CAMBIOS EN LA COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES EN GRADO OCTAVO, EN RELACIÓN A LA POSICIÓN DEL SIGNO MENOS EN LOS NÚMEROS RACIONALES NEGATIVOS

MÓNICA MARÍA RUEDA SÁNCHEZ
PAULA ANDREA CASTRILLÓN BRAND

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2014

CAMBIOS EN LA COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES EN GRADO OCTAVO, EN RELACIÓN A LA POSICIÓN DEL SIGNO MENOS EN LOS NÚMEROS RACIONALES NEGATIVOS

MÓNICA MARÍA RUEDA SÁNCHEZ - 0543921
PAULA ANDREA CASTRILLÓN BRAND - 0538362

Trabajo de grado para optar por los títulos de
Licenciada en Matemáticas y Física
Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Director
JORGE ENRIQUE GALEANO
Profesor Área de Educación Matemática

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
2014

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

TÍTULO DEL TRABAJO:	CAMBIOS EN LA COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES EN GRADO OCTAVO, EN RELACIÓN CON LA UBICACIÓN DEL SIGNO MENOS EN LOS NÚMEROS RACIONALES NEGATIVOS							
Se trata de:	Proyecto		Informe Final	X				
Director:	Jorge Enrique Galeano C.							
1er Evaluador:	Myriam B. Vega R.							
2do Evaluador:	Ligia A. Torres							
Fecha y Hora	Año:	2014	Mes:	03	Día:	18	Hora:	5:00 pm

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
MÓNICA MARÍA RUEDA SANCHEZ	0543921	3487
PAULA ANDREA CASTRILLON BRAND	0536383	3469

EVALUACIÓN

Aprobado	x	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ________________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ________________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:		Mes:		Día:		Hora:	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

FIRMAS:

Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

1

AGRADECIMIENTOS

A Dios por iluminarnos en todo el camino que llevó el desarrollo de este trabajo.

A la Universidad del Valle por abrirnos sus puertas.

A nuestros maestros, los cuales con su entrega y perseverancia compartieron sus conocimientos, especialmente nuestro tutor Jorge Enrique Galeano quien nos ayudó a culminar esta etapa de la vida.

A nuestras familias que pacientemente, han sido testigos de nuestro proceso de formación.

Finalmente a nuestros compañeros por su respaldo y amor incondicional.

CONTENIDO

LISTA DE CUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

El presente trabajo de grado se inscribe en la línea de investigación en Lenguaje, Comunicación y Razonamiento del Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle. Indaga, desde una perspectiva semiótica-cognitiva, los cambios en la comprensión de las estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Santa Librada en relación a la posición del signo menos en los números racionales negativos.

Como referentes teóricos se presentaron: la estructura matemática de los números racionales; se indagó sobre algunos problemas relativos a su aprendizaje y se hizo un rastreo de la política curricular oficial, en particular lo concerniente a los procesos de comunicación y razonamiento teniendo como referente central la perspectiva semiótica de Raymond Duval; se tomaron aportes del modelo propuesto por Robert Adjiage y el trabajo de Teresa Pontón en su propuesta multiregistro.

La metodología que se empleó es de corte cualitativo y se centró en la observación, descripción y análisis de los resultados encontrados en el desarrollo de la actividad matemática.

En la indagación se lograron identificar algunos cambios en la comprensión, tales como asignar ubicaciones distintas al mismo número en la recta numérica, la no conceptualización de la fracción como un solo número y en general relacionar los cambios en el representante como cambios en el representado.

Palabras claves: perspectiva semiótica-cognitiva, cambios en la comprensión, posición del signo menos, actividad matemática, tratamiento, conversión, números racionales negativos.

INTRODUCCIÓN

La idea de realizar este trabajo surgió de las vivencias de las autoras como maestras de grado séptimo, escenario donde se hace evidente el alto grado de dificultad que representan para los estudiantes el aprendizaje relacionado con los números racionales y, en particular, el significado de los números racionales negativos en sus diversas formas de representación numérica asociadas a las posibilidades de posición del signo menos (en el numerador, en el denominador o en el centro).

Para la realización de este trabajo se tomaron como referentes importantes investigaciones en Educación Matemática sobre los números racionales, como los realizados por Vasco, Obando y Pontón.

También se dio una mirada al tratamiento de los números racionales en los Lineamientos y Estándares curriculares del Ministerio de Educación Nacional, para establecer las competencias que se espera desarrollen los estudiantes, en grado séptimo sobre este objeto matemático. Así mismo, se revisan algunos libros de texto de grado séptimo, para identificar la información a que están accediendo los estudiantes a través de esta fuente de consulta. Por último, se revisan las pruebas SABER para analizar algunas preguntas relacionadas con los números racionales.

En cuanto a los fundamentos teóricos se presentan la estructura matemática de los números racionales, la perspectiva semiótica de Raymond Duval, el trabajo de Pontón y el modelo de Adjiage.

El trabajo que se presenta corresponde a una indagación, desde una perspectiva semiótica - cognitiva, sobre los cambios en la comprensión debido a la posición del signo menos en los números racionales negativos de los estudiantes de grado octavo. La metodología empleada es de corte cualitativo y centrada en la observación, descripción y análisis de la información encontrada en el desarrollo de una actividad matemática sobre estos números.

El capítulo 1, corresponde a la presentación de la problemática, los objetivos y la justificación, para lo cual se retoman algunas investigaciones de los números racionales. Así mismo se avanza en algunos referentes teóricos como la definición matemática de estos números, el modelo cognitivo de Duval, los planteamientos de Pontón y Adjiage. Finalmente se propone una indagación que permita rastrear los cambios en la comprensión que se presentan en los estudiantes por la posición del signo menos en los números racionales negativos.

En el capítulo 2, se presenta el marco de referencia conceptual, se desarrollan los elementos teóricos que permiten la fundamentación de la problemática, y el desarrollo del trabajo, organizándose desde dos perspectivas de análisis: la perspectiva matemática y la perspectiva semiótica.

En el tercer capítulo se presenta el proceso realizado durante el desarrollo del trabajo de grado e incluye la descripción de los instrumentos de registro y la forma en que se organizó la información obtenida.

El cuarto capítulo corresponde a las conclusiones y recomendaciones, se muestran los resultados generales del trabajo, fruto del análisis de las producciones aportadas por las estudiantes en el desarrollo de la actividad.

CAPÍTULO I. PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

Este trabajo se centra principalmente en indagar sobre los cambios en la comprensión derivados por la posición (en el numerador, en el denominador o en el centro) del signo menos en los números racionales negativos por parte de algunas estudiantes de grado 8° del Colegio Santa Librada de esta localidad.

Inicialmente se presentan algunas investigaciones desarrolladas en Educación matemática sobre el proceso de aprendizaje y enseñanza de los números racionales, mencionadas como referentes importantes para la realización de este trabajo como lo son los trabajos de Vasco[1], Obando[2] y Pontón[3].

Posteriormente se despliega la problemática de interés; se comentan en primer lugar algunas vivencias a través de experiencias de clase como maestras de grado séptimo durante el trabajo con los números racionales, en particular los racionales negativos. Luego se presenta el resultado de un rastreo en los documentos curriculares para identificar la noción de competencia y las directrices para desarrollarla; también se presentan algunas investigaciones relacionadas con la construcción de números racionales en las cuales se identifican dos problemáticas importantes desde una perspectiva didáctica; y finalmente, se presenta el modelo cognitivo de la representación de Duval, que fue la perspectiva en la que se realizó este trabajo.

1.1 ANTECEDENTES

La Educación Matemática como campo de investigación busca responder a los interrogantes que surgen de forma natural en los procesos relacionados con la

[1] VASCO, C. El archipiélago de las fracciones. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, 1994.
[2] OBANDO, G. La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Cali: Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática, 1999.
[3] PONTÓN, T. Una propuesta multi-registro para la conceptualización inicial de las fracciones. Tesis de maestría. Maestría en Educación Matemática. Cali: Universidad del Valle, Grupo de Educación matemática, 2003.

movilización (elaboración, transmisión, construcción, transformación) de pensamiento matemático. El carácter multidimensional de este campo ha generado que investigaciones desarrolladas en este contexto, no estén limitadas a la selección de contenidos o al diseño de técnicas para hacer más eficaz la enseñanza, sino a generar espacios de reflexión y análisis que involucren varias disciplinas.

En este sentido, los trabajos realizados en Colombia por Vasco y Obando han apuntado, desde una perspectiva didáctica, a la conceptualización de los racionales a través de dos importantes constructos: el operador y la relación parte-todo. Pontón, desde una perspectiva cognitiva, desarrolla una propuesta multi-registro para la conceptualización inicial de las fracciones y se erige en un referente fundamental para el presente proyecto. Pontón se basa en los avances investigativos del profesor Raymond Duval[*].

Vasco plantea a través del **constructo operador o transformador fraccionario,** la enseñanza de los números racionales positivos en la básica primaria, como operadores que transforman agrandando o achicando una cantidad, como medidores de longitudes, masas, pesos, duraciones, etc. y tal vez como partidores, no de objetos materiales sino de unidades de distintas magnitudes. En este sentido propone que el puente entre los operadores y los puntos de la recta numérica empieza con la semirrecta (positiva) donde "lo importante es el aspecto dinámico; moverse, avanzar, etc. y que el punto o fraccionario estático sea como una marca al final del movimiento"[4], las magnitudes físicas que manejan los niños no tienen negativos, lo cual establece un orden, mediante la magnitud o distancia que hay desde un punto 0 (el origen) hasta otro punto llamado 1.

---

[*] Raymond Duval, es profesor de la Universidad de Littoral – Cóte d´Opale y enseña en el Instituto de formación de los maestros de la academia de Lille (Francia). Después de haber realizado estudios de filosofía y pedagogía trabajo en 1970 a 1995 en el IREM de Estrasburgo, participando en numeras investigación. Sus trabajos se dirigen sobre todo a la comprensión de textos, el aprendizaje de las diferentes formas de razonamiento y a la visualización en matemáticas.

[4] VASCO. Óp., cit., p. 4.

En cuanto a los racionales negativos, Vasco plantea que son construidos mediante el sistema aditivo como desplazamientos contrarios, por ejemplo “correr hacia atrás” o “deslizarse hacia atrás”. Esto conlleva prolongar la semirrecta en las dos iteraciones (positivo y negativo), a cada racional positivo le corresponde un opuesto o inverso aditivo marcado a la izquierda del cero y viceversa. El operador *menos* (-) es como un reflector, que ni aumenta ni disminuye las distancias medidas a partir del cero, pero sí cambia la orientación.

Así, Vasco propone que: “En la básica secundaria hay que completar los fraccionarios positivos con los negativos. Hay que extender los órdenes estrictos y los ampliadores, así como las operaciones binarias, a toda la recta fraccionaria. Hay que construir el llamado “orden de magnitud” u “orden en valor absoluto” (o el llamado pre-orden), y coordinar las órdenes con las operaciones”[5].

De otra parte, Obando plantea que la *relación parte-todo* es fundamental para comprender procesos aditivos entre números racionales positivos, y para contrarrestar procesos de construcción a partir del conteo.

Pontón enfoca su investigación en dos aspectos fundamentales, rastreados mediante las manifestaciones de incomprensión que presentan los alumnos en las clases de matemáticas y los resultados de distintas pruebas; dichos aspectos fundamentales se presentan en los asuntos relativos a la naturaleza epistemológica del contenido a enseñar, y en los aspectos relacionados con la construcción de los distintos registros de representación necesarios para la aprehensión de dicho conocimiento. De esta forma su propósito es presentar una estrategia didáctica que posibilite el aprendizaje de las relaciones fraccionarias en contexto parte – todo mediante una perspectiva multi-registro.

Llega a las siguientes conclusiones:

- En relación con la coordinación de registros se reafirma la tesis de Duval en cuanto a la ganancia de competencias y habilidades mediante la conversión entre

[5] Ibíd., p. 11.

distintos registros de representación semiótica (figural bidimensional, numérico fraccionario y la lengua natural).

- El papel del registro figural es esencial para la comprensión de la *unidad referencial y fraccionaria,* a la par que las relaciones (como la de equivalencia y orden) las operaciones (suma y resta) y los factores de visibilidad como herramienta heurística para la construcción de relaciones fraccionarias en el trabajo con áreas.

- La coordinación y articulación entre el registro numérico y el registro figural (figuras bidimensionales) dota de sentido a la actividad matemática en el proceso inicial de la objetivación* de los racionales, mediante los procesos de conversión, llevaron a asociar las transformaciones reveladas, como necesarias en los tratamientos numéricos y figúrales: $\frac{a}{b} = a(\frac{1}{b})$; $\frac{a}{b}$ = a ($\frac{1}{b}$); $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b}$;

- $\frac{a}{b}$ .n = $\frac{an}{b}$ produciendo una interpretación de la fracción $\frac{a}{b}$ como resultado de una composición aditiva u operador de la unidad fraccionaria $\frac{1}{b}$.

- Los procesos discursivos son esenciales en los procesos de objetivación, de evolución e incluso de producción de nuevos saberes como su interacción con los existentes; la lengua natural predomina sobre otros registros, lo cual requiere mayor atención didáctica.

Esta perspectiva lleva a considerar, desde un contexto de medición, la comprensión significativa que los diferentes registros de representación semióticos

---

* El planteamiento de Duval sobre *la objetivación* tiene que ver, en primer lugar, con explicitarse a sí mismo lo que aún es confuso. En el registro de la lengua natural *la objetivación* es la tercera función meta-discursiva necesaria para el desarrollo del *control que puede tener un sujeto* no solo sobre sus actividades sino también sobre sus vivencias o sobre las potencialidades de un "mundo" imaginario o personal. Es **la posibilidad para el sujeto de tomar conciencia de lo que hasta el momento no era consciente y de lo que aún no había podido tener una conciencia** clara en tanto que no se había cumplido un trabajo de exteriorización con fines de organización. Esta toma de conciencia se hace a modo de una amplia explicitación. (Duval 1999:83).

dotan de sentido numérico a la fracción y consecuentemente a todos los tratamientos y conversiones en los diferentes registros de representación.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

A partir de nuestra experiencia de aula como maestras de grado séptimo, identificamos algunos problemas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los números racionales en las clases, tales como: la dificultad en las representaciones gráficas, la ubicación de las fracciones en la recta numérica sobre todo de las fracciones que representan cantidades mayores que la unidad, y en la operatividad con las fracciones.

Esta problemática se puede sintetizar en lo planteado por Obando: "Si bien es cierto que los números fraccionarios (y en general los números racionales) constituyen un tema de gran dificultad, tanto para los estudiantes aprenderlo como para los maestros enseñarlo, también es cierto que puede aceptarse como hipótesis que subsiste en las practicas implementadas por los profesores una serie de factores que contribuyen a que estas dificultades continúen, a pesar de los múltiples esfuerzos que éstos realizan para que dichas temáticas sean aprendidas"[6].

En cuanto al trabajo con los racionales negativos se le agrega, a las problemáticas anteriores, dificultades alrededor de los tratamientos numéricos derivados de la comprensión que los estudiantes tienen respecto al signo menos. En particular, dichos estudiantes no muestran comprensión en la definición matemática de los racionales negativos y al trabajar con estos sobre todo en conversiones de representaciones numéricas a gráficas (ubicación en la recta numérica) presentan dificultades en cuanto a lo que puede inferir el signo menos según su ubicación en la fracción.

[6] OBANDO, 1999 p. 127.

Por lo anterior, uno de los referentes teóricos pertinentes para este trabajo es la definición matemática de los números racionales y sus propiedades (se presenta su estructura en el marco teórico). A partir de estos axiomas se establecen las múltiples maneras en que una fracción se puede expresar[7]:

Como ejemplo particular $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-1}{-2}$; y de manera general $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $ad = bc$. Lo anterior se desprende como un caso especial de las propiedades algebraicas de los números reales. Es así como las formas de expresar un mismo número racional puede generar cambios en la comprensión del objeto matemático.

Estos aportes son referentes importantes para el presente trabajo, pues los números racionales se abordan en el aula después de estudiar los números enteros, lo que permite que los estudiantes ya operen con números negativos; pero, muchas veces, esto lejos de favorecer el aprendizaje de los racionales negativos, puede ser un obstáculo, debido a que los estudiantes suelen percibir un racional como dos enteros separados por una “rayita” y, si es negativo, se les dificulta aún más el manejo del signo menos (¿va en el numerador, va en el denominador, o va en ¨la rayita?).

En cuando a las investigaciones desarrolladas para el desarrollo de variables de análisis didáctico que favorezcan el proceso de enseñanza se identifican dos dificultades; una tiene que ver con la forma en que los números racionales se involucran en diversas situaciones problema teniendo así diferentes significados (como medida, cociente, razón, operador, decimal); la otra, se refiere a los diferentes tipos de representación semiótica con los que se construyen las propiedades y relaciones de estos y también la equivalencia entre dichas representaciones ($\frac{1}{4}$ equivale a 0,25 y también al 25%). Esta segunda problemática es abordada en los estudios e investigaciones que el profesor Raymond Duval plantea sobre los registros de representación semiótica y resulta para este trabajo el referente fundamental.

---

[7] RESTREPO, 1996. P. 57 y 58

Para Duval las representaciones semióticas corresponden a un sistema particular de signos (la escritura algebraica, el lenguaje, etc.) los cuales dan cuenta de un objeto matemático de estudio. En este sentido, un registro de representación semiótica en matemáticas (lengua natural, representación gráfica, representación numérica, etc.) está conformado por diversas representaciones las cuales cumplen en sí, con las tres actividades inherentes a toda representación:

1. Constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles.
2. Transformar las representaciones de acuerdo a las reglas establecidas en el sistema, de tal manera que las nuevas representaciones reflejen ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
3. Realizar procesos de conversión de las representaciones obtenidas en un sistema a otro sistema de representación, produciendo así nuevas significaciones relativas a aquello que es representado.

Por lo anterior, hablar de registro de representación semiótica y no solamente de representación se encamina prioritariamente en la posibilidad de transformar una representación a otra pues desde esta perspectiva, cada registro posibilita diversas significaciones sobre el objeto matemático, las cuales constituyen al aprendizaje de los estudiantes mediante la producción de conocimiento que realizan en esta actividad cognitiva, es decir, que el aprendizaje se da mediante el desarrollo de habilidades y competencias en los diferentes registros de representación y de su funcionamiento[8]. Esta construcción implica que se diferencie lo representado del representante, pues “toda falta de distinción entre el objeto y su representación provoca en los estudiantes una ausencia o pérdida de la comprensión”[9]

En este sentido Duval plantea que al diferenciar un objeto y su representación se accede a un grado de libertad, lo que se entiende como fundamental para adquirir

[8] En PONTON. T 2003 “Una propuesta multi-registro para la conceptualización inicial de las fracciones” p. 49
[9] PONTON. T 2003 “Una propuesta multi-registro para la conceptualización inicial de las fracciones” p. 50

la comprensión conceptual, sin embargo deja manifiesto también que para cuando no se percibe el objeto mismo y no sea diferenciado de su representante, se hace necesario disponer de varias representaciones semióticas heterogéneas de ese objeto y coordinarlas.

En consecuencia el grado de libertad que un estudiante pueda obtener al pasar de un registro a otro, (conversión, comprensión y conceptualización) corresponde a la función de objetivación[10], la cual en el registro de la lengua natural es la tercera función meta-discursiva necesaria para el desarrollo del control que puede tener un sujeto no solo sobre sus actividades sino también sobre sus vivencias o sobre las potencialidades de un "mundo" imaginario o personal.

Así mismo Adjiage[11], plantea que en la etapa de aprendizaje de los estudiantes, el número racional resulta ser uno de los más influyentes en el trayecto a la construcción de los números reales, por ende la falta de reflexión sobre los diferentes registros de representación que construyen este objeto, conducen al estudiante a encontrar obstáculos en el aprendizaje de los números racionales.

