DEL “HORROR AL INFINITO” DE LOS ANTIGUOS GRIEGOS A LA NOCIÓN DE LÍMITE MODERNO

JAZMÍN JOHANNA GARCÍA GAVIRIA

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA

PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2014

DEL "HORROR AL INFINITO" DE LOS ANTIGUOS GRIEGOS A LA NOCIÓN DE LÍMITE MODERNO

JAZMÍN JOHANNA GARCÍA GAVIRIA

Trabajo de grado presentado al Programa Académico Licenciatura en Matemáticas y Física como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

DIRECTOR

Luis Cornelio Recalde Caicedo

Universidad del Valle

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA

PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2014

NOTA DE ACEPTACIÓN

____

____

____

____

____

____

Firma del presidente del jurado

____

Firma del jurado

____

Firma del jurado

Santiago de Cali, 06 de marzo de 2014

Agradecimientos

A Dios, a mi familia y al profesor Luis C. Recalde

Por su dedicación

“Hay un concepto que es corruptor y el destructor de todos

Los demás, no hablo del mal cuyo limitado imperio

Es la ética, hablo del infinito”

Jorge Luis Borgues

Dedicatoria

A Karen Lizeth, a Gloria y Armando y a Frank

“Hay un concepto que es corruptor y el destructor de todos

Los demás, no hablo del mal cuyo limitado imperio

Es la ética, hablo del infinito”

Jorge Luis Borgues

CONTENIDO

Resumen

El objetivo de este trabajo de grado es precisar la relación entre las nociones de infinito y límite. Para ello nos apoyaremos en un análisis histórico-epistemológico, con el propósito de identificar elementos de causalidad que permitieron, en el siglo XIX, formalizar el concepto de límite. Se realizará una indagación histórica que nos permita hacer una búsqueda exhaustiva de obstáculos epistemológicos propios de la tensión entre el infinito actual y potencial en la objetivación del concepto de límite, el cual se encuentra situado en la base del análisis matemático. La principal motivación para la ejecución de este trabajo de grado proviene de la preocupación por el constante fracaso de los estudiantes en los cursos de cálculo de los primeros semestres de universidad. Partimos de la hipótesis que el primer paso para aportar en el problema de la poca comprensión de aquellos conceptos que involucran el límite es el reconocimiento de dificultades propias del infinito matemático, los cuales, mostraremos que tienen relación con el *horror al infinito"* de los antiguos griegos.

Palabras claves: Limite, infinito actual, infinito potencial, obstáculos epistemológicos, cantidades numéricas, números reales.

Abstract

The objective of this work is to clarify the relationship degree between the concepts of infinity and limit. This is supported by historical - epistemological analysis in order to identify causal elements that have, in the nineteenth century to formalize the concept of limit. Historical inquiry that allows us to do a thorough search of epistemological obstacles tension between actual infinity and potential in the objectification of the concept of limit, which is located at the base of mathematical analysis, will be performed. The main motivation for the implementation of this work comes from the grade concern at the continuing failure of students in calculus courses the first semester of college. We hypothesized that the first step to bring the problem of poor understanding of those concepts involving the boundary is the recognition difficulties of the mathematical infinite , which , having regard to show the horror at infinity "of the ancient Greeks.

Keywords: Limit, actual infinity, infinite potential, epistemological obstacles, numerical quantities, real numbers

INTRODUCCIÓN

Existen varias dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de algunos de los conceptos; los conflictos se relacionan con muchas situaciones que se presentan dentro y fuera del aula de clases, las dificultades pueden ser de los estudiantes y de los mismos docentes, sin embargo poca atención se presta a los problemas inherentes a los propios conceptos. Hay conceptos que históricamente han presentado problemas, que ha pasado mucho tiempo antes de ser concebidos y aceptados por las comunidades; sin embargo existe un concepto en matemáticas que tiene una gran dificultad de ser entendido y asimilado, que históricamente ha tenido transformaciones y no fue fácil entenderlo, fue negado por muchos y aceptados por otros y vemos como en el bachillerato y en los primeros cursos universitarios los estudiantes y los docentes no han asimilado dicho concepto este concepto es el infinito, tal como bien lo expresa el escritor argentino Jorge Luis Borges en su ensayo

