ax^3 + bx^2 = c,$$

se hacían una serie de transformaciones hasta conseguir dejarla en una de las formas $x^3 = a$ ó $x^3 + x^2 = a$ para las que ya se tenía un resultado en las tablas.

Aunque hay una gran distancia conceptual entre lo que hacían los Egipcios y Babilonios y lo que actualmente se conoce como álgebra, se puede encontrar en ellos unos primeros atisbos de pensamiento algebraico, pues a pesar de que son procedimientos actualmente vistos como elementales, cuya motivación fue solo resolver problemas concretos asociados a su cotidianidad y con lenguaje primitivo, estas técnicas primitivas favorecieron el progreso de estos pueblos y dejaron algunas ideas que fueron retomados por otras culturas.

1.2 Las pre- estructuras algebraicas en la obra de Euclides

Mientras los egipcios y babilonios perdían fuerza en la producción de obras intelectuales, emergía en la antigua Grecia una nueva forma de hacer matemáticas que constituyó un gran legado para todo el desarrollo de las matemáticas occidentales.

Una de la obras más importantes de la antigüedad Griega es la escrita por Euclides (330-275 a.C.), " *Los elementos* " , que se caracteriza por sistematizar los conocimientos geométricos y matemáticos de su época, esta obra ha permanecido vigente por más de 2300 años, dada la gran habilidad de Euclides para ordenar y argumentar. Aunque Los *Elementos* se podrían catalogar como una obra de tipo geométrico, como se verá en este apartado, desde una interpretación moderna hay un trabajo implícito en el desarrollo de ecuaciones y de constitución de estructuras.

Siguiendo la línea de la filosofía Aristotélica, Euclides establece diferencias entre las magnitudes y los números: los números son discretos y solo se pueden dividir en una cantidad finita de partes, las magnitudes pueden dividirse en partes continuas; además, instauró una homogeneidad en la suma: no se podían sumar segmentos con áreas, o volúmenes con segmentos, sino que era necesario que los objetos fueran de la misma naturaleza, esto establece una ruptura procedimental con respecto a los babilonios que sumaban objetos sin tener en cuenta su naturaleza, es decir, sumaban volúmenes con longitudes o con áreas, etc.. Teniendo clara la distinción entre número y magnitud, se encuentra en *Los Elementos* el desarrollo de la teoría de las magnitudes en los libros V y VI, y la teoría de números en los libros VII, VIII y IX, finalmente en el libro X Euclides intenta establecer una relación entre estas dos teorías, específicamente entre las magnitudes conmensurables y los números.

Dadas las consideraciones anteriores y haciendo una lectura desde la óptica moderna, se puede hacer una interpretación anacrónica de algunos resultados geométricos de Euclides en lo que se llama actualmente álgebra moderna.

Tomando como referente las magnitudes, se supone el universo de los segmentos, al que se le puede llamar S,[1] en el cual, Euclides, define unas operaciones y propiedades: (Valencia & Recalde, 2012, pág. 3)

- Si $A = B$ y $B = C$ entonces $A = C$.

- Sí $A = B$ entonces $A + T = B + T$ para toda magnitud T

- Sí $A = B$ entonces $A - T = B - T$ para toda magnitud T.

- Si $A = B$ y $C = D$ entonces $A + C = B + D$.

- Si $A = B$ y $C = D$ entonces $A - C = B - D$.

- Si $A = 2C$ y $B = 2C$, entonces $A = B$.

- Si $A = \frac{C}{2}$ y $B = \frac{C}{2}$, entonces $A = B$.

- Si B es una parte de A, entonces $A > B$.

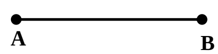
Estas propiedades permiten determinar que $(S, +, >)$ cumple las características de lo que hoy se denomina semigrupo aditivo, abeliano, arquimediano y totalmente ordenado. Un

[1] Aunque Euclides define propiedades para las magnitudes en general, los algoritmos sólo son desarrollados para los segmentos. En lo que sigue se toma a S como un universo de segmentos.

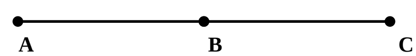
semigrupo se define como una estructura algebraica de la forma $(S, +)$ donde S es un conjunto y + es una operación binaria, cerrada y asociativa, cuando es conmutativa se llama abeliano, además se le denomina arquimediano cuando dados dos segmentos A, B pertenecientes al conjunto S, tal que $A < B$, existe $n \in Z^+$, $nA > B$.

Avanzando en esta misma dirección, paralelamente al universo de los segmentos, se puede suponer el universo de los números, en el que a partir de la representación de la unidad se forma cada número así:

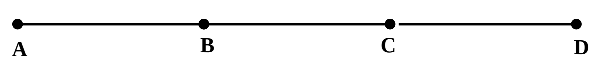
Partiendo de la unidad



El número que actualmente se representa con el símbolo 2, Euclides lo representa como:



El número que actualmente se representa con el símbolo 3, Euclides lo representa como:



Así, esta técnica de “pegar” constituye un algoritmo de suma de números. A partir de la suma se define el producto y también la resta en casos especiales.

Si análogo a S llamamos al universo de números N, y se hace una mirada detallada desde una óptica moderna, se encuentra la estructura $(N, +, \cdot, <)$ que con la suma se comporta como un semigrupo abeliano, arquimediano y totalmente ordenado.

En los procesos anteriores se ha hablado reiteradamente de la interpretación moderna que se le da al trabajo de Euclides, esto con el objetivo de dejar claro que aunque se pueden traducir las proposiciones de los *Elementos* a enunciados algebraicos, no es suficiente para hablar de la existencia de un pensamiento algebraico en Euclides, para ejemplificar esta afirmación se toma la siguiente proposición:

Proposición II.5: Si se corta una línea recta en segmentos iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la recta entera junto con el cuadrado de la recta que está entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.

Dándole nombres a cada recta, se tiene:

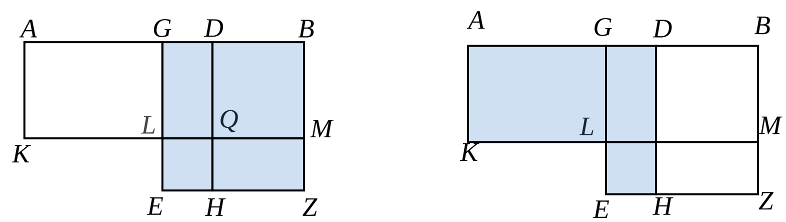


Ilustración 1.1: Proposición II.5 Los Elementos.

La proposición consiste en que dado el segmento AB, se encuentra el punto medio G y un punto cualquiera diferente de G al que se le nombra D.

A partir de esto, se construye:

(1) E rectángulo de lados AD, AK. Donde AK es igual a DB.

(2) El cuadrado $GBZE$, cuyo lado es la mitad de la recta AB.

(3) El cuadrado $LQHE$, de lado LQ igual a GD

(4) La recta DQ paralela a AK.

La proposición afirma que las partes sombreadas de ambas figuras son iguales.

Es importante insistir en que $A, B, C, D, \ldots$ son nombres que se le asignan, si lo traducimos en una terminología y métodos modernos, lo que se puede notar es que si designa por a la longitud del segmento AB, b la longitud del segmento DB, $\frac{a+b}{2}$ a la longitud de cada uno de los segmentos AG y GB y $\frac{a-b}{2}$ a la longitud del segmento GD, se está planteando la igualdad:

$$\boldsymbol{ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

1.3 Los aportes de Diofanto

La matemática griega se desarrolló con distintos altibajos; se presentaron momentos de florecimiento como de estancamiento. En el declinar de este período hacia el siglo III d.C se puede ubicar el algebrista griego más importante, Diofanto de Alejandría (200-284 d.C). Sobre su vida hay muchos datos inciertos; vivió aproximadamente 84 años, según lo que aparece en su famoso epitafio. Su obra más representativa, *La Aritmética,* de la cual solo se conocen 6 libros de 13 que eran en total, permite reconocer los avances en la línea del desarrollo de ecuaciones.

Diofanto incorporó representaciones simbólicas a las cantidades numéricas, lo cual sitúa al álgebra en un periodo intermedio, al que se llama actualmente álgebra sincopada. Sin embargo, se debe precisar que no estableció una representación simbólica para los coeficientes, lo que imposibilita el paso a la generalización de soluciones en ecuaciones algebraicas y se restringe a resolver problemas específicos.

Hechas las consideraciones anteriores, se puede apuntar que Diofanto sigue la misma línea de trabajo que los babilonios, dado que no establece una teoría general de ecuaciones, sino que su motivación era resolver problemas concretos. Sin embargo, se puede identificar una preocupación por definir propiedades generales de operatividad de las soluciones, que para él representan cantidades numéricas; a las cantidades numéricas desconocidas, es decir a la incógnita, Diofanto las llamaba *arithmo.* A partir de la concepción numérica euclidiana, incorpora soluciones fraccionarias, pero no considera radicales. Diofanto empieza estableciendo las siguientes propiedades:

- Todo número multiplicado por una fracción que tenga por denominador el mismo número es la unidad.
- Las partes alícuotas multiplicadas entre sí forman partes alícuotas de número.
- El producto del inverso del *arithmo* por el inverso del *arithmo* es el inverso de cuadrado del *arithmo*.
- Si se tiene la igualdad de dos expresiones no simples, se restan, en cada lado, expresiones semejantes hasta obtener una sola expresión en cada lado.
- Si resultan expresiones negativas, a uno y otro lado de una igualdad, añadirlas hasta obtener expresiones positivas a uno y otro lado.

Es necesario destacar, en la línea que interesa en este trabajo, los primeros manejos que hizo Diofanto con números negativos, en los pasos para resolver algunos problemas se encuentra con números negativos y opera con ellos, aunque solo considera soluciones positivas, pero para estas operaciones estableció dos técnicas, que traducidas a un lenguaje actual hacen parte de las "leyes de los signos": (Vera, 1970).

- El producto de lo deficiente por lo deficiente es positivo.
- El producto de lo deficiente por lo positivo es lo deficiente.

La manera como se han presentado las técnicas y procesos que estableció Diofanto, dejan entrever una relación con la constitución de estructura, pues define la propiedad uniforme, el neutro para la multiplicación y de manera implícita el opuesto de un número para la multiplicación, esto permite afirmar que en Diofanto se encuentran algunos elementos que caracterizan una estructura algebraica, aunque no se puede hablar de una estructura en particular pues faltan algunas propiedades. Cabe aclarar que estas afirmaciones se hacen desde una interpretación anacrónica de los aportes de Diofanto. La revisión de algunas proposiciones de su obra cumbre *La Aritmética* nos muestran el manejo operativo de las cantidades por parte de Diofanto.

Proposición 1, Libro I. Descomponer un número en dos partes cuya diferencia sea dada.

> Sea cien el número dado y cuarenta la diferencia, suponiendo que la parte menor es un *arithmo*, la mayor será un *arithmo* más cuarenta, y por tanto, la suma de ambas valdrá dos *arithmos* más cuarenta unidades, la cual suma cien. (Vera, 1970)

Recuerde que Diofanto llamaba *arithmo* a la incógnita:

x: Arithmo mayor y: arithmo menor

$$x + y = 100\,.$$

$$x - y = 40.$$

Luego siguiendo los pasos de Diofanto:

$$x = 40 + y,$$

sustituyendo en la ecuación $x + y = 100$, se obtiene:

$$2y + 40 = 100,$$

$$2y + 40 - 40 = 100 - 40\,,$$

$$2y = 60\,,$$

$$y = 30\,,$$

$$x = 70\,.$$

Se observa que Diofanto, basado en las propiedades enunciadas antes, realiza procedimientos operativos para hacer sustituciones y despejes.

Otros problemas que se encuentran en *La Aritmética*, muestran el mismo procedimiento para resolverlos, llama la atención el siguiente problema:

> **Proposición 2, Libro I.** Descomponer un número en dos partes que estén en una razón dada, si queremos descomponer el número 60 en dos partes que estén en la razón de 1 a 3 y suponemos que la menor es un arithmo, la mayor sería igual a 3 arithmos puesto que tiene que ser el triple del menor, y la suma de ambos 4 arithmos; luego 4 arithmos tendrían 60 unidades y, por tanto 1 arithmo; es decir, la parte menor, 15 y la mayor 45.

Si se nombra x al arithmo menor, la parte mayor es $3x$. Luego se tiene que la suma de ambos es 4 arithmos:

$$x + 3x = 4x\,.$$

Luego Diofanto sugiere, escrito con un lenguaje moderno, que

$$\boldsymbol{4x = 60},$$

por tanto,

$$x = 15\,.$$

Como se puede observar en los anteriores ejemplos, Diofanto no describe los pasos canónicos que le permiten encontrar el valor del *arithmo*, esto significa, como se plantea en (Vera, 1970), que Diofanto no está interesado en establecer algoritmos generales de resolución de ecuaciones, simplemente resuelve cada problema particular a través de algunas técnicas para operar entre fracciones y para reducir y simplificar expresiones.

Dadas las perspectivas de este trabajo, es importante anotar que con Diofanto empieza a perfilarse un nuevo enfoque de hacer matemáticas, al incorporar procedimientos sin el referente geométrico. Cuando Diofanto define cuadrados, bicuadrados y cantidades hasta de grado 6, se empieza a generar una ruptura con sus predecesores griegos, para quienes no era posible considerar cantidades que no se pudieran representar geométricamente; en esta dirección la obra de Diofanto presta evidencias históricas para caracterizar el referente geométrico como un obstáculo de tipo epistemológico.

2. EL DESARROLLO DEL ÁLGEBRA A PARTIR DE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

…Dado que este arte sobrepasa todo ingenio humano y la perspicacia de todo talento mortal y es un verdadero regalo celestial y una prueba clara de la capacidad de las mentes de los hombres, quien sea que se aplique a él creerá que no existe nada que no pueda entender.

G. Cardano

2.1 Los árabes y el inicio del álgebra

Hacia el siglo VII d.C. se inician las invasiones de los árabes a Europa. Las obras producidas por los griegos fueron traducidas y estudiadas en universidades fundadas bajo el gobierno de Al-Mamun (890-833); este periodo es llamado la edad de oro de las matemáticas árabes.

Se le puede atribuir a la cultura árabe el surgimiento de lo que hoy conocemos como álgebra, aunque restringida por algunos aspectos sociales y religiosos, es en el lenguaje árabe que se presentan los primeros elementos formales del álgebra.

Pareciera contradictorio hablar de la génesis del álgebra en un contexto en el que se trabajaba en un lenguaje retórico. Sin embargo, una cosa es la representación de los procesos y otra cosa diferente son los procesos como tal. A los árabes debemos la incorporación de algoritmos en los cuales se identifican la aplicación de reglas estructurales. No hay que olvidar que en el contexto árabe, el álgebra era inseparable de los problemas cotidianos que se trabajaban.

Uno de los matemáticos más destacados de este periodo fue Al-Khowarizmi (780-850), muy reconocido por su importante obra llamada "Hisāb al-ŷabr wa'l muqābala", que se podría traducir como *El libro conciso del cálculo de al-jabr y de al-muqâbala*.

En una de las traducciones del texto de Al-Khowarizmi hecha por Friedrich Rosen (reimpreso en 1986) describiendo los fines de su libro dan cuenta de que el sabio pretendía enseñar:

> ... aquello que es fácil y más útil en aritmética, tal que los hombres lo requieren constantemente en casos de herencia, legados, particiones, juicios, y comercio, y en todos sus tratos con los demás, o cuando se trata de la mensura de tierras, la excavación de canales, cálculos geométricos, y otros objetos de varias clases y tipos.

La obra de Al- Khowarizmi se caracteriza por sistematizar algunas ecuaciones lineales y cuadráticas, define unas “formas canónicas” de ecuaciones, esto marca una distancia con lo que habían trabajado sus antecesores. Al-Khowarizmi hace una clasificación de acuerdo a las características de los números que aparecen en sus cálculos, los términos primitivos que usa son raíces ó cosa, tesoros y simples números, estos términos se deben a una necesidad de nombrar objetos matemáticos.

Las raíces tienen estrecha relación con los tesoros, son unidades o números que se pueden multiplicar por sí mismos; los tesoros a los que les llama *mâl* son la cuantía total de una raíz multiplicada por sí misma, en una ecuación, la incógnita, es el tesoro. Los simples números también los llamaban *dírhams* y no son ni raíces ni tesoros sino un número cualquiera que puede expresarse sin atribuirlo ni a raíz ni a tesoro.

Considerando los planteamientos de (Puig, 1998), estos términos se podrían expresar en notación actual como:

$$ax^2 + bx + c = 0\,,$$

teniendo en cuenta que el término tesoro no se puede atribuir de forma general al cuadrado, es decir a x^2, pues algunas veces representa a la incógnita.

Todos los problemas que trabaja Al- Khowarizmi en su libro fueron escritos en lo que hoy llamamos algebra retórica; algunas de las palabras que emplea corresponden a las operaciones que hoy realizamos como adición, sustracción, multiplicación y división, son: añadir, aumentar, quitar, dividir, multiplicar (Recalde & Arbeláez, 2011). En éste se observa también unos inicios de un pensamiento algebraico, pues aunque se utilizan solo palabras para describir sus expresiones, al ser traducidos al lenguaje moderno, producen ecuaciones lineales y cuadráticas con una solo incógnita, aunque argumentado desde demostraciones geométricas.

En Al-Khowarizmi se agotan todas las posibilidades de combinación que se pueden realizar con las expresiones que se usaron en el momento para definir los términos de una ecuación:

1) *Tesoros igual a raíces* $ax^2 = bx$
2) *Tesoros igual a números* $ax^2 = c$
3) *raíces igual a números* $bx = c$
4) *Tesoros y raíces igual a números* $ax^2 + bx = c$

5) *Tesoros y números igual a raíces* $ax^2 + c = bx$

6) *Raíces y números igual a tesoros* $bx + c = ax^2$

Estas ecuaciones se les podrían llamar “canónicas” ó formas normales. Al- Khowarizmi establece un conjunto de operaciones con las que puede transformar cualquier ecuación en una de estas formas normales y además propone el método de resolución de cada una de estas formas.

Para transformar cualquier ecuación en una de las canónicas, se propone agrupar términos semejantes, reducir (a lo que él llama *Radd*), eliminar términos del mismo tipo (*al-muqa¯bala*) y otras operaciones que van orientadas a organizar la ecuación de tal forma que no quede ningún termino negativo y que quede totalmente simplificada a algunas de las formas normales que él estipuló.

Hay dos operaciones, *al-jabr y al-muqa¯bala*, que se usan en todos los problemas propuestos por Al- Khowarizmi y que precisamente se mencionan en el título de la obra, *al-jabr* consiste en eliminar términos negativos, es decir pasar al otro lado de la ecuación para que queden positivos, *al-muqa¯bala* u oposición es eliminar los términos semejantes, para esto se comparan término a término. A continuación presentamos un ejemplo, desde una traducción actual, para ilustrar el proceso propuesto por Al-Khowarizmi (Dávila Rascón, 2002):

Si se tien la ecuación:

$$7x + 2 = 5x + 10,$$

se transforma por al-jabr en

$$7x - 5x + 2 - 2 = 5x + 10 - 2 - 5\text{x}\,,$$

se transforma por al-muqâbala en

$$2x = 8.$$

Finalmente la solución es:

$$\boldsymbol{x = 4}.$$

Las dos operaciones anteriores se podrían denominar como básicas en el proceso que propone Al-Khowarizmi, pero hay otras dos que se encargan de reducir los tesoros a uno solo, así mismo si se desean completar porque hay parte o partes de un tesoro se usa la operación de completación.

A continuación se presenta un problema planteado en la obra de Al-Khowarizmi:

> Raíces y tesoros igualan números. Es como tú dices “un tesoro y diez raíces del mismo, igualan a treinta y nueve dírhams”; es decir, ¿Cuál será el tesoro que, cuando se aumenta con diez de sus propias raíces, asciende a treinta y nueve?

Este problema corresponde al tipo cuatro de las formas canónicas que ya se han presentado anteriormente:

$$x^2 + 10x = 39.$$

Al-Khowarizmi propone el siguiente proceso de solución:

> Tome la mitad de sus raíces y eleve este número al cuadrado, sume el resultado a treinta y nueve. Tome su raíz cuadrada y sustraiga la mitad del número de raíces hasta obtener tres, que es la raíz del tesoro que buscaba; el tesoro es nueve.

En notación moderna corresponde a:

Tomamos la mitad del coeficiente del término lineal y la elevamos al cuadrado:

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 5^2 = 25,$$

sumando este resultado con 39:

$$25 + 39 = 64,$$

sacando raíz cuadrada a este resultado:

$$\sqrt{64} = 8\,.$$

Le restamos la mitad del coeficiente del término lineal, en este caso 5, al resultado anterior:

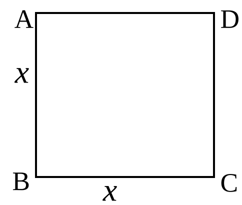
$$8 - 5 = 3.$$

Al-Khowarizmi dice que es la raíz del tesoro que buscaba; y que el tesoro es nueve:

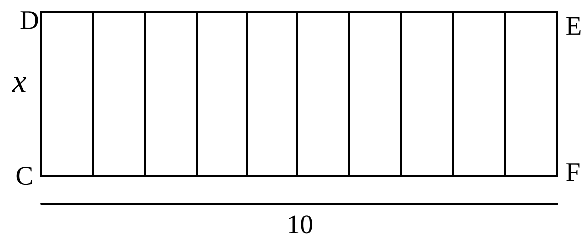
$$x = 3 \quad \text{y} \quad x^2 = 9\,.$$

Además de presentar el algoritmo para solucionar esta ecuación, también ofrece una interpretación geométrica:

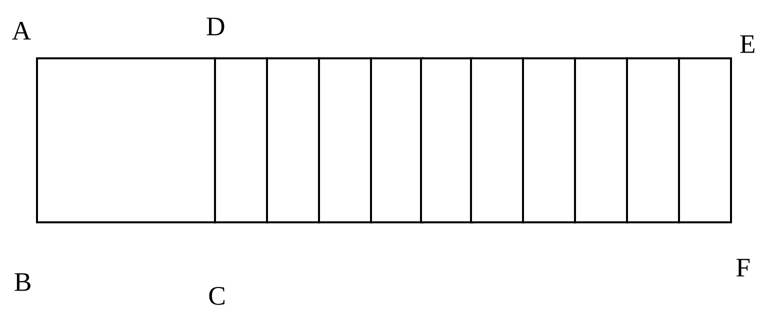
El tesoro se representa como un cuadrado *ABCD* cuyos lados (raíz) son desconocidos y se les llama *x:*



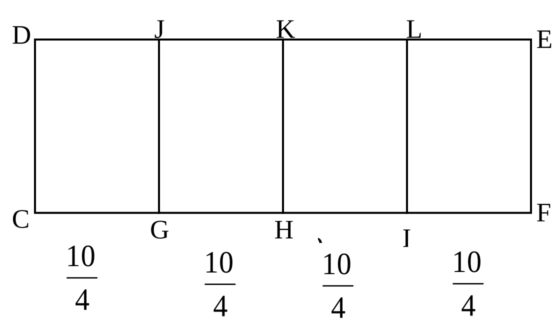
Por otro lado se construye un rectángulo tomando como referencia uno de los lados del cuadrado y cuya superficie corresponda a 10*x*:



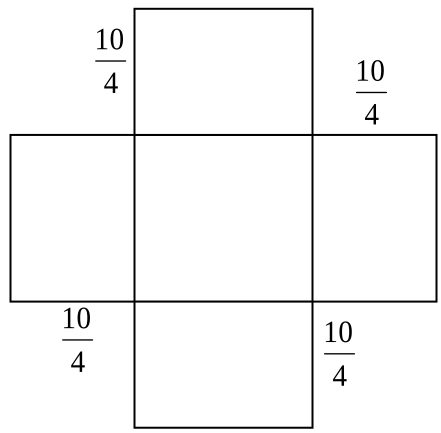
Estas dos superficies juntas equivalen en números a 39:



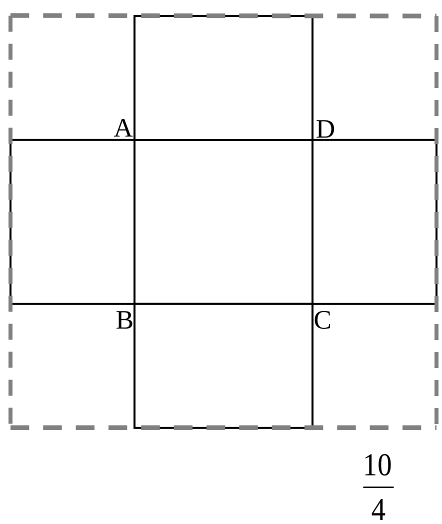
Ahora, se divide el paralelogramo en cuatro rectángulos por los puntos *G, H, I* donde los segmentos *JG, KH* y *LI* tendrán la misma longitud que un lado del cuadrado:



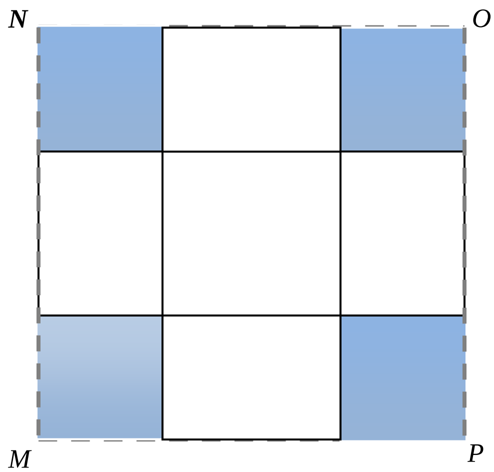
Tomando cada rectángulo obtenido en el paso anterior y organizándolos alrededor del cuadrado *ABCD* de la siguiente forma:



Esta nueva figura anterior también equivale a 39. Prolongando en una longitud de $\frac{10}{4}$ cada segmento paralelo a los lados del cuadrado *ABCD* en ambas direcciones, se tiene:



Como se observa se ha completado un cuadrado de lado $2\left(\frac{10}{4}\right)$ más la longitud desconocida (que es la raíz del cuadrado *ABCD*). Por otro lado, cada nuevo cuadrado formado al prolongar los segmentos tiene una superficie de $\left(\frac{10}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, a continuación se presentan sombreados:



Ahora, el cuadrado grande al que se le llamará *MNOP* tiene una superficie de $39 + 4 \times \frac{25}{4} = 64$, luego cada lado (raíz) es 8 de donde se encuentra que $8 - 2.\frac{10}{4} = 8 - 5 = 3$ corresponde al lado del cuadrado *ABCD*, de donde se concluye que el tesoro es 9 y la raíz es 3.