En este sentido la investigación de Adjiage (1999) plantea que la coordinación entre los registros unidimensionales (recta numérica graduada) y los registros numéricos usuales (escritura decimal y fraccionaria) son determinantes para la movilización de registros que permiten la resolución de problemas que involucren racionales.

Por lo anterior, este trabajo se centra en los cambios en la comprensión de las estudiantes, a partir de las producciones que surgieron en el desarrollo de una actividad respecto a la posición del signo menos en los números racionales negativos. Ante esto, este trabajo aborda la siguiente pregunta:

---

[10] En Pontón T (2003) Una propuesta multiregistro para la conceptualización inicial de las fracciones. "es la posibilidad para el sujeto de tomar conciencia de lo que hasta el momento no era consciente y de lo que aún no había podido tener una conciencia clara en tanto no se había cumplido un trabajo de exteriorización con fines de organización. Esta toma de conciencia se hace a modo de proyección y no a modo de una simple explicitación." P2

[11] Ibíd. P32

¿Qué cambios en la comprensión de los racionales negativos se pueden encontrar, desde una perspectiva semiótica-cognitiva, al aplicar una actividad en el aula que le permita al estudiante tratar con las distintas posiciones del signo menos en dichos números?

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo general.

Identificar, desde una perspectiva semiótica y cognitiva, los cambios en la comprensión de los estudiantes de grado octavo de la institución educativa Santa Librada, en relación con las ubicaciones del signo menos en los racionales negativos.

1.3.2 Objetivos específicos

- Articular en una propuesta las distintas ubicaciones del signo menos en los números racionales negativos.
- Caracterizar los desempeños de las estudiantes al enfrentarse a una actividad que explora diversas representaciones del número racional negativo.
- Definir métodos de organización y análisis de la información que estén en relación con los propósitos del trabajo y sistematizar las conclusiones derivadas del análisis de los resultados de la actividad.

1.4 JUSTIFICACIÓN

El desarrollo de este trabajo surge de la necesidad de superar problemas que se nos han presentado en nuestra experiencia en el aula, particularmente en el trabajo con los números racionales negativos en grado séptimo, en donde se evidencian diferentes vacíos conceptuales que, seguramente, provienen del aprendizaje de las fracciones y de los enteros en niveles anteriores.

Para afianzar la pertinencia de esta indagación se revisaron inicialmente los planteamientos de los Estándares Básicos de Competencias y los Lineamientos Curriculares, en particular los racionales negativos, debido a que estos documentos son guía de orientación para determinar lo que el estudiante debe estar en capacidad de saber y saber hacer en matemáticas.

En segunda instancia, se hizo un rastreo del desarrollo que se hace de estos números en los libros de texto de matemáticas, los contenidos propuestos y su desarrollo para el trabajo en el aula; y, por último, se dio una mirada a la evaluación que de estos se realiza en las pruebas Saber, noveno grado, con el propósito de conocer el nivel exigido a los estudiantes que culminan su ciclo estudiantil básico y cómo se les prepara para la educación media y superior.

Los Números Racionales en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

Teniendo en cuenta que los Lineamientos Curriculares en matemáticas pretenden, entre otros, orientar los procesos curriculares y señalar directrices para el diseño y evaluación de los cursos de matemáticas, en tanto que los Estándares Básicos de Competencia matemática buscan establecer las competencias que deben desarrollar los estudiantes a través de la educación de calidad a la que tienen derecho, resulta de gran importancia tener en cuenta los parámetros que estos marcan en lo referente a la enseñanza de los números racionales.

En los Estándares Básicos de Competencias y en los Lineamientos Curriculares de matemáticas se sostiene, en términos generales, que las competencias en matemáticas se alcanzan con la ayuda de ambientes adecuados de aprendizaje, que cuenten con situaciones problemas significativas que permitan a los estudiantes avanzar a niveles de razonamiento mayores, esto implica que para comprender no basta la información de conceptos y contenidos sino que es de vital importancia los métodos de enseñanza y la forma de expresar lo aprendido. Se resalta, dentro del conocimiento matemático, el conocimiento conceptual que está relacionado en la actividad cognitiva y el conocimiento procedimental, ligado a acciones, técnicas para representar saberes, argumentarlos y aplicarlos; los estudiantes pueden formular, y resolver problemas de la vida real, además ser partícipes de la aplicación de los conceptos matemáticos en otras ciencias.

En los Estándares Básicos de Competencias para grado sexto y séptimo, se espera que los estudiantes adquieran una serie de competencias en el manejo operacional y en las propiedades de los números racionales y el uso de estos en sus distintas expresiones (fracciones, decimales, porcentajes y proporciones), para resolver problemas de medida. Además, los estudiantes deben estar en capacidad de justificar la representación polinomial de los números racionales, utilizando las propiedades de los sistemas de numeración decimal.

Además, el conocimiento sobre los números racionales y sus propiedades resulta importante en la construcción de los números reales, y la necesidad de su manejo operacional se hace evidente en diversas ramas de la matemática como el álgebra, la trigonometría y el cálculo.

Por lo anterior surge la propuesta de este trabajo de aplicar una actividad que permita al estudiante el tratamiento de las distintas ubicaciones del signo menos en los números racionales negativos, con el propósito de identificar cambios en la comprensión de los estudiantes alrededor de este objeto de estudio.

Los Números Racionales En los Libros de Texto.

El texto escolar es un instrumento de vital importancia en los procesos de enseñanza y de aprendizaje que permite a los profesores apoyarse en su práctica pedagógica, tanto para introducir las temáticas en la clase, como para plantear las actividades propuestas en el texto y reconfigurar las mismas, lo cual, permite a los estudiantes acceder de manera constante a los conceptos y métodos para trabajar los objetos matemáticos.

En cuanto al criterio de selección de los textos de matemáticas que sirvieron de objeto de estudio, obedeció a que estos fueran los de mayor aceptación entre los manejados como texto guía en el ejercicio de la labor docente de las autoras de este trabajo y además que correspondieran a ediciones recientes que contemplaran en sus contenidos las orientaciones del Ministerio de Educación Nacional de acuerdo con sus documentos curriculares.

En este sentido, se realizó un breve análisis sobre las actividades propuestas en dos libros de textos escolares, el Hipertexto Matemáticas 7 de Santillana, y el texto Delta 7 de la editorial Norma, ambos textos incluyen los estándares básicos de competencias.

El libro Hipertexto 7° consta de siete unidades, cuyos contenidos se organizan de acuerdo a los cinco tipos de pensamiento matemático. Las actividades propuestas se enfocan tanto al desarrollo de procesos matemáticos (razonamiento lógico, comunicación, resolución de problemas) como habilidades de competencia lectora. La segunda unidad comprende los números racionales, posterior a una lectura de introducción, se van desarrollando las temáticas, iniciando con el concepto de número racional y la equivalencia de fracciones. Se observa la introducción de los racionales negativos como parte de la clasificación de los racionales (racional positivo, negativo, nulo, y entero). Posterior a esta clasificación se hacen conversiones de racionales negativos (pasar de racional a decimal, de decimal a fracción). Luego vienen las representaciones en la recta numérica con racionales positivos, racionales negativos y números mixtos, para pasar a la ubicación de coordenadas racionales y coordenadas con números racionales decimales en el plano cartesiano; se concluye esta sección con las relaciones de orden en racionales y en racionales decimales. La unidad finaliza con ejercicios de operatividad en los racionales.

Al revisar el desarrollo del trabajo con los números racionales en el texto, se observa una tendencia al desarrollo de conversiones entre algunas representaciones de estos números (de decimal a fracción y viceversa), estas conversiones se efectúan mediante procesos operativos, concentrados en el desarrollando del algoritmo; en cuanto a las propiedades de orden se desarrollan principalmente en ubicaciones en la recta numérica. La resolución de problemas solo aparece como una lección final al cierre de la unidad, lejos de servir de contexto dentro del cual se desarrolle el mismo aprendizaje de estos números como se propone en los Lineamientos Curriculares. Se observa especialmente en los ejercicios que se plantean en el texto, que el signo menos se ubica en el numerador o en el denominador de las fracciones. En general se observan actividades predominantemente operativas, que pueden generar aprendizajes a corto plazo en los estudiantes.

El libro Delta 7 de la editorial Norma, consta de 8 unidades con índices temáticos, en las que se propone desarrollar los Estándares Básicos de competencias en matemáticas, proponiendo actividades de aplicación de los conceptos matemáticos que se trabajen en las unidades. En la unidad dos se estudian los números racionales. Se inicia con una lectura a manera de introducción, en la página posterior hay una sección de preguntas relacionadas con la misma. Se presenta el concepto de racional como una división entre dos números enteros, se pasa a la amplificación de fracciones representando cada amplificación en la recta numérica y así se llega a la construcción de fracción equivalente, como la representación de una fracción irreductible, que en el texto se menciona como el racional representante del conjunto de fracciones equivalentes. Posterior a la definición se ejemplifican racionales negativos con diferente posición del signo menos (en el numerador, en el denominador, racionales positivos con signo menos en el numerador y en el denominador). Como se ve en la siguiente imagen tomada de una actividad del libro.

3. Escribe en cada caso tres fracciones cuyo representante sea el número racional dado.

a. $\frac{5}{9}$ **b.** $\frac{^{-}1}{9}$

c. $\frac{5}{^{-}7}$ **d.** $\frac{^{-}8}{1}$

e. $\frac{8}{5}$ **f.** $\frac{6}{7}$

Fuente: Estrada, W y otros. Delta 7. Bogotá: Grupo editorial Norma, 2009, p.56

Así se construyen los números racionales como el cociente entre dos números enteros que pueden ser positivos o negativos. En las actividades de esta sección se propone encontrar el número racional de un grupo de fracciones equivalentes.

En las siguientes lecciones se desarrolla la expresión decimal de los números racionales, se trabajan las propiedades de orden, adición, producto, potenciación, radicación, ecuaciones aditivas y multiplicativas con los racionales. La sección de evaluación por competencias, consta de representaciones en la recta numérica, conversiones (de decimal a fracción), operaciones con los números racionales y resolución de problemas. La unidad finaliza con el glosario y la sección de razonamiento que propone dos situaciones problema con aplicación de los números racionales. Según el rastreo realizado, en la presentación de los números racionales, se observa poco trabajo con los racionales negativos, que surgen como cocientes entre algunos números enteros.

En los dos libros de texto estudiados, se observan algunas conversiones de los números racionales en particular, como expresar un fraccionario a decimal, y a representaciones en la recta numérica. Es importante señalar que en los ejercicios propuestos la posición del signo menos en las fracciones se hace en el numerador o en el denominador, esta notación se tuvo en cuenta para aplicarla en los ejercicios seleccionados para la actividad. Además se observó poco trabajo con los números racionales negativos.

Dado que el libro de texto es un instrumento en los procesos de enseñanza y aprendizaje, considerado como guía para los docentes en su práctica pedagógica y como fuente de consulta para los estudiantes, la problemática que se observó en el trabajo con los números racionales, es un indicador de las dificultades que pueden presentar los estudiantes en el aprendizaje de este concepto. Se pretende entonces indagar por los cambios en la comprensión generados por las diferentes ubicaciones del signo menos en los números racionales negativos, teniendo presente que los conocimientos adquiridos por los estudiantes pueden estar relacionados o condicionados al tratamiento de algunas representaciones en particular, y al enfoque primordialmente operativo que se da preferencia en los libros de texto, según el rastreo general que se ha seguido a estos.

Las pruebas SABER 9°.

Las pruebas SABER evalúan las competencias de los estudiantes en las respectivas áreas de conocimiento propuestas en el contexto escolar. Entonces, se evalúa el desempeño y procedimientos que siguen los estudiantes para resolver las situaciones asociadas a su entorno, lo que involucra la interpretación, la argumentación y la proposición. La evaluación de las competencias matemáticas se centra en el saber hacer, usando conceptos matemáticos, para lo que el estudiante debe expresar las significaciones que ha construido cuando se enfrenta con las situaciones problema.

A continuación se relacionan algunas preguntas de las pruebas SABER relacionadas con los números racionales, en las que se podrá observar los conceptos evaluados y los tipos de pregunta, que se presentan como situaciones problema, las cuales ponen en evidencia algunas dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los números racionales, y que ratifican la problemática encontrada en el rastreo realizado a los libros de texto en cuanto al tratamiento monoregistro (un solo registro) de las representaciones y la preferencia al enfoque operacional, descuidando el conceptual de los números racionales.

Figura 1. Ítem 26 prueba SABER 9º año 2009, calendario B

26. En una sala de cine se organiza una rifa entre los asistentes a una de las funciones. Cada asistente marca la boleta de la entrada con sus datos y la introduce en una urna, al final de la función se extrae una boleta al azar. De los asistentes, $\frac{1}{6}$ son hombres adultos, $\frac{1}{5}$ son mujeres adultas, $\frac{1}{3}$ son niños y $\frac{3}{10}$ son niñas. Es **menos** probable que la rifa la gane

A. una niña.
B. un niño.
C. una mujer adulta.
D. un hombre adulto.

Fuente: Prueba SABER 9º. Calendario B. 2009

En el enunciado de la pregunta 26 se presenta una situación de aplicación de probabilidad. Para su desarrollo es necesario el manejo de las propiedades de orden de los racionales, lo que permite comparar las razones y establecer la menor probabilidad.

Figura 2. Ítem 44 prueba SABER 9º año 2009, calendario B

44. ¿Cuál o cuáles de las siguientes secuencias es o son progresión(es) aritmética(s)?

I. 5, 8, 11, 14, 17...

II. $\frac{1}{3}\quad \frac{1}{9}\quad \frac{1}{27}\quad \frac{1}{81}\quad \frac{1}{243}$

III. $\frac{7}{2}\quad \frac{13}{2}\quad \frac{19}{2}\quad \frac{25}{2}\quad \frac{31}{2}$

A. I solamente.
B. I y II solamente.
C. I y III solamente.
D. I, II y III.

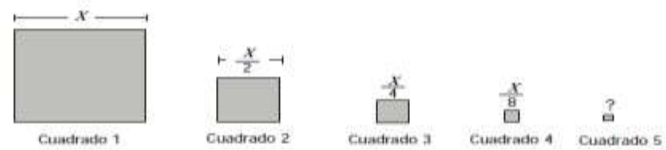
Fuente: Prueba SABER 9º. Calendario B. 2009

Aunque la pregunta 44 alude al concepto de progresión aritmética, para resolverla, además de conocer dicho concepto, es indispensable manejar las propiedades de adición en los números racionales y encontrar el sumando que opera en la secuencia.

Figura 3. Ítem 39 prueba SABER 9º año 2009, calendario B

RESPONDE LAS PREGUNTAS 39 Y 40 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

La siguiente es una secuencia formada por cuadrados. Las dimensiones de los lados se indican en cada figura.



39. ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado 5?

A. $\frac{x}{16}$

B. $\frac{x}{12}$

C. $\frac{x}{11}$

D. $\frac{x}{10}$

Fuente: Prueba SABER 9º. Calendario B. 2009

Según la secuencia de la variación de la medida del lado de los cuadrados 1 al 4, la dimensión del lado disminuye la mitad en cada cuadrado sucesivamente, lo que equivale a dividir el valor del lado entre dos, sucesivamente. Al operar el valor de la medida del lado, que está expresado como una fracción, es necesario el manejo de las propiedades operativas en los números racionales.

Figura 4. Ítem 40 prueba SABER 9º año 2009, calendario B

40. ¿Cuál es el área del cuadrado 4?

A. $\frac{4x}{8}$

B. $\frac{2x}{64}$

C. $\frac{x^2}{64}$

D. $\frac{x^2}{8}$

Fuente: Prueba SABER 9º. Calendario B. 2009

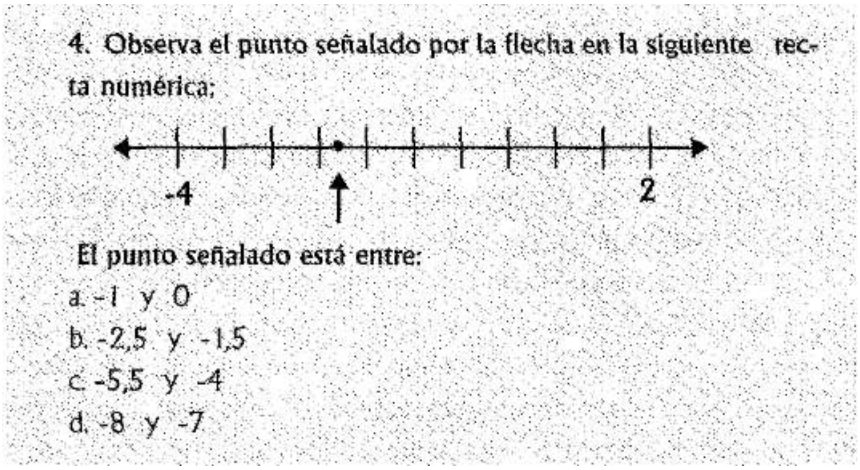
Para la pregunta 40, es necesario el concepto de área y del uso de los conocimientos acerca de las fracciones; particularmente las propiedades operativas en los racionales.

El desarrollo de estas situaciones presentan un alto grado de dificultad para los estudiantes, principalmente porque es necesario el conocimiento conceptual, la capacidad de ubicar los números en la recta numérica y el uso de las propiedades de los números racionales, aplicadas a situaciones problema que requieren el tratamiento con algunas representaciones de estos números, e identificar estas representaciones y los significados que pueden adquirir de acuerdo al contexto; estas dificultades debidas en gran parte a un aprendizaje predominantemente operativo, con poco acceso a las posibles representaciones de los números racionales, situaciones comunes a la enseñanza tradicional y a algunos libros de texto.

A continuación se presentan algunas preguntas que evalúan conceptos relativos a los números racionales, aplicadas en el departamento del Valle en el 2002*, en estas se da cuenta de los resultados de acierto en cada una, lo que permite establecer las dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo de las mismas.

Figura 5. Ítem 4 Evaluación censal de la educación en matemática del Valle del Cauca

* Según los resultados de la Evaluación Censal de la Calidad de la Educación en Matemáticas, aplicada en el Departamento del Valle del Cauca en el 2002, por el programa Nuevo Sistema Escolar del Ministerio de Educación nacional.


4. Observa el punto señalado por la flecha en la siguiente recta numérica:

-4 2

El punto señalado está entre:

a. -1 y 0

b. -2,5 y -1,5

c. -5,5 y -4

d. -8 y -7

Fuente: Evaluación censal de la educación en matemática del Valle del Cauca. Cali, 2002.

Para el desarrollo de esta pregunta, es necesario el manejo de diversas representaciones de los números racionales, estar en capacidad de establecer su ubicación en la recta numérica y el manejo de las relaciones de orden en los racionales, puede ser necesario reconocer el número racional en su expresión decimal correspondiente a las divisiones que aparecen en el segmento de recta.

Los resultados arrojados en el desarrollo de esta pregunta fueron del 32.6% de acierto en Cali y 29.5% en el Departamento del Valle. Estos logros tan pobres se deben a las dificultades que presentan los estudiantes en la representación de los números en la recta numérica sobre todo con unidades no enteras; para este caso particular, unidades representadas en fracciones.

Figura 6. Ítem 7 Evaluación censal de la educación en matemática del Valle del Cauca

En las notas musicales la redonda (𝅝) es la de mayor duración y se toma como unidad de medida para las otras, así:

Blanca: 𝅗𝅥 = $\frac{1}{2}$ de 𝅝

Negra: ♩ = $\frac{1}{4}$ de 𝅝

Corchea: ♪ = $\frac{1}{8}$ de 𝅝

Semicorchea: 𝅘𝅥𝅯 = $\frac{1}{16}$ de 𝅝

7. En el siguiente pentagrama, los compases están separados por barras verticales y todos los compases deben ser de la misma duración. ¿Cuál de los compases tiene una duración diferente?