> Hay un concepto que es corruptor y el destructor de todos
> Los demás, no hablo del mal cuyo limitado imperio
> Es la ética, hablo del infinito (Borges, 1975)

No es difícil argumentar que una de las causas del fracaso por parte de los estudiantes en los cursos de cálculo es el poco dominio de los conceptos fundamentales. En muchas instancias se ha demostrado que el concepto de límite constituye uno de los conceptos difíciles de asimilar. Clásicamente se atribuye a la baja formación de los estudiantes la causa del problema y muy pocas veces se examina las dificultades intrínsecas del concepto (De la Torre, 2002).

Una revisión panorámica al desarrollo histórico del cálculo nos muestra que a través de más de 2.500 años se dieron una serie de contextualizaciones y re contextualizaciones teóricas cuya trascendencia generalmente no se tienen en cuenta. Entre estos aspectos podemos señalar la estrecha relación entre el límite y los procesos infinitos. En este sentido, uno de los problemas históricos más influyentes fue la adherencia de los matemáticos a los planteamientos filosóficos de Aristóteles, quien le negaba legitimidad al infinito actual y sólo aceptaba el infinito potencial. De esta manera, se tomó una gran prevención con los procesos infinitos cuyo tratamiento se hacía de manera intuitiva a partir de procesos potenciales. Es lo que se ha denominado el "horror al infinito" en los antiguos griegos.

Teniendo en cuenta lo anterior, se plantea como hipótesis que los problemas inherentes al proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite no sólo se deben a la insuficiente preparación de los estudiantes, sino al desconocimiento de los problemas intrínsecos del infinito.

Estas consideraciones de orden educativo nos plantean un problema de orden histórico, que tiene que ver con la conveniencia de realizar una identificación de los diversos obstáculos epistemológicos que no permitieron, en su momento, la formalización de los procesos infinitos. Se trata, entonces de entender el proceso histórico de desarrollo de la noción de infinito y su relación con el concepto de límite, pues tenemos la convicción de que si caracterizamos algunos obstáculos podemos contribuir en el mejoramiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos centrales del cálculo.

En términos generales, nos moviliza el problema de la poca comprensión que alcanzan los estudiantes del concepto de límite en los primeros cursos de cálculo. Por esta la razón, en este proyecto de grado nos moveremos en la dirección de la identificación de obstáculos epistemológicos propios en el desarrollo histórico del límite. De este modo la pregunta que direcciona esta investigación es: ¿Cuáles obstáculos epistemológicos, derivados del rechazo del infinito actual, se pueden identificar en el desarrollo histórico del concepto de límite y que incidencia tienen en el proceso de enseñanza aprendizaje?

Aunque muchas investigaciones en educación matemática han centrado la atención en las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión del concepto de límite,[1] sólo algunas pocas hacen énfasis en la relación directa infinito-límite. Hay que centrar la atención sobre la importancia de la noción de límite en los cursos de cálculo; los conceptos fundamentales, tales como la derivada y la integral, son esencialmente límites. Si bien, al introducir estas nociones se llama la atención sobre su relación con el concepto de límite, rápidamente se pasa a los procesos operatorios, dejando de lado la problemática de fondo que involucra los procesos infinitos. En este trabajo de grado nos proponemos analizar la manera en que históricamente han ido apareciendo las dificultades en la construcción de la noción limite y su relación con la apropiación del infinito. Partimos de la hipótesis que en el proceso de aprendizaje y enseñanza del límite se reproduce, en mayor o menor intensidad, el horror al infinito de los antiguos griegos, por parte de los estudiantes, y de los docentes. Esto constituye un problema social importante, pues para muchos estudiantes, los primeros cursos de cálculo son la causa dela deserción o el aplazamiento. La hipótesis que se maneja en este trabajo de grado es que una de las dificultades de la comprensión y

[1] Como por ejemplo De la Torre, A. (2002) y Romero, C. (1996)

asimilación del concepto de límite tiene relación con problemas inherentes al concepto y la manera en que se fue construyendo un formalismo que diera cuenta del paso al límite.