En todo el trabajo de Al-Khowarizmi se puede observar el inicio de la teoría de ecuaciones. Un primer aspecto que justifica esta aseveración es que en la definición que realiza de los términos primitivos, se establecen los elementos con los cuales construye su teoría y así muestra el uso de variables y números que son fundamentales al hablar de ecuaciones. Así mismo, Al-Khowarizmi aborda el asunto de describir las situaciones problema que se pueden modelar por medio de ecuaciones que hoy llamamos cuadráticas, también se observa cómo aborda el estudio de estas ecuaciones no sólo con la idea de dejar los métodos de solución y demostrarlos, sino que le da un enfoque al tipo de ecuaciones y sus partes.

A pesar de las pocas herramientas con las que contaba para construir un algoritmo, logró ampliar el campo de la construcción y solución de ecuaciones a través de unas operaciones estrechamente relacionadas con la geometría, pero aunque se desarrolló ampliamente todo lo relacionado con las ecuaciones, el desconocimiento del número, la no comprensión de las cantidades negativas y por ende la de raíces de cantidades negativas, ni las fracciones, fue un obstáculo para que se avanzara más allá hasta lograr una estructura totalmente algebraica.

La obra de Al-Khowarizmi permite identificar dos aspectos relacionados con el desarrollo del álgebra. Uno de ellos es un retroceso en la forma de escritura utilizada, pues está escrita en un lenguaje natural, a lo que se le llama álgebra retórica, a pesar de que siglos antes en la obra de Diofanto ya se había dado un paso hacia el álgebra sincopada que se caracteriza por el uso de algunos símbolos en medio del lenguaje natural. Por otro lado, el algoritmo planteado por Al-Khowarizmi para la resolución de ecuaciones es un valioso aporte que después será retomado por Cardano para resolver las ecuaciones de grado tres, este hecho se verá con detalle más adelante.

2.2 El método de solución de ecuaciones por medio de radicales

El período conocido como la edad media está comprendido entre los años 476 y 1453, gran parte de este período se caracteriza por los importantes aportes del mundo árabe a las matemáticas y a su vez por la escasa participación del mundo occidental, es solo hasta el siglo XII que se puede señalar un matemático relevante del mundo occidental, como es el caso de Fibonacci. El interés renovado por los matemáticos europeos se puede atribuir a la proliferación de traducciones del árabe a los lenguajes habituales del mundo europeo. Entre las obras más trascendentales que podemos mencionar tenemos los Elementos de Euclides, la obra de Al-Khowarizmi y el almagesto de Ptolomeo.

Las actividades comerciales de Fibonacci le permitieron viajar por Egipto, Siria y Grecia y estudiar con un maestro árabe, así aprendió los métodos algebraicos árabes y el uso de los numerales Hindú-arábigo; su obra El *Liber abaci* presenta diferentes problemas en los que se usa el sistema de numeración Hindú-arábigo, la extracción de raíces y las fracciones unitarias.

Fibonacci replantea algoritmos para la resolución de ecuaciones como los propuestos por Al- Khowarizmi, Diofanto y Euclides. En su obra *Floss*, escrita aproximadamente en 1225, se encuentra el siguiente problema:

> Encontrar un número tal que su cubo, dos cuadrados y diez raíces sean veinte. (Rascón, 2003, pág. 40)

Este problema se puede expresar en notación simbólica como

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20\,.$$

Para esta ecuación cúbica, Fibonacci plantea que no es posible encontrar una solución exacta con métodos algebraicos, por lo que recurre a solucionarlo haciendo aproximaciones, aunque no es claro cómo logró realizar el proceso de resolución, algunas fuentes (Boyer, 2001) afirman que posiblemente conocía el “método Horner” que ya había sido trabajado por los árabes.

Las importantes contribuciones de Fibonacci a la teoría de números, a la geometría y al álgebra, permiten catalogarlo como un matemático notable de la edad media.

Hacia el siglo XV se empezaron a presentar una serie de eventos que marcaron el final de la edad media y el inicio del renacimiento; la política empezó a dominar sobre la religión, lo que permitió el desarrollo de la educación, las artes y la música. Las concepciones culturales que tenía el hombre empiezan a cambiar, las matemáticas cobran otro sentido. En cuanto al álgebra en este periodo se formaron algebristas muy reconocidos de Europa, hacia el siglo XVI se publicó una obra que se puede considerar una de las más grandes aportaciones del periodo renacentista al álgebra y pieza fundamental para el desarrollo del álgebra moderna, *El Artis magnae*, *sive de regulis algebraicis* de Girolamo Cardano (1501-1576), un reconocido matemático italiano que logra completar trabajos anteriores y dar un método para resolver, por medio de radicales, la ecuación cúbica y de cuarto grado.

Hasta este momento ya se había establecido el algoritmo para encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática, llamado método de solución por radicales, que se caracteriza por hacer una serie de operaciones aritméticas como sumas, restas, multiplicación, división y extracción de raíces para llegar a las soluciones; con la ecuación cúbica se pretendía hacer lo mismo, es decir se quería encontrar un algoritmo general que la resolviera, este se vuelve tema de interés para muchos matemáticos.

La primera resolución de una forma particular de la ecuación cúbica se debe a Scipione del Ferro (1465-1526), profesor de matemáticas de Bolonia, quien no es muy reconocido, pues aunque resolvió el caso de “El cubo y la cosa (incógnita) igual a un número”, que corresponde a:

$$\boldsymbol{x^3 + px = q}\ ,$$

no publicó su demostración, sino que antes de fallecer le participó a uno de sus discípulos de su descubrimiento, el cual retó a Niccolo Fontana (1499-1557), más conocido como Tartaglia, para resolver todos los problemas que correspondieran a “El cubo y la cosa (incógnita) igual a un número”, este reto fue ganado finalmente por Tartaglia.

Tartaglia ya había demostrado sus habilidades matemáticas, en 1535 anunció que había resuelto los problemas:

- Encontrar un número cuyo cubo sumado a tres veces su cuadrado es 5. Este problema corresponde a la ecuación:

$$\boldsymbol{x^3 + 3x^2 = 5}\ .$$

- Encontrar tres números, el segundo de ellos supera al primero en 2, el tercero supera al segundo también en 2, y cuyo producto es 100. Este problema corresponde a la ecuación:

$$\boldsymbol{x(x + 2)(x + 4) = 100}.$$

Que también se puede ver como:

$$\boldsymbol{x^3 + 6x^2 + 8x = 100}.$$

Después de resolverlos, Tartaglia concluye que puede solucionar cualquier problema de la forma:

$$\boldsymbol{x^3 + px^2 = q}\ .$$

Posiblemente Antonio María Fiore, discípulo de Del Ferro, se enteró de estos avances de Tartaglia y por eso lo retó a un desafío público. Tartaglia trabajó insistentemente en encontrar la solución a la ecuación cúbica y aunque no lo logró en términos generales, sí estableció un algoritmo para resolver las ecuaciones cúbicas que no tuvieran término cuadrático, es decir de la forma:

$$x^3 + px = q \qquad p, q \in Z^+.$$

Finalmente Tartaglia logró resolver los problemas propuestos por Fiore, quien no resolvió ninguno de los propuestos por su oponente.

Este desafío matemático permitió que Girolamo Cardano conociera y se interesara por los algoritmos trabajados por Tartaglia; así lo reconoce en su importante obra, *Ars Magna*, publicada en 1545.

Tal como lo refiere (Recalde L. , 2013), en la lectura 5, al parecer Tartaglia expone solamente el algoritmo, mientras que Cardano lo interpreta y demuestra tomando algunos resultados desde un referente geométrico, es así como, basándose en algunos resultados planteados por Euclides, demuestra la expresión:

$$\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}.$$

Que también se puede escribir como:

$$\boldsymbol{(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3}. \qquad \textbf{\textit{2.3}}$$

Partiendo de 2.3 y llamando

$$p = 3ab\,. \qquad \textbf{\textit{2.4}}$$

$$\boldsymbol{q = a^3 - b^3}\,. \qquad \textbf{\textit{2.5}}$$

Se puede escribir la identidad 2.3 como

$$\boldsymbol{(a-b)^3 + p(a-b) = q}. \qquad \textbf{\textit{2.6}}$$

De allí se encuentra que $x = a - b$ es solución de la ecuación cúbica:

$$\boldsymbol{x^3 + px = q}, \quad \boldsymbol{p, q} \in \boldsymbol{Z^+}.$$

De 2.4 tenemos que:

$$\boldsymbol{b = \frac{p}{3a}}.$$

Reemplazando en 2.5 se tiene,

$$q = a^3 - \frac{p^3}{27a^3}.$$

Que también se puede ver como:

$$\frac{27a^6 - p^3}{27a^3} - q = 0,$$

$$a^3 - \frac{p}{27a^3}^{3} - q = 0,$$

multiplicando por a^3 obtenemos:

$$\boldsymbol{a^6 - \frac{p}{27}^{3} - qa^3 = 0},$$

que se puede ver como una ecuación cuadrática:

$$(a^3)^2 - \frac{p^3}{27} - qa^3 = 0.$$

Aplicando la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, se tiene:

$$a^3 = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2},$$

$$a^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Sacando raíz cúbica a ambos lados, se obtiene:

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$b = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}.$$

Como inicialmente se determinó que $x = a - b$ es solución de la ecuación, entonces finalmente se llega a que:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}.$$

Después de esta demostración de cómo se llega a las soluciones de la cúbica, Cardano hace la siguiente sustitución:

$$a^3 = u \qquad\qquad b^3 = v.$$

Luego el sistema que se debe resolver es:

$$u.v = \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

$$u - v = q\ .$$

Luego la solución es:

$$x = u^{\frac{1}{3}} - v^{\frac{1}{3}}.$$

La cual ya había planteada por Tartaglia en álgebra retórica, quién no solo lo estableció para el caso $x^3 + px = q$ sino para otros. Con el objetivo de comparar las condiciones que Tartaglia estableció para resolver las ecuaciones cúbicas con lo descrito por Cardano en su obra, se presenta a continuación el texto escrito por Tartaglia y una traducción al álgebra simbólica,:

Caso 1:

Cuando el cubo más la cosa (incógnita) *es igual a un número*

$$\boldsymbol{x^3 + px = q}, \quad \boldsymbol{p, q} \in \boldsymbol{Z^+}.$$

Se buscan dos números cuya diferencia es este número y cuyo producto sea igual al cubo de la tercera parte de las cosas conocidas; la diferencia de sus raíces cúbicas es la cosa principal.

$$u.v = \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

$$\boldsymbol{u - v = q}\ .$$

$$\boldsymbol{x} = \sqrt[3]{\boldsymbol{u}} - \sqrt[3]{\boldsymbol{v}}\ .$$

Caso 2:

Cuando el cubo está solo y es igual a la cosa más el número

$$\boldsymbol{x^3 = px + q}, \quad \boldsymbol{p, q} \in \boldsymbol{Z^+}.$$

Se divide el número en dos partes tales que su producto sea igual al cubo del tercio de las cosas, y entonces la suma de las raíces cúbicas de esas partes dará lo buscado.

$$u.v = \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

$$\boldsymbol{u + v = q}\ .$$

$$\boldsymbol{x} = \sqrt[3]{\boldsymbol{u}} + \sqrt[3]{\boldsymbol{v}}\ .$$

Caso 3:

Cuando el cubo más el número es igual a la cosa

$$\boldsymbol{x^3 + q = px}, \quad \boldsymbol{p, q} \in \boldsymbol{Z^+}.$$

Si se detalla detenidamente este caso se resuelve similar al caso 2.

Cardano no solo demuestra que las soluciones satisfacen la ecuación, sino que presenta algunos ejemplos (Rascón, 2003) :

Encontrar la cosa si el cubo y seis veces la cosa hace veinte.

$$\boldsymbol{x^3 + 6x = 20} \quad .$$

Inicia tomando la mitad de la constante de la ecuación, en este caso da como resultado 10 y se eleva al cuadrado resultando 100. Se suma este resultado con $\frac{p^3}{27}$ que en este caso es $\frac{6^3}{27} = 8$, se obtiene 108. Luego, se toma la raíz cuadrada de este valor, es decir $\sqrt{108}$

Ahora se establecen dos casos:

$$\sqrt{108} + 10 \quad \text{y} \quad \sqrt{108} - 10\,.$$

Se le llamara a la suma binomio y a la resta apotoma, luego el valor de la cosa es la resta entre las raíces cúbicas del binomio y la apotoma:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}\,.$$

A continuación se comprueba que cumple con las condiciones que estableció Tartaglia:

$$u.v = 8\,.$$

$$u - v = 20\,.$$

De donde la solución es $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$.

Observe:

$$p = 6 \ , q = 20 \, ,$$

$$u = \sqrt{108} + 10,$$

$$v = \sqrt{108} - 10,$$

$$u.v = \left(\sqrt{108} + 10\right).\left(\sqrt{108} - 10\right),$$

$$u.v = \sqrt{108} + 10\sqrt{108} - 10\sqrt{108} - 100 \, ,$$

$$u.v = 108 - 100,$$

$$u.v = 8 \, .$$

Así mismo

$$u - v = \left(\sqrt{108} + 10\right) - \left(\sqrt{108} - 10\right),$$

$$u.v = 20 \, .$$

Efectivamente se llega a los resultados propuestos por Tartaglia.

El método propuesto por Cardano y Tartaglia para resolver ecuaciones cúbicas solo consideraba ecuaciones con coeficientes positivos, esto con el objetivo de no obtener raíces negativas. Si se hace una observación detallada de todas posibles variaciones de signos que se pueden hacer se encuentra que este algoritmo sirve para resolver cualquier ecuación cúbica, es decir se pueden resolver todas las ecuaciones de la forma:

$$\pm x^3 \pm px \pm q = 0 \, .$$

Cardano no pudo llegar a esta conclusión, pues no se aceptaban las raíces negativas ni las raíces complejas a las que precisamente llamaba falsas, aunque en algunos procesos de resolución se encontró con éstas, eran esquivadas estableciendo condiciones que se deben cumplir y que le permiten llegar a resultados válidos para él.

Un ejemplo de lo anterior se encuentra en el caso 2, en el que Cardano estableció que se debía cumplir que:

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

pues de no ser así, en la solución se encuentra con radicales negativos.

A diferencia de la postura de Cardano frente a las raíces negativas se encuentra el matemático italiano, Rafael Bombelli (1526-1573), que siguió muy de cerca el trabajo de Cardano y Tartaglia. En su obra, *El álgebra (1572)*, presenta los diferentes casos que habían sido planteados por Cardano, pero particularmente llama la atención el caso 2 donde las soluciones podían ser raíces negativas, pues en este caso Bombelli trabajó con ellas, operándolas como cantidades, sin darles un carácter numérico, esto se puede observar en el siguiente ejemplo:

Si se tiene la ecuación:

$$x^3 = 15x + 4\,.$$

Que corresponde al caso 2, se obtienen las soluciones haciendo:

$$u + v = 4\,.$$

$$u.v = \left(\frac{15}{3}\right)^3 = 125\,.$$

Al aplicar el algoritmo establecido para el caso 2, se tiene que:

$$u = 2 + \sqrt{-121} \quad \text{y} \quad v = 2 - \sqrt{-121}\quad.$$

Teniendo en cuenta que una de las soluciones es:

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\,.$$

Se obtiene:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\ .$$

De donde Bombelli hace un interesante análisis, intentando darle una nueva forma a esta expresión. Bombelli se plantea encontrar dos números a y b tales que:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+\sqrt{-b}\,.$$

Elevando al cubo:

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\right)^3 = \left(a+\sqrt{-b}\right)^3.$$

Se obtiene:

$$2+\sqrt{-121} = a^3 + 3a^2\sqrt{-b} + 3a(\sqrt{-b})^2 + \left(\sqrt{-b}\right)^3,$$

de lo anterior se deduce que:

$$2 = a^3 - 3ab \qquad \text{y} \qquad \sqrt{-121} = 3a^2\sqrt{-b} + \left(\sqrt{-b}\right)^3.$$

$$\sqrt{-121} = (3a^2 - b)\left(\sqrt{-b}\right).$$

Análogo, se tiene:

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-\sqrt{-b}\,.$$

Sin perder el objetivo, Bombelli calcula el producto:

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\right)\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\right) == \left(a+\sqrt{-b}\right)\left(a-\sqrt{-b}\right).$$

$$\sqrt[3]{125} = a^2 + b\,.$$

Remplazando en $2 = a^3 - 3ab$, se tiene:

$$2 = a^3 - 3ab(5 - a^2) \, .$$

$$2 = a^3 - 15a + 3a^3 \, .$$

$$2 = 4a^3 - 15a \, .$$

Ecuación cúbica con solución real $a = 2$.

Finalmente se tiene que *b=1*, de donde se encuentra la igualdad:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \, .$$

Y

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1} \, .$$

Luego la solución de $x^3 = 15x + 4$ que se tenía inicialmente escrita como:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \, ,$$

se puede reescribir así:

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} \, ,$$

que corresponde finalmente a:

$$x = 4 \, .$$

Este procedimiento deja notar la habilidad de Bombelli para operar, sin tener en cuenta la naturaleza de estas raíces, incorporando operaciones con los números complejos.

Continuando con el trabajo de Cardano, cabe anotar que éste no sólo se interesó por las ecuaciones cúbicas que no tenían el término cuadrático, sino que también fueron de su estudio aquellas de la forma:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \, .$$

Para las cuales estableció un método para reducir el término cuadrático y reescribirlas como una de las formas que se vieron anteriormente.

Cardano la transforma en una ecuación equivalente que no contenga el término cuadrático a partir de la sustitución:

$$x = y - k\,.$$

Reemplazando esta igualdad en la ecuación general $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ se obtiene:

$$(y-k)^3 + a(y-k)^2 + b(y-k) + c = 0\,.$$

Haciendo procedimientos algebraicos:

$$y^3 - 3y^2k + 3yk^2 - k^3 + ay^2 - 2ayk + ak^2 + by - bk + c = 0\,.$$

Reorganizando se tiene:

$$y^3 + y^2(-3k + a) + y(3k^2 - 2ak + b) - k^3 + ak^2 - bk + c = 0.$$

Haciendo $-3k + a = 0$ se obtiene $k = \frac{a}{3}$ y se llega a la ecuación:

$$y^3 + y\left(3\frac{a}{3^2}^2 - 2a\frac{a}{3} + b\right) - \frac{a^3}{3^3} + \frac{a^3}{3^2} - b\frac{a}{3} + c = 0\,.$$

La cual no tiene término cuadrático.

Haciendo:

$$p = b - \frac{a^2}{3} \qquad \text{y} \qquad q = -\frac{2a^3}{27} - \frac{ba}{3} + c,$$

se puede escribir de la forma:

$$y^3 + py = q,$$

la que corresponde a una ecuación cúbica ya conocida.

Cardano no solo establecía cómo se elimina el término cuadrático de una expresión de tercer grado, sino que también daba una serie de ejemplos, a continuación se presenta uno de estos:

> Un oráculo le ordenó a un príncipe construir un edificio sagrado cuyo espacio debería ser de 400 cubits, del cual lo largo debe ser seis más que lo ancho y lo ancho tres más que la altura. Se deben encontrar estas cantidades. (Rascón, 2003, pág. 50)

Si se llama y a la altura, entonces se tendrá:

Ancho $y+3$ largo: $(y+3)+6$,

de donde se tiene la ecuación:

$$y(y+3)(y+9)=400,$$

que resulta siendo una ecuación cúbica:

$$y^3+12y^2+27y=400.$$

Aplicando el procedimiento visto para eliminar el término cuadrático, se hace:

$$y=x-k, \text{ donde } k=\frac{a}{3}=\frac{12}{3}=4.$$

Reemplazando:

$$(x-4)^3+12(x-4)^2+27(x-4)=400,$$

de donde finalmente se llega a la ecuación cúbica:

$$x^3=380+21x,$$

que corresponde a una ecuación del caso 2 planteado por Cardano y que tiene como solución:

$$x = \sqrt[3]{190 + \sqrt{35757}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{35757},}$$

y de donde se concluye que una de las raíces es:

$$y = \sqrt[3]{190 + \sqrt{35757}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{35757}} + 4\,.$$

Con el objetivo de mostrar la proximidad que tuvo Cardano a la definición de polinomios simétricos, se presenta otro de los problemas propuestos por Cardano, que corresponde a resolver, en términos modernos, la ecuación:

$$x^3 + 26x = 12x^2 + 12,$$

que reduciendo el término cuadrático, con el método planteado por Cardano, corresponde a la ecuación (haciendo $x = y + 4$):

$$x^3 = 22x + 36\,,$$

de la cual Cardano afirmó que:

> Por lo tanto habrá tres soluciones, la primera de las cuales es $\sqrt{19} + 1$ y es verdadera; la segunda es falsa y es $-(\sqrt{19} - 1)$; y la tercera es también falsa y es -2. Suma estas individualmente a la tercera parte del coeficiente del cuadrado, y tendrás tres soluciones las cuales son: (1ª) $5 + \sqrt{19}$; (2ª) $5 - \sqrt{19}$; (3ª) 2 (Cardano, 1545).

Esta afirmación permite ver que aunque Cardano no consideraba las raíces negativas y complejas como válidas, en algunos casos se encontró en su camino de resolución con estas y las manipuló llegando finalmente a resultados admitidos desde su concepción.

Es importante notar que Cardano hizo un trabajo similar al de Bombelli, quien, como se vio anteriormente, también operó sin ninguna restricción, lo que hace diferente el trabajo de Cardano es que estas operaciones que realizaba estaban respaldadas en una relación que había encontrado entre las raíces y los coeficientes de la ecuación:

> De esto es evidente que el coeficiente del cuadrado, en los tres ejemplos en los cuales hay tres soluciones para la cosa, es siempre la suma de las tres soluciones (Cardano, 1545).

Tomando las raíces de la anterior ecuación, lo que plantea Cardano es:

$$\left(5+\sqrt{19}\right)+\left(5-\sqrt{19}\right)+(2)=12\,.$$

Esta relación, establecida por Cardano, marca el inicio de una forma de entender el problema de resolución de ecuaciones a partir del estudio de sus coeficientes; cuestión que cobra importancia en el desarrollo de la teoría de Galois. Esta relación, entre las raíces de una ecuación y el coeficiente del término cuadrático, es un hallazgo, como ya se ha dicho, remarcable no sólo por el gran movimiento matemático que se gesta sino también porque se hace en medio de una carencia de simbología algebraica. La relación existente entre las raíces de la ecuación de grado tres y el coeficiente del término cuadrático es un resultado que luego se extiende a los restantes coeficientes de la ecuación por medio del concepto de polinomios simétricos que hasta hoy prevalece.

Siguiendo con detalle los aportes de Cardano a la teoría de ecuaciones, se encuentra en el capítulo XIX de su obra, *El Ars Magna*, el método para resolver ecuaciones de grado cuatro; Cardano le atribuye el crédito de este descubrimiento a Ludovico Ferrari (1522-1565), un estudioso matemático que fue secretario de Cardano por un tiempo.