Fuente: Evaluación censal de la educación en matemática del Valle del Cauca. Cali, 2002.

En las anterior y siguiente preguntas se evalúa la operatividad entre los racionales y la relación de orden entre ellos. Particularmente, se indagaba por la operatividad entre fracciones heterogéneas, y la noción de equivalencia entre ellas. El acierto, para la pregunta 7, es de 36.6% en Cali y 33.7% en el Valle, de lo cual se pueden inferir las dificultades que presentan los estudiantes para el manejo de las fracciones; específicamente en lo referido a las operaciones con ellas y al reconocimiento y uso de equivalentes.

Si se quiere incluir una nueva nota musical, con una duración que esté entre la duración de la negra y la duración de la blanca, la duración de la nueva nota debe ser:

a. $\frac{1}{8}$ de 𝅝 c. $\frac{3}{8}$ de 𝅝

b. $\frac{2}{8}$ de 𝅝 d. $\frac{6}{8}$ de 𝅝

Figura 7. Ítem Evaluación censal de la educación en matemática del Valle del Cauca **Fuente: Evaluación censal de la educación en matemática del Valle del Cauca. Cali, 2002.**

Esta pregunta requiere el manejo de las relaciones de orden en los racionales y la equivalencia entre fracciones. Es posible que los estudiantes necesiten convertir las fracciones dadas a múltiplos de octavos, si tenemos en cuenta la presentación de las respuestas. El porcentaje de acierto fue de 18.5%, en Cali y de 17.2% en el departamento del Valle, lo que se puede derivar de un énfasis predominantemente algorítmico en el trabajo escolar con las fracciones.

Por lo anterior, se observa que en los bajos porcentajes de respuesta acertada se manifiestan las dificultades que presentan los estudiantes en el manejo de los números racionales; específicamente en lo referido a sus propiedades y al reconocimiento y uso de equivalencias entre fracciones. Generalmente, en las prácticas de aula se enfatiza más la operatividad de los números racionales, prestando poca atención a la conceptualización, a las distintas interpretaciones que se les puede dar, a las relaciones que se pueden plantear entre ellas y sus diversas representaciones.

De acuerdo a los documentos curriculares, los estudiantes de grado séptimo deben desarrollar competencias relacionadas con el concepto y las propiedades de los números racionales; en los libros de texto se observan dificultades en el desarrollo de este concepto que pueden derivar en la problemática evidenciada en los bajos porcentajes de acierto en las pruebas Saber por los altos grados de dificultad que presentan los estudiantes en las producciones relacionadas con estos números.

En síntesis, la pertinencia de este trabajo se justifica:

1. Por la vivencia directa de serias dificultades en nuestra labor cotidiana como maestras de matemáticas.
2. Porque es mandatorio desde los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos, el desarrollo de las competencias necesarias para el manejo y uso de sus propiedades por los estudiantes de séptimo grado en adelante.
3. Porque en los textos que nos sirvieron como referentes predominan los tratamientos monoregistro en detrimento de la necesaria diversidad de representaciones del objeto matemático y un enfoque operativo que no contempla la resolución de problemas como contexto del aprendizaje significativo.
4. Porque los bajos porcentajes de acierto en los problemas al respecto en las pruebas Saber demuestran que existen serias deficiencias en su conceptualización y operatividad.
5. Finalmente, porque los resultados de este ejercicio pueden servir como fuente de información pertinente para la comunidad educativa, en cuanto a

los cambios en la comprensión que los estudiantes presentan debido a la ubicación del signo menos en los números racionales negativos.

CAPÍTULO II. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

El desarrollo del marco teórico se inició con un rastreo curricular a fin de determinar procesos de comunicación y razonamiento que remiten a la perspectiva semiótica que desarrolla Duval; se realizó la presentación de la estructura matemática de los números racionales, su construcción a partir de los números enteros así como las operaciones suma y multiplicación; se tomaron aportes del modelo propuesto por Adjiage, y también de Pontón en su propuesta multiregistro.

2.1 DESDE LOS ESTÁNDARES HACIA LA PERSPECTIVA SEMIÓTICA

Las investigaciones y reflexiones realizadas por la comunidad de investigadores en educación matemática sobre la noción de ser matemáticamente competente, ha permitido que el conocimiento matemático sea distinguido en dos tipos básicos de conocimiento: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental; esta noción ampliada de competencia está relacionada con el saber qué, el saber qué hacer, el saber cómo, cuándo y porqué hacerlo, elementos que permiten precisar cuatro procesos generales en toda actividad matemática, tales como: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Estos procesos cognitivos resultan pertinentes para alcanzar y superar un nivel suficiente en las competencias matemáticas, estas se desarrollan mediante las actividades presentadas en diferentes contextos, ambientes y situaciones de aprendizaje significativo, que permitan avanzar en procesos de comunicación y razonamiento en los estudiantes.

Dichos procesos de orden cognitivo pueden remitir a la perspectiva semiótica que desarrolla Raymond Duval, la cual plantea que los objetos matemáticos no son asequibles por la percepción (sensorial) sino que requieren de una mediación semiótica para su aprehensión. Así, la variedad de los tipos de registros de representación semiótica (lengua natural, representaciones gráficas, representación numérica, entre otros) utilizados en matemáticas, tienen que ver, particularmente, con tratar el problema cognitivo entre la distinción de objeto matemático y las diversas representaciones semióticas que pueden hacerse de él, confusión que se presenta con frecuencia en la educación[12].

> Los sistemas semióticos, en efecto, deben permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación. En primer lugar, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. Luego transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Por último, convertir las representaciones producidas en un sistema de representación en otro sistema, de manera tal que estas últimas permitan explicitar otras **significaciones** relativas a aquello que es representado. No todos los sistemas semióticos permiten estas tres actividades cognitivas fundamentales, por ejemplo el lenguaje Morse o la codificación del tránsito. Pero el lenguaje natural y las lenguas simbólicas, los gráficos, las figuras geométricas etc. sí las permiten. Hablaremos entonces de **registros de representación semiótica**. Estos registros constituyen los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aun confusa, un sentimiento latente para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor[13].

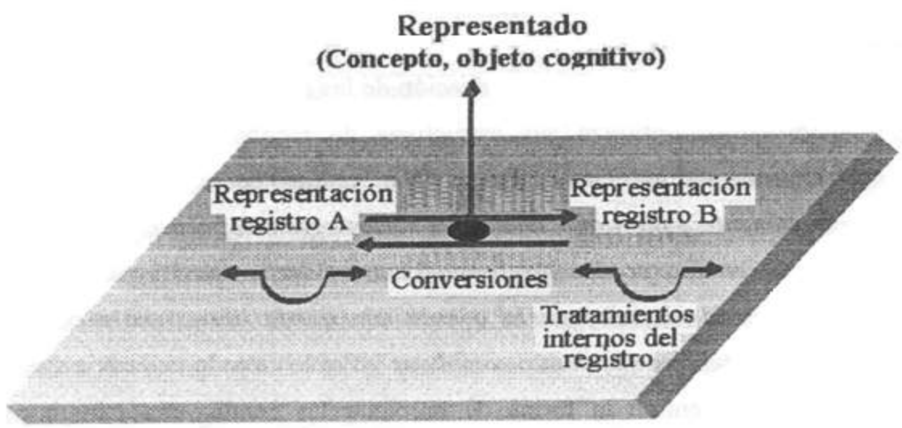
En este sentido, los registros de representación semiótica prioritariamente consideran las posibilidades de transformar una representación en otra representación semiótica, con el fin de elaborar nuevas representaciones, las cuales son evidencia de un progreso en el conocimiento matemático. Desde esta perspectiva, el aprendizaje de las matemáticas se centra en ganar habilidades y

[12] DUVAL. Semiosis y Pensamiento Humano. Óp., cit., p. 29.
[13] Ibíd., p. 29.

competencias en los distintos registros de representación y de funcionamiento, que en el conocimiento y en la reproducción de contenidos propuestos[14].

Por lo anterior las diferentes representaciones semióticas conllevan al sujeto a ser consciente[*] de lo que no era antes, correspondiendo al proceso de objetivación planteado por Duval[15] para el sujeto que toma consciencia; es así como este carácter intencional de las representaciones conscientes involucra al alumno en un proceso significativo, el cual le puede llevar a comprender, evaluar, cuestionar o sustentar sus respuestas en el momento de resolver una situación problema planteada, así como se muestra en el siguiente esquema:

Figura 8. Esquema representativo de la función de objetivación



Fuente: PONTÓN, T. Una propuesta multi-registro para la conceptualización inicial de las fracciones. Tesis de maestría. Maestría en Educación Matemática. Cali: Universidad del Valle, Grupo de Educación matemática, 2003. p. 52.

Este esquema representativo de la función de objetivación planteada por Duval muestra la existencia de dos planos necesarios en los análisis de toda producción de conocimiento matemático, planos que con frecuencia son confundidos. En primer lugar está el plano de los conocimientos construidos (al interior de un registro semiótico de representación); y en segundo lugar, está el plano del

[14] PONTÓN. Óp., cit., p. 49.
[*] Termino caracterizado por Duval como la visión de “alguna cosa” que *ipso facto* toma el status de objeto para el sujeto que mira. (Duval. Semiosis y pensamiento humano, p. 32).
[15] Ibíd., p. 32.

funcionamiento cognitivo que permite efectuar tareas (respuestas a situaciones, resolución de problemas); este último permite conducir y regular la actividad hasta su término, implicando más de un registro semiótico, conllevando a que se diferencie el representado del representante[16] en este sentido se Duval plantea:

> "…Dos característica distinguen el papel central y particular de las representaciones **semióticas en matemáticas**. No las utilizamos primero para evocar objetos, o para comunicar, si no para poder efectuar tratamientos, es decir raciocinios, cálculos, etc. Es decir, las representaciones semióticas son importantes solo en la medida en que pueden haber transformado en otras representaciones. Luego, recurrimos a tipos muy diferentes de representaciones semióticas, porque todos los sistemas semióticos no ofrecen las mismas posibilidades de tratamiento. Es decir, el punto fundamental en la actividad matemática no es la utilización necesaria de representaciones semióticas sino la capacidad de pasar de un registro de representación semiótica a otro registro"[17].

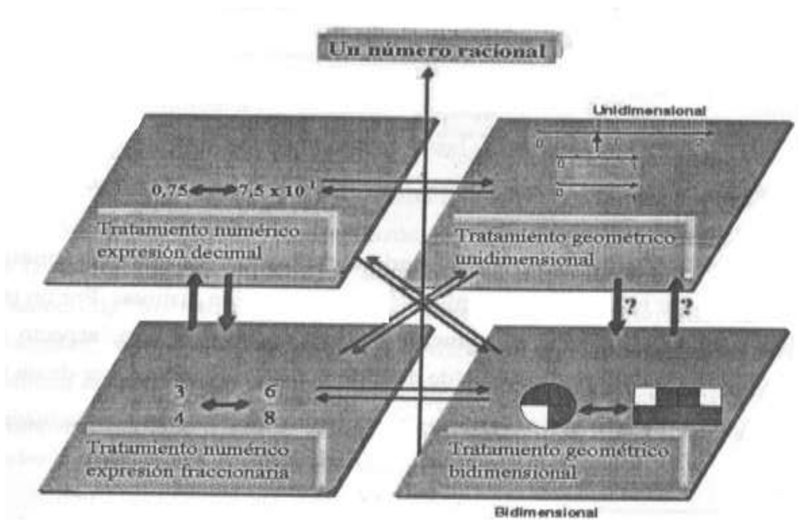
Por lo anterior, la conversión por parte del sujeto frente a dos o más registros de representación, refleja su aprehensión sobre el objeto matemático, en este caso sobre los números racionales. Lo anterior se debe a la inversión cognitiva que el estudiante realiza al ir de un registro a otro, dado a la coordinación que debe hacer entre las representaciones de un sistema de representación semiótica. En relación con esta perspectiva Pluvinage (1998) plantea que "un objeto matemático debe su existencia a los cambios de registro de representación […] la construcción depende del hecho de los tratamientos internos a cada registro y a los cambios a otros registros"[18].

Así Robert Adjiage adopta esta perspectiva de aprendizaje alrededor del papel de la **representación y el lenguaje**, concluye en su tesis: "las actividades sistemáticas de coordinación de un registro unidimensional (recta numérica graduada) con los registros numéricos usuales de escritura decimal y fraccionaria permiten ejercer un control eficaz en el uso de estos últimos. La actividad de

[16] Ibíd., p. 53.
[17] Ibíd., p. 43
[18] Ibíd. p. 43

coordinación es determinante para la movilización de un conjunto de registros que permite la resolución de problemas que involucren racional. El registro figural (de unidades figúrales unidimensionales) presentan unos altos costos cognitivos para los estudiantes pero permite la comprensión de la expresión decimal y fraccionaria adaptada al desarrollo de competencias que son necesarias para su formación"[19] Por lo anterior propone el siguiente esquema:

Figura 9. Un número racional



Fuente: PONTÓN, T. Una propuesta multi-registro para la conceptualización inicial de las fracciones. Tesis de maestría. Maestría en Educación Matemática. Cali: Universidad del Valle, Grupo de Educación matemática, 2003. p. 54.

Así, el modelo propuesto por Adjiage emplea diversos registros de representación los cuales producen significaciones sobre el objeto matemático representado. Dicha producción está mediada por la relación del sujeto con la forma de producción de la representación y por la naturaleza de la relación: contenido de la representación – objeto representado[20].

[19] Tomado de Pontón pág. 56
[20] ADJIAGE. citado por PONTON. Óp., cit., p. 54

Finalmente se pretende rastrear mediante registros de representaciones semiótica, los cambios en la comprensión que presentan los alumnos frente a la posición del signo menos en los números racionales negativos a medida que desarrollan una actividad matemática centrada en dos de los planos de tratamiento numérico, expresión fraccionaria y tratamiento geométrico unidimensional que plantea Adjiage.

2.2 ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Una vez identificada la variedad de registros de representación semiótica, la relevancia de los tratamientos y las conversiones en la enseñanza de las matemáticas, es importante conocer la estructura matemática de los números racionales dado que esta constituye las propiedades y parámetros que se deben cumplir para llevar a cabo los tratamientos en el registro numérico, por tanto se presentara la definición de los números racionales como conjunto que incluye los números enteros y respeta su estructura algebraica y su orden. De estos se obtendrá el conjunto de los números racionales. Sea δ un cuerpo y a, b dos elementos que pertenecen a δ con b no nulo. Se llamara $\frac{a}{b} = ab^{-1}$ cumpliéndose así que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ab = bc, \text{ donde d y b son enteros no nulos.}$$

Lo anterior se desprende como un caso especial de las propiedades algebraicas de los números reales, dando claridad que $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ (propiedad que se aplica en la amplificación de fracciones). De esta forma se puede afirmar que todo número fraccionario puede expresarse con un denominador positivo. Pues si $x = \frac{a}{b}$ y b<¨0 entonces $x = \frac{-a}{-b}$; con k = -1 y $-b > 0$

De esta forma se definen las siguientes relaciones: suma y producto $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$; $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\ \frac{a.c}{b.d}$ con b y d no nulos.

Con estos hechos *in mente* se define:

Definición 1 Sea A dominio de integridad y A´= A / {0}. Sea R la relación en el conjunto AxA dada por (a,b) R (c,d) ↔ ad = bc. Se hace sencillo probar que R es una relación de equivalencia en A x A´. Se llamara $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}=\ \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}\ \leftrightarrow \mathrm{ab}=\mathrm{bc}$.

Se llamará cuerpo de cocientes de A al conjunto cociente K = (A x A)/ R. Es fácil comprobar que ciertamente K es un cuerpo con las operaciones dadas por:

; $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\ \frac{ad+bc}{bd}$; $\frac{a}{b}\ .\frac{c}{d}=\ \frac{ac}{bd}$ Concretamente 0 = $\frac{0}{1}$. $1=\ \frac{1}{1}$. $-\boldsymbol{\frac{a}{b}}=\boldsymbol{\frac{-a}{b}}=\boldsymbol{\frac{a}{-b}}$ $\boldsymbol{y\ si}\ \boldsymbol{\frac{a}{b}}\ \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{entonces}\ \left(\boldsymbol{\frac{a}{b}}\right)^{\boldsymbol{-1}}=\ \boldsymbol{\frac{b}{a}}$

Definición 2. Se llamará cuerpo de los *números racionales* ***Q*** al cuerpo de cocientes de **Z**. Los elementos de **Q** son las fracciones $\frac{a}{b}$ con a, b ∈ **Z,** b≠0. Como $\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}$ podemos exigir que *b* sea positivo. El cuerpo **Q** está totalmente ordenado por la relación $\frac{a}{b}\ \leq\ \frac{c}{d}\ \leftrightarrow ad\ \leq bc\ (si\ b,d\ >0)$. Resulta sencillo ver que este orden extiende al de **Z**. Se llamaría $\mathbf{Q}^{+}$ al conjunto de los números racionales positivos (mayores que 0) y Q^{-} al de los negativos[21].

Definición 3. El inverso aditivo de un número racional es un número racional. En efectos, x = $\frac{p}{q}$ es un numero racional, entonces –x = -- $\frac{p}{q}$ = $\frac{-p}{q}$ es un numero racional.

Cuadro 1. Estructura matemática de los Racionales

[21] AMUD ARROYO, Ángel y VALENCIA MONTENEGRO, Ana Katherine La conversión entre representaciones semióticas en la temática de fracciones mayores que la unidad. Tesis de grado. Licenciados en Educación Básica con Énfasis en Matemática. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Pedagogía, 2008.

ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE LOS RACIONALES Cuerpo conmutativo o campo (Q, +, x)	
Suma $\frac{r}{s} + \frac{n}{m} = \frac{rm+sn}{sm}\ ; s, m \neq 0$	Producto $\frac{r}{s} \cdot \frac{n}{m} = \frac{rn}{sm}\ ; s, m \neq 0$
Asociativa	Asociativa
Modulativa (único modulo aditivo)	Modulativa (único módulo)
Conmutativa	Conmutativa
Invertida	Invertida: Todo elemento no cero tiene inverso
Distributiva del producto (x) sobre la suma (+)	
Q^+ forma en Q un conjunto de positivos	

Cuadro 2. Propiedades y teoremas de los números Racionales

Con referencia a las operaciones	**Con referencia a las relaciones de orden**		
El modulo aditivo es único. $a\ x\ (-b) = -(a\ x\ b)$	$a\ x\ 0 = 0\ \forall\ a \in Q$	$Si\ a \neq 0 \rightarrow a^2 \in Q^+$	$a \geq a$
0 = - 0	$a \times (-b) = -(a \times b)$	$1 \in Q^+$	$\frac{1}{a \times b} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$
-(a +b) = (-a) + (-b)	$(-a) \times (-b) = a \times b$	$Si\ x, y \in Q^+ \rightarrow x + y \in Q^+\ y\ xy \in Q^+$	$\frac{a}{c} = b \leftrightarrow a = b \times c;\ c \neq 0$
La suma es cancelativa	$a \times 0 = 0 \rightarrow a = 0; b = 0$		$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow ad = bc$
a+b =c ↔ a = c –b	$1 \neq 0$	$x \in Q^+ \leftrightarrow x \geq 0$	$\frac{1}{1} = \frac{a}{a}; \frac{0}{1} = \frac{0}{a}$
El inverso es un elemento único	$0 \notin Q^+\ y\ 0 \notin Q^-$	Si a≠0, entonces a es Cancelable por x	Propiedad Arquimediana
x + a=b tiene única solución	$Si\ a \in 0^+ y\ b \in 0^- \rightarrow ab \in 0^+$		Propiedad de densidad

Fuente: PONTÓN, T. Una propuesta multi-registro para la conceptualización inicial de las fracciones. Tesis de maestría. Maestría en Educación Matemática. Cali: Universidad del Valle, Grupo de Educación matemática, 2003.