En este sentido nos hemos planteado como objetivo determinar algunos obstáculos epistemológicos inherentes al concepto de límite, tomando como referencia la tensión histórica entre el infinito actual y el infinito potencial. Para esto se hizo la identificación de algunos momentos históricos que fueron de verdadera tensión y autores con aportes importantes los cuales sirvieron para que se hicieran avances y retrocesos en la relación limite-infinito como en el horror al infinito que fue experimentado por ellos. Analizaremos como desde la antigüedad griega hasta la modernidad con Cantor, como ya se había mencionado, los procesos no han sido lineales, que la relación limite infinito ha sido transversal al desarrollo de las matemáticas, especialmente del cálculo y la teoría de conjuntos y que lo que se ha hecho ha servido de base para los avances más modernos y la culminación con la formalización del límite que es la aceptación al infinito acabado.

En el primer capítulo se habla de la antigüedad griega como la época donde se fundamenta el origen de las ciencias. Es allí donde se generan las primeras ideas del origen del universo por arte de los filósofos presocráticos, los cuales se interesan por la búsqueda del “arje”. El primer filósofo que se preocupa por dicha búsqueda es Tales de Mileto, que ve en el agua el origen de las cosas. Anaxímenes, por su parte, considera que todo proviene del aire. Finalmente Anaximandro introduce el termino *apeiron,* que significa lo indefinido, para dar explicación al origen del universo.

En el segundo capítulo se sigue la búsqueda del arje con los pitagóricos, los cuales consideraron los números como el origen de las cosas. En la escuela pitagórica se hace presente el problema de las magnitudes inconmensurables y se realiza el análisis de la demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal con el cuadrado de lado uno y la contraposición el infinito actual y el infinito potencial. Posteriormente se analiza a los eleáticos Melisso, Parménides y Zenón. De Parménides se analiza su verso del infinito, de Melisso se analiza un fragmento donde aborda el problema de la absolutividad del ser, discutiendo que el ser es único y finito. Finalmente de Zenón se estudian las paradojas, las cuales intentan controvertir el movimiento y el tiempo negando su posibilidad. A continuación se habla de Demócrito considerado el último filósofo de la naturaleza, es decir el último que busco en la naturaleza la esencia primaria o *arje* y su teoría atomista; donde define el átomo como algo eterno e indivisible.

En el capítulo tres se estudian las concepciones de matemáticas y filosóficas de la escuela de Platón y el término infinito combinado con el mundo de las ideas eternas. Posteriormente se estudia las ideas de Aristóteles, el cual es un referente obligatorio en esta Tesis. Aristóteles, define el infinito actual, pero niega su posibilidad y existencia. Se analiza en este capítulo como se instaura el horror al infinito en la antigüedad griega y la incidencia que tiene la conclusión de Aristóteles.

El capítulo 4 se titula *La matematización del infinito*; recibe este nombre porque se analiza la incidencia que tuvieron las ideas de Aristóteles en los *Elementos* de Euclides. Se estudian algunas definiciones y proposiciones que nos evidencian la filiación filosófica aristotélica de Euclides y la forma como le da salida al problema del horror del infinito. También se analiza el aporte de Arquímedes en dos instancias: por un lado, la incidencia de las teorías atomistas en el cálculo de la medida de la parábola; Por otro lado, se describe el uso del método Exhaustivo, el cual será crucial para la cuadratura del círculo y de la parábola. Se analiza como Arquímedes utiliza el método exhaustivo para cuadrar un polígono, lo que constituye un uso intuitivo del límite y por ende el germen de la salida moderna al horror al infinito.