De manera semejante a lo que Cardano estableció para las ecuaciones cúbicas, en las ecuaciones de cuarto grado se abordaron diferentes casos, con el mismo objetivo de no tener coeficientes negativos en una ecuación.

Desde la línea de interés de este trabajo, es necesario mostrar cuáles son los aspectos heurísticos que se van desarrollando en la resolución de la ecuación de segundo, tercer y cuarto grado, y que además no se le pueden aplicar a la de quinto grado; por esto es importante detallar los procesos empleados por Cardano para resolver la ecuación cúbica y de cuarto grado. A continuación se muestra el proceso, desde una mirada moderna, al método para solucionar la ecuación de cuarto grado que planteó Cardano. Si se tiene la ecuación de la forma:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,.$$

El primer paso es realizar una sustitución análoga a la de la ecuación cúbica, en este caso para eliminar el término cubico de la ecuación bicuadrática, para esto se hace $x = y - k$:

$$(y-k)^4 + a(y-k)^3 + b(y-k)^2 + c(y-k) + d = 0,$$

$$y^4 + y^3(-4k+a) + y^2(6k^2 - 3ak + b) + y(-4k^3 + 3ak^2 - 2bk + 1) + k^4 - ak^3 + bk^2 - k + d = 0,.$$

haciendo el coeficiente del término cúbico $-4k + a = 0$ se obtiene $k = \frac{a}{4}$ y se llega a la ecuación:

$$y^4 + y^2\left(-\frac{3a^2}{8} + b\right) + y\left(\frac{a^3}{8} - \frac{ba}{2} + 1\right) + \left(-\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{a}{4} + d\right) = 0\,,$$

haciendo las sustituciones apropiadas se llega a la ecuación:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0\ ,$$

tomando la ecuación anterior e introduciendo un parámetro μ, el cual dadas unas condiciones especiales, que se presentarán más adelante, convierte esta ecuación en dos que se pueden resolver con la fórmula general ya conocida, al introducir el parámetro se puede escribir la ecuación como:

$$y^4 + 2y^2\frac{p}{2} + 2\mu y^2 + p\mu + \frac{p^2}{4} + \mu^2 + qy + r = 2\mu y^2 + p\mu + \frac{p^2}{4} + \mu^2,$$

que equivale a tener:

$$\left(y^2 + \tfrac{p}{2} + \mu\right)^2 = 2\mu y^2 - qy + \left(\mu^2 + p\mu - r + \tfrac{p^2}{4}\right), \qquad \textbf{\textit{2.7}}$$

tomando el lado derecho de la igualdad se puede hacer el siguiente paso:

$$2\mu\left(y^2 - \frac{q}{2\mu}y + \left(\frac{\mu^2 + p\mu - r + \frac{p^2}{4}}{2\mu}\right)\right),$$

para que transformar esta expresión en un trinomio cuadrado perfecto debe pasar que:

$$\frac{q^2}{16\mu^2} = \frac{\mu^2 + p\mu - r + \frac{p^2}{4}}{2\mu},$$

para que esto suceda μ, debe ser la raíz de la ecuación cúbica auxiliar, que actualmente se conoce como “la cúbica resolvente” de la ecuación cuartica:

$$8\mu^3 + 8pu^2 - 8r\mu + 2p^2\mu - q^2 = 0\ , \qquad \textbf{\textit{2.8}}$$

esta ecuación cúbica se resuelve con los algoritmos planteados anteriormente por Cardano, sin entrar en detalles en este paso, de la ecuación ***2.7*** y el razonamiento expuesto sobre la completación del trinomio cuadrado perfecto, se tiene que:

Si μ_0 es una raíz de la ecuación ***2.8***, la ecuación:

$$\left(y^2+\frac{p}{2}+\mu\right)^2 = 2\mu y^2 - qy + \left(\mu^2 + p\mu - r + \frac{p^2}{4}\right),$$

se puede escribir como:

$$\left(y^2+\frac{p}{2}+\mu_0\right)^2 = 2\mu_0\left(y-\frac{q}{4\mu_0}\right)^2,$$

de donde se encuentra que:

$$\left(y^2+\frac{p}{2}+\mu_0\right) = \pm\sqrt{2\mu_0}\mathrm{y} - \frac{q}{4\mu_0}.$$

de donde se obtienen cuatro soluciones, que al reemplazar en $x = y - \frac{a}{4}$ se encuentran finalmente las soluciones de la ecuación:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,.$$

Cabe señalar que la resolución de ecuaciones se validaba desde un referente geométrico, es así como Cardano afirma que:

> La sexta cosa a señalar [es] que en cuanto el hombre haya llegado a conocer todos los capítulos [ecuaciones] hasta el relativo al cubo, que son 19 [incluidos, hacemos notar, los de primer y segundo grado], tendrá cuanto basta para cualquier caso algebraico, porque hasta el cubo se encuentra la gradación en la Naturaleza: de hecho hay líneas, superficies y cuerpos. Y las

> líneas corresponden a la incógnita lineal, las superficies a los cuadrados y los cuerpos a los cubos. Por tanto, si sobre éstos hemos dado noticias suficientes, se conocerá todo lo que es necesario. En realidad todo lo que añadiremos más allá, será por entretenimiento y no por el fruto que pueda obtenerse del [tal] estudio. Tales capítulos sucesivos no existen verdaderamente de por sí, sino por accidente, si bien existen [fórmulas] generales (Cardano, 1545).

El éxito obtenido por Tartaglia, Cardano y Ferrari, entre otros, en la solución por radicales de las ecuaciones de grado tres y cuatro, deja sentadas las bases para la certeza de poder encontrar procesos por medio de radicales que lleven a la solución no solo de las ecuaciones de grado cinco, sino a las de grado mayor y por qué no, encontrar en algún momento un método general, por radicales, para una ecuación polinómica de grado n, esto explica la razón por la cual la comunidad matemática por cerca de tres siglos estuvo inmersa en esta tarea imposible.

De forma natural, las técnicas empleadas por Cardano se privilegian, en particular la que consistía en reducir de término la ecuación mediante un cambio de variable, es así como un siglo después Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651-1708), plantea un método para disminuir el grado del polinomio, generalizando de alguna forma lo propuesto por Cardano. Por ejemplo, si se tiene el polinomio de grado tres, se hace la trasformación de la forma,

$$y = x^2 + ax + b,$$

que reduce el polinomio a la forma:

$$y^3 = K\ .$$

Análogo se puede hacer para la ecuación bicuadrática, este procedimiento se llama las *"transformaciones de Tschirnhaus"*:

> Las transformaciones de Tschirnhaus constituyeron la contribución más prometedora a la resolución de ecuaciones algebraicas durante el siglo XVII, pero, no obstante, la eliminación del segundo y tercer término mediante tales transformaciones resultó ser totalmente inadecuada para la resolución de la quintica en general (Boyer, 2001, pág. 542).

El problema de resolver ecuaciones de quinto grado y mayores, por medio de radicales, seguía vigente y con varios matemáticos trabajando en esta línea.

2.3 La notación algebraica, un paso importante

Hasta este momento se puede hablar de un trabajo en álgebra casi meramente retórico. Como se pudo observar Cardano trabajó empleando un lenguaje natural, aunque en este periodo se encuentran importantes avances en cuanto a la resolución de ecuaciones, en lo que respecta a la notación no hay significativos progresos.

Hacia finales del siglo XVI, la notación algebraica toma un nuevo aire con el matemático francés François Viète (1540-1603) quien asigna símbolos para las variables y además establece letras para los coeficientes; este hecho hace que las ecuaciones se puedan escribir en términos más generales, se tome distancia del álgebra sincopada y se vean más claros sus algoritmos de resolución.

Las ideas de Viéte fueron abordadas por Thomas Harriot (1560-1621), astrónomo, etnógrafo y matemático inglés, sus aportes se han venido conociendo desde hace cuatro décadas, lo que significa que fue después de su muerte que se han interesado por sus trabajos, esto se debe a que Harriot no publicó sus investigaciones científicas sino que encomendó esta tarea a sus discípulos antes de fallecer.

En 1631 se publicó *Artis Analyticae Praxis ad Aequations Algebraicas Resolvendas* en el que Harriot había escrito sobre teoría de ecuaciones y notación algebraica. En esta obra, Harriot utilizó los símbolos > y < para establecer relaciones de orden como actualmente se manejan, la incógnita de una ecuación y las constantes se les asignaban vocales y consonantes respectivamente.

La ecuación que hoy se escribe como (Dávila Rascón, 2003) :

$$a^4 + 28a^3 + 183a^2 = 972\,.$$

Harriot la escribía como:

$$aaaa + 28aaa + 183aa = 972\,.$$

Esta notación permite ver que Harriot estuvo muy cerca de la simbología algebraica actual.

Otro de los importantes aportes de Harriot es que fue el primero en prestarle atención a la relación entre las raíces de la ecuación cúbica, es así como afirmó que si *a*, *b* y *c* son raíces de una ecuación cúbica, (Dávila Rascón, 2003, pág. 41), entonces la ecuación puede escribirse, usando simbología actual, como:

$$(x-a)(x-b)(x-c)=0\,.$$

Esta afirmación de Harriot permite ver una primera aproximación a lo que actualmente se conoce como el teorema del factor, que establece que $(x-h)$ es un factor del polinomio $p(x)$ si y sólo si h es una raíz de $p(x)$, es decir que $p(h)=0$.

Finalmente es René Descartes (1596-1650), quien introduce en buena medida la notación algebraica que usamos actualmente. En su obra, publicado en 1637, *Discurso del Método*, incluye en uno de sus apartados *La Geometría*, uno de los tres apéndices con los cuales ejemplifica su método "para bien conducir la razón y buscar la verdad en las ciencias". La asignación de símbolos que establece para las incógnitas, las operaciones y potencias algebraicas, hacen que este libro se asemeje en una buena parte a un texto moderno de álgebra:

> Usa las primeras letras del alfabeto para denotar las cantidades conocidas y las últimas letras se usan para denotar las incógnitas; también se dispone de una notación más compacta: x, x^2, x^3, etcétera, y define los conceptos de ecuación y de raíz (de una ecuación), que fueron aceptados casi de inmediato por los matemáticos de su tiempo (Dávila Rascón, 2003, pág. 42).

2.4 Descartes y el planteamiento de ecuaciones

Descartes no solo tiene su obra rica en aportes al lenguaje algebraico que aún hoy se utiliza, sino también a la teoría de ecuaciones. Descartes y, en general, todos los matemáticos de su generación, cambian de manera drástica el paradigma del estudio de las curvas; como consecuencia de los procedimientos cartesianos surge una nueva forma de hacer matemáticas con coordenadas, la definición de la ecuación pasa por la representación de las cantidades a través de un sistema plano, esta técnica se le denomina, desde finales del siglo XIX, *Geometría Analítica*.

El trabajo de Descartes cobra gran importancia dado que incorpora un lenguaje simbólico que relaciona el álgebra y la geometría; el método por medio del cual estrecha esta relación es el analítico que ya había sido estudiado por Euclides, Arquímedes y Apolonio, y que Pappus de Alejandría (290 d.C.- 350 d.C.) en su obra *Colección Matemática* lo menciona:

> El análisis es el camino que parte de la cuestión que se busca, suponiéndola conocida, para llegar, por medio de las consecuencias que se deduzcan, a la síntesis de lo que se dio por conocido.
>
> Suponiendo obtenido, en efecto, lo que se busca, se considera lo que se deriva de ello y lo que le precede hasta que, volviendo sobre los pasos dados, se llega a una cuestión que ya se conoce o pertenece al orden de los principios; y este camino se llama análisis porque es una inversión de la

> solución, mientras que en la síntesis, por el contrario, suponiendo la cuestión, finalmente, conocida por el análisis, disponiendo sus consecuencias y causas en su orden natural y enlazando unas y otras, se llega a construir lo que buscamos; y este método es la síntesis (Descartes, 1947, pág. 53).

Descartes explica este método en su obra *La Geometría:*

> Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya hecho, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras (Descartes, 1947, pág. 53).

Como se ha visto en el desarrollo de este trabajo, hasta este momento desde diferentes ópticas, ya se han resuelto algunos tipos de ecuaciones lineales, cuadráticas y con Cardano, cúbicas y bicuadráticas; Descartes también se interesa por la resolución de ecuaciones partiendo de problemas geométricos y con las técnicas propuestas por Euclides, por ejemplo en el caso de la ecuación cuadrática, utiliza la herramienta de regla y compás Euclidiano, pues este problema Descartes lo incluye en los problemas planos, lo que se pueden encontrar con intersecciones de círculos y rectas.

2.5 Respuesta de Descartes al problema de Pappus

Descartes desarrolla un famoso problema que ya había abordado sin éxito por Euclides, Apolonio y su propio autor, Pappus; con este problema Descartes demuestra la efectividad de su método, dado que a diferencia de los que ya lo habían intentado resolver que encontraron como obstáculo establecer una relación entre la aritmética y la geometría, Descartes combina los métodos que se plantean en estas dos líneas.

El “problema de Pappus”, es descrito por Descartes así:

> Teniendo tres, cuatro o un mayor número de rectas dadas en su posición, se intenta hallar en primer lugar un punto desde el cual se pudiesen trazar tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, formando ángulos dados, de modo que el rectángulo formado por dos de las trazadas desde el mismo punto, guarde una proporción dada con el cuadrado de la tercera, en el caso de que no hay sino tres; o bien con el rectángulo de las otras dos sino no hay más que cuatro; o bien, si hay cinco, que el paralelepípedo formado por tres guarde la proporción dada con el paralelepípedo construido sobre las dos restantes y otra línea dada; si hay seis, que el paralelepípedo construido sobre tres guarde una proporción dada con el paralelepípedo formado por las otras tres; si hay siete, que el resultado obtenido cuando se multipliquen cuatro de ellas entre sí, guarde la proporción dada con el resultado de las otras tres y también de una línea dada; si hay ocho, que el resultado obtenido

de la multiplicación de cuatro guarde la proporción dada con el resultado obtenido de las otras cuatro. De este modo, tal cuestión puede hacerse extensiva a cualquier otro número de líneas (Descartes, 1996, págs. 400-401).

Descartes plantea el problema de encontrar los puntos en el plano que satisfacen una propiedad, aunque el problema podía iniciar con 3, 4 ó 5 rectas, se tomará en este el caso de 4 líneas rectas dadas. El problema se puede escribir en términos modernos así: dados un número par de rectas ($2n$ rectas), encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias, bajo ángulos dados, a n de esas rectas se encuentren en una relación dada con el producto de las distancias, bajo ángulos también dados, a las otras n rectas. Descartes empieza llamando AB, AD, EF, GH a las líneas dadas. El problema que se quiere resolver se presenta en la siguiente figura:[2]

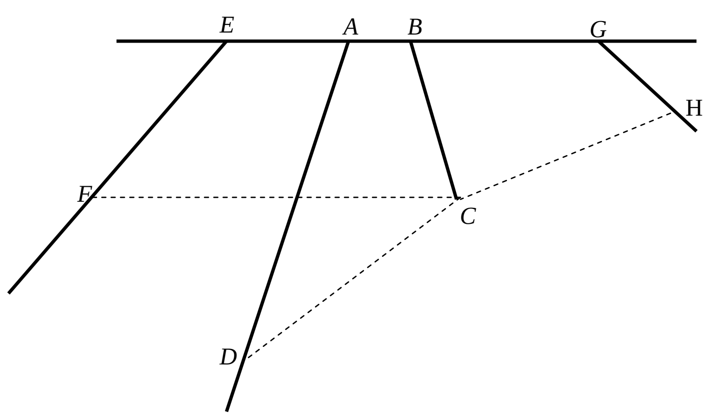


Ilustración 2.1: Caso particular del problema de Pappus (dadas 4 rectas).

[2] El procedimiento que aquí se presenta, incluyendo la ilustración 2, sigue los delineamientos de la *Geometría* de Descartes. Un procedimiento similar se puede encontrar en (Recalde L. , 2013, pág. 15).

El método analítico, ya explicado en páginas anteriores, es utilizado por Descartes para resolver este problema, por ello supone el problema resuelto estableciendo un relación entre las líneas dadas y las que desea encontrar. Partiendo de la Ilustración 2.1 se desea hallar el punto C, de tal forma que después de trazar los segmentos CB, CD, CF, CH y tener los ángulos $CBA = \beta$, $CDA = \alpha$, $CFE = \delta$, $CHG = \varepsilon$, el producto de CF, CD guarde una razón con el producto de CB, CH.

Una técnica que utiliza Descartes y que le permite llegar finalmente a ecuaciones algebraicas a través de un problema planteado desde lo geométrico, es identificar algunos segmentos determinados y detallar los demás con base en éstos. Se supone que se identifica un origen determinado y a partir de él se determinan longitudes relativas. En el caso particular del problema de Pappus, se toma $AB = x$ y $BC = y$, como ejes referenciales.

Seguidamente extiende cada una de las líneas dadas hasta que se corten con la prolongación de BC.[3]

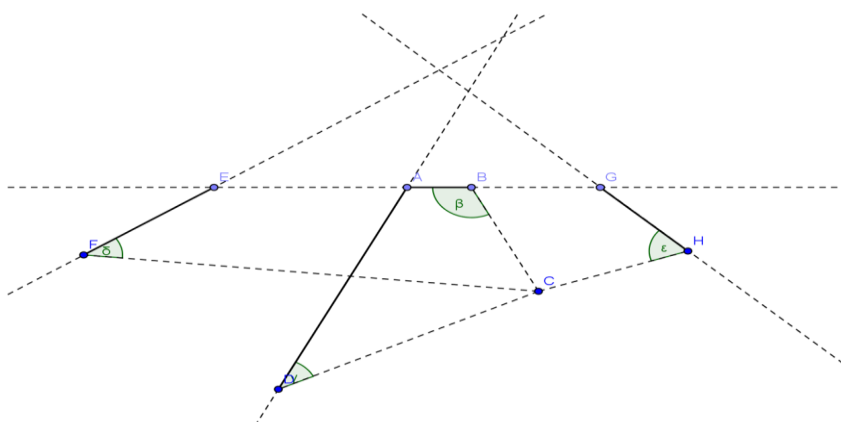


Ilustración 2.2: Prolongación de las líneas dadas en el problema de Pappus.

Descartes nombra los puntos de intersección como S, R, T :

[3] La ilustración 2.2. ha sido retomada de (Monroy, 2011, pág. 51).

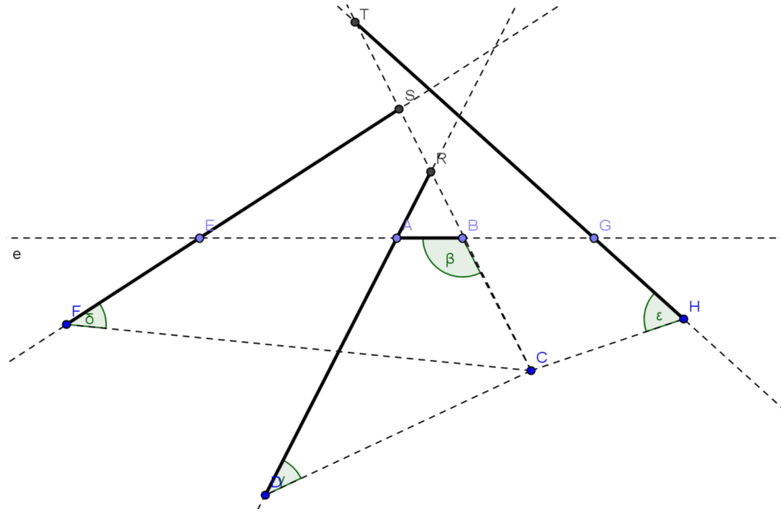


Ilustración 2.3: Puntos de intersección nombrados por Descartes en el problema de Pappus.

A partir de los datos que proporciona el problema, se encuentra que los triángulos $ARB, DCR, ESB, CSF, BGT\ y\ TCH$ son conocidos, por lo que Descartes los nombra y establece razones así:

I. $\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$.

II. $\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$.

III. $\frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}$.

IV. $\frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}$.

V. $\frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}$.

VI. $\frac{TC}{CH} = \frac{z}{g}$.

De I y $AB = x$, se tiene $BR = \frac{bx}{z}$.

Teniendo en cuenta que $BC = y$ al calcular $CR = BC + BR$, se tiene $CR = y + \frac{bx}{z}$**.** De II

y el anterior resultado, se tiene que $CD = \frac{CR}{y} + + \frac{bcx}{z^2}$

Tomando $EA = k$ se tiene que $EB = k + x$.

De III se tiene$BS = \frac{dk+dx}{z}$ y $CS = BS + BC$, de donde $CS = \frac{dk+dx}{z} + y = \frac{dk+dx+zy}{z}$.

Con el resultado anterior y IV, se tiene $CF = \frac{e}{z}\left(\frac{dk+dx+zy}{z}\right)$, calculando se tiene $CF = \frac{e}{z}y + \frac{dex}{z^2} + \frac{dek}{z^2}$.

Tomando $AG = l$ se tiene que $BG = l - x$.. (Teniendo en cuenta que en este caso *A* está entre *B* y *G*), de V se tiene que $BT = \frac{fl+fx}{z}$ entonces $CT = CB + BT = \frac{zy+fl-fx}{z}$.

Partiendo de VI y el resultado anterior, se tiene $CH = \frac{CT.g}{z} = \frac{gzy+fgl+fgx}{z^2}$.

Así el problema $CD.CF = k(CS.CH)$ corresponde a la ecuación cuadrática general:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Exy + F = 0\,.$$

Después de estos cálculos Descartes afirma:

> … De este modo podéis ver que cualquiera que sea el número de líneas dadas en posición, cuantas líneas sean trazadas desde el punto *C* formando ángulos dados, siguiendo el enunciado del problema, estará compuesto por tres términos; uno estará compuesto por una cantidad desconocida y, multiplicada o dividida por una cantidad conocida, el otro estará compuesto por una cantidad conocida x, también multiplicada o multiplicada por alguna otra conocida; el tercero, por una cantidad conocida…

> Así mismo podéis ver que multiplicando varias de estas líneas entre sí, las cantidades de x e y que se encuentran en el producto pueden tener solamente las dimensiones como líneas haya, a cuya explicación sirven las que han sido multiplicadas. De suerte que nunca tendrán más de dos dimensiones, cuando han resultado de la multiplicación de dos líneas; ni más de tres, cuando son el resultado de la multiplicación de tres líneas y así al infinito (Descartes, 1996, pág. 407).

Cuando Descartes habla de cantidades conocidas y desconocidas se refiere a números positivos y negativos respectivamente, esta advertencia la hace probablemente porque aún no había una aceptación de las cantidades negativas. Otro aspecto a señalar es que el problema depende de las líneas que se multipliquen, Así pues, aunque Descartes no lo explicita, en el caso de tres o cuatro rectas el problema correspondería a una ecuaciones polinómicas de segundo grado en dos variables x e y.

2.6 El teorema fundamental del álgebra en Descartes

En el trabajo de Descartes se encuentran importantes resultados encaminados a establecer una teoría de ecuaciones. Descartes define qué es una ecuación, además establece una "regla de signos" por medio de la que se puede estimar el número de raíces reales de una ecuación:

La regla establece que el número posible de las raíces positivas es igual al número de cambios de signos en los coeficientes de los términos o menor que los cambios de signo por un número par.

Por ejemplo, si se tiene la ecuación:

$$x^3 + 3x^2 - x - x^4 - 2 = 0\,.$$

Para calcular cuántas raíces positivas tiene, se ordenan los términos de la ecuación en orden descendente de los exponentes:

$$-x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 2 = 0\,,$$

se observa cuántas variaciones de signo se encuentran:

$$-x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 2 = 0\,.$$

En este caso hay dos cambios de signo, lo que quiere decir que esta ecuación tendrá dos raíces positivas o ninguna raíz positiva (este último resultado se obtiene de restar un número entero menor al número de raíces que ya se tiene).

Así mismo se pueden encontrar el número de raíces negativas, sustituyendo x por $-x$ y realizando el mismo proceso, para el caso que se ha tomado, se tiene:

$$-(-x)^4 + (-x)^3 + 3(-x)^2 - (-x) - 2 = 0,$$

simplificando:

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + x - 2 = 0\,.$$

Se observa que hay dos variaciones de signos, lo que significa que tendrá dos raíces negativas o ninguna.