De esta forma se ha presentado la estructura matemática de los números racionales, conformada por definiciones y propiedades fundamentales de este campo numérico, además de las relaciones de orden entre racionales y en particular los racionales negativos en procesos de equivalencia.

Finalmente, en este capítulo se presentaron los referentes teóricos de las dos miradas en que se fundamentó este trabajo: de un lado la definición y propiedades de los números racionales, para llevar a cabo el análisis de los procesos matemáticos que desarrollaron las estudiantes; y del otro se plantea la trascendencia de los registros de representación en el aprendizaje de la matemática, los tratamientos que se realizan al interior de cada registro y el proceso de conversión de un registro a otro.

CAPÍTULO III. DESARROLLO DE LA INDAGACIÓN

A continuación se describe los procesos que se llevaron a cabo para la elaboración del trabajo de grado, entre estos los instrumentos que se diseñaron para recoger la información y el registro y las categorizaciones que se realizaron para el análisis de los resultados.

3.1 PROCESOS REALIZADOS DURANTE LA INDAGACIÓN

Este proyecto está ubicado en la línea de investigación de *Razonamiento, lenguaje y comunicación de saberes y conocimientos matemáticos.* El tipo de trabajo corresponde a una indagación, desde una perspectiva semiótica - cognitiva, la cual a partir de una actividad relacionada con los números racionales negativos, en el grado octavo de una institución educativa de Cali, pretende identificar los logros y dificultades de los estudiantes en el desarrollo de dicha tarea, para establecer los cambios en la comprensión asociados a la ubicación del signo menos en los números racionales negativos.

La metodología que se empleó es de corte cualitativo y se centrará en la observación, descripción y análisis de los resultados encontrados en el desarrollo de la actividad.

Para alcanzar los diferentes objetivos del trabajo de grado, la indagación se desarrolló bajo el siguiente proceso:

Lo primero que se realizó fue la recolección y construcción de la información conceptual, mediante la búsqueda y estudio de bibliografía pertinente en bibliotecas, centros de documentación, bases de datos y demás mecanismos y fuentes de indagación bibliográfica y documental. Con esto, se pretendía la identificación, estudio y apropiación de la teoría e información que permitiría establecer problemas alrededor del objeto de estudio, la búsqueda de situaciones de aprendizaje diseñadas para la enseñanza de los números racionales y los problemas matemáticos que se aplican en los textos.

La indagación teórica y documental también permitió profundizar en los conceptos propios o vinculados al trabajo a realizar, el estudio y ampliación del marco teórico, y de los antecedentes relacionados con trabajos sobre los significados alrededor de los números racionales.

Con una bibliografía ya establecida se procedió a conformar un banco de preguntas con problemas y ejercicios, alrededor de los números racionales negativos. Posteriormente se realizó la clasificación de estas preguntas con ayuda de una rejilla, con la que se pudo establecer cuatro categorías de ejercicios que se asignaron de acuerdo a las siguientes consideraciones: preguntas de equivalencia, de operaciones, ubicaciones en recta numérica y aplicación de propiedades de orden. Se dio ubicaciones distintas del signo menos en los números racionales, (numerador, denominador y en el centro) similar a los ejercicios planteados en los libros de texto.

En esta etapa se decidió incluir solamente preguntas que estuvieran dentro de un contexto estrictamente matemático, evitando situaciones problema propias de otros contextos. Lo anterior principalmente a que se privilegió el análisis a los procesos matemáticos de acuerdo con la definición y propiedades de estos números y además para descartar errores originados por dificultades en la comprensión lectora, u otras condiciones ajenas a los procesos exclusivamente pertinentes al trabajo con los números racionales y poder así centrarse en el objeto de estudio.

Una vez establecida la rejilla se realizó la selección, adaptación y elaboración de los instrumentos de recolección de información, que consistieron en un taller (actividad) y unas entrevistas que recogían preguntas de las cuatro categorías establecidas en el taller. En la planeación de la intervención de la clase se vio la necesidad de tomar registros de observación para lo cual se realizaron videos y grabaciones de voz durante el desarrollo de la actividad.

La actividad se llevó a cabo en el Colegio Santa Librada de esta localidad, se trabajó con las estudiantes de grado octavo. Aunque el colegio es mixto, debido al proyecto educativo que adelanta, los estudiantes se encuentran seleccionados por género, el grupo con el que se realizó la actividad era femenino.

Para la aplicación de la actividad se trabajó con veintidós estudiantes organizadas en parejas, esto en consideración de que la interacción les facilitaría el desarrollo de la tarea, lo anterior teniendo en cuenta que algunos procesos operativos pertinentes a los números racionales podrían haberse olvidado, por no aplicarlos desde el grado anterior cuando estudiaron los contenidos propios de este objeto matemático.

La actividad se llevó a cabo en dos sesiones de dos horas. En la primera se contó con nueve parejas, de las cuales tres parejas (llamadas como A1, A2 y A4) se dejaron como auxiliares debido a que estas parejas trabajaron solo una de las dos sesiones en que se aplicó la situación. En esta sesión se había planeado desarrollar dos categorías de la situación: la primera constaba de ejercicios de simplificación y amplificación de fracciones y la segunda de operaciones básicas entre números racionales. Las dos horas dedicadas a la primera sesión no fueron suficientes para el desarrollo de las dos categorías, solo se logró recoger registros para la primera, lo que obligó a descartar la categoría concerniente a los procesos operativos básicos con los números racionales.

En la segunda sesión se desarrollaron los ejercicios relacionados con la tercera y cuarta categoría del taller, es decir las tareas relacionadas con ubicaciones en la recta numérica y la aplicación de propiedades de orden en los números racionales. En esta ocasión se contó con diez parejas, de las que también se dejaron tres como auxiliares (A1, A2 y A3).

Se diseñó una entrevista proponiendo preguntas que surgían de cada categoría de la actividad, esta se aplicaría a las parejas que proporcionaron mayor información en el desarrollo de la tarea, de las once parejas que se registraron, se seleccionaron nueve para la entrevista, pero finalmente se obtuvieron los registros de seis parejas entrevistadas.

Esto a fin de contar con la posibilidad de que las estudiantes comentaran de manera informal, en el transcurso de la conversación, lo que entendieron en el desarrollo de la actividad e invitarlas a que explicaran los procesos que habían realizado para la solución de los ejercicios. Estas interacciones se registraron en videos y grabaciones de voz, pues se consideraron importantes para profundizar en la comprensión que tenían las participantes alrededor del objeto de estudio.

Finalmente se procedió a la caracterización y análisis de los resultados encontrados en los procesos descritos anteriormente. En este proceso se establecieron cinco categorías de análisis determinantes para la elaboración del informe final. Al final de cada categoría se mostrarán particularmente los casos de las parejas uno (P1) y seis (P6), que corresponden a las estudiantes que se han escogido para un análisis más detallado de la actividad que dio cuenta del cumplimiento del propósito principal del presente trabajo de grado.

3.2 DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS DE CONSTRUCCIÓN DE LAS HERRAMIENTAS DE REGISTRO

En los siguientes apartes se describen las herramientas utilizadas para la recopilación de los registros de información, obtenidos en el desarrollo de la actividad y los procesos que se realizaron para su construcción.

3.2.1 Rejilla para la construcción de la actividad.

Para la elaboración de la tarea primero se contó con una rejilla con ejercicios, problemas y situaciones, clasificados de manera vertical en cuatro categorías, correspondientes a actividades de equivalencia, operativas, en la recta numérica y de orden. Estas categorías se establecieron, de acuerdo a las siguientes consideraciones.

Categorías para la construcción de la actividad.

a. Equivalencia. Contiene los ejercicios, problemas y situaciones que involucran fracciones equivalentes a otra dada. También aquellas donde se presenta un conjunto de fracciones equivalentes y se requiere identificar la fracción irreductible que representan.

b. Operativas. Esta categoría se refiere a actividades cuya solución requiere predominantemente el uso de algoritmos en las operaciones básicas de adición, producto, y cociente.

c. Recta numérica. Se incluyen los ejercicios de representaciones en la recta numérica tales como ubicación de racionales negativos en esta, o viceversa, dado un punto establecer a qué racional negativo corresponde.

d. De orden. Esta categoría pretende abordar actividades correspondientes a la aplicación de las propiedades de orden en los números racionales, en particular lo concerniente a los racionales negativos. Se refiere a ordenar racionales negativos de menor a mayor, o de mayor a menor. También se propone un intervalo entre dos racionales negativos y se pide encontrar otros números racionales que estén contenidos en el intervalo.

Una vez presentadas las categorías que se han establecido, se procede a la construcción de la rejilla, donde se puede observar la clasificación de cada pregunta dentro de las cuatro categorías trabajadas.

Cuadro 3. Rejilla

1. EQUIVALENCIA	2. OPERATIVOS	3. RECTA NUMÉRICA	4. ORDEN
1.1 a	2.1	3.1.a	4.1 a
1.1 b	2.2	3.1.b	4.1 b
1. 2	2.3	3.1.c	4.1 c
	2.4	3. 2.a	4.1 d
		3.2.b	4.1 e

En el cuadro anterior se clasifican los ejercicios de la situación de aprendizaje de acuerdo a las cuatro categorías establecidas. En los anexos se incluye la situación con la numeración de los ejercicios que corresponde a la organización que se observa en la tabla.

3.2.2 Análisis preliminar de la actividad.

En esta etapa se da una mirada a cada una de las preguntas seleccionadas para cada categoría, describiendo las formas de desarrollo para cada una, los procesos que se espera desarrollen las estudiantes al resolver cada ejercicio y las posibles dificultades matemáticas que puedan surgir al desarrollar la situación.

A continuación se presenta cada una de las categorías con sus respectivas preguntas.

Categorías de la actividad.

a. Equivalencia

En la primera parte de esta sección se da un grupo de fracciones equivalentes y se pide que las estudiantes encuentren el número racional que representa dicho conjunto mediante procesos de simplificación.

Para familiarizarlas con el proceso matemático se incluyó en la situación un ejemplo, trabajado únicamente con racionales positivos, esto con el fin de no incidir sobre los procedimientos que las estudiantes consideren realizar con los racionales negativos. A continuación se muestra la primera pregunta:

Figura 10. Pregunta 1.1

1.1 Encuentra el número racional que representa cada conjunto de fracciones. Realiza en el recuadro los procesos necesarios.

$a)\ \left[-\frac{18}{10}, \frac{-90}{50}, \frac{36}{-20}, -\frac{900}{500}\right] =$
$b)\ \left[-\frac{80}{120}, \frac{46}{-69}, \frac{-40}{60}, -\frac{6}{9}\right] =$

Esta pregunta se compone de dos literales (a y b) cada uno conformado por cuatro fracciones negativas que difieren en la ubicación del signo menos, además pueden ser reducidas aplicando los criterios de divisibilidad del dos, tres, cinco y diez.

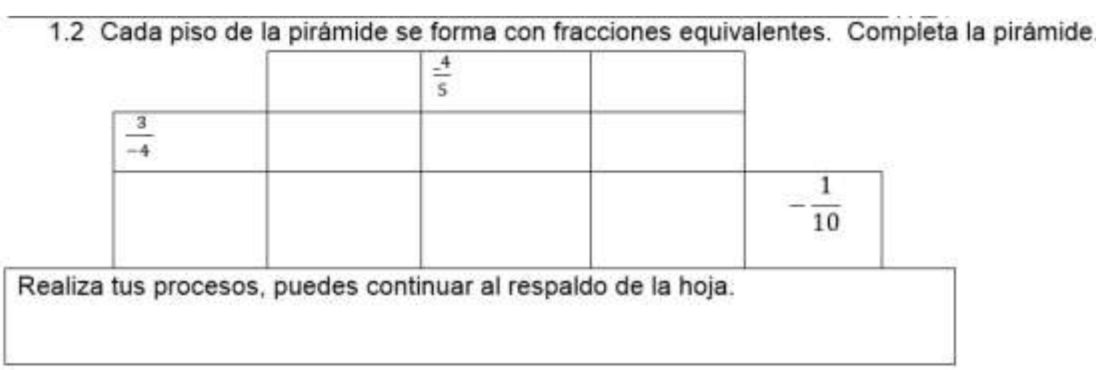
Para encontrar el representante de cada grupo se debe entender el número racional como una fracción irreductible y la estrategia a seguir es tomar una fracción cualquiera del conjunto dado y simplificarla hasta donde sea posible, dando como respuesta una fracción negativa irreductible, es decir un número racional negativo. Se puede considerar que el estudiante debe hacer una selección sobre el grupo de fracciones escogiendo una fracción que le permita reducir los pasos en la simplificación.

Las posibles dificultades que se pueden presentar en el desarrollo de este ejercicio son:

- El proceso de simplificación no se realice de forma completa conllevando a que las respuestas presentadas sean fracciones equivalentes a las dadas, pero no correspondan a la fracción irreductible. Esto puede presentarse porque no hay un manejo acertado de los criterios de divisibilidad.
- Que apliquen criterios de divisibilidad distintos para el numerador y para el denominador.
- Puede presentarse que los estudiantes resuelvan la tarea, pero que no expresen sus respuestas en términos negativos, es decir se "desentiendan" del signo menos y den como respuesta un racional positivo.

En el punto 1.2 se presenta una "pirámide compuesta por tres pisos", en cada uno se ubica un número racional negativo. Las estudiantes deben llenar las casillas vacías de cada piso con fracciones equivalentes al racional dado. En la siguiente imagen se muestra la pregunta.

Figura 11. Pregunta 1.2



Esta tarea requiere el proceso contrario a los desarrollados en la pregunta anterior, las estudiantes deben proponer un grupo de fracciones equivalentes al racional representante dado, que aparece en cada piso de la pirámide.

Para encontrar las fracciones equivalentes se deben realizar procesos de amplificación, escogiendo un número entero para multiplicarlo simultáneamente por el numerador y el denominador de la fracción. Se puede amplificar solo al racional propuesto seleccionando un entero diferente en cada amplificación, aunque también es posible amplificar a cada fracción equivalente obtenida, que a su vez originaría otra equivalente al grupo.

Facilitaría el proceso multiplicativo, que la selección estuviera restringida a los enteros con menor valor absoluto (2, 3). Las respuestas deben ser en todos los casos fracciones negativas.

Es posible que en el desarrollo de la actividad, las estudiantes presenten las siguientes dificultades:

- Incurran en errores operativos al multiplicar los números.
- Seleccionen enteros diferentes para multiplicar al numerador y al denominador de la fracción.
- Propongan fracciones positivas como respuesta.

b. Operativos

Esta categoría se refiere a actividades cuya solución requiera predominantemente el uso de algoritmos en las operaciones básicas de adición, producto y cociente.

La siguiente figura corresponde a la pregunta 2.1 de la situación.

Figura 12. Pregunta 2.1

2.1 Realiza las siguientes operaciones. Escribe en el recuadro los procesos que utilizas.

a) $\frac{1}{-2} + \frac{-5}{3} =$
b) $\frac{-8}{5} \cdot -\frac{4}{7} =$
c) $\frac{10}{9} \div \frac{2}{-3} =$

En la pregunta 2.1, se proponen tres ejercicios con operaciones básicas de adición, producto y cociente entre números racionales negativos. Los valores absolutos de los números que componen las fracciones son menores o iguales a diez, esto con el propósito de que los cálculos sean relativamente menores y que se facilite la operatividad para las estudiantes. El signo menos se ha ubicado en diferentes partes de las fracciones (numerador, denominador, y rayita), con el propósito de rastrear los cambios de comprensión que pudiesen presentarse alrededor de estos números.

A continuación se puede observar la pregunta 2.2 de la situación.

Figura 13. Pregunta 2.2

2.2 Realiza las operaciones resolviendo primero las del paréntesis. Escribe en el recuadro los procesos y operaciones que necesites.

$a)$ $\left(\frac{7}{3} + -\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{-3}{2} =$
$b)$ $\frac{2}{-7} \div \left(-\frac{4}{3} + \frac{-1}{2}\right) =$

La pregunta 2.2, es similar a la anterior, pero en esta se presenta un grado de dificultad mayor. Además de manejar los algoritmos de las operaciones de adición, multiplicación y cociente que en este ejercicio aparecen combinadas, las estudiantes deben manejar signos de agrupación y cumplir con la jerarquía operativa que demandan estos. Los números que conforman las fracciones son dígitos, para minimizar las dificultades en el cálculo. El signo menos se ubicó en diferentes partes de la fracción, para observar los cambios en la comprensión que pueden emerger a la hora de tratar estos números.

Las dificultades que pueden encontrarse las estudiantes pueden ser:

- Al sumar las fracciones, pueden adicionar numeradores y adicionar denominadores, (como enteros) sin aplicar los procesos pertinentes para las fracciones.

  Al adicionar fracciones heterogéneas, omitan el proceso de encontrar fracciones equivalentes homogéneas.
- Errores con el manejo del signo al operar con números negativos.
- Confundan los procesos de multiplicación con los de división de fracciones o viceversa.
- No atiendan la jerarquía de las operaciones para el punto 2.2

c. Recta numérica

La tercera parte de la actividad de aprendizaje, enfatiza el trabajo de las estudiantes sobre la recta numérica, en ella se trabaja la ubicación y/o localización de racionales negativos. De esta forma se presentan dos momentos importantes.

El primer momento tiene que ver con ubicar sobre una recta numérica tres racionales negativos con diferente denominador (los tres denominadores son múltiplos del dos, esto con el fin de facilitar las particiones de cada unidad). En la siguiente figura se puede ver la formulación de la pregunta 3.1.

Figura 14. Pregunta 3.1

3.1 Ubica en la recta numérica los siguientes números racionales.

a) $-\frac{3}{4}$ b) $\frac{-9}{8}$ c) $\frac{7}{-2}$

Realiza los procesos que necesites.

a =	b =	c =

Los racionales negativos corresponden a la distancia desde el cero hasta ese punto con un sentido negativo, por ende la marcación del signo (-) en cada uno de ellos.

En este sentido se espera, que los estudiantes traten cada racional a partir del papel que tanto el numerador como el denominador desarrollan para su ubicación, sin dejar de lado el signo que acompaña a cada número. Los tres racionales propuestos difieren en el valor cuantitativo y en la ubicación del signo menos, es decir, sobre la “rayita”, en el numerador o en el denominador en ese orden respectivamente.

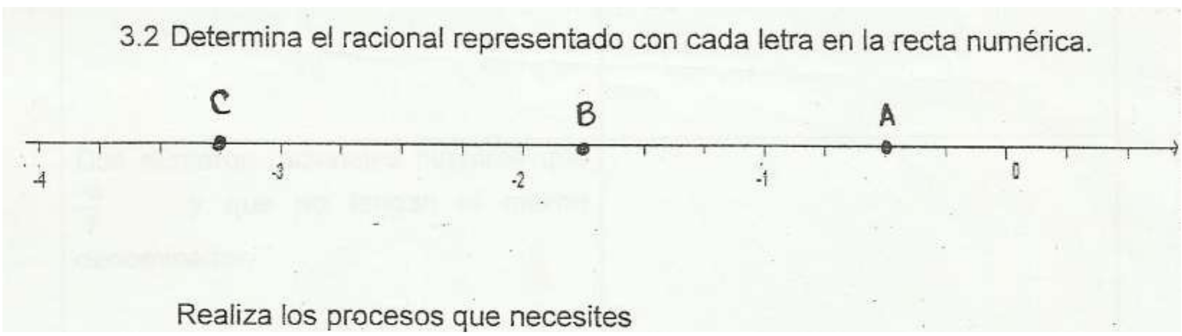
Ante esto, algunas dificultades que se podrían presentar en la ubicación del racional son:

- Realicen la ubicación del número a partir del sentido que indique únicamente el numerador, es decir, que $\frac{-9}{8}$ lo ubiquen a la izquierda del cero y que $\frac{7}{-2}$ lo ubiquen a la derecha del cero.
- Podría presentarse que no identifiquen el segmento unidad y ubiquen la fracción como un valor entero, teniendo como referente el numerador o el denominador.
- Si la fracción es impropia, pueden invertir la información que indica el denominador con la del numerador, es decir hacer las particiones que indica el numerador y tomar las que indica el denominador.