En el quinto capítulo hacemos un análisis sobre la concepción del infinito en la edad media. Para ello estudiamos las concepciones de Filopón y Santo Tomas. Las concepciones del infinito en la edad media son totalmente teológicas, donde Dios es la única explicación de lo que percibimos. Filopón niega la posibilidad del infinito acabado. San Tomas de Aquino acepta a Dios como el único infinito actual; para él, Dios será inicio y fin, causa y consecuencia de todo lo que sucede en el universo.

En el capítulo seis se analiza la forma como se fue incorporando el infinito en la época del renacimiento; se evidencia que en esta época resurgen las ciencias, el arte, la literatura, entre otras y el infinito se considera de dos maneras importantes: en el uso del arte, la pintura, la escultura y la arquitectura y en la matematización del infinito con los indivisibles de Cavalieri, quien hace uso de diferentes niveles de indivisibles para instituir los objetos geométricos. La suma de estos indivisibles será conocida como *ominus*, que se puede ver como la salida que da Cavalieri al problema del horror al infinito.

En el capítulo 7 se estudia, finalmente, el límite de manera operativa e intuitiva a través de la noción de infinitesimal. En esa dirección se analizan algunas producciones de Wallis, Newton y Leibniz, quienes son considerados los iniciadores del cálculo, al resolver, desde diferentes instancias, el problema de la cuadratura del círculo y dar una salida más o menos general al problema de las cuadraturas. Estos pensadores no le dieron una salida cabal al problema del horror al infinito, pues utilizaron la noción paradójica de infinitesimal.

En el capítulo 8, se analiza la salida conceptual al problema del horror al infinito en el marco del problema de la fundamentación del análisis en el siglo XIX. Se describen los aportes de Cauchy, quien le da una salida formal al horror al infinito a través del concepto de límite. Después se analiza la introducción de la definición de límite a través de épsilon-delta de Weierstrass que constituye la salida al horror al infinito sin la incidencia de la noción de infinitesimal.

A manera de conclusión, en el capítulo nueve, se identifican algunos obstáculos epistemológicos provenientes del horror al infinito y que son inherentes al concepto del límite. Estos obstáculos son reiterativos tanto en la historia de la noción de límite, como en el aula de clase. Los obstáculos siempre están presenten y no se pueden evitar, la ayuda está inmersa en la historia. Conocer la historia nos dará las bases para entender que un proceso que ha durado cientos de años no se pueden transponer en pocas clases.

1. EL INFINITO Y EL LÍMITE EN LA ANTIGÜEDAD GRIEGA

La antigüedad griega es una época importante en las matemáticas; sabemos que en ella se fundamenta, en gran medida, todo lo que conocemos en el presente. Para los antiguos egipcios y babilonios la preocupación matemática era esencialmente práctica; fundamentalmente consistía en medir y contar. A partir de los griegos, la matemática se transforma en una ciencia estructurada, desde la cual se exige un proceso demostrativo para los enunciados. Sin embargo, este paso no se dio de manera inmediata; los primeros científicos griegos empezaron por tratar de establecer teorías sobre el origen del universo, surgiendo variadas posiciones y planteamientos filosóficos. Estos variados planteamientos dieron lugar a la fundación de algunas escuelas filosóficas, las cuales conocemos por el nombre de sus fundadores: la escuela de Mileto, la escuela pitagórica, los eleáticos, la academia de Platón, el liceo de Aristóteles, entre otras. La diferencia entre cada una de estas escuelas radica en sus planteamientos sobre el "*arje*" o principio de las cosas. En este contexto podemos distinguir posiciones naturalistas, numéricas, cosmológicas y metafísicas. Por ejemplo, para Tales, el agua, constituía el origen de todas las cosas; para Anaximandro el aire. Empédocles creía que el origen de las cosas no se podía explicar a partir de un elemento, sino de cuatro: aires, fuego, agua y tierra. Sin embargo, nos interesa analizar aquellas posiciones que tienen relación con el objetivo de este trabajo, en particular aquellas que tienen relación directo con el infinito, lo limitado y lo ilimitado.