Finalmente a través de esta técnica se sabe que la ecuación $x^3 + 3x^2 - x - x^4 - 2 = 0$ tiene 4 raíces reales (dos negativas y dos positivas) o que tendrá cuatro raíces complejas; sin desconocer el aporte que se encuentra en este método en lo que respecta al desarrollo de ecuaciones, no es una técnica que permita tener una certeza de cómo son las raíces del polinomio, posiblemente Descartes era consciente de las carencias que tenía su método y avanzó un poco más en esta línea afirmando que:

> Ni las verdaderas raíces ni las falsas son siempre reales; algunas veces son solamente imaginarias; esto es, mientras que siempre podemos concebir tantas raíces para cada ecuación de la forma como ya las he asignado, no siempre existe una cantidad definida que corresponda a cada raíz así concebida. De esta manera, si bien podemos concebir que la ecuación $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ tiene tres raíces, solamente existe una raíz real, 2, mientras que las otras dos, de cualquier manera que las incrementemos, disminuyamos, o las multipliquemos de acuerdo con las reglas ya expresadas, permanecen imaginarias. (Traducido de (Descartes, The Geometry. Book I., 1954, pág. 83)).

Esta es una primera aproximación al Teorema Fundamental del álgebra. Es importante notar que Descartes habla de raíces "falsas", haciendo alusión a las raíces reales negativas y la raíces "imaginarias" que corresponden, en traducción moderna, a las raíces complejas; esta primera aproximación al Teorema Fundamental del álgebra es de suma importancia en el desarrollo de ecuaciones porque se empieza a generar en los matemáticos una nueva perspectiva de las relaciones que se pueden encontrar entre la ecuación y sus raíces. Descartes no demuestra este Teorema, solo se limita a dar ejemplos, pero a partir de lo expuesto es finalmente Gauss quién logra demostrarlo.

2.7 Los polinomios simétricos, un concepto fundamental

Aunque antes de Cardano ya se conocían algunos resultados que relacionan las raíces de un polinomio y sus coeficientes, es Cardano quien da evidencias concretas en diversos casos particulares de las ecuaciones de tercer grado y cuarto grado, Cardano mostraba que la suma de las raíces de una ecuación de tercer grado era igual al opuesto del coeficiente del término de grado 2 y en el caso de las ecuaciones de cuarto grado la suma de estas es igual al opuesto del coeficiente del término de tercer grado, para el caso del polinomio de tercer grado:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Las raíces x_1, x_2, x_3 de esta ecuación, cumplen que:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = -a}. \qquad \textbf{\textit{2.8}}$$

Para mostrar la validez de su método por radicales, dio ejemplos en muchos casos particulares de la relación anterior y además de los resultados:

$$\boldsymbol{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b}\,, \qquad \textbf{\textit{2.9}}$$

y

$$\boldsymbol{x_1x_2x_3 = -c}. \qquad \textbf{\textit{2.10}}$$

Es muy importante señalar que aunque Cardano no aceptaba los números negativos y como es de esperarse tampoco los números complejos, al encontrar raíces de este tipo claramente en parejas, debía operar entre ellas para comprobar los resultados mencionados.

Cardano aún sin aceptar los números negativos y los complejos les dio un rol importante dentro de la teoría de ecuaciones, operó con ellos y fraguó el camino para que pronto se convirtieran en objetos matemáticos. A pesar de que los números negativos y complejos no eran aceptados, si eran considerados como raíces de una ecuación, esto se observa en Descartes quien dice, como ya se había mencionado, que una ecuación de grado n tiene n raíces falsas, imaginarias o reales.

En apartados anteriores se llamó la atención sobre los aportes de Vieta al desarrollo de la notación algebraica; en lo que respecta a la consolidación del concepto de polinomios simétricos, es Vieta quien en realidad muestra, de manera simbólica, las propiedades existentes entre las raíces de un polinomio y sus coeficientes, no de manera particular como lo había hecho Cardano, sino que lo generaliza.

Los polinomios simétricos se caracterizan por ser invariantes bajo cualquier permutación, es decir un polinomio simétrico de grado $n, p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, es un polinomio tal que al intercambiar alguna de las variables sigue siendo el mismo.

Ahora, los polinomios simétricos también se pueden denominar polinomios simétricos elementales si corresponden a las sumas de todos los productos posibles de tamaño k ($k = 1,2, \dots, n$) de las variables involucradas, los polinomios 2.8, 2.9 y 2.10 son los polinomios simétricos elementales de la ecuación de tercer grado, así por ejemplo si se tiene la ecuación cuadrática:

$$x^2 + ax + b = 0\,,$$

y las raíces de esta ecuación son x_1 y x_2 se puede escribir como:

$$(x + x_1)(x - x_2) = 0\,.$$

Al multiplicar se obtiene:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0\,.$$

De donde se encuentra una relación entre los coeficientes de la ecuación y sus raíces, así los polinomios simétricos elementales de la ecuación cuadrática son:

$$x_1 + x_2 = -a \,.$$

$$x_1 . x_2 = b \,.$$

Con este mismo proceso se pueden encontrar los polinomios simétricos elementales de la ecuación de cuarto grado y se puede generalizar para cualquier para una ecuación de grado *n.* Es importante notar que no es necesario conocer las raíces sino saber que existen, lo cual lo garantiza el teorema fundamental del álgebra. Estas relaciones establecidas entre los coeficientes y las raíces de la ecuación fueron trabajadas por el matemático francés Albert Girard (1595- 1632), el trabajo de Girard se ve un poco opacado por los resultados que después presenta Newton.

Hacia 1707 se publica la obra *Arithmetica Universalis* de Newton; en este documento Newton presenta un importante teorema en el que afirma que: *cualquier polinomio simétrico en las raíces de una ecuación se puede expresar en términos de los coeficientes de la ecuación*, como se mostrará en este trabajo en este teorema se basaron las demostraciones sobre la imposibilidad de resolver por medio de radicales las ecuaciones de quinto grado y mayor.

3. EL PROBLEMA DE LA BÚSQUEDA DE RAÍCES PARA POLINOMIOS DE GRADO MAYOR A CINCO

Los geómetras se han ocupado mucho de la solución general de ecuaciones algebraicas y varios de ellos han tratado de demostrar la imposibilidad. Pero, si no me equivoco, no han tenido éxito hasta ahora.

Abel

3.1 Los aportes de Gauss

Aunque no se había demostrado el teorema fundamental del álgebra, ya se tenían suficientes ejemplos, en donde se encontraban las raíces de una ecuación particular, que habían generado una idea propagada entre los algebristas de la época de que una ecuación tenía tantas raíces como el grado mayor de la incógnita, así la ecuación cuadrática tendría dos raíces, la cúbica tres raíces, la bicuadrática cuatro, etc.

El teorema fundamental del álgebra que se conoce actualmente establece que toda ecuación polinomial de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas, es decir, si se tiene el polinomio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0, \qquad \textbf{\textit{3.1}}$$

donde $a_i \in C$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$,

entonces existen n números complejos $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, que cumplen que:

$$\boldsymbol{p(z_i) = 0,\ i = 0,\ 1, \cdots n-1.} \qquad \textbf{\textit{3.2}}$$

Pero este resultado ocupó mucho tiempo y estudio de diferentes matemáticos que tuvieron el interés de demostrarlo. Como ya se mencionó, Descartes dio una primera versión de este teorema y presentó ejemplos; sin embargo se debe específicamente a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) una primera demostración acabada de este teorema. Antes de que Gauss presentara su demostración, algunos matemáticos como Albert Girard (1595-1632), Isaac Newton (1642-1727) y Colin Maclaurin (1698-1746) expusieron versiones similares a la de Descartes sin obtener una demostración adecuada.

En la tesis doctoral de Gauss titulada *Nueva Demostración del Teorema de que Toda Función Algebraica en una Variable puede ser Factorizada en Factores Reales de Primero o Segundo Grado*, publicada en el año 1799, se presenta la primera demostración formal del teorema fundamental del álgebra. Para demostrar este teorema, Gauss recurre a herramientas geométricas, pero su demostración resulta tan clara que es aceptada por la comunidad matemática, actualmente se encuentran demostraciones de este teorema apoyadas en métodos del análisis y en variable compleja. Evariste Galois (1811,1832), Richard Dedekind (1831,1916), Leopold Kronecker (1823,1891) y Joseph Liouville (1809, 1882) establecieron condiciones para un tratamiento moderno a esta demostración.

La demostración del teorema fundamental del álgebra, por parte de Gauss, no sólo muestra una interacción entre lo geométrico y lo algebraico, sino también las ideas de la representación gráfica de los números complejos que había sido descubierta en 1797 por Caspar Wessel (1745-1818).

Gauss no calcula las raíces de un polinomio de coeficientes reales sino que demuestra su existencia (Dávila Rascón, 2003, pág. 50), para empezar si se tiene la ecuación:

$$x^2 - 4i = 0. \qquad \textbf{\textit{3.3}}$$

Gauss muestra gráficamente que existe un valor $z = a + bi$, tal que $p(z) = 0$; para ello sustituye la incógnita del polinomio por $a + bi$, de donde separando la parte real e imaginaria, se obtienen dos funciones de a y b:

$$a^2 - b^2 = 0 \textit{ (Parte real).} \qquad \textbf{\textit{3.4}}$$

$$ab - 2 = 0 \textit{ (Parte imaginaria).} \qquad \textbf{\textit{3.5}}$$

Realizando una representación en un mismo sistema de coordenadas, en las abscisas la parte real a y en las ordenadas la parte imaginaria b, se obtiene un par de rectas

$$a + b = 0 \text{ y } a - b = 0,$$

y una hipérbola equilátera $ab = 2$, así como se observa en la siguiente figura:

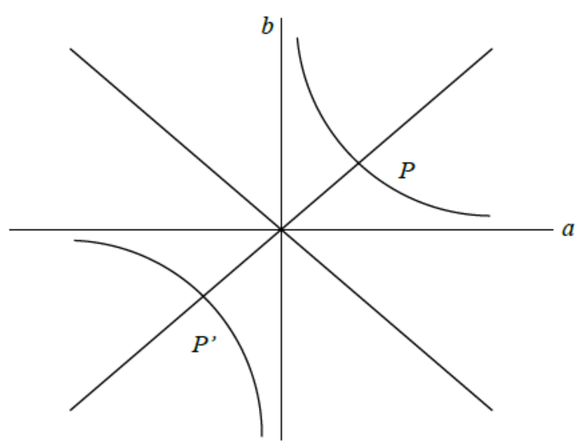


Ilustración 3.1: Gauss demuestra la existencia de las raíces de un polinomio de grado 2.

En la Ilustración 3.1 se observa que las dos curvas se cortan en dos puntos P y $P^{´}$ con una de las rectas; estos puntos de intersección serán las raíces de la ecuación. Sin entrar en detalle a la demostración, se puede decir en términos generales que Gauss continúa basando su razonamiento en las gráficas de las curvas, garantizando siempre los puntos de intersección, que le permiten llegar finalmente a que cualquier ecuación polinómica tiene al menos una raíz compleja.

3.2 Vandermonde y las raíces *n-ésimas* de la unidad

El matemático francés Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) publicó en 1770 su obra titulada *Mémoire sur la Résolution des Equations*, en la que afirma que todas las ecuaciones, a las que actualmente se les llama ciclotómicas, que obedecen a la forma:

$$\boldsymbol{x^P - 1 = 0}, \qquad \textbf{\textit{3.6}}$$

donde p es primo, son resolubles por el método de radicales. Aunque esta afirmación no pudo ser demostrada en general, Vandermonde logró probarla para $p \leq 11$.

Aunque la demostración de Vandermonde es para una cantidad limitada de números, conjeturó que este tipo de ecuaciones se pueden resolver para cualquier n natural. En la actualidad se reconoce que las n soluciones complejas de estas ecuaciones se denominan las raíces *n-ésimas* de la unidad y además se les llama raíz primitiva a cada raíz compleja cuyas potencias generan todas las raíces *n-ésimas* de la unidad. Por ejemplo, las raíces cuartas de la unidad son $1, -1, i, -i$, de las cuales sólo i y $-i$ son raíces primitivas, pues obsérvese que $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Hacia 1801, Karl Frederick Gauss retoma el planteamiento de Vandermonde y logra probar que esta ecuación es soluble por medio de radicales; la técnica empleada por Gauss se basa en reducir de grado la ecuación, este método fue planteado por Lagrange y se le llama de la resolvente de Lagrange.

3.3 La resolvente de Lagrange

Joseph Louis Lagrange (1736 -1813) fue un reconocido físico, matemático y astrónomo italiano que hizo importantes contribuciones a la astronomía, la mecánica y las matemáticas, en la línea de interés de este trabajo se menciona que publicó varios artículos sobre el álgebra, pero cabe destacar uno de estos aportes, del cual se tratará este apartado.

En 1771, Lagrange publica su memoria Réfléxions *sur la Résolution Algébrique des Equations*, en la cual logra obtener un método en el que subyacen todos las técnicas, hasta el momento conocidas, para encontrar la solución por radicales de las ecuaciones hasta cuarto grado. Lagrange creyó poder extender su método a las ecuaciones de grado mayor o igual que cinco, sin lograrlo. Sin embargo, dejó sentadas las bases para que sus sucesores lograran demostrar la imposibilidad de dicha generalización.

3.3.1 La resolvente de Lagrange para la ecuación de tercer grado

Uno de los propósitos de este trabajo es escudriñar fuentes que muestran los aportes de diferentes matemáticos en el desarrollo de la resolución de ecuaciones, teniendo claro que de estas fuentes no solo se estudia su componente matemático, sino que también se intenta establecer algunas relaciones con la teoría de grupos; todo esto a partir de un punto de vista epistemológico. Para entender los aportes de Lagrange, en lo que respecta a la resolución de ecuaciones, se ha tomado como referencia general los artículos (Dávila Rascón, 2003) y (Moreira & Soprani, 2012), profundizando en muchos procedimientos que no se hacen explícitos e intentando establecer algunas relaciones entre lo propuesto por Lagrange y la teoría de grupos. A continuación se presenta la construcción de la resolvente de Lagrange para las ecuaciones cúbicas. Para explicar lo propuesto por Lagrange, se considera la ecuación cúbica de la forma:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \qquad \textbf{\textit{3.7}}$$

Para este momento ya se conocían métodos por medio de los cuales se eliminaba el término cuadrático y la ecuación quedaba de la forma:

$$x^3 + px + q = 0. \qquad \textbf{\textit{3.8}}$$

El teorema fundamental del álgebra, ya conocido en ese momento, garantiza la existencia de las raíces x_1, x_2, x_3 de esta ecuación (3.8).

Sea r una combinación así:

$$\boldsymbol{r = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3}. \qquad \textbf{\textit{3.9}}$$

Donde μ_1, μ_2, μ_3 pertenecen a los números complejos, al permutar las raíces, se obtienen seis combinaciones:

$$r_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3.$$

$$r_2 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_2.$$

$$r_3 = \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1.$$

$$r_4 = \mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1. \qquad \textbf{\textit{3.10}}$$

$$r_5 = \mu_1 x_3 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2.$$

$$r_6 = \mu_1 x_2 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_3.$$

Con los elementos $r_1, r_2, \ldots, r_6$, Lagrange construye la ecuación de sexto grado:

$$(y - r_1)(y - r_2)(y - r_3)(y - r_4)(y - r_5)(y - r_6) = 0. \qquad \textbf{\textit{3.11}}$$

Luego, toma de manera conveniente $\mu_1 = 1, \mu_2 = \omega, \mu_3 = \omega^2$, donde ω es una raíz cúbica distinta de la unidad, es decir, $\omega^3 - 1 = 0$, además $\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1)$, luego ω puede ser $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ó $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Antes de continuar con la aplicación del método de la resolvente de Lagrange en la ecuación cúbica, es importante mencionar algunos resultados a partir de las raíces primitivas, la siguiente figura muestra la ubicación de las raíces primitivas en el círculo unitario:

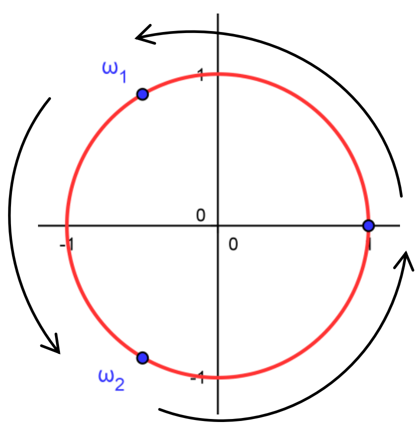


Ilustración 3.2: Raíces terceras de la unidad.

Se observa que estas tres raíces dividen en tres arcos de igual longitud al círculo unitario, además llamando $\omega_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\omega_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, se encuentra que $\omega_1\omega_1 = \omega_2$, $\omega_1{}^3 = \omega_2\omega_1 = 1$, $\omega_1{}^4 = \omega_1{}^3\omega_1 = 1\omega_1 = \omega_1$, es decir las potencias de ω_1 generan todas las raíces cúbicas de la unidad, también esta propiedad la cumple ω_2, así: $\omega_2\omega_2 = \omega_2{}^2 = \omega_1$, $\omega_2{}^3 = 1$, $\omega_2{}^4 = \omega_2{}^3\omega_2{}^2 = 1\omega_1 = \omega_1$, se tiene también que $\omega_2{}^2 = \omega_2$ y $\omega_2{}^2 = \omega_1$.

Dadas la línea de interés de este trabajo, hemos encontrado un interesante resultado, es que el conjunto $1, \omega_1, \omega_2$ con la multiplicación entre complejos, desde una mirada actual, es un grupo cíclico cuyos generadores son ω_1 y ω_2.

De otro lado, continuando con la aplicación de la resolvente a la ecuación cúbica, se tiene que:

$$r_1 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3.$$

$$r_2 = x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2.$$

$$r_3 = x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1. \qquad \textbf{\textit{3.12}}$$

$$r_4 = x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1.$$

$$r_5 = x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2.$$

$$r_6 = x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3.$$

Haciendo una serie de cálculos que se presentan a continuación, se encuentra una importante relación entre $r_1, r_2, \dots, r_6$, cabe mencionar que estas relaciones son diferentes cada vez que se establezca un nuevo orden para las permutaciones.

Calculando ωr_1 se tiene:

$$\omega\, r_1 = \omega x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^3 x_3.$$

$$= x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2.$$

$$= r_5.$$

Calculando $\omega^2\, r_1$ se tiene:

$$\omega^2\, r_1 = \omega^2 x_1 + \omega^3 x_2 + \omega^4 x_3.$$

$$= x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1.$$

$$= r_3.$$

Calculando ωr_2 se tiene:

$$\omega\, r_2 = \omega x_1 + \omega^2 x_3 + \omega^3 x_2.$$

$$= x_2 + \omega x_1 + \omega^3 x_3.$$

$$= r_6.$$

Calculando $\omega^2\, r_2$ se tiene:

$$\omega^2\, r_2 = \omega^2 x_1 + \omega^3 x_3 + \omega^4 x_2.$$

$$= x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1.$$

$$= r_4.$$

En términos actuales el conjunto $r_1, r_2, \dots, r_6$ se conoce como S_3 bajo isomorfismos, el grupo de todas las permutaciones de un conjunto de tres elementos, llamado grupo simétrico de orden 3.

Se observa que r_1 y r_2 generan subgrupos cíclicos disyuntos, basado en estas propiedades y sus implicaciones algebraicas nace lo que hoy día se conoce como la teoría de Galois. A este subgrupo lo llamo Lagrange inicialmente la resolvente de la ecuación de tercer grado y basado en este misma idea, encuentra la resolvente para la ecuación de cuarto grado. El éxito que tuvo Lagrange en encontrar la resolvente para estas dos ecuaciones, fortalece la idea equivocada de que existía para cualquier ecuación de quinto grado una resolvente.

Volviendo al método de Lagrange, la ecuación (3.11) queda expresada como:

$$(y- r_1)(y-r_2)(y-\omega^2 r_1)(y-\omega^2 r_2)(y-\omega r_1)(y-\omega r_2) = 0, \qquad \textbf{\textit{3.13}}$$

multiplicando:

$$(y- r_1)(y-\omega^2 r_1)(y-\omega r_1) = (y^2-(r_1+r_1\omega^2)y+\omega^2 {r_1}^2)(y-\omega r_1).$$

$$= (y^3-(r_1+\omega r_1+r_1\omega^2) + (\omega^2 {r_1}^2+\omega {r_1}^2+\omega^3 {r_1}^2)y-\omega^3 r_1.$$

$$= (y^3-{r_1}^3).$$

Análogo cuando se multiplica $(y- r_2)(y-\omega^2 r_2)(y-\omega r_2)$se obtiene $(y^3-{r_2}^3)$

Luego,

$$(y^3-{r_1}^3)(y^3-{r_2}^3) = (y^3)^2-({r_1}^3+{r_2}^3)y^3+{r_1}^3{r_2}^3. \qquad \textbf{\textit{3.14}}$$

Haciendo $y^3 = t$:

$$\boldsymbol{(t)^2-({r_1}^3+{r_2}^3)t+{r_1}^3{r_2}^3 = 0}. \qquad \textbf{\textit{3.15}}$$

Se encuentra una ecuación auxiliar a la cúbica de grado menor.

A partir de las permutaciones (3.12) se pueden encontrar los valores para x_1, x_2, x_3:

Tomando

$$r_1+r_2 = 2x_1+\omega(x_2+x_3)+\omega^2(x_2+x_3).$$

$$r_1+r_2 = 2x_1+(\omega+\omega^2)(x_2+x_3).$$

$$r_1+r_2 = 2x_1+(-1)(x_2+x_3).$$

$$r_1+r_2 = -x_1-x_2-x_3+3x_1.$$

$$3x_1 = x_1+x_2+x_3+r_1+r_2.$$

$$x_1 = \frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+r_1+r_2].$$

Haciendo cálculos similares se llega a que:

$$x_2 = \frac{1}{3}[(\ x_1 + x_2 + x_3) + \omega^2 r_1 + \omega r_2],$$

y **3.16**

$$\boldsymbol{x_3 = \frac{1}{3}[(\ x_1 + x_2 + x_3) + \omega r_1 + \omega^2 r_2].}$$

Aunque ya se conoce la forma de las soluciones x_1, x_2, x_3, que satisfacen la ecuación cúbica (3.8), es claro que estas se encuentran expresadas en términos de r_1 y r_2, que son raíces de la ecuación (3.15) lo que requiere determinar $({r_1}^3 + {r_2}^3)$ y ${r_1}^3 {r_2}^3$:

- Para calcular ${r_1}^3 + {r_2}^3$ se tiene que:

$${r_1}^3 = r_1 r_1 r_1.$$

$$= (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)\ (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)\ (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3).$$

$$= (x_1 + \omega x_1 x_2 + \omega^2 x_1 x_3 + \omega x_1 x_2 + \omega^2 {x_2}^2 + \omega^3 x_2 x_3 + \omega^3 x_1 x_3 + \omega^3 x_2 x_3 + \omega^4 {x_3}^2)\ (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3).$$

Teniendo en cuenta que $\omega^3 = 1$, simplificando se obtiene:

$${r_1}^3 = {x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3 + \omega(3{x_1}^2 x_2 + 3{x_2}^2 x_3 + 3x_1 {x_3}^2) + \omega^2(3{x_1}^2 x_3 + 3x_1 {x_2}^2 + 3x_2 {x_3}^2) + 6x_1\, x_2 x_3,$$

haciendo cálculos similares se llega a que

$${r_2}^3 = {x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3 + \omega(3{x_1}^2 x_3 + 3{x_2}^2 x_1 + 3x_2 {x_3}^2) + \omega^2(3{x_1}^2 x_2 + 3x_3 {x_2}^2 + 3x_1 {x_3}^2) + 6x_1\, x_2 x_3.$$

Calculando la suma ${r_1}^3 + {r_2}^3$:

$${r_1}^3 + {r_2}^3 = 2({x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3) + \omega(3{x_1}^2 x_3 + 3{x_2}^2 x_1 + 3x_2 {x_3}^2 + 3{x_1}^2 x_2 + 3{x_2}^2 x_3 + 3x_1 {x_3}^2) + \omega^2(3{x_1}^2 x_2 + 3x_3 {x_2}^2 + 3x_1 {x_3}^2 + 3{x_1}^2 x_3 + 3{x_2}^2 x_1 + 3x_2 {x_3}^2) + 12x_1\, x_2 x_3.$$

Llamando R a $x_1{}^2 x_2 + x_3 x_2{}^2 + x_1 x_3{}^2 + x_1{}^2 x_3 + x_2{}^2 x_1 + x_2 x_3{}^2$ de la expresión anterior, se tiene:

$$r_1{}^3 + r_2{}^3 = 2(x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3) + \omega(3R) + \omega^2(3R) + 12x_1\, x_2 x_3.$$

Sacando como factor común *3R*:

$$r_1{}^3 + r_2{}^3 = 2(x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3) + (\omega + \omega^2)(3R) + 12x_1\, x_2 x_3.$$

Sustituyendo $\omega + \omega^2 = -1$, se tiene que:

$$r_1{}^3 + r_2{}^3 = 2(x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3) + (-1)(3R) + 12x_1\, x_2 x_3,$$

de donde $\omega + \omega^2 + 1 = 0$, luego:

$$r_1{}^3 + r_2{}^3 = 2(x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3) + (-3R) + 12x_1\, x_2 x_3. \qquad \textbf{\textit{3.17}}$$

Para continuar con el cálculo de $r_1{}^3 + r_2{}^3$se utilizará un resultado mencionado anteriormente, las identidades de Girard, que establece una relación entre los coeficientes y las raíces de la ecuación, así pues en este caso que es una ecuación cúbica de la forma $x^3 + px + q = 0$ donde las raíces son x_1, x_2, x_3, se tiene:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

$$\boldsymbol{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = p}. \qquad \textbf{\textit{3.18}}$$

$$\boldsymbol{x_1 x_2 x_3 = -q}.$$

Tomando $(x_1 + x_2 + x_3)^3$se tiene:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3 + (3x_1{}^2 x_2 + 3x_2{}^2 x_3 + 3x_1 x_3{}^2 + 3x_1{}^2 x_3 + 3x_2{}^2 x_1 + 3x_2 x_3{}^2) + 6x_1\, x_2 x_3.$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3 + (3R) + 6x_1\, x_2 x_3.$$

Por las identidades de Girard se tiene:

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3 = -(3R) - 6x_1\, x_2 x_3. \qquad \textbf{\textit{3.19}}$$

Sustituyendo en (3.17) se obtiene:

$$r_1{}^3 + r_2{}^3 = 2\big((-3R) - 6x_1\, x_2 x_3\big) + (-3R) + 12x_1\, x_2 x_3,$$

$$r_1{}^3 + r_2{}^3 = -9R, \qquad \textbf{\textit{3.20}}$$

Tomando la expresión $R + 3x_1\, x_2 x_3$. se puede escribir como:

$$R + 3x_1\, x_2 x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_1\mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_2\mathrm{x}_3),$$

Ahora, por las relaciones establecidas por Girard:

$$R = -3x_1\, x_2 x_3.$$

Reemplazando en (3.20) se tiene que:

$$r_1{}^3 + r_2{}^3 = 27x_1\, x_2 x_3.$$

$$r_1{}^3 + r_2{}^3 = -27q. \qquad \textbf{\textit{3.21}}$$

- Para calcular $r_1{}^3 r_2{}^3$, se tiene que $(r_1 r_2)^3 = r_1{}^3 r_2{}^3$.