• Dificultades al ubicar el racional en la medida que no relacionen la distancia de este, respecto al cero en la recta y solo tengan como referente un segmento entre dos unidades.

El segundo momento corresponde a determinar el valor marcado con las letras A, B y C sobre la recta numérica fraccionada en cuartos. En este ejercicio la recta dada les brinda información visual, la cual a partir del conteo de espacios logran determinar el valor para cada letra. En la siguiente figura se observa la pregunta 3.2.

Figura 15. Pregunta 3.2



En este ejercicio se espera que los estudiantes identifiquen el denominador de la fracción por las particiones que se han hecho a cada unidad (cuatro), y teniendo como punto de referencia la distancia entre el cero y el punto ubicado en la recta, identifiquen el numerador, logrando así asignar el racional negativo que está ubicado en cada punto.

Sin embargo puede suceder que las estudiantes comentan algunos errores como:

• No tengan en cuenta el sentido de la recta sobre la que están trabajando, olvidando el signo negativo para cada número.

• Asignen los valores para el numerador y para el denominador de la fracción de acuerdo a las unidades dentro de las que este ubicado el punto.

• Tomen como referente un segmento de la recta y no la distancia entre el punto ubicado y el cero, al identificar el número racional.

d. De orden

La última parte de la actividad corresponde a la aplicación de las propiedades de orden, a la par que la densidad de los números racionales; las actividades constan de una tabla que contiene cinco ejercicios. En las tres primeras filas se muestran dos números racionales y se pide al estudiante encontrar otro racional que esté ubicado según las propiedades de orden, entre los dos racionales propuestos. En la cuarta y quinta fila de la tabla, se propone un número racional negativo y se pide al estudiante encontrar dos mayores o dos menores a este respectivamente, con la condición de que no pueden tener el mismo denominador. La actividad se puede observar en la siguiente figura.

Figura 16. Pregunta 4.1

4. DE ORDEN

4.1 Completa la siguiente tabla de números racionales, según las condiciones dadas.

Condiciones	Resultados y procesos.
Un número racional que este entre $\frac{-9}{10}$ y $\frac{5}{-10}$	
Un número racional que esté entre $-\frac{4}{5}$ y $\frac{-1}{2}$	
Dos números racionales que estén entre $\frac{7}{-3}$ y $\frac{-3}{2}$	
Dos números racionales mayores que $\frac{-5}{7}$ y que no tengan el mismo denominador.	
Dos números racionales menores que $-\frac{9}{2}$ y que no tengan el mismo denominador.	

En la primera fila se presentan dos fracciones homogéneas, por lo que se facilita el proceso de búsqueda, que solo requiere encontrar un número entre los dos numeradores propuestos, esta respuesta puede surgir de manera casi inmediata.

Es posible que para la solución, los estudiantes requieran ubicar las fracciones en la recta y a partir de esta representación se propongan las respuestas.

En la segunda y tercera fila se proponen dos racionales negativos heterogéneos, lo que aumenta el grado de dificultad obligando al estudiante a amplificar para llevar estos racionales a expresiones como fracciones homogéneas y encontrar finalmente un racional entre las dos fracciones. Es posible que se inclinen ante una estrategia gráfica representando en la recta los dos racionales y a partir de allí puedan identificar otro racional entre ellos.

Algunas dificultades que podrían darse son:

- No apliquen adecuadamente las propiedades de orden con números racionales negativos.
- Propongan respuestas positivas.
- Traten a la fracción, desvinculando el numerador y el denominador como si fuesen dos enteros, aplicando las propiedades de orden de estos para hallar la respuesta.

Una vez estudiadas las categorías establecidas en la actividad es necesario aclarar que en la mayoría de las preguntas se utilizan números menores que diez, con el propósito de facilitar los cálculos necesarios, conservando la atención en los propósitos de esta actividad en cuanto a rastrear los procesos matemáticos realizados y los cambios en la comprensión que surjan debido a la posición del signo menos en los números racionales negativos.

En las preguntas de la actividad se manejan números racionales que llevan el signo menos ubicado a veces en el numerador, en otros casos en el centro y en algunos casos en el denominador; con el fin de establecer los tratamientos que puedan realizar los estudiantes alrededor de estos.

También se dejaron en el taller, los espacios necesarios para el desarrollo de los procesos y escritura de argumentos a cada pregunta, con la posibilidad de trabajar por el respaldo de la hoja en caso de requerir más espacio.

3.2.3 Entrevista aplicada a las estudiantes.

Con el fin de profundizar en cada una de las respuestas que presentaron las estudiantes en la situación de aprendizaje, se diseñó una entrevista que permitiera indagar los razonamientos que ellas manejaban al momento de desarrollar cada una de las secciones de la actividad.

Las preguntas se presentan de acuerdo a las tres categorías desarrolladas en la actividad[*], además se ve la necesidad de complementar estas categorías con preguntas que permitan rastrear información partir de las enunciaciones que realizan los estudiantes en la lectura de las fracciones con cambios en el representante.

Cada pregunta está acompañada de un comentario donde se explica el objetivo de la misma, este no se dio a conocer a los entrevistados.

3.2.3.1 Preguntas propuestas en la entrevista

a. Equivalencia

Sección 1.1

1. ¿Cuándo simplificaste la fracción, que pasó con el signo?, ¿se mantuvo?, ¿lo quitaste? , ¿por qué? Lee tu respuesta.

Se busca establecer el manejo que el estudiante hace del signo menos (lo mantiene o lo quita).

[*] Aunque se proponen cuatro categorías en la actividad, los estudiantes no desarrollan la categoría correspondiente a ejercicios de tipo operativo.

2. En el punto 1.1.b, explica el proceso que usaste para encontrar la respuesta. Lee tu respuesta

En los registros revisados de la actividad, se observó que la mayoría no realizó de manera completa el proceso de simplificación, por lo que se pretende profundizar en esta información.

Sección 1.2

1. Si cambiara la ubicación del signo menos en el número racional, (del numerador, al denominador, al centro) tu respuesta cambiaría.

La mayoría de los estudiantes realizó adecuadamente el proceso de amplificación, sin embargo se pretende indagar si el estudiante tiene claro que a pesar, de la reubicación del signo menos, el número racional es el mismo.

b. Recta Numérica

Sección 2.1

1. Explica el proceso que realizaste para ubicar $-\frac{3}{4}$. Y donde ubicas a $\frac{-3}{4}$, ¿tendría la misma ubicación de $-\frac{3}{4}$? Y donde ubicas a $\frac{3}{-4}$, ¿tendría la misma ubicación de $-\frac{3}{4}$? Lee cada uno de los racionales dados.

Se pretende evaluar, si el estudiante reconoce al mismo número racional en las opciones dadas y su ubicación única sobre la recta numérica.

2. **Explica el proceso que realizaste para ubicar $\frac{7}{-2}$. Y donde ubicas a $\frac{-7}{2}$, ¿tendría la misma ubicación de $\frac{7}{-2}$? Y donde ubicas a $-\frac{7}{2}$, ¿tendría la misma ubicación de $\frac{7}{-2}$?**

Además del objetivo de la pregunta anterior, se busca reconocer los procesos que el estudiante realiza al tratar con una fracción impropia.

Sección 2.2

1. Explica el proceso que realizaste para identificar el número racional A. (Una vez dada la respuesta se reubica el signo menos como se presentó en las preguntas anteriores y se le pregunta si dada la reubicación de este, el número corresponde a la ubicación inicial en la recta o no.)

Se quiere registrar los procesos que el estudiante realiza para identificar un número racional a partir de un punto dado en la recta numérica, además si establece esta ubicación a pesar de los cambios en el representante, como la única posible para el número.

2. Explica el proceso que realizaste (si no lo hizo, se le propone que realice el ejercicio) para identificar el número racional C. (Una vez dada la respuesta se reubica el signo menos como se presentó en las preguntas anteriores y se le pregunta si dada la reubicación de este, el número corresponde a la ubicación inicial en la recta o no.

Esta pregunta recoge el objetivo anterior, y además registrar los procesos que surgen al identificar una fracción impropia en la recta numérica.

Sección 3. De orden

1. **Explica el proceso que realizaste para encontrar un racional que este entre $\frac{-9}{10}$ y $\frac{5}{-10}$.**
2. **Si se te pide encontrar un número racional que este entre $\frac{-9}{10}$ y $\frac{-5}{10}$ ¿tu respuesta cambia, o es la misma?**

Se quiere registrar los procesos que realizan los estudiantes para obtener la respuesta, y las variaciones que pueden surgir al reubicar el signo menos.

3. **Explica el proceso que realizaste para encontrar un racional que este entre $-\frac{4}{5}$ y $\frac{-1}{2}$; si se te pide encontrar un número racional que este entre $\frac{4}{-5}$ y $\frac{-1}{2}$ ¿tu respuesta cambia, o es la misma?**

Esta pregunta recoge el objetivo anterior, y además registrar los procesos que surgen en el trabajo con números racionales heterogéneos.

4. **Explica el proceso que realizaste para encontrar dos números racionales menores que $\frac{-9}{2}$, y que no tengan el mismo denominador.**

Se pretende establecer los procesos que realizan los estudiantes y la aplicación de las propiedades de orden para encontrar racionales menores que el dado.

Con el desarrollo de esta entrevista se pretendió recoger información pertinente que aporte elementos de análisis a tener en cuenta en la categorización de los resultados obtenidos en la actividad.

3.2.4 Clasificación de casos a partir de los registros obtenidos en la aplicación de la situación de aprendizaje y en la entrevista.

A continuación se proponen cinco categorías que recogen los casos que son evidentes en el desarrollo de la tarea y en las entrevistas que se realizaron posteriormente a las estudiantes que participaron de la actividad.

Estas categorías se llaman en su orden:

Procesos operativos de simplificación y amplificación, en esta categoría se presentan los casos que se observaron en el desarrollo de los puntos 1.1 y 1.2 de la actividad.

Rastreo de los cambios en la comprensión alrededor del signo menos y cambios en la forma del representante, esta categoría contiene la información sobre las comprensiones que resultan al cambiar de posición al signo menos en los números racionales.

Ubicación en la recta numérica y cambio en la comprensión o por cambio en la forma del representante, consta de las situaciones observadas en el desarrollo de los puntos 3.1 y 3.2 de la actividad y los cambios en la comprensión rastreados al cambiar la forma del número**.**

Enunciación, esta categoría registra las enunciaciones que realizaron las estudiantes al leer los números; y finalmente **de orden,** donde se registran los procesos que desarrollaron las estudiantes al aplicar las propiedades de orden en los números racionales.

Con el propósito de establecer los cambios en las comprensión por la posición del signo menos en los números racionales negativos, en cada categoría se describen las situaciones que se han observado en el desarrollo de las actividades mostrando algunas imágenes y protocolos de los registros de las parejas que ejemplifican estos comportamientos. Al final de cada categoría se muestran particularmente los casos de las parejas uno (P1) y seis (P6), que corresponden a las estudiantes que se han escogido para un análisis más detallado de la actividad.

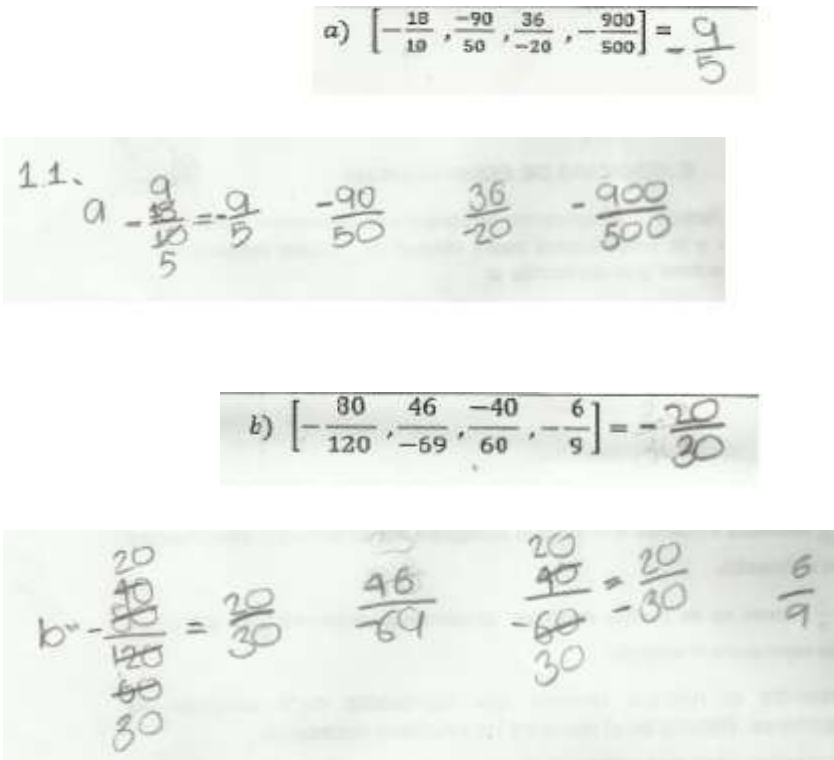
3.2.4.1 Procesos operativos de simplificación y amplificación. Esta categoría recoge los procesos desarrollados en los puntos 1.1 y 1.2 de la situación de aprendizaje, correspondientes a fracciones equivalentes por simplificación y por amplificación.

La mayoría de las parejas realizaron los procesos de simplificación y amplificación adecuadamente. Al final del ejercicio lograron encontrar la fracción irreductible representante del conjunto de fracciones para el punto 1.1 y las fracciones equivalentes que completan los pisos de la pirámide en el ejercicio 1.2.

A continuación se describen algunas de las situaciones que se lograron evidenciar en el desarrollo de esta tarea.

En primer lugar llamó la atención, el hecho de que en el ejercicio de simplificación (punto 1.1.a y 1.1.b de la actividad), para el cual se presentó un grupo de fracciones con el propósito de que las estudiantes escogieran una de ellas y realizaran el proceso de simplificación; la mayoría optó por tomar la que aparecía de primera en el grupo dado (de izquierda a derecha), tal vez por ser el número que se ve de manera inmediata, lo que da a entender que no hubo un proceso de selección, orientado en la escogencia de la fracción que permitiera reducir los pasos de la simplificación, esto se puede observar en los procesos realizados por P4. (Ejercicios 1.1.a y 1.1.b, situación de aprendizaje).

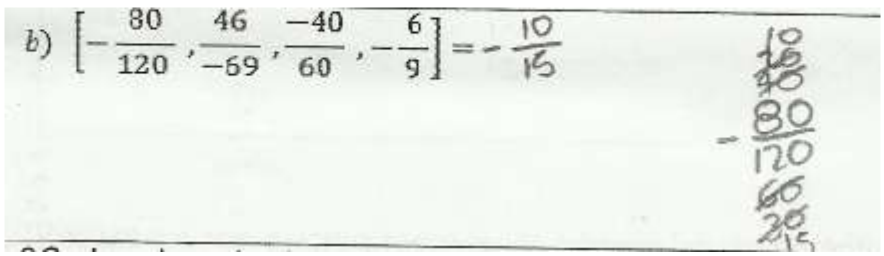
Figura 17. Ejercicios 1.1.a y 1.1.b



En el desarrollo del ejercicio realizado por P4, se observó que tanto para simplificar en el punto 1.1a y 1.1.b, escogieron la primera fracción del grupo (se lee de izquierda a derecha); en el caso de la pregunta 1.1.a la elección fue acertada, pero para el punto 1.1.b al tomar la fracción $-\frac{80}{120}$, las estudiantes realizaron varias simplificaciones para proponer una respuesta que aún no corresponde a la fracción irreductible, la tarea de simplificación habría sido más rápida y sencilla si se hubieran decidido por la fracción $-\frac{6}{9}$, con esta al simplificar entre tres habrían encontrado la respuesta en un solo paso.

También se evidenció que algunas parejas, solo simplificaron con el número dos, dando por terminado el ejercicio, cuando obtenían una fracción la cual no era divisible por este número, lo que deja en evidencia las dificultades en el manejo operativo básico, en este caso particular la división, indispensable en el proceso para reducir fracciones. A continuación se presenta el ejercicio realizado por la pareja cinco en el punto 1.1.b en la actividad, con el cual podemos ejemplificar esta situación.

Figura 18. Ejercicio 1.1.b

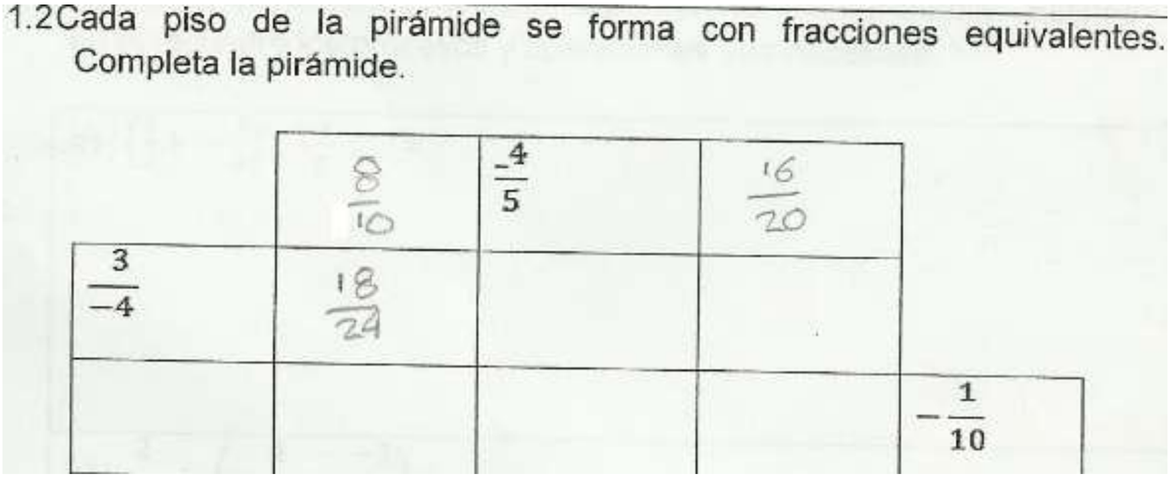


P5 en el desarrollo de esta tarea, simplifican tres veces, todas por el número dos, pudiendo abreviar este proceso simplificando por diez, o por cuatro (de manera inmediata por cuarenta), cuando llegan a la fracción $-\frac{10}{15}$**,** la cual no es divisible por dos, dan por terminada la simplificación presentando dicha fracción como respuesta, sin recurrir a la simplificación por cinco con la que lograrían la respuesta acertada que correspondía a $-\frac{2}{3}$.

En cuanto al signo de las respuestas presentadas, se encontró que algunas parejas se desentendieron del signo menos durante el desarrollo de los puntos 1.1 y 1.2 de la situación de aprendizaje, presentando fracciones positivas como respuesta.

Esto se puede observar en la tarea realizada por P3 en el punto 1.2 de la situación de aprendizaje.

Figura 19. Tarea realizada por P3 en el punto 1.2


1.2Cada piso de la pirámide se forma con fracciones equivalentes. Completa la pirámide.