1.1 El infinito y el límite en Anaxímenes y Anaximandro

Anaximandro fue uno de los filósofos considerados de la naturaleza, trabajó y fue discípulo de Tales de Mileto, considerado como uno de los primeros filósofos científicos. En su búsqueda a la respuesta por el *arje*, aquello de lo que todo estaba compuesto, él va más allá que su maestro pues lo define y lo caracteriza con el concepto del *apeiron* (de *a:* partícula privativa; y *peras:* "límite, perímetro") que quería decir, lo indefinido lo ilimitado, aquello de lo todo estaba hecho lo que es principio de toda la realidad. Para Anaximandro el apeiron era inmortal, eterno el principio divino de lo que todo estaba compuesto y por lo cual era indestructible, semimovible, activo y divino. Es la causa entera de la generación y la destrucción de todo

> El principio (arché) de todas las cosas es lo indeterminado *ápeiron*. Ahora bien, allí mismo donde hay generación para las cosas, allí se produce también la destrucción, según la necesidad; en efecto, pagan las culpas unas a otras y la reparación de la injusticia, según el orden del tiempo (Vazquez, 2011).

Se puede ver como lo infinito para Anaximandro, el apeiron, hacía referencia a aquello que daba origen a las cosas que nos rodean y era diferente del agua, el fuego, el aire o la tierra. Al respecto Aristóteles argumentaba que el *arje* no podía ser para Anaximandro uno de los cuatro elementos pues los sentidos nos decían que un elemento no podía crear a su elemento contrario, como el agua no podía crear fuego. Sin embargo, tal vez lo más importante y relevante, era el hecho de que Anaximandro concluyó que el *apeiron* tenía que ser infinito e ilimitado para que el universo garantizara su existencia, además el *apeiron* debía estar en movimiento continuo y *eterno* para poder dar origen al universo, al cosmos y que, así mismo, el universo debe volver a él.

> El *ápeiron* (lo indefinido) es la causa de la generación y de la destrucción de todo, de donde, según dice, se originan los cielos y en general todos los mundos, que son infinitos. Afirma que su destrucción, y mucho antes, su nacimiento, se produce por el movimiento cíclico de su eternidad infinita (Toledo, 2011).

Anaxímenes, también discípulo de Tales y compañero de Anaximandro, tenía la concepción de que el *arjé*, el origen aquello de lo que lo demás estaba compuesto, era infinito e ilimitado; pero, a diferencia de su compañero y de su maestro, se separó de la idea de un *arjé* como algo no definido, señalando al *aire* como el principio generador. Es muy posible que Anaxímedes haya observado cambios en la naturaleza donde pudiera concluir que ese cambio estaba dado por la fuerza del viento como tormentas y en cuestiones tan importantes como la respiración, por ejemplo.

Anaxímenes consideraba que el *arje* era el aire, principio de todo lo existente, que era eterno, que de él todo ha salido a través de dos procesos que denomino *condensación y rarefacción.*, que creaba nubes, fuego, viento y agua. El aire, dice Anaxímenes, domina y produce una fuerza que hace que todo el cosmos se mantenga como una unidad. Es un principio de todo que está siempre en movimiento y que por lo tanto es infinito y eterno.