Calculando

$$r_1 r_2 = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(\ r_1 = x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2.).$$

$$r_1 r_2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + \omega(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_1\mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_2\mathrm{x}_3) + \omega^2(\ \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_1\mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_2\mathrm{x}_3).$$

Sacando factor común:

$$r_1 r_2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + (\omega + \omega^2)(\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_1\mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_2\mathrm{x}_3).$$

Usando el hecho que $\omega + \omega^2 = -1$:

$$\boldsymbol{r_1 r_2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + (-1)(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)}. \qquad \textbf{\textit{3.22}}$$

Ahora, tomando la expresión:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = 0.$$

Por las identidades de Girard se tiene:

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = -2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0.$$

Reemplazando en $\boldsymbol{r_1 r_2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + (-1)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}.$ 3.223.22):

$$r_1r_2 = -2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + (-1)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

$$r_1r_2 = -3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

$$r_1r_2 = -3p.$$

Luego,

$$\boldsymbol{(r_1r_2)^3 = -27p^3}. \qquad \textbf{\textit{3.23}}$$

Con los resultados obtenidos (3.22 y 3.23) se pueden reescribir las soluciones de la ecuación cuadrática (3.15) :

$$t^2 - (-27q)t - 27p^3 = 0.$$

Ahora, como r_1 y r_2 son raíces de la ecuación cuadrática, aplicando el método de radicales se obtiene:

$$r_1{}^3 = \frac{-27}{2}q + \sqrt{\left(\frac{27^2q^2}{4}\right) + \left(\frac{4.27p^3}{4}\right)}.$$

3.24

$$r_2{}^3 = \frac{-27}{2}q - \sqrt{\left(\frac{27^2q^2}{4}\right) + \left(\frac{4.27p^3}{4}\right)}$$

Tomando la expresion (3.16):

$$x_1 = \frac{1}{3}[(\ x_1 + x_2 + x_3) + r_1 + r_2].$$

Se pueden escribir como:

$$x_1 = \frac{1}{3}\left[(\; x_1 + x_2 + x_3) + \sqrt[3]{(r_1)^3} + \sqrt[3]{(r_2)^3}\right].$$

Reemplazando (3.24) se encuentra:

$$x_1 = \frac{1}{3}\left[(\; x_1 + x_2 + x_3) + \sqrt[3]{\frac{-27}{2}q + \sqrt{\left(\frac{27^2q^2}{4}\right) + \left(\frac{4.27p^3}{4}\right)}} + \sqrt[3]{\frac{\mathbf{-27}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{q} - \sqrt{\left(\frac{\mathbf{27^2q^2}}{\mathbf{4}}\right) + \left(\frac{\mathbf{4.27p^3}}{\mathbf{4}}\right)}}\right].$$

Por las identidades de Girard se tiene que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$:

$$x_1 = \left[\sqrt[3]{\frac{-27}{2.27}q + \sqrt{\left(\frac{27^2q^2}{4.\,27^2}\right) + \left(\frac{4.27p^3}{4.\,27^2}\right)}} + \sqrt[3]{\frac{-27}{2.27}q - \sqrt{\left(\frac{27^2q^2}{4.\,27^2}\right) + \left(\frac{4.27p^3}{4.\,27^2}\right)}}\right].$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

En la anterior ecuación Lagrange ha llegado a la misma expresión que su antecesor Cardano, la fórmula para resolver la ecuación cúbica por medio de radicales, a través del proceso que hasta hoy se conoce como la resolvente de Lagrange.

3.3.2 La resolvente de Lagrange para la ecuación de cuarto grado

Con un procedimiento análogo al anterior, Lagrange establece la resolvente de la ecuación de grado cuatro, (Moreira & Soprani, 2012), (Dávila Rascón, 2003), así:

Dada la ecuación:

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \qquad \textbf{\textit{3.25}}$$

Para tomar la suma de las raíces como cero, hecho que representa gran utilidad a la hora de hacer simplificaciones, es claro que incluso antes de la época de Cardano se sabía que al hacer la sustitución $y = x + \frac{a_{n-1}}{n-1}$ se elimina el término cuadrático de grado $n-1$ de la ecuación de grado n, escribiendo sin hacer cálculos la ecuación:

$$y^4 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0,$$

de la cual se puede decir que tiene raíces y_1, y_2, y_3, y_4 y además que se cumple la ecuación $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$. La resolvente de Lagrange, para esta ecuación, está compuesta por la construcción del conjunto $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{24}$ que consiste básicamente en la permutación de las raíces y_1, y_2, y_3, y_4 en la combinación siguiente:

$$s = y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3 + \alpha^3 y_4, \qquad \textbf{\textit{3.26}}$$

donde α es una raíz, diferente de uno, de $\alpha^4 - 1 = 0$; por resumir un poco los cálculos, se toma $\alpha = -1$ y se tiene que de las 24 combinaciones, solo 6 valores distintos para s así:

$$s_1 = y_1 - y_2 + y_3 - y_4.$$

$$s_2 = -y_1 + y_2 - y_3 + y_4.$$

$$s_3 = y_1 + y_2 - y_3 - y_4.$$

$$s_4 = -y_1 - y_2 + y_3 + y_4.$$

$$s_5 = y_1 - y_2 - y_3 + y_4.$$

$$s_6 = -y_1 + y_2 + y_3 - y_4.$$

De estas seis expresiones, hay tres con las que se pueden representar las otras, estos cálculos se mostrarán más adelante, pero se utiliza este resultado para escribir la ecuación:

$$(x - s_1)^4(x + s_1)^4(x - s_2)^4(x + s_2)^4(x - s_3)^4(x + s_3)^4 = 0.$$

Que se puede escribir también como:

$$(x^2 - {s_1}^2)(x^2 - {s_2}^2)(x^2 - {s_3}^2) = 0.$$

Realizando una serie de cálculos análogos a lo que se hicieron para la construcción de la resolvente de la ecuación cúbica, se llega a que las soluciones de la ecuación de cuarto grado son:

$$y_1 = \frac{1}{4}[(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + s_1 + s_2 + s_3] \,.$$

$$y_2 = \frac{1}{4}[(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) - s_1 + s_2 - s_3] \,.$$

$$y_3 = \frac{1}{4}[(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + s_1 - s_2 - s_3] \,.$$

$$y_4 = \frac{1}{4}[(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) - s_1 - s_2 + s_3] \,.$$

En la dirección de análisis de este trabajo, es importante que al considerar los conjuntos $r_1, r_2, r_3, \dots, r_6$ y $s_1, s_2, s_3, \dots, s_6$ se encuentra que son dos grupos de orden 6.

En el caso de $r_1, r_2, r_3, \dots, r_6$, si se definen las potencias de r_1 así:

$${r_1}^1 = \quad r_1 \,.$$

$${r_1}^2 = \quad \omega r_1 = r_5 \,.$$

$${r_1}^3 = \quad \omega^2 r_1 = r_3 \,.$$

Después de estas observaciones es preciso hacer un comentario en la dirección de nuestro análisis: estas potencias forman un subgrupo cíclico de orden primo (3), de la misma manera con las potencias de r_2 se genera un subgrupo con las mismas características y con el mismo orden pero disjunto al anterior; el primer conjunto se denota actualmente como $\langle\, r_1 \rangle$ y el segundo como $\langle\, r_1 \rangle$; se cumple que $\langle\, r_1 \rangle \cup \langle r_2 \rangle = \{\ r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$.

Para las raíces que forman lo que se ha llamado la resolvente de Lagrange para la ecuación de cuarto grado, se puede observar también que definidas las potencias de sus raíces de forma similar a lo que se hizo en el caso anterior, se tiene:

$$s_1{}^1 = \quad s_1 \,.$$

$$s_1{}^2 = \quad \alpha s_1 = (-1)\, s_1 = \, s_2.$$

$$s_1{}^3 = \alpha^2 s_1 = \, s_1 \,.$$

Haciendo cálculos similares:

$$s_3{}^1 = \quad s_3 \,.$$

$$s_3{}^2 = \quad \alpha s_3 = (-1)\, s_3 = \, s_4.$$

$$s_3{}^3 = \quad \alpha^2 s_3 = \, s_3.$$

$$s_5{}^1 = \quad s_5 \,.$$

$$s_5{}^2 = \quad \alpha s_5 = (-1)\, s_5 = \, s_6.$$

$$s_5{}^3 = \quad \alpha^2 s_5 = \, s_5.$$

Finalmente $\langle\, s_1\rangle = \{\, s_1,\ s_2\}$, $\langle\, s_3\rangle = \{\, s_3,\ s_4\}$, $\langle\, s_5\rangle = \{\, s_5,\ s_6\}$, además $\langle\, s_1\rangle \cup \langle\, s_3\rangle \cup \langle\, s_5\rangle = \{\ s_1,\ s_2, s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_6\}$.

Cuando Lagrange intenta extender su método para encontrar la forma de resolver por radicales la ecuación de quinto grado, se encuentra inicialmente con la dificultad de que el número de elementos finales que forman la resolvente para este caso tiene un total de 24 elementos, conjunto que no tiene las propiedades de las anteriores resolventes que se han mencionado. La anterior afirmación se puede ilustrar tomando de la teoría de grupos el teorema que lleva precisamente el nombre de Lagrange: *Sea G un grupo de orden finito n y H un subgrupo de G, el orden de H divide al orden de G* (Suárez, 1994, pág. 102).

Aunque Lagrange intenta encontrar el método por medio de radicales para resolver la ecuación quintica, al finalizar su trabajo coloca en duda su demostración afirmando que "*De nuestro razonamiento vemos que es muy dudoso que los métodos que hemos considerado pudieran dar una completa solución a las ecuaciones de quinto grado*". (Lagrange, 1867-1869, pág. 305)

En el momento que Lagrange coloca en duda sus procedimientos se genera un cambio de perspectiva en lo que tiene que ver con la resolución de ecuaciones de quinto grado o mayor, pues se empieza a considerar que no es posible encontrar el método por medio de radicales para resolverlas.

A partir de los resultados de Lagrange, es Paolo Ruffini (1765 – 1822), matemático italiano, quien presenta una demostración sobre la irresolubilidad de la ecuación de quinto grado por medio de radicales, pero la compleja notación que utilizó para representar las permutaciones hicieron que, aunque se considerara correcta, fuera ignorada por los matemáticos de la época.

La demostración de Ruffini fue presentada en dos publicaciones, una en 1799 llamada *Teoría generale della equazione* y la *Reflessioni intorno alla soluzione della equazioni algebriche generali,* el método empleado por Ruffini establecía que no existe una resolvente para las ecuaciones mayores o iguales a cinco, implícitamente Ruffini utilizó una afirmación, que en su momento no tuvo las justificaciones suficientes para lograr la aceptación de los matemáticos de la época pero que a la postre se convertiría en el teorema de Abel- Ruffini que dice que:

> Si una ecuación es resoluble con el uso de radicales, las expresiones para las raíces pueden darse de tal forma que los radicales en ellas sean funciones racionales con coeficientes racionales de las raíces de la ecuación dada y las raíces de la unidad. (Muñoz, 2011, pág. 6)

Finalmente es Niels Henrik Abel (1802 - 1829) matemático noruego, quien da un demostración correcta y además aceptada por los matemáticos de que era imposible encontrar un método por medio de radicales con el que se pudiera resolver cualquier ecuación de quinto grado.

Abel se refirió a la demostración de Ruffini así:

> El primero y, si no estoy equivocado, el único que antes que yo ha intentado demostrar la imposibilidad de la solución algebraica de una ecuación en general, ha sido el geómetra Ruffini. Pero su demostración es tan complicada que es muy difícil afirmar lo acertado de su razonamiento. Me parece que no son siempre satisfactorios. (Henrik, 1881, pág. 218)

3.4 Ecuaciones no resolubles por el método de radicales. Demostración de Abel

La vida de Abel merece ser admirada, pues no sólo fue un joven brillante sino que en su corta vida dejó un legado muy valioso para las matemáticas.

Abel se interesó por la solución de las ecuaciones quinticas por medio de radicales, su primera demostración estuvo enfocada a que las ecuaciones de quinto grado sí era resolubles por radicales. El trabajo en el que resolvía con el método de radicales la ecuación de quinto grado, fue presentado a su mentor Bernt Michael Holmboe (1795 –1850), un matemático noruego, pero ni su mentor ni ningún matemático noruego pudo probar la veracidad de su trabajo. Lo que hizo que Holmboe lo enviara a la real sociedad de ciencias de Dinamarca donde fue revisado por el matemático danés Carl Ferdinand Degen (1766 - 1825) quien le sugirió presentar ejemplos numéricos. Cuando Abel empezó la búsqueda de ejemplos, encontró un error en su razonamiento, lo que hizo que detuviera su trabajo en la línea del álgebra y que se interesara por estudiar las integrales elípticas, tema que también era de su interés.

Los matemáticos durante más de dos siglos y en particular los geómetras estuvieron buscando la solución para una ecuación de quinto grado ó mayor por medio de radicales. Aún después del cambio de perspectiva dado por Lagrange quien después de un intento fallido de encontrar la solución por medio de radicales de la ecuación de grado cinco, plantea el problema en otra dirección, se continúa en la búsqueda del método desde la perspectiva geométrica y analítica, y es desde esta última que Abel consigue demostrar la imposibilidad de resolver, en general por medio de radicales, la ecuación de quinto grado o mayor En su artículo titulado *Mémoire sur les equations algébriques, oul´ on demontres l´impossibilité de la resolution de l´aquation générales du cinquiéne degré* (1824), reconoce lo importante de su hallazgo cuando dice:

> Los geómetras se han ocupado mucho de la solución general de las ecuaciones algebraicas y varios de ellos trataron de probar la imposibilidad. Pero, si no estoy equivocado, no han tenido éxito hasta ahora. Por eso, espero que acojan con agrado esta memoria, la cual está destinada a llenar el hueco existente en la teoría de ecuaciones algebraicas. (Abel, 1824, pág. 3)

En 1826 presentó una nueva versión de esta memoria, pero más clara y elaborada, esta fue publicada en el *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Revista de Matemáticas Puras y Aplicadas), fundado en 1826 por August Leopold Crelle (1780-1855) un matemático alemán, que era reconocido en el campo de las matemáticas por publicaciones sobre matemáticas aplicadas y escolares. Crelle se convirtió en benefactor y amigo de Abel, y rápidamente se dio cuenta que estaba frente a un genio matemático.

Aunque el *Journal de Crelle* tuvo publicaciones internacionales en poco tiempo, Abel quería que matemáticos prestigiosos conocieran su trabajo, con este objetivo claro, Abel se desplaza hasta Berlín, con el propósito de entrevistarse con Gauss, a quien previamente le había enviado su memoria, gran desilusión se llevó Abel al enterarse que Gauss ignoró por completo su demostración afirmando que: *" ¡ He aquí otra de esas monstruosidades!"*. Por lo que decidió no visitarlo y continuar sus travesías que lo llevaron por varias ciudades de

Italia y Francia hasta llegar a París, donde presentó su memoria a la Academia de Ciencias de Francia para que fuese publicada en la revista de la academia, Para esto, debía primero ser evaluado el documento por profesores de la academia, tarea que fue encomendada a Augustin Louis Cauchy (1789-1857) y Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

Abel esperó con ansias la respuesta de sus evaluadores, Legendre le dejó toda la responsabilidad a Cauchy afirmando que era poco legible y Cauchy no se interesó por este trabajo hasta el punto que fue extraviada.

Abel, después de una larga espera, se entera de que su memoria fue extraviada y decide abandonar la Europa continental y volver a Noruega, donde fallece producto de una tuberculosis pulmonar.

Después de la muerte de Abel, Legendre es el primero en llamar la atención sobre el descubrimiento de Abel: *"¡Qué descubrimiento es ése de Abel! (…) ¿cómo es posible que ese descubrimiento, quizás el más importante que se haya hecho en nuestro siglo, se comunicara a su Academia hace dos años y se escapara a la atención de sus colegas?"* (Muñoz, 2011, pág. 17)

Tras su muerte, la fama de Abel creció notoriamente, aunque Cauchy y Legendre intentaron publicar su memoria en la revista de la academia, ya el *Journal de Crelle* había publicado parte de esta. En 1830 le concedieron el gran premio de matemáticas y aunque se ha dicho reiteradamente, es importante reconocer que la demostración de la imposibilidad de resolver las ecuaciones de quinto grado o mayor por medio de radicales presentada por Abel, fundó las bases de lo que actualmente se conoce como álgebra abstracta.

3.4.1 Una mirada general a la demostración de Abel

En su memoria de 1824, Henrik Abel responde a los problemas que se presentaban, hasta el momento, en la teoría de ecuaciones: “Por eso, espero que acojan con agrado esta memoria, la cual está destinada a llenar el hueco existente en la teoría de ecuaciones algebraicas” (Abel, 1824, pág. 3).

La técnica con que aborda su demostración se enmarca, en reiterados pasos, en la reducción al absurdo; el supuesto inicial tiene como soporte el teorema, mencionado anteriormente, que hoy se conoce como teorema de Ruffini-Abel; supone que para la incógnita x debe haber una expresión de la forma:

$$x = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}.$$

Es decir una solución con radicales, como son los casos hasta el momento conocidos, asumiendo que $R^{\frac{1}{m}}$ es imposible expresarlo como una función racional, luego usando su primer truco algebraico elimina p_1 dejando el término $R^{\frac{1}{m}}$ con coeficiente 1, esta expresión para x se sustituye en la ecuación inicial debiéndose obtener una expresión con términos de potencias iguales de R nuevamente, pero con nuevos coeficientes, así:

$$0 = q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + q_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + q_{\mathbf{m-1}} R^{\frac{m-1}{m}} . \qquad \textbf{\textit{3.27}}$$

Luego hace una sustitución $z = R^{\frac{1}{m}}$ lo que equivale a

$$\boldsymbol{z^m = R}. \qquad \textbf{\textit{3.28}}$$

Argumentando que entre la ecuación 3.27 y 3.28 existen soluciones comunes, construye entonces una ecuación polinómica con estas soluciones comunes como raíces, lo que lo lleva finalmente a probar que los q_i son todos ceros y que por tanto las expresiones de la forma $R^{\frac{1}{m}}, \alpha R^{\frac{1}{m}}, \alpha^2 R^{\frac{1}{m}}, \dots, \alpha^{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$ satisfacen la ecuación inicial. Además por ser α una solución del polinomio:

$$\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha + 1 = 0.$$

Las posibles soluciones:

$$\begin{gathered} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{gathered}$$

Deben ser todas distintas, y por tanto m no puede exceder a 5, retomando un resultado anterior de Cauchy limita las posibilidades a $m = 2$ o $m = 5$, probando inicialmente que el caso $m = 5$ lo lleva a un imposible y dejando como única opción $m = 2$.

Paso seguido expresa los términos $p, R^{\frac{1}{m}}, p_2 R^{\frac{2}{m}}, \dots p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$ como funciones racionales de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, se centra en la expresión:

$$R^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(x_1 + \alpha^{m-1} x_2 + \cdots \alpha x) .$$

De donde señala que R es una función racional de las raíces x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Para llegar nuevamente a una expresión igualmente imposible con el mismo argumento anterior, concluyendo que es imposible resolver por radicales la ecuación general de quinto grado.

Abel tenía claro que esta imposibilidad no es solo para la quintica sino para aquellas ecuaciones de grado mayor, ya que si multiplicaba la ecuación quintica por x obtenía una ecuación particular de sexto grado con una solución conocida $x = 0$ y las restantes imposibles de hallar por radicales.

3.4.2 Demostración dada por Abel sobre la imposibilidad de resolver por medio de radicales la ecuación de quinto grado y mayores

A continuación se mostrara con más detalle y con comentarios la demostración de la imposibilidad de resolver por medio de radicales las ecuaciones de quinto grado o mayor escrita en su memoria, para mostrar con un lenguaje más actual la demostración de Abel, se utilizará una notación ligeramente distinta a la utilizada por Abel.[4]

Para entender la demostración de Abel se tomó como referencia su memoria (Abel, 1824) y el artículo (Muñoz, 2011), teniendo claro que se presentan varias pasos y observaciones que al parecer fueron obviados en estos documentos.

Sea la ecuación general de grado quinto:

$$x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = 0. \qquad \textbf{\textit{3.29}}$$

Abel desarrolla su demostración siguiendo el método de reducción al absurdo, para lo cual plantea que si x es una solución de la ecuación 3.29 esta se puede expresar de la forma:

$$\boldsymbol{x = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}}. \quad 3.30$$

---

[4] Para el seguimiento de la demostración dada por Abel se utilizó el artí{iculo original de Abel y las fuentes secundarias (Muñoz, 2011).

Donde m es un número primo y $R, p, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ son funciones racionales de los coeficientes de la ecuación 3.29.

Para ilustrar lo que hasta el momento había planteado Abel, se mostrará en términos de la ecuación de segundo grado un ejemplo; si se tiene la ecuación:

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Es claro que si $A \neq 0$ entonces esta ecuación tiene las mismas soluciones que la ecuación:

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0.$$

Haciendo

$$a = \frac{B}{A}, b = \frac{C}{A}.$$

Se tiene:

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Se sabe que las soluciones de esta ecuación se pueden hallar por medio del método de radicales y tienen la misma forma, en este caso:

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Tomando

$$-\tfrac{a}{2} = p \quad \tfrac{1}{2} = p_1 \quad \text{y} \quad a^2 - 4b = R.$$

Reescribiendo, se tiene una expresión como la propuesta por Abel 3.30:

$$x = p + p_1 R^{\frac{1}{2}}.$$

Observe que en este caso el número primo m es 2, y que a pesar de que las raíces de la ecuación se pueden expresar como una función formada por radicales, es imposible reducir la expresión $R^{\frac{1}{2}}$ a una función racional en términos de los coeficientes de la ecuación.

Continuando con la demostración, Abel elimina p_1 de 3.30, haciendo las siguientes sustituciones:

$$R = \frac{R}{(p_1)^m}.$$

Lo que también lo lleva, aunque no lo manifiesta, a hacer:

$$p_2 = \frac{p_2}{(p_1)^2}.$$

$$p_3 = \frac{p_3}{(p_1)^3}.$$

$$\vdots \qquad \textbf{\textit{3.31}}$$

$$p_{m-1} = \frac{p_{m-1}}{(p_1)^{m-1}}$$

La ecuación, eliminando p_1, queda:

$$x = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}. \qquad \textbf{\textit{3.32}}$$

Estos nuevos coeficientes $p, p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ son funciones similares a los coeficientes anteriores de la ecuación 3.30, ahora, reemplazando esta solución (3.32) en la ecuación inicial 3.29 y reagrupando convenientemente, se obtiene:

$$\boldsymbol{0 = q + q_1 R^{\frac{1}{m}} + q_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + q_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}} \;. \qquad \textbf{\textit{3.33}}$$

Siendo $q, q_1, q_2, \dots, q_{m-1}$ funciones racionales de los términos $a, b, c, d, e, p, p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ y R.