	$\frac{8}{10}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{16}{20}$	
$\frac{3}{-4}$	$\frac{18}{24}$			
				$-\frac{1}{10}$

La imagen muestra el tercer piso de la pirámide completo con dos fracciones positivas que proponen las estudiantes como equivalentes a $\frac{-4}{5}$, en el segundo piso solo dan una fracción positiva como equivalente a $\frac{3}{-4}$, finalmente en el primer piso de la pirámide no proponen respuestas dejando los espacios en blanco.

En el ejercicio 1.1, algunos estudiantes aplicaron la ley de los signos, multiplicando entre sí cada uno de los signos de las fracciones que pertenecían al conjunto dado, para definir el signo para la fracción irreductible, como se observa en el siguiente protocolo de P4.

En adelante, para los protocolos se llamará Investigador (I), estudiante (E), estudiante 1 (E1), y estudiante 2 (E2).

I: ¿cuál es el signo de ese racional que representa todo ese conjunto? (señala el conjunto)

E1: sería positivo ¿no?

I: ¿por qué?

E2 Por lo mismo

E1 y E2: menos por menos más, más por menos, menos y menos por menos da más.

I: ¿pero entonces si aquí hubiera otro racional negativo, cambiaría la respuesta de positivo a negativo? (señala el conjunto de la clase de equivalencia dado)

E1: no

E2: si, porque sería lo mismo. Menos por menos más y más por menos daría menos y menos por menos daría más y más por menos daría menos. (Vid_0423)

En el protocolo se puede ver como esta pareja utiliza conceptos aprendidos con anterioridad como puede ser la ley de los signos y los procesos operativos que se emplean para determinar el signo en una potencia, este concepto aprendido en el pasado lo "acomoda" para asignarle el signo a la fracción.

Otra estrategia observada para la posición del signo en las respuestas a los puntos 1.1 y 1.2, sobre simplificación de fracciones y fracciones equivalentes por medio de amplificación, fue por imitación, es decir, a partir de la posición del signo en el racional dado, asignaban de la misma forma la posición del signo en sus respuestas, (en el numerador, en el denominador, en el centro).

Este es el caso de P1, al indagar sobre esta tendencia de repetir la posición del signo, se encontró situaciones como la que se muestra a continuación.

I: ¿Por qué ponen el menos en el numerador? (refiriéndose a $\frac{-8}{10}$, una fracción que las estudiantes proponen como equivalente a $\frac{-4}{5}$, en el tercer piso de la pirámide).

E: Porque acá, lo tienen así (señalan el racional $\frac{-4}{5}$**,** en la pirámide**)**

I: Si escribo tu respuesta así (escribe $\frac{8}{-10}$), es igual a $\frac{-8}{10}$**,** o es otro?

E: Es otro

I: Y, si lo escribo así (escribe $-\frac{8}{10}$**)**, ¿es igual a este, (señala a $\frac{-8}{10}$**)**, o es diferente?

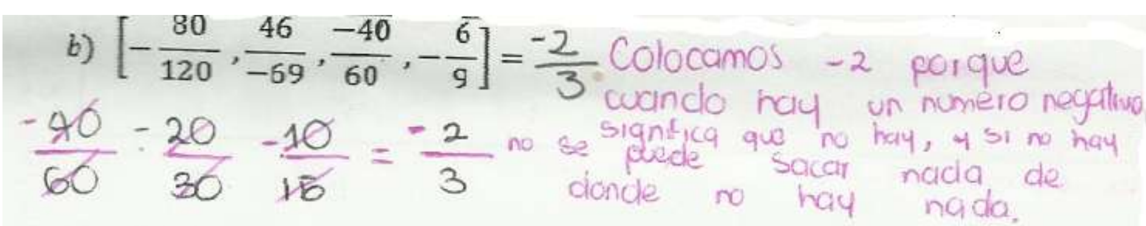
E: El menos en la mitad, yo creo que cambia porque el menos está en diferentes partes.

(Video 0679, 07:01)

En la intervención de P1, se deja claro que deciden ubicar el signo menos en el numerador de la fracción, por la forma que observan en el racional dado en la pirámide ($\frac{-4}{5}$**),** además al proponer otras ubicaciones del signo menos durante la entrevista, las estudiantes no lograron establecer que se trataba del mismo número.

Finalmente la pareja 6 en los puntos 1.1.a y 1.1.b, seleccionan una fracción del conjunto y realizan los procesos de simplificación de manera adecuada, encontrando la fracción negativa irreductible esperada en cada pregunta. La siguiente figura muestra el punto 1.1.b, del taller que desarrolla P6.

Figura 20. Taller desarrollado por P6 ítem 1.1.b



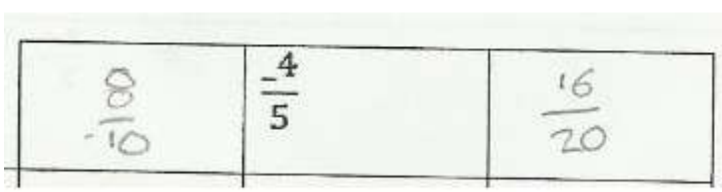
En este ejercicio las estudiantes toman una fracción del conjunto (distinta a la primera), que les permite simplificar números más pequeños entre dos y finalizan simplificando entre tres. En el espacio asignado para los procesos, las estudiantes explican que escriben -2, (se refieren al numerador), “porque cuando hay un número negativo al ser un número negativo significa que no hay, y si no hay no se puede sacar nada de donde no hay nada”; este sentido se puede relacionar a un contexto comercial, un número negativo puede representar una deuda y uno positivo por el contrario, representa lo que se tiene.

3.2.4.2 Rastreo de cambios en la comprensión por la posición del signo menos, cambios en la forma del representante.

En el transcurso de las entrevistas, se indagó de manera recurrente sobre los cambios en la comprensión presentes por los cambios de posición del signo menos en las respuestas que proponían las estudiantes. Se planteaba la respuesta dada por ellas (en algunos casos sin tener en cuenta que fueran respuestas equivocadas) y se les presentaba la fracción con ubicaciones diferentes del signo menos.

A continuación se puede observar la interpretación que hace P3, al cambiar la posición del signo menos a un racional propuesto en la pirámide para encontrar fracciones equivalentes a través de amplificación. La siguiente figura muestra las fracciones equivalentes que encuentra P3, en el primer piso de la pirámide.

Figura 21. Taller desarrollado por P3



En esta tarea se observa que P3, amplifica la fracción menos cuatro quintos por dos y obtiene menos ocho décimos, también amplifica por cuatro y obtiene dieciséis veinteavos (positivo). Al indagar sobre los cambios en la comprensión que emergen al cambiar la forma del representante, se encontró el siguiente registro.

I: Si la fracción la escribiera así (escribe $\frac{4}{-5}$ inicialmente, en la pirámide se da $\frac{-4}{5}$,) ¿cómo obtienen una fracción equivalente a esta?

E: (Discuten entre ellas), No sabemos.

I: Cambio la pregunta, las fracciones que dan como equivalentes a $\frac{-4}{5}$, en la pirámide, ¿también son equivalentes a $\frac{4}{-5}$?

E: No.

I: Y si el número lo escribo así (escribe $-\frac{4}{5}$), ¿serian equivalentes a este número?

E: (Risas), No sé.

(Video 0677, 3:38)

Se puede observar que las estudiantes no reconocen el número cuando se le cambia la posición del signo menos, a pesar de que realizaron el proceso de amplificación con el racional negativo dado en la pirámide, no relacionan las fracciones equivalentes que proponen como respuesta, como fracciones equivalentes al mismo número cuando se cambia su forma, al percibir el cambio en el representante, expresan cambios en la comprensión.

Con algunas parejas se logra relacionar cambios en la comprensión según una posición específica del signo menos en el número racional. Para A1, todo el número es negativo si el signo menos está ubicado en el centro del mismo, como se pudo establecer en el siguiente protocolo.

I: Al cambiar la ubicación del signo menos de $\boldsymbol{\frac{6}{-4}}$ $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{\frac{-6}{4}}$ ¿es el mismo número?

E: No, no es igual, porque la operación no tiene negativo.

I: y si fuera (escribe $-\boldsymbol{\frac{6}{4}}$), ¿es igual?

E: Cambia, porque todo el resultado es negativo. (Video 130821003)

Esta pareja no identifica al mismo representante cuando la posición del signo cambia, considera que si lleva el signo menos en el numerador es un número distinto al que lleva el signo menos en el denominador, cuando el representante tiene el signo menos en el centro, es distinto a los anteriores y expresa que en este caso, todo el número es negativo.

Similarmente se encontró que P1, también consideraba a los cambios de forma en el representante, como números distintos, esto se constató en el registro de la siguiente entrevista.

I: Si escribo tu respuesta así (escribe $\frac{8}{-10}$), es igual a $\frac{-8}{10}$, o es otro?

E: Es otro

I: Y, si lo escribo así (escribe $-\frac{8}{10}$), ¿es igual a este, (señala a $\frac{-8}{10}$), o es diferente?

E: El menos en la mitad, yo creo que cambia porque el menos está en diferentes partes. (Video 0679, 07:01).

Se evidenció con esta pareja, que al proponer diferentes ubicaciones del signo menos en la fracción que ellas proponen como respuesta, consideraban cada cambio como una fracción distinta a la respuesta inicial, Identifican el cambio del representante como un cambio en la comprensión (es claro en este caso que no es así).

La siguiente intervención de P6, surge al indagar sobre el cambio de la posición del signo menos en la respuesta que propone para el ejercicio 1.1.b.

I: Bueno, y si el signo menos estuviera en el denominador, ¿tu respuesta cambiaría?, ¿sería diferente?

P6: Sería diferente.

I: Y si le pusiéramos el signo menos al lado de la rayita; ¿sería la misma respuesta? , ¿Sería diferente?

P6: Seria diferente. (Vídeo 229-jul, min 08:08).

Para P6, cada cambio en la forma del representante corresponde a un número diferente, al presentarle las tres posibles ubicaciones del signo menos, deja claro que no relaciona estas formas con un único número. Al indagar sobre los cambios en la comprensión que estaban presentes según la posición del signo, se presenta la siguiente intervención de P6, mientras desarrollan el ejercicio 1.1.b

I (Investigador): ¿Ustedes ponen el signo menos en el numerador?, ¿por qué lo ponen en el numerador?

P6: Porque todo esto es negativo, o sea que no hay, y si usted tiene acá que no hay, entonces cómo le voy a poner que si hay, cuando no hay nada.

I: ¿Qué no hay?

P6: Que no hay cuarenta (se refiere a la fracción, menos cuarenta sesentavos, con el signo menos en el numerador), es que nosotras aquí cogemos, cuando hay menos, es que no hay, que uno debe. (Video 2, 29-jul, min 08:08)

Esta pareja relaciona el signo menos con una deuda, en un contexto comercial o contable, pese a que las tareas propuestas en la situación se desarrollan en un contexto estrictamente matemático. Si el número es positivo, es un valor con el que se cuenta y si es negativo es un valor que se debe o del que se carece. Dentro de este contexto sucede que los estudiantes no asimilan el número como una fracción, puesto que ven un numerador separado y sin relación con el denominador, por lo que signan diferentes sentidos, dependiendo de si el signo menos aparece en el numerador, o en el denominador a lo que pueden afirmar no hay en el número de arriba (si el signo menos está en el numerador) y si hay en el de abajo (si en el denominador no aparece el signo menos) y viceversa.

3.2.4.3 Ubicación en la recta numérica y cambios en la comprensión por cambio en la forma del representante. La sección 3.1, correspondió al trabajo de los estudiantes sobre la recta numérica en cuanto a ubicación y localización de algunos racionales negativos, de esta forma se presentan dos momentos importantes, el primero, tiene que ver con ubicar sobre una recta numérica tres racionales negativos y el segundo correspondió a determinar el valor marcado con las letras A, B y C sobre la recta numérica fraccionada en cuartos.

Se esperaba entender los procesos que realizaron los estudiantes para ubicar cada racional a partir del papel que tanto el numerador como el denominador cumplen para su ubicación, sin dejar de lado el signo que acompaña a cada número, teniendo en cuenta que los números racionales propuestos, difieren en el valor cuantitativo y en la posición del signo menos, es decir, sobre la "rayita", en el numerador y en el denominador. Se realizaron algunos protocolos de las entrevistas, para tener mayor claridad en los tratamientos que los estudiantes realizaron al interior de cada registro de representación y las interpretaciones que hicieron de cada número.
A continuación se presentan las situaciones que se encontraron durante el desarrollo de esta actividad.

Algunas de las parejas lograron ubicar de forma acertada las fracciones propias que se propusieron, luego se les indagó cambiando la forma del número en cuanto a la posición del signo menos en la fracción, con lo que identificaron al mismo representado con una única ubicación en la recta numérica. Este es el caso de P4.

Ubicación que realiza P4, de menos tres cuartos en la recta numérica.

Figura 22. Ubicación de menos de tres cuartos en la recta numérica realizada por P4

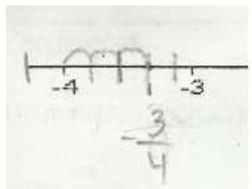
Alrededor de este ejercicio, se les indagó lo siguiente:

I: Explíquenme ¿cómo hicieron esto?
E1: Por lo menos aquí (señala a -3/4) dividimos eso en tres partes
E2: En cuatro fue ¿no?
E1: A sí
E2: Cada uno fue en cuatro.
I: Bueno, si el número que ahora les doy, seria este. (Escribe a $\frac{3}{-4}$) ¿Este número tendría la misma ubicación que este (señala a $-\frac{3}{4}$)?
E1: Si (asiente con la cabeza)
I: Y si fuera este el caso (escribe a $\frac{-3}{4}$) ¿tendría la misma ubicación de ese punto? (señala a $-\frac{3}{4}$)
E1: Si. (Video 0426)

En el anterior diálogo, se evidenció que las estudiantes relacionan los cambios de forma en el representante con un único representado, expresaron el mismo sentido, lo que les permitió relacionar una única ubicación en la recta numérica para todos los cambios posibles en la posición del signo menos en la fracción.

Una de las parejas encuestadas, al ubicar la fracción menos tres cuartos, realizó las particiones que le indicaba el denominador, (no sobre toda la unidad) en la unidad entre menos tres y menos cuatro, tomando tres cuartos de esa unidad, de izquierda a derecha. Este es el caso de A1, como se ve en la siguiente figura.

Figura 23. Ejercicio desarrollado por A1



Al indagar sobre los procesos que realizó esta pareja, se muestra el siguiente registro:

I: ¿Cómo hicieron para ubicar ese número ahí?
E 1: Partimos aquí entre los cuatro
I: ¿y tomaron el numerador y el denominador para hacer esa división ahí?
E1 y 2: Si
E: Es que partimos los cuatro y sacamos los tres que van ahí.
I: ya
E: sobró una. (Se refiere que al hacer las cuatro particiones, no toman toda la unidad).
(Video 0229 jul)

De acuerdo al proceso realizado por las estudiantes se puede establecer que estas no relacionan la ubicación de la fracción como la distancia de esta al cero en la recta numérica, sino como el número de partes que deben tomar de una unidad, en este caso toman como referente el numerador y el denominador, como indicadores de la unidad a la que le hacen las particiones.

También se observó en esta pareja A1, que al ubicar la fracción c, de la sección 3.1, tiene como punto de referencia el denominador, no el cero de la recta, las particiones no son dentro de una unidad, toma las unidades como particiones y realiza tantos desplazamientos como los indique el numerador, en el sentido positivo o negativo dependiendo igualmente del numerador. El siguiente registro se obtuvo en la entrevista para que explicara el proceso que siguieron en la ubicación del número.

I: ¿Cómo puedes ubicar este número? (señala a $\frac{7}{-2}$)

E: Contamos siete partes

I: ¿A partir de dónde?

E: Del menos dos

I: Es el denominador

E: Si y donde termina da el resultado (señala cinco en la recta y allí ubica a $\frac{7}{-2}$)

I: Y si el número está así ($\frac{-7}{2}$), tiene la misma ubicación?

E: Tendría otra

I: Y si estuviera así (escribe $-\frac{7}{2}$) ¿tendría la misma ubicación?

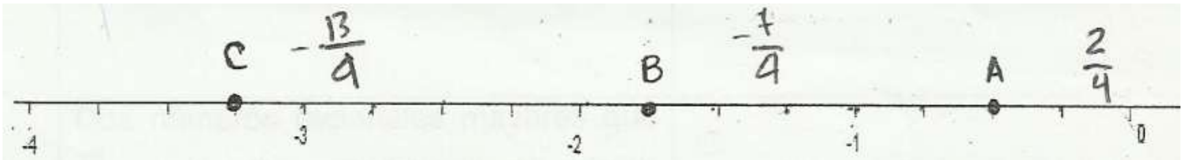
E: No, también tendría otra.

(Video 130821003, 21:50-23:10)

En el protocolo se observa que se ubican en el número que indica el denominador de la fracción y a partir de allí se desplazan en siete unidades a la derecha, las que llaman "partes", a partir del menos dos a la derecha hasta el cinco donde ubica la fracción. Al indagar sobre los cambios de forma en el representante y la ubicación en la recta numérica, las estudiantes afirman que estos tienen ubicaciones diferentes en la recta.

La mayoría de las parejas realizaron el proceso de identificación de la fracción en la recta adecuadamente, como se pudo observar en la siguiente figura del proceso que desarrolla P2.

Figura 24. Proceso desarrollado por P2

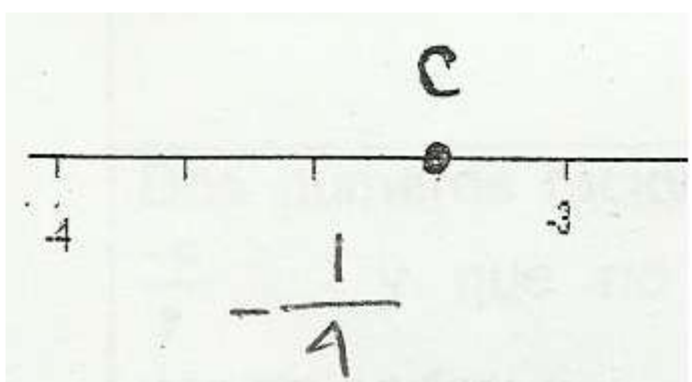


Las estudiantes identifican correctamente los racionales sobre la recta numérica, para el caso de $-\frac{2}{4}$ se desentienden del signo menos.

En la entrevista se le pregunta a la estudiante si el cambio de posición del signo menos (numerador, denominador o en el centro) en el racional cambiaría la ubicación del punto sobre la recta, a lo que respondió que no cambiaría la ubicación del racional, lo que implica que aunque se le cambie la forma al representante, el sentido es el mismo. (Video 0434).

Algunas parejas solo tuvieron en cuenta la unidad en que se ubicó el punto que representaba la fracción en la recta, y la ubicación del punto respecto a esa unidad, en el caso de estar en la primera partición de cuatro que se realizaron en cada unidad, identificaban la fracción como un cuarto. Este es el caso de P5, como se observa en la siguiente figura del taller.

Figura 25. Taller desarrollado por P5

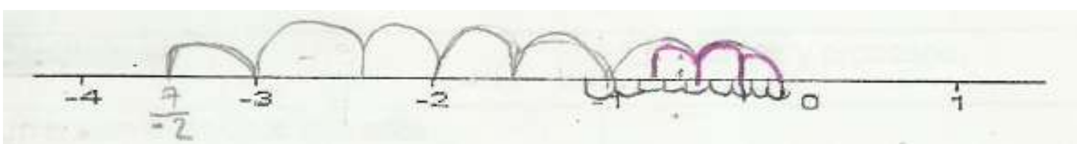


P5, toma entonces como referente el segmento, desconociendo esta unidad como parte de un todo que es la recta numérica y la distancia que existe entre esta ubicación en la recta y el cero para identificar a la fracción como menos un cuarto, cuando en realidad corresponde a menos trece cuartos.