La concepción de Anaxímenes y Anaximandro sobre el origen se diferencian entre sí; para Anaxímenes el aire era el que tenía fuerza y poder para unir y destruir, mientras Anaximandro ve que el *apeiron*, lo indefinido, era el principio y la fuerza destructora; pero ambos sentían la gran necesidad de descubrir aquello que conformaba y daba vida a la naturaleza entera, era una concepción de tipo actual pues concebían, aunque de distinta manera, la idea de que el universo y cada componente de la naturaleza era uno, la unidad, pero compuesta de algo más que era a su vez infinito y eterno. De no ser así, el universo con lo que nos rodea, correría el riesgo de faltar por no tener materia prima con que ser construido. Es una concepción bella de buscar en el infinito la divinidad, la armonía y la perfección eterna del universo. Encontramos aquí los precursores del infinito y el continuo. Entender la unidad como síntesis del todo constituye la esencia del infinito en acto, que luego sería rechazada por los filósofos posteriores, porque la idea de que el universo como unidad estuviera conformado infinitamente de "algo" era aceptar el infinito acabado. Anaximandro hace verdaderamente metafísica, pues introduce por primera vez y de manera más profunda, el concepto de lo ilimitado con el *apeiron*. Anaxímenes parece buscar un límite para lo ilimitado de Anaximandro al escoger un elemento de la naturaleza como el aire

2. LOS PITAGÓRICOS Y LOS PROCESOS INFINITOS EN LAS MAGNITUDES INCONMENSURABLES

2.1 Límite e infinito en los pitagóricos

Eran así conocidos aquellos filósofos Seguidores de la escuela de Pitágoras, era una comunidad religiosa que tenían reglas muy concretas para quienes quisieran hacer parte de ella, como por ejemplo no comer ciertos alimentos y permanecer solteros, claramente solo eran los hombres quienes podían acceder a esta comunidad. Vivian en total comunión de bienes y todo lo que se transmitía era vía oral por lo que no es posible encontrar escritos propios y todo era manejado bajo un gran secreto. Lo esencial aquí era el estudio de la astronomía, las matemáticas, la música y filosofía. Pero es su participación en política la que posteriormente provocaría persecuciones al movimiento.

La matemática de los pitagóricos tuvo gran influencia en matemáticos posteriores; manejaban la idea de que la esencia y principio de todo el universo eran los números. En vista de que todo era entendido desde los números, la aritmética era el fuerte de los pitagóricos, a partir de ellos se desarrollaba la geometría de una manera abstracta y general. Así, aunque los babilonios habían utilizado mucho la geometría de los triángulos fueron los pitagóricos que demostraron el llamado "Teorema de Pitágoras" de manera general. La obsesión por entender y comprender todo a través de los números, les permito hacer una clasificación de números a través de ciertas características, como por ejemplo pares e impares, también hicieron otras clasificaciones que dependían solo de la geometría como son los números triangulares y cuadrados.

Los números triangulares son aquellos que, geométricamente dibujan un triángulo como se puede ver en la figura 1

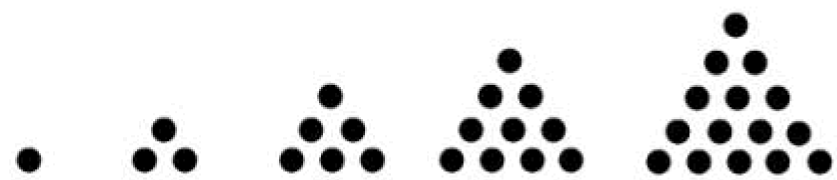

Figura 1: Números triangulares

Los números cuadrados son aquellos que se pueden expresar en forma cuadrada como se puede ver en la figura 2