En el siguiente paso, Abel hace la sustitución:

$$R^{\frac{1}{m}} = z.$$

Y plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$z^m - R = 0 \quad \text{y} \quad q + q_1 z + \cdots + q_{m-1} z^{m-1} = 0 \ . \qquad \textbf{\textit{3.34}}$$

En esta etapa de la demostración Abel prueba que los coeficientes $q, q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}$ son todos ceros, para lo cual usa una nueva suposición: si los términos $q, q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}$ no son simultáneamente cero, las ecuaciones expresadas en 3.34 tienen necesariamente una o más raíces en común, Abel continúa afirmando que (Abel, 1824): *"Si k es el número de estas raíces comunes, sabemos que podemos encontrar una ecuación de grado k que tenga tantas como las k raíces mencionadas y en la cual todos los coeficientes sean funciones racionales de $R, q, q_1, q_2, \ldots$ y q_{m-1}"*.

Sea:

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_k z^k = 0 \ . \qquad \textbf{\textit{3.35}}$$

La ecuación de grado k cuyas raíces son comunes a 3.34. Ahora, llamando $\alpha^m = \frac{z^m}{R}$, reemplazando en $\frac{z^m}{R} - 1 = 0$ se tiene la ecuación:

$$\alpha^m - 1 = 0. \qquad \textbf{\textit{3.36}}$$

Que equivale a tener:

$$0 = (\alpha - 1)(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha + 1). \qquad \textbf{\textit{3.37}}$$

Del primer factor de 3.37 se tiene que $\alpha_1 = 1$ de donde se puede encontrar una raíz para $z^m - R = 0$:

$$1^m = \frac{{z_1}^m}{R}.$$

$$R = {z_1}^m.$$

Luego,

$$z_1 = R^{\frac{1}{m}}.$$

Si α_1 es una solución de:

$$\boldsymbol{\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \cdots + \alpha + 1 = 0} \qquad \textbf{\textit{3.38}}$$

Para $i = 1,2,3,\ldots k$ entonces:

$${\alpha_i}^m = \frac{{z_i}^m}{R}.$$

3.39

$$z_i = \alpha_i R^{\frac{1}{m}}.$$

En general, cualquier solución de la ecuación 3.35 tiene la forma:

$$z_i = \alpha_i R^{\frac{1}{m}}.$$

Que también se puede escribir (sustituyendo $R^{\frac{1}{m}} = z$) como:

$$z_i = \alpha_i z.$$

Ahora, remplazando las k raíces en la ecuación 3.35 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$r + a_1 r_1 z + {a_1}^2 r_2 z^2 + \cdots + {a_1}^k r_k z^k = 0 \ .$$

$$r + a_2 r_1 z + {a_2}^2 r_2 z^2 + \cdots + {a_2}^k r_k z^k = 0 \ .$$

$$\vdots$$

$$r + a_k r_1 z + {a_k}^2 r_2 z^2 + \cdots + {a_k}^k r_k z^k = 0 \ .$$

Tomando $z = S_1, z^2 = S_2, z^3 = S_3, \dots, z^k = S_k$, se obtiene un sistema lineal que matricialmente se puede plantear así:

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_k \\ a_2 r_1 & a_2 r_2 & \dots & a_2 r_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_k r_1 & a_k r_2 & \dots & a_k r_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} r. \qquad \textbf{3.40}$$

Reescribiendo 3.40 se tiene:

$$AS = b. \qquad \textbf{3.41}$$

Cada solución de este sistema tiene la forma:

$$S_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}$$

Se ha llegado a que *z* se puede escribir como una función racional de los coeficientes (r_k), éstos a su vez son *p*, *a*, *b*,… lo cual es una contradicción pues se había dicho anteriormente que $R^{\frac{1}{m}} = z$ no se podía expresar como una función racional.

Luego,

$$q = 0, q_1 = 0, q_2 = 0, \dots, q_{m-1} = 0.$$

En consecuencia, la ecuación 3.29 se satisface para todos los valores de *x* obtenidos al sustituir en la ecuación 3.32 a $R^{\frac{1}{m}}$ por las raíces de la forma $z_i = \alpha_i R^{\frac{1}{m}}$..

Esto es claro puesto que al sustituir estos valores de *x* en 3.29, se obtienen múltiplos de la ecuación 3.33.

Por ejemplo:

$$x = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 \left(R^{\frac{1}{m}}\right)^2 + \cdots + p_{m-1} \left(R^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}. \qquad \textbf{3.42}$$

Si se sustituye en 3.29 satisface la ecuación.

Ahora,

$$x_2 = p + \alpha_2 R^{\frac{1}{m}} + p_2 \alpha_2{}^2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} \alpha_2{}^{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}.$$

$$\vdots \qquad \textbf{\textit{3.43}}$$

$$\boldsymbol{x_m = p + \alpha_m R^{\frac{1}{m}} + p_2 \alpha_m{}^2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} \alpha_{m-1}{}^{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}}.$$

Se tiene entonces que todos los valores de *x* son diferentes, luego *m* no debe exceder de cinco.

Observe que si $x_1 = x_2$ se tendría que:

$$p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = p + \alpha_2 R^{\frac{1}{m}} + p_2 \alpha_2{}^2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} \alpha_2{}^{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}. \qquad \textbf{\textit{3.44}}$$

Simplificando:

$$(\alpha_2 - 1) R^{\frac{1}{m}} + (\alpha_2{}^2 - 1) p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + (\alpha_2{}^{m-1} - 1) p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} = 0. \qquad \textbf{\textit{3.45}}$$

De donde:

$$\alpha_2 - 1 = \alpha_2{}^2 - 1 = 0 \ldots = \alpha_2{}^{m-1} - 1. \qquad \textbf{\textit{3.46}}$$

Ahora,

$$\boldsymbol{(\alpha_2 - 1) + (\alpha_2{}^2 - 1) + \cdots + (\alpha_2{}^{m-1} - 1) = 0}. \qquad \textbf{\textit{3.47}}$$

$$(\alpha_2 + \alpha_2{}^2 + \cdots + \alpha_2{}^{m-1}) - (m - 1) = 0.$$

$$\alpha_2 + \alpha_2{}^2 + \cdots + \alpha_2{}^{m-1} + 1 = m.$$

Lo que contradice 3.38 , luego cada x_m debe ser diferente.

Hasta este momento Abel deja claro que las ecuaciones de quinto grado con una raíz de multiplicidad algebraica 5 quedarían por fuera de la supuesta fórmula con radicales. Es claro que esta situación, donde una raíz tiene multiplicidad algebraica de cinco, se da si los coeficientes son muy restringidos.

Ahora, haciendo uso de las ecuaciones 3.43, Abel despeja $p, p_2, \dots, p_{m-1}, R.$ y $R^{\frac{1}{m}}$, a continuación se presentan unos de estos despejes:

Si se suman las ecuaciones 3.43 se obtiene:

$$x_1 + \dots + x_m = mp + R^{\frac{1}{m}}(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1}) + p_2 R^{\frac{2}{m}}(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1}) + \cdots$$
$$+ p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1}).$$

Como $1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1} = 0.$

Entonces se tiene:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = mp.$$

De donde se puede concluir que:

$$\boldsymbol{p = \frac{1}{m}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m).} \qquad \textbf{\textit{3.48}}$$

Para despejar $R^{\frac{1}{m}}$, se toma la ecuación 3.42 :

$$R^{\frac{1}{m}} = x_1 - \left(p + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}\right).$$

Multiplicando la ecuación $x_2 = p + \alpha_2 R^{\frac{1}{m}} + p_2 {\alpha_2}^2 R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} {\alpha_2}^{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$ por α^{m-1}y teniendo en cuenta que $\alpha^m = 1$ se tiene:

$$\alpha^{m-1} x_2 = p\alpha^{m-1} + R^{\frac{1}{m}} + p_2 \alpha R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1} {\alpha_2}^{m-2} R^{\frac{m-1}{m}}. \qquad \textbf{\textit{3.49}}$$

Despejando $R^{\frac{1}{m}}$:

$$R^{\frac{1}{m}} = \alpha^{m-1}x_2 - (\alpha^{m-1}p + p_2\alpha R^{\frac{2}{m}} + \cdots + p_{m-1}{\alpha_2}^{m-2}R^{\frac{m-1}{m}}). \qquad \textbf{\textit{3.50}}$$

Procediendo de manera similar con las restantes $(m-2)$ ecuaciones y sumando las *m*-ecuaciones resultantes, se obtiene:

$$mR^{\frac{1}{m}} = x_1 + \alpha^{m-1}x_2 + \alpha^{m-2}x_3 + \cdots + \alpha x_m. \qquad \textbf{\textit{3.51}}$$

De donde

$$R^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(x_1 + \alpha^{m-1}x_2 + \alpha^{m-2}x_3 + \cdots + \alpha x_m). \qquad \textbf{\textit{3.52}}$$

Además:

$$R = \frac{1}{m^m}(x_1 + \alpha^{m-1}x_2 + \alpha^{m-2}x_3 + \cdots + \alpha x_m)^m. \qquad \textbf{\textit{3.53}}$$

De igual manera se hace para $p_2R^{\frac{2}{m}}, p_3R^{\frac{3}{m}}, \ldots, p_{m-1}R^{\frac{m-1}{m}}$, así:

$$p_2R^{\frac{2}{m}} = \frac{1}{m}(x_1 + \alpha^{m-2}x_2 + \cdots + \alpha^2x_m).$$

$$p_3R^{\frac{3}{m}} = \frac{1}{m}(x_1 + \alpha^{m-3}x_2 + \cdots + \alpha^3x_m).$$

$$\vdots$$

$$p_{m-1}R^{\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{m}(x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha^{m-1}x_m).$$

Mostrando que todos los términos de la ecuación 3.32 se pueden expresar como funciones racionales de las raíces de la ecuación 3.29.

Se enfoca ahora en la expresión 3.53:

$$R = \frac{1}{m^m}(x_1 + \alpha^{m-1}x_2 + \alpha^{m-2}x_3 + \cdots + \alpha x_m)^m.$$

Advirtiendo que la expresión del lado derecho de la ecuación es un polinomio de grado m, tratando esta ecuación del mismo modo que la ecuación 3.29 se puede escribir una expresión análoga a la expresión 3.32, así:

$$R = Q + V^{\frac{1}{n}} + Q_2 V^{\frac{2}{n}} + \cdots + Q_{n-1} V^{\frac{n-1}{n}}.$$

De donde se puede afirmar que los términos de esta expresión: $Q, V, V^{\frac{1}{n}}, V^{\frac{2}{n}}, \dots, Q_{n-1} V^{\frac{n-1}{n}}$ son funciones racionales de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$, de donde concluye que todas las expresiones irracionales contenidas en la expresión

$$x = P + R^{\frac{1}{n}} + P_2 R^{\frac{2}{n}} + \cdots + P_{n-1} R^{\frac{n-1}{n}}.$$

Son funciones racionales de las raíces de la ecuación 3.29.

Haciendo uso de los resultados obtenidos por Cauchy, Abel da su último paso en la demostración, estableciendo la reducción al absurdo, la cual consiste en mostrar que la expresión, que se obtiene tomando $m = 5$ en 3.49:

$$R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5).$$

Puede tomar en su lado izquierdo 5 valores, mientras que el lado derecho 120 valores; lo que resulta de las permutaciones de las 5 raíces x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, descartando así la posibilidad que $m = 5$ y finalmente el único valor posible para m es 2.

Se concluye que es imposible resolver por radicales la ecuación general de quinto grado, resultado del cual advierte Abel se puede concluir que las ecuaciones de grado superior a cinco tampoco son resolubles por este método.

4. LOS DESARROLLOS DE GALOIS Y LA EMERGENCIA DE LAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

> ***La matemática es el trabajo del espíritu humano que está destinado tanto a estudiar como a conocer, tanto a buscar la verdad como a encontrarla.***
>
> ***Evariste Galois***

Como pudo observarse, Abel demuestra que es imposible encontrar una expresión general para resolver, por el método de radicales, una ecuación de grado mayor a cuatro, lo que desmonta una creencia compartida por todas las generaciones que le antecedieron.

El problema, después del hallazgo de Abel, se orienta ahora en dar respuesta a la pregunta: ¿Cuándo una ecuación es resoluble por medio de radicales? Para la época ya era claro, gracias al trabajo de Gauss en esta dirección, que algunas familias particulares de ecuaciones de grado mayor a cuatro eran resolubles por radicales; el interés de los matemáticos se enfoca ahora en caracterizar de manera general las ecuaciones de quinto grado y mayores que sí son resolubles por radicales. Este problema es resuelto finalmente por Evariste Galois.

4.1 La vida de Galois

Galois nació en 1811 en cercanías a París, sus primeros años estudió en su casa bajo la dirección de su madre; a sus 15 años ingresó a un prestigioso colegio de París en el que rápidamente se interesó por los cursos de matemáticas y dejó de lado el resto de las asignaturas. Sus profesores reconocen su superioridad frente a sus compañeros, pero a pesar de esto no pudo ingresar el centro de estudios científicos más prestigioso de Francia, la Escuela Politécnica.

La vida de Galois estuvo marcada por situaciones desagradables y amargas; en 1829 presentó algunos de sus resultados sobre teoría de ecuaciones a la Academia de Ciencias de París, pero éstos corrieron la misma suerte que el trabajo de Abel en su momento. Cauchy, quien fue el encargado de revisarlo, argumenta que es incomprensible y termina extraviándolo. En 1832, Galois fallece durante un duelo; una noche antes de este duelo, Galois completa su memoria y pide a un amigo cercano que se encargue de publicar su trabajo:

> He hecho algunos descubrimientos nuevos en análisis. El primero concierne a la teoría de ecuaciones; los otros, a las funciones enteras. En teoría de ecuaciones he investigado las condiciones de solubilidad de ecuaciones por medio de radicales; con ello he tenido ocasión de profundizar en esta teoría y describir todas las transformaciones posibles en una ecuación, aun cuando no sea posible resolverla por radicales. Todo ello puede verse aquí, en tres memorias... Haz petición pública a Jacobi o a Gauss para que den su opinión,

> no acerca de la veracidad, sino sobre la importancia de estos teoremas. Confío en que después algunos hombres encuentren de provecho organizar todo este embrollo.[5]

Su amigo Auguste Chevalier se da a la tarea de publicarlo y enviarlo a diferentes matemáticos reconocidos, doce años después el matemático francés Joseph Liouville (1809 - 1882) reconoce la importancia de la memoria de Galois, afirmando que: *"…espero interesar a la academia en anunciarle que entre los papeles de Evariste Galois encontré una solución, tan exacta como profunda, de este bello problema…"*. De ahí en adelante, muchos matemáticos se interesaron por estudiar los resultados dejados por Galois.

4.2 La teoría de Galois en términos generales

El enfoque en la relación entre los coeficientes y las raíces de una ecuación, iniciado por Cardano y continuado por sus sucesores en forma separada a la búsqueda de nuevos algoritmos que permitan hallar las soluciones de las ecuaciones de grado mayor o igual a cuatro, es retomado por Lagrange a quien debe atribuírsele el cambio de enfoque, es decir, la búsqueda de las soluciones de una ecuación, teniendo en cuenta la relación entre los coeficientes y las raíces, lo que desemboca en los polinomios simétricos; es desde el estudio de éstos con la perspectiva de Lagrange que se empiezan a gestar nuevas estructuras algebraicas como es el caso particular del concepto de grupo (permutaciones).

[5] Tomado de (Álvarez, 2006, pág. 5).

Esta nueva orientación resulta ser tan fértil que de ella se desprenden resultados tales como la no solubilidad por radicales de las ecuaciones de grado quinto y mayores demostrado por Abel. En esta misma dirección se puede decir que en el método empleado por Evariste Galois cobran fundamental importancia los polinomios simétricos, pues Galois inicia definiendo para cada ecuación un conjunto k_0, formado por todas las operaciones posibles (suma, resta, multiplicación, división) entre los coeficientes de la ecuación y dado que cada uno de los coeficientes se pueden expresar como funciones de los polinomios simétricos de las raíces. Galois encuentra que la estructura de este conjunto k_0 está relacionada con lo que actualmente se conoce como el grupo de Galois de la ecuación.

A continuación se presenta una definición del grupo de Galois, en términos modernos, la ecuación $x^n + a^{n-1}x^{n-1} + \cdots + a = 0$ estás asociada al polinomio $f(x)$ con $F(x)$ el conjunto de todos los polinomios en x cuyos coeficientes están en el campo x.

> Si Kes un cuerpo de descomposición sobre F, $G(K/F)$ es llamado el grupo de Galois de $f(x)$ y es isomorfo a cierto grupo de permutaciones de los ceros de $f(x)$. Existe una correspondencia entre los subgrupos de $G(K/F)$ y los subcuerpos de K, a partir de la cual se deduce una condición para la solubilidad por radicales de la ecuación $f(x) = 0$. (Suárez, 1994, pág. 229).

La condición no es más que el grupo de Galois asociado a la ecuación sea resoluble:

Teorema: Un grupo G es resoluble sí y solo sí, para alguna serie de composición los factores de composición tienen orden primo. (Suárez, 1994, pág. 132).

Esta condición la cumplen S_2, S_3, S_4 que son los grupos de Galois asociados a las ecuaciones de 2°, 3° y 4°, y que no lo cumple el grupo S_5 ni en general los grupos $S_n, n > 5$ que son los grupo de Galois asociados a las ecuaciones generales de quinto grado o mayores.

Cabe anotar que lo que no demuestra Galois es que en general no se puede establecer una descomposición en subgrupos normales para $S_5, S_6, \dots S_n$, esto no debe entenderse que el grupo de Galois para cualquier ecuación de quinto grado es S_5, este es el caso más general del grupo de Galois.

Las permutaciones son un concepto fundamental en el estudio del grupo de Galois, en términos actuales, una permutación de *n* elementos es una función θ, uno a uno, cuyo dominio y rango son el mismo conjunto finito de *n* elementos.

Sea $G = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto finito de elementos y θ una permutación de *G* se puede representar de la siguiente forma:

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_{i_1} & x_{i_2} & \dots & x_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Donde $\theta x_1 = x_{i_1}, \theta x_2 = x_{i_2}, \dots, \theta x_n = x_{i_n}$.

Para más claridad se puede escribir usando los subíndices:

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

El conjunto de las permutaciones de *G*, con la estructura algebraica atribuida por Galois se le denomina actualmente grupo simétrico de grado *n* y se denota como S_n.

Para dar un poco más de claridad al método empleado por Galois, se mostrará para la ecuación de grado dos, tres y cuatro, algunos aspectos comunes en busca de clarificar la idea general de la teoría de Galois, pero se debe advertir que es necesario profundizar mucho más en su estudio para llegar a comprender el razonamiento utilizado, aspecto de la obra de Galois que se ve reflejado con sus contemporáneos, de quienes no logró hacerse comprender.[6]

4.2.1 Ecuación General de segundo grado

Si se tiene la ecuación cuadrática:

$$x^2 + bx + c = 0. \qquad \textbf{\textit{4.1}}$$

Los polinomios simétricos asociados a esta son:

$$b = -(r_1 + r_2)$$

$$c = r_1 r_2,$$

siendo r_1, r_2 las raíces de la ecuación 4.1.

Teniendo claro que la solución por medio de radicales de esta ecuación (4.1) es:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2},$$

[6] Para el seguimiento de la demostración dada por Galois se utilizó el artículo original de Galois (Galois, 1832) y las fuentes secundarias (Dávila Rascón, 2003), (Galois, 2008), (Bourgne & Azra, 1962), (Taton, 1971).

un análisis detallado de esta solución permite ver que el radical $\sqrt{b^2 - 4c}$ transforma una función simétrica en dos funciones no simétricas, observe que la expresión:

$$b^2 - 4c = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 = (r_1 - r_2)^2,$$

es una función simétrica, pero al aplicarle el radical se obtiene:

$$\pm(r_1 - r_2),$$

que no es simétrica.

Ahora, considérese el conjunto de todas las expresiones que resultan de operar los coeficientes de la ecuación (suma, resta, multiplicación y división) que se pueden realizar con b y c, los coeficientes de la ecuación cuadrática, llámesele a este conjunto k_0 , éste conjunto de puede expresar así:

$$f(b, c) \in \ k_0.$$

Algunos ejemplos de elementos del conjunto k_0 son $b^2 - 4c$, $-\frac{b}{2} + c$, $2c - b$, $\frac{3b+5c}{c}$, etc.; una característica sustancial que tiene este conjunto es que sus elementos son invariantes bajo permutaciones, como se observa en algunos casos:

$$-\frac{b}{2} + c = \frac{(r_1 + \ r_2)}{2} + r_1\, r_2\ ,$$

$$2c - b = 2r_1\, r_2 + (r_1 + \ r_2),$$

$$\frac{3b + 5c}{c} = \frac{-3(r_1 + \ r_2) + 5r_1\, r_2}{r_1\, r_2}.$$

Los polinomios al lado derecho de las igualdades son polinomios simétricos de r_1 y r_2. esta relación entre los coeficientes de la ecuación y sus raíces, se puede expresar así:

$$f(b, c) = g(r_1,\ r_2) \in \ k_0.$$

Ahora se define el conjunto k_1 de todas las expresiones que se generan realizando todas las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de los elementos b, c y $\sqrt{b^2 - 4c}$; en este nuevo conjunto están todos los elementos de k_0, puesto que sus elementos resultan de operaciones elementales entre los dos primeros elementos, es decir $k_0 \subset k_1$.

Se observa también que las raíces del polinomio pertenecen a k_1 más no a k_0, por lo cual es llamado k_1 el campo de extensión de k_0. Para el estudio de estos dos conjuntos infinitos, Galois observa que la estructura interna de k_0, es decir la conformación de cada elemento, en este caso a través de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones entre los coeficientes de la ecuación, se puede relacionar con el grupo de permutaciones del conjunto r_1 y r_2, el cual es isomorfo a S_2:

$$g(r_1,\, r_2) = g(r_2,\, r_1)$$

De otro lado observa que todas los elementos de k_1 donde aparece el elemento generador $\sqrt{b^2 - 4c}$ no resultan ser polinomios simétricos de las raíces, como se aclaró anteriormente, y en consecuencia Galois asocia a la estructura interna de k_1, el grupo trivial de simetrías, que usualmente se denota como $\{Id\}$ y que corresponde a todas las permutaciones que se pueden hacer con el elemento identidad, a continuación se presenta un esquema de la cadena de descomposición:

$$\begin{tikzcd} k_0 \arrow[r] \arrow[d] & k_1 \arrow[d] \\ S_2 & \{Id\} \end{tikzcd}$$

4.2.2 Ecuación General de tercer grado

Dada la ecuación cúbica:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Los polinomios simétricos asociados a esta son:

$$b = -(r_1 + r_2 + r_3).$$

$$c = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3.$$

$$d = -r_1 r_2 r_3.$$

La fórmula para resolver la ecuación cúbica se puede escribir como:

$$-\frac{b}{3} + \frac{t}{3} + \frac{b^3}{3t},$$

donde

$$t = \sqrt[3]{\frac{9bc - 2b^3 - 27d + \sqrt{(9bc - 2b^3 - 27d)^2 + 4(3c - b^2)^3}}{2}}.$$

Ahora, haciendo las siguientes sustituciones:

$$E = \frac{9bc - 2b^3 - 27d + \sqrt{D}}{2},$$

y

$$D = (9bc - 2b^3 - 27d)^2 + 4(3c - b^2)^3,$$

se puede escribir:

$$t = \sqrt[3]{E}.$$

Reemplazando *b*, *c* y *d* en términos de las raíces y haciendo una serie de simplificaciones se tiene que:

$$D = -27(r_1 - r_2)^2(r_1 - r_3)^2(r_2 - r_3)^2 \qquad \textbf{\textit{4.2}}$$

y

$$E = (r_1 + -\alpha r_2 + \alpha^2 r_3)^3,$$

donde α es una raíz cúbica no trivial de la unidad:

$$\alpha = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

D es una función simétrica de las raíces, pero $\sqrt{D}$ no lo es en general, pero se conservan algunas simetrías; por ejemplo observe que al hacer la permutación en $\sqrt{D}$:

$$\theta = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_2 & r_3 & r_1 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene:

$$\sqrt{D} = \sqrt{27}i(-1)(r_1 - r_2)(-1)(r_1 - r_3)(r_2 - r_3).$$

$$= \sqrt{27}i(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_2 - r_3).$$

Que corresponde a la misma expresión al aplicarle la raíz cuadrada a 4.2. Otra permutación que resulta invariante es:

$$\theta^2 = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_3 & r_1 & r_2 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar que bajo cualquier otra permutación $\sqrt{D}$ varía.