Al tratarse de una fracción impropia, algunas estudiantes logran una ubicación acertada para estos números, realizando las particiones indicadas por el denominador y tomando las unidades necesarias en la recta, según las partes indicadas por el numerador. Este es el caso de P1.

P1 en la ubicación del número menos siete medios en la recta numérica.

Figura 26. Taller desarrollado por P1 en la recta numérica



El siguiente protocolo se registró al indagarles sobre los procesos aplicados en el taller.

I: ¿Cómo ubican allí este número (señala a $\frac{7}{-2}$, ubicado en el punto C?)
E: Creo que dividimos en dos cada columna y después escogimos siete.
(Video 0679, 08:23)

Las estudiantes realizaron las particiones que indicaba el denominador, y ubicaron la fracción impropia adecuadamente entre la tercera y cuarta unidad negativa, posteriormente se les entrevistó presentándoles cambios en la forma del representante y se logró establecer que en las estudiantes hay cambios en su comprensión al cambiar la forma del representante, como se observa en el siguiente protocolo.

I: Si el número estuviera escrito así (escribe $\frac{-7}{2}$), ¿la ubicación sería la misma? (señala la ubicación en la recta para $\frac{7}{-2}$), ¿iría en otra parte?

E: Iría en el lado de acá, en los positivos (señala al lado derecho del cero en la recta).

I: ¿qué proceso realizarías para ubicarlo?

E: El mismo, pero en el lado de los positivos.

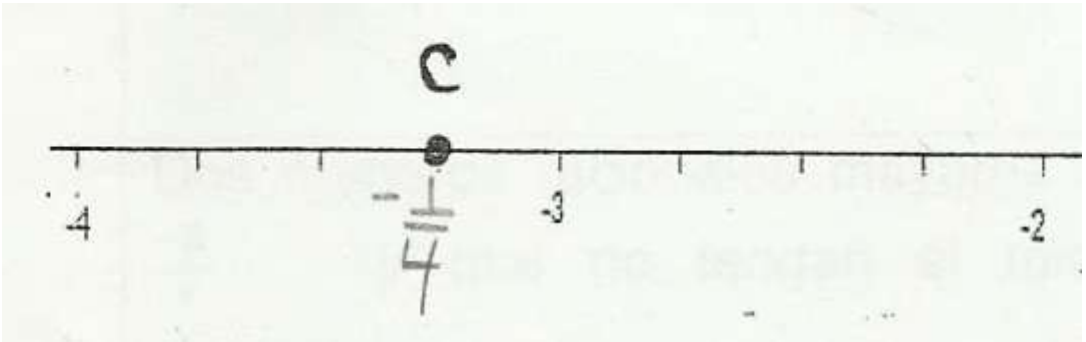
I: ¿Si el número se escribiera así? (escribe, $-\frac{7}{2}$) ¿tendría la misma ubicación que le dieron a $\frac{7}{-2}$?

E: Si, sería la misma.

P1, consideró para $-\frac{7}{2}$ y $\frac{7}{-2}$, la misma ubicación en la recta numérica como un número negativo, pero estimo una ubicación diferente para $\frac{-7}{2}$, tratando este racional negativo como si fuese un número positivo, se puede establecer que al ubicar el signo menos en el numerador, las estudiantes perciben un denominador positivo que es el que les indica el número de particiones que debe realizársele a la unidad, concluyendo finalmente que las particiones debían hacerse al lado derecho del cero.

También se observó el proceso que realizó esta pareja en la actividad 3.2.c, (el segundo momento), en el que se constató que aplicaron procesos distintos a los comentados en el anterior ejercicio. En esta tarea identificaron el número, solo teniendo en cuenta que es la primera de cuatro particiones entre las unidades -3 y -4 en la recta numérica, como se pudo observar en la siguiente figura.

Figura 27. Taller desarrollado por P1 actividad 3.2.c



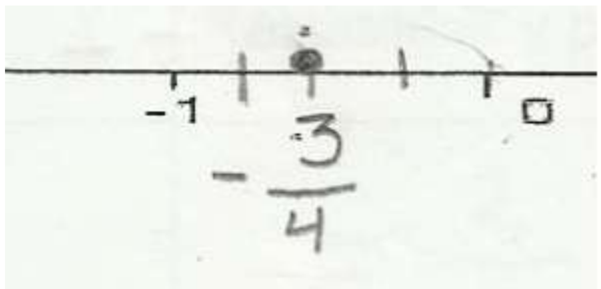
En este proceso, las estudiantes no tienen en cuenta la distancia respecto al cero del punto que deben identificar en la recta numérica. En el siguiente registro de P1, se indagó sobre el proceso que aplicaron en la tarea.

¿Cómo hicieron para ubicarlo? (señala el punto C), ¿cómo saben que va menos un cuarto?
E: Porque estaba en el primero y también esta partido en cuatro.
I: ¿Desde dónde tomas la recta, para ubicar este punto?
E: Desde aquí (señala entre -3 y -4 en la recta).
(Video 0679,11:54 a 13:59)

Debido a que el punto marcado con la letra C, está ubicado entre menos tres y menos cuatro, esta pareja, solo tiene en cuenta dichas unidades para identificar el número, como el punto está ubicado en la primera partición de cuatro que se realizaron en esta unidad, es decir es un cuarto de esta unidad, proponen a la fracción menos un cuarto cuando en realidad es menos trece cuartos. Se toma entonces como referente el segmento, desconociendo esta unidad como parte de un todo que es la recta numérica desconociendo la distancia que existe entre este punto en la recta y el cero para identificar a la fracción.

En el caso de P6, las estudiantes realizaron la representación en la recta numérica, contando las marcas que acotan las particiones, (desde el cero) más no las particiones mismas, consideradas como espacios, por lo que no lograron ubicar adecuadamente la fracción como se puede observar en la siguiente imagen del taller que desarrolla P6.

Figura 28. Taller desarrollado por P6 recta numérica



Luego de la revisión del taller, se indagó sobre los procesos que P6 realizó para la ubicación del número, y sobre los cambios en la comprensión que surgen al cambiar la forma del representante, de lo que se obtuvo el siguiente registro.

E1: Aquí decía cuatro, entonces partimos cuatro cositas y luego contamos 1, 2 y el 3. Si se hacen cuatro cositas y se cuentan las tres (señala las particiones en la recta numérica), y el menos porque está entre los negativos.

I: Si el número se escribiera así $\frac{-3}{4}$, ¿sería la misma ubicación?

E1: Ah, yo no sé.

E2: Se sabe que aquí los dos son negativos (señala a $-\frac{3}{4}$), pero aquí (señala a $\frac{-3}{4}$), dice que solo el tres es negativo. Entonces yo me confundo.

I: ¿Que entiendes si ves el menos en el centro?

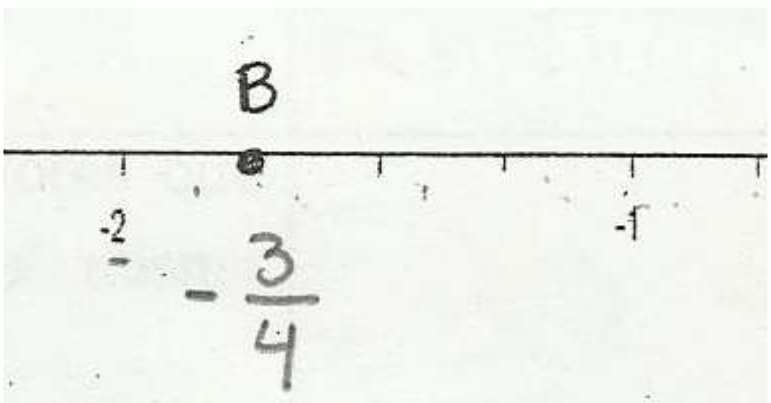
E2: Los dos son negativos.

(Video 0681, 04:23 a 08:32)

En el protocolo se pudo establecer que si la fracción se presenta con el signo menos en el centro, el sentido para los estudiantes es una fracción negativa cuya ubicación debe estar en los números negativos. Al cambiar la forma del representante no identifica al mismo representado, la comprensión cambia al cambiar la forma, aunque no hay claridad sobre estos cuando el signo se ubica en una posición distinta a la del centro.

P6, en el segundo momento de la actividad, aplica el mismo proceso que P5, el valor que asigna para cada letra es dado mediante conteo de partes de unidades separadas, como se puede observar en la siguiente figura de la actividad.

Figura 29. Taller desarrollado por P6 segundo momento de la actividad



En este caso, la letra B, se ubica en la tercera partición de cuatro realizadas entre el menos uno y el menos dos 2, el valor para la letra según esta pareja corresponde a $-\frac{3}{4}$, dado que no tienen en cuenta el segmento unidad que parte desde el cero, no logran identificar la fracción menos siete cuartos.

3.2.4.4 Enunciación. Esta categoría surge en la elaboración de la entrevista, ante la necesidad de complementar la información obtenida en la aplicación de la actividad. Para su desarrollo se invita a que las estudiantes lean los representantes de los números racionales en sus distintas formas, esto con el propósito de observar y rastrear cambios en la comprensión, a partir de estas enunciaciones. A continuación se describen las situaciones que se presentaron en la entrevista.

Algunas parejas enunciaron de manera correcta la fracción, se observó que usaban dos enunciaciones diferentes, dependiendo de la forma en que se les presentaba el representante, como se pudo observar en el siguiente protocolo de A1.

I: Lee este número (señala $\frac{7}{-2}$)
E: Siete medios negativo
I: este (señala a $\frac{-7}{2}$)
E: Menos siete medios
I: Y este (señala a $-\frac{7}{2}$)
E: Siete medios negativo.
(Video 130821003, 23:12- 23:30)

Esta pareja, lee de dos formas la fracción, una en la que relaciona al representante con signo menos en el denominador con el que lleva el menos en el centro, y otra para nombrar al que tiene el signo menos en el numerador, las dos enunciaciones son válidas para esta fracción.

Ocurrió también que algunas parejas combinaron formas de leer números aprendidas anteriormente, como se pudo observar en el siguiente registro de P3.

I: ¿Cómo lees este número? (señala a $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{-2}}$)

E: Siete menos dos medios

E: ¿Menos siete?

I: ¿Cómo sería entonces este? (señala a - $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$)

E: Este es menos siete medios.

(Video 0677, 17:57-18:55)

Esta pareja lee adecuadamente a la fracción cuando se le presenta con el signo menos en el centro, cuando se escribe a menos siete medios con el signo en el denominador ($\frac{7}{-2}$), lo enuncia como dos números separados, lee el numerador como un entero y al denominador (-2) lo lee como una fracción (menos dos medios).

Otras parejas, proponen una enunciación cuando se les pide que lean la fracción con el signo menos en el numerador, pero no pueden leer la fracción al cambiar la posición del signo menos al denominador y al centro. Este caso es el de P1 como se observa en el siguiente registro.

I: ¿Cómo lees este número? (señala a $\frac{\mathbf{-8}}{\mathbf{10}}$)

E: Menos ocho diezavos

I: ¿Este? (señala a $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{-10}}$)

E: No sé.

I: ¿Y, este? (señala a $-\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{10}}$)

E: No sé esos.

(Video 0679, 07:20)

P1, de acuerdo a su enunciación, no reconoce que se le está presentando al mismo número racional, no tiene claridad que con la misma enunciación que inicialmente propone puede relacionar cada cambio en el representante. Propone una enunciación cuando se le pide que lea a menos ocho décimos ($\frac{\mathbf{-8}}{\mathbf{10}}$) con el signo menos en el numerador, pero es incapaz de leer este número al cambiar la ubicación del signo menos al denominador y a la rayita.

Se encontraron casos en que las estudiantes enunciaron adecuadamente la fracción cuando se ubicaba el menos en el centro y en el numerador. Al ubicar el signo menos en el denominador de la fracción no relacionan la misma enunciación, manifestando desconocer su lectura, esto es lo que se observó con P6, en la siguiente intervención.

I: ¿Puedes leer estas fracciones? (señala a $\frac{6}{-8}$)

E1: Este, no sabemos

I: ¿Y este? (señala a $\frac{-6}{8}$)

E1: Menos seis octavos.

I: ¿Y esta? (señala a $-\frac{6}{8}$)

E1: Menos seis octavos

(Video 0681, 02:25)

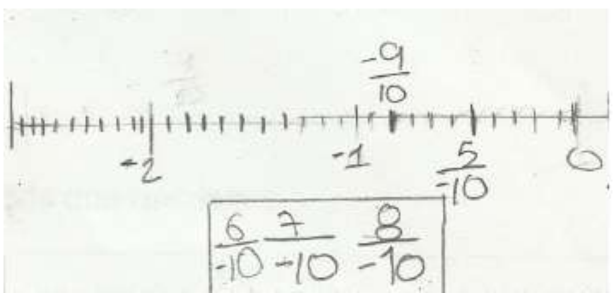
Para esta pareja resulta más fácil leer las fracciones con el signo menos en el numerador y el signo menos en el centro, lo que puede obedecer a que esa posición corresponde al orden natural que se sigue al leer (de izquierda a derecha). De esta manera, el signo menos es lo que primero se ve, y se sigue un orden igual a como se debe leer: en menos seis octavos, primero se enuncia el signo y luego la fracción. Este orden se altera cuando el signo menos se ubica en el denominador, donde es necesaria la abstracción de que se trata del mismo número y es correcto enunciarlo de la misma forma, aunque el orden en su escritura no corresponda a la enunciación.

No leen la fracción cuando tiene el signo menos en el denominador, pero si pueden leer la fracción cuando tiene el signo menos en el numerador y en el centro, aunque no quiere decir que relacionen estas dos últimas formas con el mismo número, pues antes esta pareja había expresado que se trataba de números distintos.

3.2.4.5 Orden. Esta categoría recoge los procesos desarrollados por los estudiantes al resolver las preguntas de la sección cuatro de la situación de aprendizaje, que concierne a las propiedades de orden en los números racionales.

En la primera parte de esta sección, la tarea consistió en proponer una fracción que estuviera entre dos fracciones homogéneas. La mayoría de las estudiantes propusieron respuestas acertadas, algunas realizaron las ubicaciones y expresaron que la respuesta debía estar en el intervalo comprendido entre las dos fracciones. Este es el caso de P5, como se puede observar a continuación.

Figura 30. Proceso realizado por P5, cuando se pide encontrar una fracción entre menos nueve décimos y entre menos cinco décimos



Esta pareja realiza diez particiones en la unidad comprendida entre cero y menos uno, luego ubican a menos cinco décimos y a menos nueve décimos, tienen claridad en que los números que cumplen las condiciones que se les pide se encuentran en ese intervalo en la recta numérica. Posteriormente se les indago sobre el proceso que realizaron y sobre los cambios en la forma del representante, de lo cual se registró el siguiente protocolo.

I: ¿Cómo hicieron para encontrar un número que este entre estos dos? (señala a $\frac{-9}{10}$ y a $\frac{5}{-10}$)
E1: Pues nosotras hicimos la recta
I: Aja
E1: entonces, pues ubicamos cinco décimos y el menos nueve décimos, entonces aquí (señala el intervalo entre estos números en la recta numérica) mirábamos que números estaban entre cinco sobre menos diez y menos nueve sobre diez, entonces acá esta: seis sobre menos diez también esta siete sobre menos diez y esta ocho sobre menos diez.
I: Ok, Aquí tienen a menos diez ¿cierto? (señala el denominador de menos cinco décimos)
E1: Si
I: Si el signo hubiera estado arriba, (señala el numerador de menos cinco décimos) ¿alguna de estas tres respuestas cambiaria?
E1: no
I: ¿Por qué?
E1: porque solamente se cambiaría la posición del signo. (Video 0430)

De acuerdo al anterior registro, se puede establecer que al indagarles sobre el cambio en la forma del representante, las estudiantes conservan el mismo sentido, identifican al representado a pesar de los cambios en el representante.
Otras parejas simplemente propusieron números que estuvieran entre los numeradores y entre los denominadores dados, como si fueran números enteros separados y sin ninguna relación entre sí, esto se pudo evidenciar con A1, en los siguientes dos protocolos que recogen algunos ejercicios de la sección de orden.

¿Pueden encontrar un número que este entre estos? (señala $\frac{-9}{10}$ y $\frac{5}{-10}$)

E: El denominador es el mismo, yo pondría cinco y arriba no se tal vez un cuatro (escribe $\frac{-4}{5}$).

I: ¿Cómo encuentras ese número?

E: Busque un número que estuviera en medio de los dos.

I: ¿Cómo?

E: Uno que estuviera entre el menos nueve y el cinco

I: Y ¿cuál encontraron?

E: menos cuatro

I: Y el cinco ¿Cómo lo encuentran?

E: Un número entre el diez y el menos diez.

(Video 132801003, 28:30 a 30:50)

En este caso “acomodan” las propiedades de orden en los números enteros, para aplicarlos a una fracción. Analizan por separado los numeradores, encontrando un número entre estos como si fuesen enteros, igual sucede con el denominador. La fracción propuesta como respuesta coincide con las condiciones del ejercicio, debido a que las fracciones que limitaban el intervalo eran dos fracciones homogéneas.

En la siguiente tarea de la sección de orden, donde se pide que propongan números menores a determinado número racional, se observó que las estudiantes, trataban a la fracción como dos números naturales, cuyo numerador y denominador no tienen ninguna relación entre sí, el siguiente protocolo surge en el desarrollo de la actividad con A1.

¿Puedes encontrar dos racionales menores que $\frac{-9}{2}$, y que no tengan el mismo denominador?

E: ocho uno (escribe $\frac{-8}{1}$)

I: ¿Cómo encuentras esos números?

E: El ocho es menor que el nueve, y sería el ocho negativo, porque allí está negativo (señala el numerador de $\frac{-9}{2}$). Y el uno, porque es menor que el dos.
(Video 132801003, 38:15)

A1, al proponer una respuesta, afirman que ocho es menor que nueve, y uno menor que dos, quedando ocho sobre uno y adquiriendo el signo menos por repetición respecto a la fracción inicial (ocho negativo, porque allí esta negativo). En este proceso no se tiene en cuenta que el número indica las partes que se toman de una unidad.

P1 acomoda las propiedades de orden en los números enteros y las aplica a la fracción, cuando desarrolla la misma pregunta, según se observa en el siguiente protocolo.

I: ¿Puedes darme un número menor que menos nueve medios?
E1: ¿Es positivo?, Ah no, tendría que ser negativo. Uno sería menos diez tercios (escribe $-\frac{10}{3}$)
I: ¿Cómo encuentras ese número?
E1: Es que nos han enseñado que en los números negativos, el número más grande es menor, entonces como diez es más grande que nueve, diez es menor y tres es más grande que dos, entonces tres es menor, porque son negativos.
(Video 0680,1:35)

En este protocolo se pudo observar que las estudiantes tratan por separado al numerador y al denominador de la fracción y les aplican las propiedades de orden para los números enteros. Ven al racional propuesto como dos números enteros sin relación entre sí, separados por una rayita.

El siguiente registro surge al indagar a P1 sobre el cambio de posición del signo menos en el número.

I: Si cambio la posición del signo menos en tu respuesta, ¿sigue siendo el número que tu propones o cambia? (escribe las posibles ubicaciones del signo $\frac{-10}{3}$ y $\frac{10}{-3}$)

E1: Es el mismo, en todos es el mismo porque todos son negativos.

(Video 0680,1:35)

P1, reconoce a un único número racional independiente de la posición del signo menos. En todos los cambios del representante, se conserva el mismo sentido.

Con P6, se presentaron situaciones donde al igual que con P1, aplicaron las relaciones de orden para los números enteros. Esto se pudo observar en la siguiente intervención cuando buscan un número racional que este entre $\frac{-9}{10}$ y $\frac{5}{-10}$.