Figura 2: n drados

Finalmente hay una clasificación que es extraordinaria y son los números perfectos. Los números perfectos son aquellos que la suma de todos sus divisores da el mismo números, un ejemplo de este tipo de números es el 6

$$6=1+2+3.$$

2.2 Las magnitudes inconmensurables

La crisis de los pitagóricos se da con el surgimiento de la inconmensurabilidad de las magnitudes; Si todo el universo era, en esencia números, entonces para los pitagóricos era normal que todas las magnitudes fueran medibles, es decir, comparables con otras magnitudes. Para los pitagóricos no cabía duda que dadas dos magnitudes siempre eran conmensurables, es decir: *dadas dos magnitudes A y B, se dice son conmensurables si existen números n y m tales que $nA = mB$.* Sin embargo dentro de la misma escuela pitagórica, se evidencio que no todas las magnitudes eran conmensurables., es decir que existían magnitudes que A y B tales que *para todos números n y m tales que $nA \neq mB$.* Es decir, surge el gran problema de los pitagóricos: las magnitudes inconmensurables.

Uno de los problemas donde se evidencia el problema de la inconmensurabilidad es el de la diagonal con el lado; los pitagóricos demostraron que, en un cuadrado, su lado a era inconmensurable con la diagonal d.

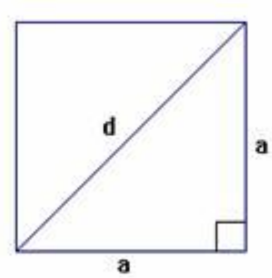

Figura 3: La inconmensurabilidad de la diagonal con un lado del cuadrado

Llamamos la atención que la demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal con el lado del cuadrado, se basa en la imposibilidad de expresar como razón de dos enteros al cuadrado, el número dos. Esto es, no existen n, m, números enteros positivos, tales que $n^2 = 2m^2$. Modernamente decimos que $\sqrt{2}$ no es un número racional. En la demostración se contraponen el carácter infinitamente divisible de las magnitudes y la divisibilidad finita de los números. Vamos entonces a analizar la demostración tomando como referencia la siguiente figura, en la cual $aB = Bb$, son los lados de un cuadrado, ab es la diagonal del cuadrado, por lo tanto ABb corresponde a un triángulo rectángulo,

La demostración se realiza por el método reducción al absurdo suponiendo que ab es conmensurable con aB. Es decir, se supone que existe un segmento L y números n y m, tales que,

$$aB = bB = mL$$

$$ab = nL$$

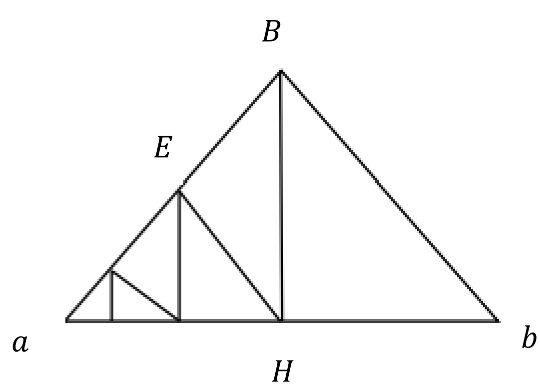

Figura 4: Triangulo abB

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$(nL)^2 = 2(mL)^2$ Donde estas expresiones se van a entender como cuadrados de lados nL y mL. Esta igualdad se puede interpretar como,

$$n^2L^2 = 2m^2L^2$$

De donde se puede concluir que

$$n^2 = 2m^2$$

Como n^2 es par, se puede demostrar que n también es par, por tanto BH corta a la hipotenusa en su punto medio H, dado que $\frac{n}{2}$ es un número, y esto demuestra que H es punto medio de ab y se puede deducir que m es par.