Ahora, se llama k_0 al conjunto de todas las expresiones que resultan de operar (suma, resta, multiplicación y división) los coeficientes de la ecuación cúbica *b*, *c* y *d*.

$$f(b, c, d) \in k_0.$$

Cada una de las expresiones que forman el conjunto k_0 está íntimamente ligada al conjunto de las raíces de la ecuación cúbica r_1,r_2 y r_3; puesto que cada coeficiente de la ecuación puede expresarse por medio de un polinomio simétrico de estas, en efecto, k_0 está relacionado con el grupo de permutaciones de sus raíces el cual a su vez es isomorfo a S_3. Por “transitividad” en nuestro razonamiento anterior se puede implicar la relación entre k_0 y S_3.

A continuación se forma el conjunto k_1 con todas las expresiones que se generan realizando todas las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de los elementos b, c ,d y $\sqrt{D}$:

$$f\left(b, c, d, \sqrt{D}\right) \in k_1.$$

En este nuevo conjunto están todos los elementos de k_0, puesto que sus elementos resultan de operaciones elementales entre los tres primeros elementos, es decir $k_0 \subset k_1$, pero además este conjunto se caracteriza porque tiene tres permutaciones invariantes, la identidad y las dos permutaciones mencionadas anteriormente, lo cual hace que se pueda asociar con el Grupo Alternante de grado 3, que se denota por A_3, el cual está formado por todas las permutaciones pares de S_3.

Finalmente se define el conjunto k_2 formado por todas las expresiones que se obtienen al hacer operaciones (suma, resta, multiplicación y división) entre los coeficientes de la ecuación cúbica, $\sqrt{D}$y $\sqrt[3]{E}$:

$$f\left(b, c, d, \sqrt{D}, \sqrt[3]{E}\right) \in k_2.$$

Aunque E tiene las mismas simetrías que $\sqrt{D}$, al extraerle raíz cúbica todas se pierden, luego el grupo que se le puede asociar a k_2 es el grupo trivial de simetrías$\{Id\}$.

$$\begin{tikzcd} k_0 \arrow[r] \arrow[d] & k_1 \arrow[r] \arrow[d] & k_2 \arrow[d] \\ S_3 & A_3 & \{Id\} \end{tikzcd}$$

4.2.3 Ecuación General de cuarto grado

Si se tiene la ecuación de cuarto grado de la forma:

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

La fórmula para solucionar esta ecuación se puede escribir como:

$$F - \sqrt{F} - \sqrt[3]{G} - \sqrt{H} - \sqrt{I}.$$

Teniendo claro que *F*, *G*, *H*, *I* son una serie de expresiones en términos de las raíces r_1,r_2,r_3 y r_4. Haciendo un análisis de los radicales que se encuentran en la solución de la ecuación $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, se encuentra que a medida de que se van aplicando estas raíces se van perdiendo las simetrías, es así como en *F* todas sus funciones son simétricas, mientras que en *I* no hay ninguna simétrica.

Sea k_0 al conjunto de todas las expresiones que resultan de operar los coeficientes de la ecuación operaciones (suma, resta, multiplicación y división) que se pueden realizar con *b*, *c*, *d* y *e*, los coeficientes de la ecuación de cuarto grado:

$$f(b, c, d, e) \in \ k_0.$$

Este conjunto se asocia con el grupo de todas las permutaciones que se pueden hacer con las raíces de la ecuación S_4.

Con un proceso similar al de la ecuación cuadrática y cúbica, se forma la cadena de extensiones hasta llegar a $\{Id\}$:

$$\begin{tikzcd}
k_0 \arrow[r] \arrow[d] & k_1 \arrow[r] \arrow[d] & k_2 \arrow[r] \arrow[d] & k_3 \arrow[r] \arrow[d] & k_4 \arrow[d] \\
S_4 & A_4 & G_2 & G_3 & \{Id\}
\end{tikzcd}$$

El conjunto k_1 corresponde a todas las operaciones (suma, resta, multiplicación y división) que se pueden realizar con b, c, d, e y $\sqrt{F}$:

$$f\left(b, c, d, e, \sqrt{F}\right) \in k_1.$$

este conjunto tiene 12 permutaciones invariantes, lo cual permite asociarlo al grupo alternante (A_4) de permutaciones pares, es decir el generado por $\rho = (r_1 r_2)(r_3 r_4)$, $\sigma = (r_1 r_3)(r_2 r_4)$ y $\tau = (r_1, r_2, r_3)$.

Ahora, llama k_2 al conjunto de todas las operaciones (suma, resta, multiplicación y división) que se pueden realizar con $b, c, d, e, \sqrt{F}$, y $\sqrt[3]{G}$:

$$f\left(b, c, d, \sqrt{F}, \sqrt[3]{G}\right) \in k_2.$$

Galois observa que las expresiones que forman el conjunto k_2 se pueden relacionar el grupo G_2 formado por $\langle \rho, \sigma \rangle = \{Id, \rho, \tau, \rho\tau\}$.

El conjunto k_3 se forma con todas las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones que se pueden hacer entre $b, c, d, e, \sqrt{F}$, $\sqrt[3]{G}$ y $\sqrt{H}$:

$$f\left(b, c, d, \sqrt{D}, \sqrt[3]{E}, \sqrt{H}\right) \in k_3.$$

Este conjunto se puede asociar con $G_3 = \langle \rho \rangle = \{Id, \rho\}$. Finalmente k_4 se forma con todas las expresiones que resultan de operar los $b, c, d, e, \sqrt{F},\ \sqrt[3]{G}\ , \sqrt{H}$ y $\sqrt{I}$:

$$f\left(b, c, d, \sqrt{D}, \sqrt[3]{E}, \sqrt{I}\right) \in\ k_4.$$

este conjunto no tiene simetrías, luego se asocia con $\{Id\}$.

En estos tres casos se encuentran unas características comunes, con respecto al grupo que se asocia al primer conjunto formado por las operaciones básicas entre los coeficientes, las cuales debe cumplir el grupo de Galois (como se le conoce actualmente).

Observe que para el caso de la ecuación de segundo grado se tiene que:

$$\boldsymbol{S_2 \supset \{Id\}}. \qquad \textbf{\textit{4.3}}$$

Donde $\{Id\}$ es un subgrupo de S_2, actualmente se sabe que a la expresión 4.3 se le conoce como cadena de descomposición. En los tres casos expuestos, ésta es la cadena de descomposición del grupo de Galois que está formada por subgrupos normales, en su memoria Galois caracteriza la cadena de descomposición así:

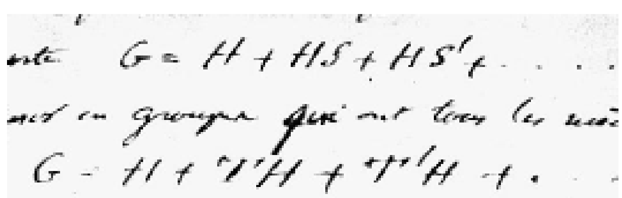


Ilustración 4.1: Manuscrito de Galois (1832)

> En otras palabras, cuando un grupo *G* contiene otro *H*, el grupo *G* se puede dividir en grupos, cada uno obtenido mediante una operación de permutaciones de sustitución de *H*, de modo que *G* = *H* + *HS* + *HS* '+ ... y

también, puede ser dividido en grupos que todos tienen las mismas sustituciones *G* = *H* + *TH T* + *H* + ... Estas dos clases de descomposición no suele coincidir. Y si coinciden, se dice que la descomposición es propia. (Traducido por Sandra Chavarría (Galois, 1832, pág. 2))

Esta afirmación de Galois hace referencia, desde un lenguaje moderno, a la descomposición de un grupo en subgrupos, pero además estas descomposiciones no siempre coinciden, pero cuando lo hacen, el subgrupo *H* se dice ser un **subgrupo normal** (Galois llama a la descomposición, en este caso, *propia*). Se usará la siguiente notación para designar a los subgrupos normales, H es subgrupo normal de G:

$$H \lhd G \,.$$

Para el caso de la ecuación de segundo grado así:

$$\{Id\} \lhd S_2.$$

Además la razón entre el cardinal de S_2 (actualmente llamado orden del grupo) y su subgrupo normal resulta ser siempre un número primo, esta relación entre un grupo y su subgrupo inmediato se denomina actualmente índice del subgrupo, observe:

$o(S_n) =$Número de elementos de S_n (Orden de S_n).

$$o(S_2) = 2! = 2.$$

$$o(\{Id\}) = 1.$$

El índice de $\{Id\}$ con respecto a S_2 es:

$$\frac{o(S_2)}{o(\{Id\})} = 2 \quad \text{(Número primo).}$$

Para la ecuación cúbica la cadena de descomposición del grupo de Galois es:

$$\{Id\} \lhd A_3 \lhd S_3.$$

Calculando los órdenes y los índices se tiene:

$$o(S_3) = 3! = 6.$$

$$o(A_3) = \frac{3!}{2} = 3.$$

$$o(\{Id\}) = 1.$$

$$\frac{o(S_3)}{o(A_3)} = 2. \qquad \text{(Número primo)}$$

$$\frac{o(A_3)}{o(\{Id\})} = 3 \qquad \text{(Número primo).}$$

Para la ecuación de cuarto grado la cadena de descomposición del grupo de Galois es:

$$\{Id\} \lhd \mathrm{G}_2 \lhd \mathrm{G}_1 \lhd A_4 \lhd S_4.$$

Calculando los órdenes y los índices se tiene:

$$o(S_4) = 4! = 24.$$

$$o(A_4) = \frac{4!}{2} = 12..$$

$$o(G_1) = 4..$$

$$o(G_2) = 2..$$

$$o(\{Id\}) = 1.$$

$$\frac{o(S_4)}{o(A_4)} = 2. \quad \text{Número primo).}$$

$$\frac{o(A_4)}{o(G_1)} = 3. \quad \text{(Número primo).}$$

$$\frac{o(G_1)}{o(G_2)} = 2. \quad \text{(Número primo).}$$

$$\frac{o(G_2)}{o(\{Id\})} = 2. \quad \text{(Número primo).}$$

Que el grupo de Galois de cada ecuación tenga una descomposición en subgrupos normales y que el índice de cada uno de estos sea un número primo, son las características que debe cumplir una ecuación para que sus raíces se puedan encontrar por medio de radicales.

4.3 La teoría de Galois para la ecuación de quinto grado y mayores

Si se tiene la ecuación de quinto grado:

$$x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0.$$

Al intentar hacer un proceso similar a los anteriores el primer paso es análogo, pero al hacer la segunda extensión se pierden todas las simetrías y en efecto, la descomposición de S_5 hasta $\{Id\}$, resulta ser:

$$\{Id\} \lhd A_5 \lhd S_5.$$

Lo que en términos actuales se explica diciendo que A_5 no tiene subgrupos normales propios.

Calculando los órdenes se tiene que:

$$o(S_5) = 5! = 120..$$

$$o(A_5) = 60..$$

$$o(\{Id\}) = 1.$$

Ahora, los índices son $\dfrac{o(S_5)}{o(A_5)} = 2$ que es un número primo, pero $\dfrac{o(A_5)}{o(\{Id\})} = 60$ **no es primo**! por tanto falla la condición establecida por Galois, lo cual implica que la ecuación general de quinto grado no se puede resolver por radicales, este resultado está íntimamente ligado con el criterio que finalmente presenta Abel donde mostraba una igualdad que en uno de sus lados podía tomar 5 valores distintos mientras que el otro lado podía tomar 120 valores distintos .

En términos generales, dado que A_n con $n \geq 5$ no tiene subgrupos normales propios, la cadena de descomposición para la ecuación general de grado n es:

$$\{Id\} \lhd A_n \lhd S_n.$$

Ahora, dado que el total de elementos que se puede formar con $A_n = \frac{n!}{2}$, el índice $\dfrac{o(A_n)}{o(\{Id\})}$ nunca es primo, lo cual implica la no solubilidad de S_n.

4.4 Hacia la constitución del concepto de grupo

En la historia de las matemáticas se documenta ampliamente que el trabajo de Galois no fue entendido por sus contemporáneos, pero se pueden contar entre quienes continuaron su obra a los matemáticos franceses Joseph Liouville (1809 - 1882) y Charles Hermite (1822 - 1901); Joseph Alfred Serret (1819 - 1885), alumno de Liouville publicó apartes de la obra de Galois en un capítulo, entre otros, en su texto *Cours d'Algèbre supérieure*. Es sólo veinte años después (1852) de la muerte de Galois que Enrico Betti (1823 –1892) presenta un texto dedicado a la obra de Galois en forma detallada. Luego es Marie E. Camille Jordan (1838 - 1922), en 1870, quien publica un tratado que marca la emergencia de la teoría de grupos y la teoría de Galois como focos de investigación para los matemáticos, consolidándose así la teoría de grupos como uno de los ejes fundamentales para lo que hoy se conoce como el álgebra moderna.

La teoría de Galois marca lo que puede llamarse un punto de inflexión en el camino hacia la constitución final del concepto de grupo, se mostrará en este último capítulo la justificación de esta aseveración.

4.4.1 Polinomios simétricos: Grupos de permutaciones

Es precisamente con el hallazgo de Cardano y Ferrari que se retoma la importancia de los polinomios simétricos porque con el algoritmo presentado por ellos; se prueba, de manera formal, la relación existente entre las raíces de la ecuación y sus coeficientes en el caso de las ecuaciones de grado tres y cuatro.

La relación existente entre los coeficientes de una ecuación de grado n y sus raíces se da en términos de polinomios simétricos; es natural, entonces que los matemáticos sucesores de Cardano los involucraran dentro de sus intereses de investigación. Sin embargo, al principio no hubo una línea de investigación en esta dirección. Los trabajos se hacían de manera independiente y sin interconexión. Es el caso de los trabajos de Vieta, Harriot, Girard, Newton, entre otros. Es con Lagrange que se da un giro en la investigación de los polinomios simétricos que apunta hacia el concepto de grupo, gracias al estudio de las sustituciones que se pueden realizar dentro de un polinomio simétrico lo que resulta ser en la actualidad el grupo de permutaciones de n elementos S_n. El estudio de las permutaciones, como noción matemática independiente es abordado ampliamente por Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) a quien se le debe la notación y muchos de los resultados actualmente vigentes, como también a Abel y a Galois, sus contemporáneos usan resultados suyos sobre permutaciones para realizar sus influyentes aportes alrededor de la teoría de ecuaciones los cuales ya hemos mencionado, es Galois quien usa el término de Grupo asociado a una ecuación y que resulta a la luz de la terminología actual el Grupo de Permutaciones.

4.4.2 Raíces de la unidad: Grupo Abeliano

Las raíces de la unidad representaban un conjunto con unas características especiales que conocían los matemáticos antes y después de Cardano, pero debido a que los números negativos, y en consecuencia los números complejos, no eran aceptados como números, y mucho menos como raíces válidas de una ecuación, se dejaron a un lado. Es sólo hasta la época de Gauss donde los números complejos empiezan a tener sentido entre los matemáticos.

Gauss da ejemplos de distintos conjuntos que cumplen unas propiedades comunes como es el caso de los enteros módulo n con la suma; los enteros que son primos relativos con n, módulo n, con la multiplicación; las clases de equivalencia de formas cuadráticas binarias, y las raíces n-ésimas de la unidad; de este último conjunto, a lo largo de este trabajo, se ha visto el papel crucial que le hacen jugar Lagrange y Abel en sus trabajos.

4.4.3 El concepto de grupo como el papel unificador entre el álgebra y la geometría.

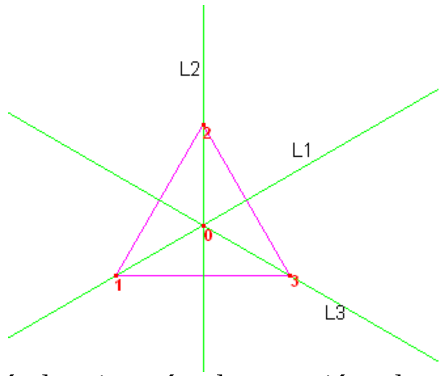
Aunque la obra de Jordan tuvo gran importancia en el desarrollo de la teoría de grupos, su trabajo fue rebasado por el matemático alemán Felix Christian Klein (1849 -1925) y el matemático noruego Marius Sophus Lie (1842-1899), quienes en 1871 publicaron el artículo titulado *Ueber diejenigen ebenen curven, welche durch ein geschlossenes system von einfach unendlich vielen vertauschbaren transformationen in sich ubergehen* en la revista científica alemana *Mathematische Annalen*, en donde presentan la generalidad del concepto de grupo, no como los grupos de permutaciones de Jordan, Cauchy y Galois, sino como grupos de transformaciones.

Hacia 1872 Klein presenta una famosa conferencia de admisión al cuerpo profesoral de la Universidad de *Erlangen*. En su discurso, Klein presentó una nueva mirada al concepto de grupo. Klein clasifica las geometrías (euclidianas y no-euclidianas) como el estudio de invariantes bajo varios grupos de transformaciones, pero además introduce varios grupos y sus geometrías asociadas; a partir de ello argumenta que el concepto de grupo tiene un papel unificador entre el álgebra y la geometría. Este hecho ocupa la atención de Klein (1842-1899) quien durante casi toda su vida de productividad matemática se encargo de desarrollarlo, aplicarlo y popularizarlo.

Como bien se documenta en (Dávila Rascón, 2003), hacia 1873 Klein establece que los grupos deben cumplir que si dos transformaciones A y B pertenecen al grupo, entonces su *producto* AB también es un elemento del grupo; en este caso, el producto es composición de funciones, esta corresponde a la propiedad clausurativa y además, el producto también requiere que el inverso de cada elemento pertenezca al grupo, lo que quiere decir que si A es un transformación del grupo, entonces A^{-1}, la transformación inversa de A , también debe pertenecer al grupo.

Para ilustrar de manera muy simple ese papel unificador y las propiedades de las que habla Klein, se presenta el siguiente ejemplo desde una notación moderna:

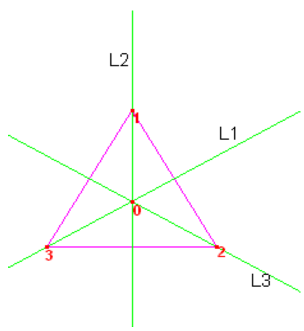
El grupo S_3 se puede ver desde una interpretación geométrica como todas las rotaciones y reflexiones que se le pueden hacer a un triángulo equilátero, si se tiene el triangulo equilátero, cuyos vértices se denominan 1, 2, 3 y sus bisectrices L_1, L_2 y L_3:



Se describen a continuación las simetrías de este triángulo:

R_0: Rotación de 0 ° correspondiente a la permutación idéntica en los vértices.

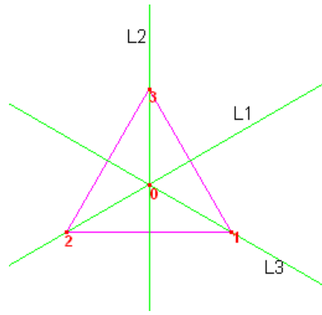
R_1: Rotación de 120° en sentido positivo, alrededor del centro:



Esta rotación puede representarse como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

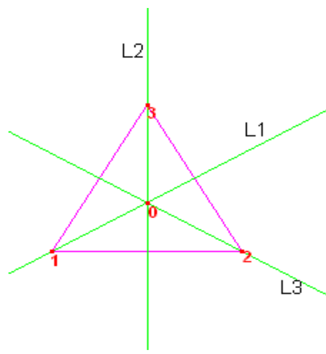
R_2: Rotación de 240° en sentido positivo, alrededor del centro:



Esta rotación puede representarse como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

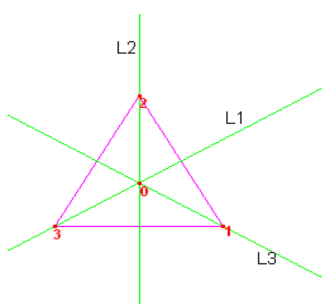
L_1: Reflexión con respecto a la bisectriz L_1 :



Esta reflexión puede representarse como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

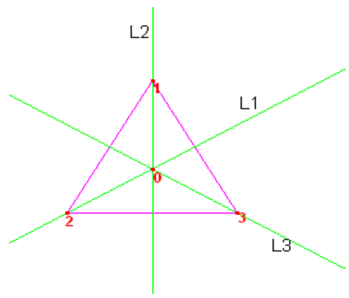
L_2: Reflexión con respecto a L_2 :



Esta reflexión puede representarse como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

L_3: Reflexión con respecto a L_3 :



Esta reflexión puede representarse como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es importante observar que al aplicar una operación (composición) entre dos de las simetrías arbitrariamente esto da lugar a una tercera simetría, lo que permite definir que el conjunto de simetrías es cerrado bajo la composición de simetrías, observe algunos ejemplos:

$$R_1 \text{o} L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = L_3.$$

$$L_2 \text{o} L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = R_1.$$

A continuación se muestran todas las composiciones posibles que se pueden hacer entre las simetrías:

$\mathbf{o}$	$\boldsymbol{R_0}$	$\boldsymbol{R_1}$	$\boldsymbol{R_2}$	$\boldsymbol{L_1}$	$\boldsymbol{L_2}$	$\boldsymbol{L_3}$
$\boldsymbol{R_0}$	R_0	R_1	R_2	L_1	L_2	L_3
$\boldsymbol{R_1}$	R_1	R_2	R_0	L_3	L_1	L_2
$\boldsymbol{R_2}$	R_2	R_0	R_1	L_2	L_3	L_1
$\boldsymbol{L_1}$	L_1	L_3	L_2	R_0	R_1	R_2
$\boldsymbol{L_2}$	L_2	L_1	L_3	R_1	R_0	R_1
$\boldsymbol{L_3}$	L_3	L_2	L_1	R_2	R_2	R_0

Tabla 1: Simetrías del triángulo equilátero.

Se puede encontrar que el conjunto de las simetrías del triángulo equilátero tiene un elemento neutro bajo la operación de composición (R_0) y además como se puede observar en la tabla cada simetría tiene una inversa, luego se concluye que el conjunto de simetrías del triángulo equilátero con la operación de composición tiene estructura de grupo, actualmente se le denomina “grupo de simetrías del triángulo”

En la búsqueda de la constitución del concepto de grupo se llega a una primera definición de grupo de forma abstracta con Arthur Cayley (1821-1895), un matemático británico conocido como uno de los matemáticos más prolíficos de la historia. En 1854 escribió un artículo titulado *Sobre la teoría de grupos que dependen de la* *ecuación simbólica* $\theta^n = 1$, en el que se encuentra la primera definición abstracta de un grupo:

> Un conjunto de símbolos $1, \alpha, \beta, \ldots$ todos ellos diferentes, y tal que el producto de cualesquiera dos de ellos (no importa en qué orden), o el producto de cualquiera de ellos consigo mismo, pertenece al conjunto, se dice ser un grupo (Dávila Rascón, 2003, pág. 75).

A pesar del prestigio con el que contaba Cayley, fue solo hasta finales del siglo XIX que su definición de grupo logra llamar la atención de los matemáticos hacia este tema.

4.4.4 Una característica fundamental del álgebra

La historia primitiva muestra que el hombre después de tener alguna familiaridad con el proceso de contar, el siguiente paso fue el de calcular, es a partir de esto que se podría decir que uno de los conceptos matemáticos más primitivas es el de operar, al que también se le puede llamar ley de la composición.

Esta relación entre los objetos y la operación ha sufrido a lo largo de la historia una serie de transformaciones, tal como se ha documentado en los capítulos anteriores, como es el caso de las magnitudes. Tomando en particular el universo de los segmentos Euclides define una operación (suma) entre ellos y a partir de esto, establece unas propiedades que cumple; se va evidenciando que a medida de que diferentes matemáticos trabajan en esto, el conjunto se va dotando de operaciones y de propiedades hasta el punto en que actualmente los segmentos se pueden operar y tiene una orientación que les permite llamarlo vectores en algunos momentos.

Otro ejemplo que está documentado en este trabajo es el del universo de los números. En el primer capítulo se mostró que Euclides definió unas operaciones, las cuales, desde una mirada actual, conforman una estructura algebraica $(N,+,\cdot,<)$. Con Diofanto se encuentra una nueva propiedad que caracteriza este conjunto, la propiedad uniforme; pero además define una nueva relación entre los objetos, en este caso cantidades numéricas, a partir de la multiplicación: el neutro y, de manera implícita, el opuesto; este último trae consigo un asomo de los números negativos. Así a lo largo de la historia se va viendo que este universo numérico se va dotando de más estructura, dado que al ampliar el campo de operaciones van ganando propiedades y se va ampliando el dominio, hasta el punto que actualmente hay una rama de las matemáticas que se encarga de estudiarlas.