I: ¿Pueden realizar un ejercicio, para entender como lo hicieron?

P6: Un número que este entre -9

I: ¿Entre -9 y quién?

P6: Entre -9 y 5, desde -9, contamos, -8 hasta llegar a 0, entonces podemos coger ahí, no sé -6, y ya. Y acá sería 10 y -10.

P6E2: De -10

P6E1: Si, -10, pero digamos positivo 10, 9, 8 y encontramos uno y ya.

(Video 530-07, 8:14 a 9:54 min)

Esta pareja deduce la respuesta tomando al numerador y proponiendo otro mayor o menor según el caso, igualmente sucede con el denominador, no tratan al número como una fracción sino como números enteros de manera aislada sin ninguna relación entre ellos.

Con el análisis de las anteriores situaciones se construyeron las conclusiones a fin de responder a los objetivos de este trabajo.

CAPÍTULO IV. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Las siguientes consideraciones se pueden resumir en dos apartados: 1) Del desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes, a partir de categorizar en variables de análisis las observaciones de los resultados y posteriormente de las entrevistas realizadas a los estudiantes; y 2) Recomendaciones, que pretenden recoger, de las anteriores, algunas observaciones que le puedan ser útiles a la comunidad educativa en lo concerniente a los cambios en la comprensión debido a la posición del signo menos en los números racionales negativos.

4.1 DEL DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES

A continuación se presentan las conclusiones construidas a partir de los registros obtenidos en el desarrollo de la actividad y en las entrevistas a las estudiantes. Cada situación se sustenta con protocolos o imágenes de los procesos realizados por las parejas P1 o P6 (caso sustentatorio).

- **Algunas estudiantes tienden a escoger la posición del signo menos en sus respuestas (en el numerador, en el denominador, o en el centro) según la que observen en la fracción con la cual están trabajando. No se observa un proceso de razonamiento que se desprenda de una comprensión diferente a la imitación**.

Se puede observar en el siguiente protocolo desarrollado por P1.

I: ¿Por qué ponen el menos en el numerador? (refiriéndose a $\frac{-8}{10}$, una fracción que las estudiantes proponen como equivalente a $\frac{-4}{5}$, en el tercer piso de la pirámide).

E: Acá, lo tienen así (señalan el racional $\frac{-4}{5}$**,** en la pirámide**)**

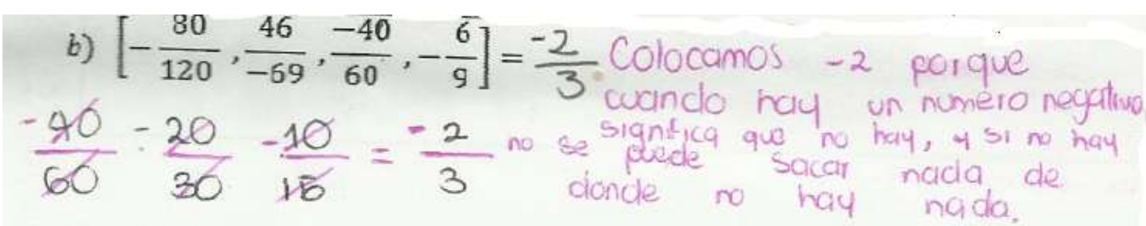
(Video 0679, 07:01)

Con esto la P1 aclara que la determinación de ubicar el signo menos en el numerador de la fracción, que propone como respuesta, surge porque esa es la posición del signo que ha observado en el racional con el que está trabajando en la pirámide de la sección 1.2 de la actividad ($\frac{-4}{5}$**)**.

- **En una pareja de estudiantes se logró rastrear sentidos que emergen de un contexto extra-matemático, (a pesar de que la actividad estuvo restringida a un contexto exclusivamente matemático) donde lo positivo se relaciona con lo existente y lo negativo con lo no existente, por eso utilizan expresiones como no hay, no tengo, debo. Todas estas enunciaciones se asimilan a no tener y tener se asimila a no deber.**

Un ejemplo de esta condición se puede observar en la siguiente figura que muestra el proceso que realiza P6 en el punto 1.1.b de la situación.

Figura 31. Proceso realizado por P6 en el punto 1.1.b de la situación



Entonces, el argumento que exponen para ubicar el signo menos en el numerador de la fracción evidencia comprensiones que se pueden relacionar a un contexto económico (comercial, financiero, contable) en el que un número negativo representa una deuda y uno positivo, por el contrario, representa lo que se posee. Al indagar sobre esto, se presenta la siguiente intervención de P6, mientras desarrollan el ejercicio 1.1.b

I: ¿Ustedes ponen el signo menos en el numerador?, ¿por qué lo ponen en el numerador?
P6: Porque todo esto es negativo, o sea que no hay, y si usted tiene acá que no hay, entonces cómo le voy a poner que si hay, cuando no hay nada.
I: ¿Qué no hay?
P6: Que no hay cuarenta (se refiere a la fracción, menos cuarenta sesentavos, con el signo menos en el numerador), es que nosotras aquí cogemos, cuando hay menos, es que no hay, que uno debe.
(Video 229-jul, min 08:08)

Las estudiantes conservan la posición del signo en la fracción con la que están trabajando porque la comprensión que han construido alrededor del signo menos obliga a que no puedan alterar esa ubicación en su respuesta. Cambiar la posición del signo originaría cambios en la comprensión.

- **La mayoría de las parejas entrevistadas consideran los cambios de forma en el representante como si fueran números distintos. Identifican el cambio del representante como un cambio en la comprensión.**

Esto se constató en el registro de la siguiente entrevista de P1.
I: Si escribo tu respuesta así (escribe $\frac{8}{-10}$), ¿es igual a $\frac{-8}{10}$, o es otro número?

E: Es otro

I: Y, si lo escribo así (escribe $-\frac{8}{10}$), ¿es igual a este, (señala a $\frac{-8}{10}$), o es diferente?

E: El menos en la mitad, yo creo que cambia porque el menos está en diferentes partes.

(Video 0679, 07:01).

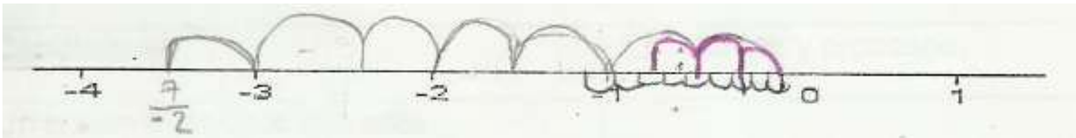
Al presentarles diferentes ubicaciones del signo menos en la fracción que proponen como respuesta ($\frac{-8}{10}$), las estudiantes consideraron cada cambio como una fracción distinta a la respuesta inicial.

Esto remite al planteamiento de Raymond Duval en el sentido de que los objetos matemáticos no son asequibles por la percepción (sensorial) sino que requieren de una mediación semiótica para su aprehensión. Así, la variedad de los tipos de registros de representación semiótica (lengua natural, representaciones gráficas, representación numérica, entre otros) utilizados en matemáticas, tienen que ver, particularmente, con tratar el problema cognitivo entre la distinción de objeto matemático y las diversas representaciones semióticas que pueden hacerse de él, confusión que se presenta con frecuencia en la educación.

- **En los ejercicios de ubicación de fracciones en la recta numérica, se logró establecer que, en algunos casos, las estudiantes ubican acertadamente la fracción; pero, al cambiar la forma del representante hay cambios en la comprensión y no logran relacionar un único punto en la recta para un número.**

La siguiente figura muestra el proceso desarrollado por P1 cuando ubica la fracción menos siete medios ($\frac{7}{-2}$) en el ejercicio 2.1.c de la situación.

Figura 32. Proceso desarrollado por P1 ejercicio 2.1.c de la situación



Las estudiantes ubicaron la fracción impropia adecuadamente entre la tercera y cuarta unidad negativa. Posteriormente se les entrevistó presentándoles cambios en la forma del representante para observar cómo relacionaban estos con la ubicación de la fracción que acababan de realizar en la recta numérica.

Esto se muestra en el siguiente protocolo.

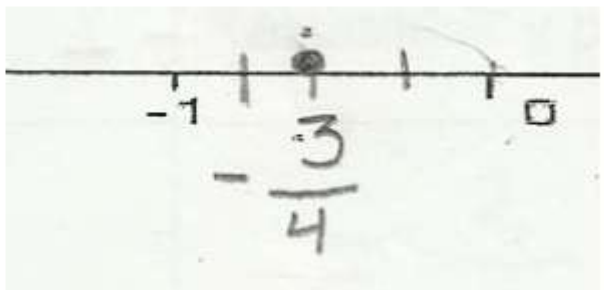
I: Si el número estuviera escrito así (escribe $\frac{-7}{2}$), ¿la ubicación sería la misma? (señala la ubicación en la recta para $\frac{7}{-2}$), ¿iría en otra parte?
E: Iría en el lado de acá, en los positivos (señala al lado derecho del cero en la recta).
I: ¿qué proceso realizarías para ubicarlo?
E: El mismo, pero en el lado de los positivos.
(Video 0679)

P1 estimó ubicaciones con sentido opuesto para los representantes $\frac{7}{-2}$ y $\frac{-7}{2}$ en la recta numérica. Se puede inferir que al ubicar el signo menos en el numerador, ($\frac{-7}{2}$) las estudiantes perciben un denominador positivo, esto origina cambios en la comprensión inicial sobre el sentido que tiene el número. Se puede concluir que un representante lo visualizan negativo (con signo menos en el denominador) y se ubica a la izquierda del cero y el que visualizan como positivo (el signo menos en el numerador) se ubica a la derecha del cero.

- **Se observó un problema de representación en la recta numérica cuando seis de once parejas que realizaron la actividad contaban las marcas que acotan las particiones, más no las particiones mismas.**

Se puede observar en la siguiente figura del taller que desarrolla P6.

Figura 33. Taller desarrollado por P6



La siguiente intervención explica el proceso que realizan las estudiantes para ubicar la fracción.

E1: Aquí decía cuatro, entonces partimos cuatro cositas y luego contamos 1, 2 y el 3. Si se hacen cuatro cositas y se cuentan las tres (señala las particiones en la recta numérica), y el menos porque está entre los negativos.
(Video 0681, 04:23 a 08:32)

Al realizar la representación de la fracción en la recta numérica, las estudiantes tienen claridad en la función que desempeña tanto el numerador como el denominador de la misma, realizan las particiones que les indica el denominador y saben que deben tomar tres porque es lo que determina el numerador; sin embargo, al realizar el conteo tienen en cuentan los puntos que acotan las partes, pero, no las partes mismas.
Esto corrobora la perspectiva de Robert Adjiage del aprendizaje alrededor del papel de la **representación y el lenguaje**, cuando concluye que: “las actividades

sistemáticas de coordinación de un registro unidimensional (recta numérica graduada) con los registros numéricos usuales de escritura decimal y fraccionaria permiten ejercer un control eficaz en el uso de estos últimos. La actividad de coordinación es determinante para la movilización de un conjunto de registros que permite la resolución de problemas que involucren racional. El registro figural (de unidades figúrales unidimensionales) presentan unos altos costos cognitivos para los estudiantes pero permite la comprensión de la expresión decimal y fraccionaria adaptada al desarrollo de competencias que son necesarias para su formación” [22]

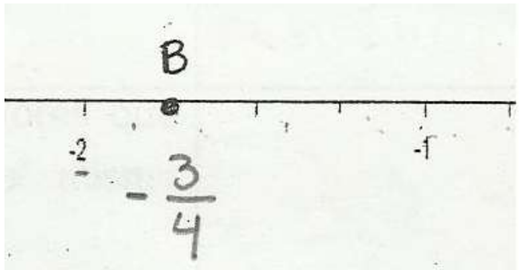
- **Otra falencia que se identificó es que la mayoría de las parejas entrevistadas identificaron la fracción mediante conteo de partes de unidades separadas. Se toma entonces como referente el segmento, desconociendo este como parte de un todo que es la recta numérica. Se desentienden de la distancia que existe entre un punto en la recta y el cero como referente fundamental para identificar a la fracción.**

Caso sustentatorio

Se puede observar en la siguiente figura de P6, cuando realiza el punto 3.2.b de la actividad.

[22] Tomado de Pontón p. 56

Figura 34. Taller desarrollado por P6 punto 3.2.b de la actividad



En este caso, la letra B se ubica en la tercera partición de las cuatro realizadas entre el menos uno y el menos dos. P6 asume que la ubicación corresponde a menos tres cuartos ($-\frac{3}{4}$,); no tienen en cuenta el segmento unidad que parte desde el cero y esto no les permite identificar la fracción menos siete cuartos ($-\frac{7}{4}$,).

- **Es frecuente poder leer un número pero no entenderlo. Esto es un problema desde el punto de vista semiótico que remite a la diferencia entre leer el representante pero no poder entender lo representado.**

En cuanto a los cambios en la comprensión, rastreados a partir de las enunciaciones se encontraron casos en que las estudiantes leyeron adecuadamente la fracción cuando se ubicaba el menos en el centro y en el numerador. Al ubicar el signo menos en el denominador de la fracción no relacionan la misma enunciación, manifestando desconocer su lectura.

Esto es lo que se observó con P6, en la siguiente intervención.

I: ¿Puedes leer estas fracciones? (señala a $\frac{6}{-8}$)

E1: Este, no sabemos

I: ¿Y este? (señala a $\frac{-6}{8}$)

E1: Menos seis octavos.

I: ¿Y esta? (señala a $-\frac{6}{8}$)

E1: Menos seis octavos

(Video 0681, 02:25)

Aunque en esta parte de la entrevista hayan podido leer de igual forma al menos dos de los representantes, esto no es condición suficiente para inferir que identificaron un mismo representado. Esto puede deberse a que si el menos está en el denominador, la lectura se torna más difícil, en tanto que si el menos se ubica en el numerador o en el centro, el signo es lo primero que aparece y entonces facilita la lectura. Un buen indicador de si se identifica o no al mismo representado es la lectura de la fracción cuando tiene el signo menos en el denominador, en la medida de que el signo es menos evidente que en las otras dos ubicaciones.

- **Algunas estudiantes no logran relacionar el numerador y el denominador de una fracción como un solo número. No conceptualizan al número como una fracción sino como números enteros, de manera aislada y sin ninguna relación entre ellos. Este error pone de manifiesto los obstáculos que surgen en el conocimiento previo de los números enteros y sus propiedades.**

En cuanto a la aplicación de las propiedades de orden en los números racionales, se encontró que varias parejas de estudiantes trataban a la fracción como dos números enteros, separados por una rayita, sin ninguna relación entre sí.

Esto se puede observar en el siguiente protocolo de P1.

I: ¿Puedes darme un número menor que menos nueve medios?

E1: ¿Es positivo?, Ah no, tendría que ser negativo. Uno sería menos diez tercios (escribe $-\frac{10}{3}$)

I: ¿Cómo encuentras ese número?

E1: Es que nos han enseñado que, en los números negativos, el número más grande es menor; entonces como diez es más grande que nueve, diez es menor y tres es más grande que dos, entonces tres es menor, porque son negativos.

(Video 0680,1:35).

P1 acomoda las propiedades de orden en los números enteros y se las aplica a la fracción. Debido a que se le pide una fracción menor a menos nueve medios, propone menos diez como numerador de su respuesta y menos tres como denominador (menos diez es menor que menos nueve y menos tres menor que menos dos). Tratan por separado al numerador y al denominador de la fracción.

- Según los planteamientos de los Estándares Básicos de Competencias como guía de orientación para determinar las competencias en matemáticas, particularmente en lo concerniente a los números racionales, para grado sexto y séptimo, se espera que los estudiantes adquieran en estos niveles una serie de competencias en el manejo operacional y en las propiedades de estos números; sin embargo de acuerdo a los resultados obtenidos en la aplicación de la situación de aprendizaje a estudiantes de grado octavo, este nivel de competencias parece estar lejos de la realidad, al evidenciar los bajos porcentajes de respuesta acertada,(ver en Anexo C).

Esto manifiesta las dificultades que presentaron los estudiantes en el manejo de los números racionales; específicamente en lo referido a sus propiedades, y al dominio en las representaciones en la recta numérica.

4.2 RECOMENDACIONES

- Puesto que el problema central que se evidenció en el tratamiento de los números racionales negativos por los estudiantes es que al cambiar la forma del representante se origina cambios en la comprensión, los docentes deben ser cuidadosos en el manejo del signo menos en la fracción y deben tener en cuenta que esta condición se presenta en los diferentes procesos que se pueden dar con los números racionales negativos, tanto operativos como de representación en la recta numérica. Se podría pensar en actividades que le permitieran al estudiante tratar con los diferentes cambios en el representante, en el sentido de las posibles ubicaciones del signo menos en el número y permitirles identificar en estas a un único representado.

- Las observaciones recopiladas a partir de las representaciones gráficas de la fracción en la recta numérica dejan ver debilidades respecto a dimensionar esta como un todo. Se recomienda, entre otras cosas, incluir actividades que ayuden a reconocer al cero como punto de origen y referente para los dos sentidos que tiene la recta numérica.

- Debido a que frecuentemente se confunde una marca que acota un espacio con una partición, o con el espacio mismo, se deben considerar actividades que le permitan al estudiante entender la diferencia.

- El maestro debe considerar estrategias didácticas que le sirvan de apoyo a los estudiantes en el aprendizaje de los números racionales y les permita particularmente sobrellevar los obstáculos originados por el aprendizaje previo de los números enteros.

REFERENCIAS

AMUD ARROYO, Ángel y VALENCIA MONTENEGRO, Ana Katherine La conversión entre representaciones semióticas en la temática de fracciones mayores que la unidad. Tesis de grado. Licenciados en Educación Básica con Énfasis en Matemática. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Pedagogía, 2008.

ARFUCH L. La entrevista una invención dialógica. Barcelona: Paidós, 1995. Adaptación de Ana María Magarit. 1995.

BIGOT, M. Apuntes de lingüística antropológica [en línea]. Argentina: UNR, s.f., [consultado febrero de 2013]. Disponible en Internet: http://rephip.unr.edu.ar/bitstream/handle/2133/1367.

CHIZNER, RAMOS J., ROMERO J., SALAZAR F., JOYA A., Y GÓMEZ, M. Hipertexto 7°. Bogotá: Santillana, 2010.

DUVAL, R. Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, 1999.

DUVAL, R. Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Cali: Universidad del Valle, 2004.

ESTRADA, W. y otros. Delta 7. Bogotá: Grupo editorial Norma, 2009.

GIMÉNEZ, Gilberto. Estudio sobre la cultura y las identidades sociales. México: Consejo Nacional para la Cultura y las Artes, 2007. 522 p.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. En: Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14, Nº 3, pp. 325-355. Granada, España: Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática, 1994.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Matemáticas. Lineamientos curriculares. Bogotá: MEN, 1998.

________. Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias Curriculares. Bogotá: MEN, 2006.

OBANDO, G. La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Cali: Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática, 1999.

________. Una empresa docente. En: Revista Ema, VOL. 8, Nº 2. Bogotá, 2003. 158 p.

PONTÓN, T. Una propuesta multi-registro para la conceptualización inicial de las fracciones. Tesis de maestría. Maestría en Educación Matemática. Cali: Universidad del Valle, Grupo de Educación matemática, 2003.

RESTREPO, G. Matemáticas fundamentales. Cali. Universidad del Valle. Departamento de matemáticas, 1996

VALOYES, E. y MALAGÓN, M. 2005. Los conceptos y procedimientos aritméticos en la prueba Censal del Grado Noveno. Pruebas Censales y formación de pensamiento matemático en la escuela. Cali: Universidad del Valle, 2005.

VASCO, C. El archipiélago de las fracciones. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, 1994.