El concepto de grupo tiene una característica principal, pues se define como un conjunto de elementos que cumplen unas propiedades bajo una operación dada: el conjunto es cerrado bajo la operación. El conjunto contiene un módulo, con respecto a la operación; para todo elemento del conjunto debe haber otro elemento tal que al operarlos dé como resultado la identidad, en otras palabras cada elemento del conjunto tienen un elemento inverso, que también pertenece al conjunto, bajo la operación. Ahora se podría formular la pregunta ¿de qué naturaleza son los elementos del conjunto? Los elementos del conjunto pueden ser números, objetos geométricos (puntos, segmentos, triángulos, cuadrados, etc.), transformaciones (en algebra o en geometría) o, en general, cualquier conjunto de objetos que satisfagan las propiedades a partir de la operación definida. En otras palabras, la naturaleza de los objetos no interesa en la formación de un grupo. Este hecho hace que la teoría de grupos requiera de un grado de abstracción mayor, al no considerar la naturaleza de los elementos, sino las leyes de operatividad que se pueden realizar entre estos y las propiedades que cumplen.

La ley de composición le marco siempre un rumbo al álgebra; con la emergencia de un nuevo objeto algebraico como es el de grupo y su consolidación en la comunidad matemática; gracias a las aplicaciones conseguidas por Galois en un tema de máximo interés para los matemáticos durante toda la historia precedente, como era el de la teoría de ecuaciones. Era de esperarse que surgieran las preguntas: ¿cuáles son los grupos más simples?, ¿cómo se podían obtener nuevos grupos a partir de los ya conocidos? Entre otras. El estudio de las ecuaciones debería darle paso al de las estructuras algebraicas. Esto da lugar a que en el siglo XX se consoliden formalmente estructuras como la de anillos, ideales, campo y extensiones entre otras.

En nuestra dirección de análisis debemos resaltar que aunque el concepto de grupo de manera formal se le haya atribuido a Cayley en la mitad del siglo XIX y el de campo a Heinrich Weber (1842 - 1913) en 1893, en su artículo "*fundamentación general de la teoría de las ecuaciones de Galois"* Weber presenta de nuevo la definición de grupo formalmente y le suma la de Campo, ambas en términos muy cercanos a los actuales y aunque el mismo Weber señala:

> La teoría se presenta aquí como una consecuencia inmediata del concepto de campo, que no es sino una extensión del concepto de grupo, visto como una ley formal, independiente del significado numérico de los elementos relacionados…Así, la teoría aparece como un formalismo absoluto, el cual cobra vida y contenido, sólo al otorgársele a los elementos valores numéricos. (Corry, 2009, pág. 5).

El interés de los matemáticos no se desvía hacia el estudio de las estructuras, parece ser que estos resultados se toman como marginales y por más de 30 años estos conceptos son utilizados como elementos utilitarios dentro de la teoría de ecuaciones, quien aún reclamaba su estatus de foco de interés en investigación que conservaba por muchos siglos, este hallazgo en nuestro análisis nos da nuevas herramientas para caracterizar el obstáculo epistemológico que ha sido llamado el paradigma de la solución y que mencionaremos más adelante, sumaremos en profundidad estos hechos en un nuevo esfuerzo de investigación en esta dirección donde pretendemos profundizar de manera considerable en la teoría de Galois, foco de interés que desborda los objetivos en este trabajo planteados.

Entrado ya el siglo XX se encuentra una de las más importantes contribuciones en el camino hacia la axiomatización del álgebra abstracta por parte de una de de las mujeres matemáticas más reconocidas, considerada por muchos como la mujer más importante en la historia de las matemáticas, Emmy Noether (1882-1935). Inicialmente Emmy se interesó por el estudio de los idiomas, llegó a ser profesional en esta área, pero nunca ejerció su carrera; a la edad de 18 años se empezó a interesar por el estudio de las matemáticas, lo cual era todo un reto, pues en aquella época no estaba permitido que las mujeres fueran alumnas en las universidades alemanas; poco a poco Emmy fue adquiriendo reconocimiento por sus habilidades para las matemáticas, hasta llegar en 1903 a estudiar en la Universität Göttingen, donde impartían cursos Blumenthal, Hilbert, Klein y Minkowsky; es así como Emmy Noether fue la segunda mujer en graduarse como doctora de matemáticas en Alemania.

Emmy Noether logró darle un enfoque axiomático al álgebra, este planteamiento de Emmy fue reconocido por importantes matemáticos como Pável Serguéyevich Aleksándrov (1896-1982) quien afirmó que:

> Fue ella quien nos enseñó a pensar en términos de conceptos algebraicos generales –homomorfismos, grupos y anillos con operadores, ideales– más que en términos de complicados cálculos algebraicos.
> Ella, por tanto, nos llevó a descubrir principios algebraicos unificadores en lugares donde previamente éstos habían estado tapados por complicadas condiciones específicas que la matemática clásica no reconocía como algebraicos. (Aleksándrov, 1982, pág. 99).

Algunos conceptos modernos como el de anillo, ideal y módulo sobre un anillo aparecen, por primera vez, en uno de sus artículos, llamado *ideal theory in rings*, escrito en 1920. A partir de estos conceptos, Emmy plantea un estilo de matemáticas que consiste en aislar lo que más se pueda los objetos de las propiedades que cumplen, quedándose finalmente con las propiedades que posiblemente las cumplen objetos de distintas naturalezas; a esta estilo se le denomina begriffliche Mathematik (matemática conceptual), la cual fue trabajada después por algunos matemáticos.

Van Der Waerden (1903-1996) uno de sus alumnos define el planteamiento de Noether así:

> La máxima por la que se guiaba Emmy Noether a lo largo de su obra podría ser formulada como sigue: “Cualquier relación entre números, funciones y operaciones se hace transparente, generalmente aplicable y completamente productiva sólo si ha sido aislada a partir de objetos particulares y formulada como conceptos universalmente válidos” (Dick, 1981, pág. 101).

Hacía 1930 se publicó uno de las primeros textos que presenta las nuevas ideas del álgebra de forma axiomática, *Modern Algebra,* escrito por B.L. van der Waerden. Este libro está basado en conferencias dadas por su tutora Emmy Noether (1882-1935) y otros matemáticos. Se podría decir que muchas de las ideas de Noether fueron conocidas gracias a este libro. *Modern Algebra* marca una nueva etapa en el estudio del álgebra, pues hasta este momento los grandes libros de álgebra habían sido producidos por los algebristas italianos del siglo XVI. Esta obra inicia con los conceptos básicos del álgebra abstracta como lo son grupos, subgrupos, isomorfismos, automorfismos, etc. y va llevando al aprendiz a estructuras más complejas como anillos, cuerpos, campos, extensiones infinitas de cuerpos; en esta obra quedaron sentados los fundamentos del álgebra como también sus aplicaciones a la geometría, las funciones algebraicas, la topología, entre otros.

5. CONCLUSIONES

Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella.

Carl Friedrich Gauss

5.1 El uso de las estructuras en la formación matemática.

La historia ofrece a la enseñanza-aprendizaje una especie de faro donde se puede observar procesos de emergencia de conceptos, dificultades para ver una realidad próxima, retrocesos en una línea de construcción teórica y otros fenómenos. Es así como desde los hechos alrededor de la teoría de ecuaciones y la línea que conduce al concepto de grupo como eje central de una disciplina matemática, se avizora una tendencia histórica que remarca la importancia de establecer una estructura conformada por objetos de igual naturaleza, operaciones entre ellos y una serie de propiedades que estos deben cumplir; es inicialmente la estructura que envuelve a los segmentos entre sí, superficies planas entre sí y cuerpos sólidos entre sí, bajo la concepción de medida euclidiana y es su axiomática, que permite hacer matemática con distintas posibilidades de procesos validatorios a través de más de veinte siglos. Este hallazgo presta una serie de criterios que llevan a tomar el espacio y sus propiedades para recrear mecanismos de validación formal en los diferentes estadios de formación matemática, además muestra lo acertado de plantear problemas en la formación temprana, donde el proceso de medida, comparación y establecimiento de unidades relativas, jueguen un papel preponderante en los procesos de formación matemática.

Sin perder de vista que llegado el momento este ambiente propicio de construcción de conocimiento pasará a ser un obstáculo para el advenimiento de conceptos como el de número complejo. Este faro de observación ofrecido por la historia, muestra ahora que el posicionamiento del concepto de número complejo se logra muy al interior de los objetos matemáticos, ya que estos tienen su validación inicial por medio de las relaciones que existen entre los polinomios simétricos de las raíces y los coeficientes de una misma ecuación, es decir, históricamente la aceptación de los números complejos recorre una trayectoria que va desde la manipulación de éstos, por apariciones inesperadas en la resolución de ecuaciones, hasta su representación geométrica; parece ser que manipular estas cantidades imaginarias en un contexto completamente matemático, prepara al aprendiz para aceptar su representación geométrica, tal y como lo plantea Gauss en su plano complejo.

5.2 El paradigma de la solución

Desde el desarrollo de las ecuaciones lineales y cuadráticas con las que trabajaron Al-Khowarizmi y Diofanto, por citar dos de los matemáticos que se mencionaron anteriormente, se encuentra una búsqueda constante por métodos para resolver estas ecuaciones.

En esta misma línea, los trabajos de Tartaglia, Cardano y Ferrari tuvieron éxito, pues lograron encontrar la solución por medio de radicales de la ecuación cúbica y de cuarto grado. Todos estos métodos encontrados exitosamente inducen, de manera natural, a los matemáticos a la búsqueda de los algoritmos que completen el trabajo de los anteriores, es decir buscar la solución, por medio de radicales, para las de quinto grado y de manera general para resolver cualquier ecuación de grado $n \geq 5$.

Es importante notar que a lo largo de la historia se encuentran resultados que van ratificando la idea de que existe el método, por medio de radicales, para resolver las ecuaciones de quinto grado y mayores, por ejemplo, el teorema fundamental del álgebra cuya primera aproximación fue dada por Descartes y demostrado finalmente por Gauss, garantiza la existencia de las raíces y su naturaleza; otro de los resultados que ratifica esta idea es haber encontrado para algunas ecuaciones particulares como las de la forma

$$x^p - 1 = 0,$$

a las que se les llama ecuaciones ciclotómicas, que fueron trabajadas y demostradas para algunos casos por Vandermonde y generalizada por Gauss.

Estos hallazgos y otros que se presentan en la historia conducen a una idea equivocada de que el método existe y que por lo tanto debe poder encontrarse; desde la línea de la didáctica, este hecho recurrente por más de dos siglos, se puede caracterizar como un obstáculo epistemológico puesto que se muestra un conocimiento, en este caso los métodos para solucionar por medio de radicales; que genera la idea de que cualquier ecuación se puede solucionar con el método de radicales, es con Lagrange que se da un cambio de perspectiva, puesto que éste termina admitiendo que sus aproximaciones a la solución de las ecuaciones de quinto grado por medio de la resolvente, le dejan la idea de la imposibilidad final de hallar el método. Es finalmente Abel, con el mismo enfoque de Lagrange, quien resuelve el problema para la ecuación general de quinto grado y mayores. Es tan fuerte esta idea, que la demostración de Abel sobre la imposibilidad del método para solucionar las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco fue inicialmente rechazada por matemáticos tan reconocidos como Gauss, quien se refirió a ésta como una monstruosidad.

El resultado de Abel se convierte en un hecho relevante para las matemáticas, dado que esta era la primera vez en la historia que se aceptaba la imposibilidad de resolver un problema; es así como a partir de este cambio de perspectiva influencia la comunidad matemática, que hasta este momento, tenían la creencia de que cuando un problema no se sabía resolver era porque carecían de los métodos apropiados, pero que éstos existían, y que en algún momento se llegaría al hallazgo de ellos y si no era así, solo cabía la explicación de que el problema estaba mal planteado.

Desde una mirada de la filosofía de las matemáticas, el hecho de que los matemáticos creían que el método existe pero que no se tienen este obstáculo epistemológico se puede relacionar con la concepción platónica que afirma que los objetos matemáticos no son invenciones humanas sino que existen por sí mismos, es decir no son producto de la mente humana sino que son verdades preexistentes que habitan en un mundo distante de la condición humana, el mundo de la ideas, núcleo de la filosofía platónica y caracterizado en muchos de sus diálogos. En nuestro caso, lo platónico tiene cabida en el sentido de que los matemáticos no dudaban de la existencia de la solución, la cual reposaba en un mundo intangible. El problema era encontrar el camino que permitiera "descubrir" dicho método.

5.3 Insistencia en la representación geométrica

La historia presenta una estrecha relación entre el desarrollo de las ecuaciones y la geometría, es precisamente en este hecho que se puede encontrar un obstáculo epistemológico.

En el primer capítulo se presenta la axiomática propuesta en la obra de Euclides, la cual rige la forma de hacer matemáticas por más de 20 siglos, esto se convirtió por mucho tiempo en el lugar desde donde se validaban los resultados matemáticos.

La validación de procesos que actualmente se conocen como algebraicos, se daba en el seno de la geometría, esto se puede observar con varios matemáticos como Al-Khowarizmi, Cardano y Descartes.

Al- Khowarizmi estableció unas formas canónicas de ecuaciones y el algoritmo para solucionar cada una de estas, pero dejó en manos de la geometría la validación de estos algoritmos, esto muestra una limitación en su propuesta, puesto que los algoritmos que no podía validar geométricamente seguramente no fueron considerados por él. Así mismo en el trabajo de Al-Khowarizmi se encuentran definiciones relacionadas con la parte comercial, pero al hacer un análisis de estos términos, tesoros, raíces del tesoro, dírhams, todos éstos, aunque son tomados de un ambiente netamente comercial, llama la atención que Al-Khowarizmi no exploró las cantidades negativas, a las que él por este contexto podía haberlas llamado deudas. Pero dado que las cantidades estaban asociadas a las magnitudes, como en Euclides, no había lugar para las cantidades negativas.

La no aceptación de los números negativos, también se puede evidenciar en el trabajo de Cardano. Después de plantear el método para resolver la ecuación cubica, Cardano muestra su desinterés por la solución por medio de radicales para las ecuaciones de cuarto grado, cuando afirma que esta tarea se la propuso a su alumno y secretario Ferrari. Se trae a cuentas la siguiente cita para validar el obstáculo de la insistencia en la representación geométrica en un hombre que representa toda una época en las matemáticas:

> La sexta cosa a señalar [es] que en cuanto el hombre haya llegado a conocer todos los capítulos [ecuaciones] hasta el relativo al cubo, que son 19 [incluidos, hacemos notar, los de primer y segundo grado], tendrá cuanto basta para cualquier caso algebraico, porque hasta el cubo se encuentra la gradación en la Naturaleza: de hecho hay líneas, superficies y cuerpos. Y las líneas corresponden a la incógnita lineal, las superficies a los cuadrados y los cuerpos a los cubos. Por tanto, si sobre éstos hemos dado noticias suficientes, se conocerá todo lo que es necesario. En realidad todo lo que añadiremos más allá, será por entretenimiento y no por el fruto que pueda obtenerse del [tal] estudio. Tales capítulos sucesivos no existen verdaderamente de por sí, sino por accidente, si bien existen [fórmulas] generales (Cardano, 1545).

Descartes replantea la relación entre el álgebra y la geometría, en lo que se llama geometría analítica, allí establece que las curvas pueden ser estudiadas desde su ecuación o desde su representación, pero dado que no se desprendía del todo del referente geométrico, Descartes tampoco acepta las cantidades negativas, a las que él llama falsas:

> Ni las verdaderas raíces ni las falsas son siempre reales; algunas veces son solamente imaginarias; esto es, mientras que siempre podemos concebir tantas raíces para cada ecuación de la forma como ya las he asignado, no siempre existe una cantidad definida que corresponda a cada raíz así concebida. De esta manera, si bien podemos concebir que la ecuación $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ tiene tres raíces, solamente existe una raíz real, 2, mientras que las otras dos, de cualquier manera que las incrementemos, disminuyamos, o las multipliquemos de acuerdo con las reglas ya expresadas, permanecen imaginarias. Traducido de (Descartes, The Geometry. Book I., 1954, pág. 83).

Una característica importante que se puede encontrar en el trabajo de Cardano y Descartes es que aunque no aceptaban las cantidades negativas, sí operaban con ellas, esto permite afirmar que la naturaleza de las cantidades, en este caso los números negativos, no se agota con una representación simbólica producto de operarlas, es necesario establecer un universo donde cohabiten estas cantidades.

Por ejemplo si se pide resolver la ecuación:

$$x + 2 = 0,$$

se sabe que no tiene solución en los números naturales, aunque al resolver aplicando propiedades algebraicas se llega a que:

$$x = -2.$$

Lo que muestra que no es suficiente la representación simbólica, en este caso -2, sino que es necesario conocer la naturaleza de este objeto.

ANEXOS

Semigrupo: Se define como una estructura algebraica de la forma $(A,*)$ donde A es un conjunto y $*$ es una operación binaria, cerrada y asociativa.

Permutación: Una función θ , uno a uno, y cuyo dominio y rango son el mismo conjunto finito $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es una permutación de X o una permutación de n elementos.

Grupo: es un conjunto $G \neq \emptyset$ con las siguientes propiedades:

1. Existe una función $p: G \times G \to G$ tal que, si $(a, b) \in G \times G, p(a, b)$ se simboliza ab y se llama el producto de a y b.

2. $(ab)c = a(bc)$, para $a, b, c \in G$ (Asociatividad).

3. Existe un elemento $e \in G$ tal que $ae = a = ea$ para todo $a \in G$. (Elemento neutro).

4. Para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ tal que $aa^{-1} = e = a^{-1}a$. (Elemento inverso de a).

Grupo abeliano: Si $ab = ba$ para todos $a, b \in G$, G es un grupo conmutativo o abeliano.

Grupo cíclico: Es un grupo que puede ser generado por un solo elemento; es decir, hay un elemento a del grupo G tal que todo elemento de G puede ser expresado como una potencia de a.

Grupo Simétrico: El conjunto de las permutaciones de G, se le denomina grupo simétrico de grado *n* y se denota como S_n.

Grupo alternante: El grupo de todas las permutaciones pares de S_n, .se le llama grupo Alternante de grado n y se denota por A_n,

Subgrupo: Sea G un grupo, $H \subset G$, $H \neq \emptyset$ es un subgrupo de G, Si H forma un grupo con respecto a la operación de G.

Subgrupo normal: Sea G un grupo, y H un subgrupo de G. Se dice que H es **normal** en G si

$$aH = Ha$$

Para todo $a \in G$

Anillo: es un conjunto $R \neq \emptyset$ con las siguientes propiedades:

1. Existe dos funciones s, $p: R \times R \to R$ llamadas respectivamente adición y multiplicación. Si $(a, b) \in R \times R, s(a, b)\ \ y\ \ p(a, b)$ se simboliza $a + b$ y ab y se llaman respectivamente la suma y el producto de a y b.

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$, para $a, b, c \in R$ (Asociatividad para la suma).

3. $a + b = b + a$, para $a, b, \in R$. (Conmutatividad)

3. Existe un elemento $0 \in R$ tal que $a + 0 = a = 0 + a$ para todo $a \in R$. (Elemento neutro aditivo).

4. Para todo $a \in R$ existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0$. (Elemento inverso de a).

5. $(ab)c = a(bc)$, para $a, b, c \in R$ (Asociatividad para la multiplicación).

6. $(a + b)c = ac + bc$, para todos $a, b, c \in R$.

BIBLIOGRAFÍA

Abel, N. H. (1824). *Mémoire sur les equations algébriques, oul´ on demontres l´impossibilité de la resolution de l´aquation générales du cinquiéne degré.*

Aleksándrov, P. S. (1982). *Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work.* New york: Marcel Dekker.

Álvarez, L. P. (2006). Evariste Galois. *Historia de las matemáticas*, 1-14. Madrid: Universidad autónoma de Madrid.

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (1994). *L´Álgebra come strumento di pensiero.* (Vol. Quaderno n.6). Progetto stretegico CNR-TID.

Bourgne, R., & Azra, J. P. (1962). *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois.* París: Gauthier-Villars.

Boyer, C. B. (2001). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza.

Cardano, G. (1545). *Artis magnae, sive de regulis algebraicis.* Núremberg.

Casalderrey, F. M. (2000). *Las matemáticas en el Renacimiento italiano.* Madrid: Nivola.

Casalderrey, F. M. (2000). *Cardano y Tartaglia: Las matemáticas en el renacimiento Italiano.* Madrid: Nivola libros y ediciones.

Cayley, A. (January de 1858). *A memoir on the Theory of Matrices.* Londres: Royal Society of London.

Corry, L. (2009). *Estructuras algebraicas y textos.* Tel Aviv University.

Dávila Rascón, G. (1 de Septiembre de 2002). *El desarrollo del álgebra moderna. Parte I: el álgebra en la antiguedad.* Apuntes de historias de las matemáticas, *1*, 5-17. Mexico D.F.

Dávila Rascón, G. (2003). *El desarrollo del álgebra moderna,parte III: el surgimiento del álgebra abstracta*. Apuntes de historia de las matemáticas, 38-78. Mexico D.F.

Descartes, R. (1947). *La Geometría.* Buenos Aires, Argentina: Espasa-Calpe.

Descartes, R. (1954). *The Geometry. Book I.* (D. E. Smith, Ed., & M. L. Latham, Trad.) New York: Dover Publications.

Descartes, R. (1996). *Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría.* Barcelona, España.

Dick, A. (1981). *Emmy Noether, 1882-1935.* Michigan: Birkhauser.

Galois, E. (1832). *Memory on solubility by radicals of algebraic equations.* 381-444. París.

Galois, E. (2008). *Memoria sobre las condiciones de solubilidad de ecuaciones por medio de radicales.* En I. Castro Chadid, & J. F. Caicedo, *Temas de teoría de cuerpos, teoría de anillos y números algebraicos* (págs. 359-384). Bogotá: Digiprint.

Grossman, S. I. (1996). *Álgebra lineal.* Mexico D.F: Mc Graw Hill.

Henrik, A. N. (1881). *Oeuvres complétes* (Vol. II). (P. L. Sylow, & M. S. Lie, Edits.) Christiania: Nouvelle.

Jiménez, D. (2010). *El problema del área en Los Elementos de Euclides.* Boletín de la asociación matemática Venezolana, XVII, págs. 179-207. Venezuela.

Lagrange, J. L. (1867-1869). *Réfléxions sur la Résolution des Equations*. OEuvres, Vol. 3, 205-421. Éditions du CNRS: Paris.

Malisiani, E. (1999). *Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico, visión histórica. IRICE,* 2-26. Argentina: Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación" di Rosario .

Monroy, L. (2011). *El álgebra lineal en el contexto histórico de las matemáticas*. Cali.

Moreira, T. M., & Soprani, C. (2012). R*esolução de equações algébricas via cardano e Lagrange*. Vitória, Brasil: Programa GEPEMEM.

Muñoz, J. M. (Octubre de 2011). *Historias de Matemáticas, Abel y la imposibilidad de resolver la "quintica" por radicales*. Pensamiento matemático, 1-31.

Ochoviet, C. (2007). *De la resolución de ecuaciones al Álgebra abstracta: Un paseo a traves de la historia*. Revista digital Matemática, educación e Internet, 1-19.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Puig, L. (1998). *Componentes de una historia del álgebra. El texto de Al-khawrizmi restaurado.* Investigaciones en matemática educativa II. Universitat de Valencia. Detartament de Didáctica de la Matemática, 109-131.

Rascón, G. D. (2003). *El desarrollo del álgebra moderna. Parte II: El álgebra de las ecuaciones.* Apuntes de Historia de las Matemáticas, 2(1), 27-58. México D.F.

Recalde, L. (2013). *Lecturas de historia de las matemáticas.* (e. Revisión, Ed.) Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Recalde, L. C., & Arbeláez, G. I. (2011). *Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Spivak, M. (1990). *Calculus.* Barcelona: Reverte.

Suárez, M. F. (1994). *Elementos de álgebra, colección de edición previa.* Santiago de Cali: Centro editorial Universidda del Valle.

Taton, R. (1971). *Sur les relations scientifiques d´Augustin Cauchy et d´Évariste Galois.* Revue d´histoire des sciences, 24, 123-148.

Torres, L. A. (En prensa 2011.). *Teoría de Ecuaciones y concepto de Número.* En Lecturas de Historia de las Matemáticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Valencia, S. I., & Recalde, L. C. (2012). *La construcción histórica de los números reales: De las técnicas operativas a las representaciones formales.* (E. U. Valle, Ed.)

Vera, F. (1970). *Científicos Griegos.* Madrid: Aguilar.