La clave de la demostración está en el paso siguiente: análogamente se realiza el mismo procedimiento. Se forma el triángulo aEH al cual usando la misma construcción se puede seguir el mismo procedimiento y luego al triangulo siguiente indefinidamente, sin embargo en un momento, como n tiene un numero finito de unidades (recordemos que es un número par), donde llegaría a la unidad o un número impar. Lo cual es una contradicción con lo que se afirmó anteriormente, por tanto ab no es conmensurable con aB. La magnitud alcanza un límite, que puede ser un impar o uno; lo cual es una contradicción porque la hipotenusa del triángulo que se forma por ser una magnitud es infinitamente divisiblemente pero en dicho proceso de divisibilidad, el número tiene un límite, en las magnitudes la divisibilidad no tiene límite pues la divisibilidad es un proceso potencialmente infinito, es decir una magnitud se puede dividir infinitamente. Modernamente se podría hablar de la sucesión:

$$m_1, m_2 \ldots . m_n \; con \; m_{i-1} = \frac{m_i}{2} \; porque \; m_i \; es \; par$$

La clave está en determinar que efectivamente para que esta demostración funcione, es necesario contraponer el infinito y el límite, los cuales nos muestran que no se podía omitir el uso de infinito acabado de las matemáticas. Pero los pitagóricos estarían muy lejos de aceptar el infinito en acto, la contradicción o la contraposición del límite y el infinito sería el inicio de la búsqueda de una matemática consistente introduciendo el infinito actual, porque justamente la crisis de los pitagóricos que se da dentro de la misma escuela, viene dada por el horror al infinito que experimentaban.

> Las magnitudes inconmensurables constituyen el primer antecedente de los números Irracionales. Tal vez el hecho de aparecer como entes "contradictorios" de los números "razonables", es decir, aquellos que pueden expresarse por razones de números naturales, tuvo que ver con el nombre que adoptaron cuando históricamente se pasó del concepto de magnitud al concepto de número. En otras palabras, cuando se pasó del contexto geométrico al aritmético (Recalde L. , 2012)

2.3 El infinito y el límite en la Escuela Eleática: Parménides, Melisso y Zenón

Parménides, Melisso y Zenón componen el "linaje eleático", pero el fundador fue Parménides (530 – 515 a.c), quien es señalado entre los filósofos más estimados y extraordinarios de la historia de la antigüedad griega. A lo largo de la historia se ha considerado a Parménides como el filósofo de lo finito. Su única obra fue un poema filosófico, escrito en verso épico, del cual solo se conservan en la actualidad fragmentos del mismo. Este poema se divide en dos partes: la primera es la *vía de la verdad*, donde se ocupa de "lo que es" o "ente" y expone varias evidencias que demuestran sus propiedades:

> Es ajeno y por lo tanto es inengendrado e indestructible, es lo único que verdaderamente existe —con lo que niega la existencia de la nada— es homogéneo, inmóvil y perfecto (Heidegger, 1982).

La segunda parte del poema se conoce como *la vía de las opiniones de los mortales,* donde trata de asuntos como la naturaleza y ubicación de los astros, diversos fenómenos meteorológicos y geográficos y el origen del hombre, construyendo una doctrina cosmológica completa. Pero sería la *vía de la verdad* la que tomaría un papel importante en las consideraciones de Zenón y Melisso, y tomando como propias las premisas y defendiendo los argumentos de Parménides, tratarían a su manera de demostrarlas. Posteriormente platón y Aristóteles tomarían también este escrito como los fundamentos de la metafísica occidental.

En este poema en el verso 5 el fragmento 8, Parménides afirma que para un ser el pasado y el presente carecen de sentido, solo existe el ahora, el presente, porque un ser es eterno e imperecedero, negando con esto la posibilidad de lo que "no es", porque algo que *es no puede surgir de lo que no es,* lo que "no es" no puede ni siquiera pensarse, afirma Parménides, además algo que "es" no puede convertirse en algo que "no es" por lo que un ser no puede dejar de ser, no puede perecer, haciendo de alguna manera una distinción entre lo no perdurable en el tiempo y lo eterno. Acepta que lo eterno es uno, pensamiento que más adelante también sería aceptado por Aristóteles *«lo que es, no deviene, porque ya es, y nada pudo llegar a ser a partir de lo que no es»* (Aristóteles, Fisica, 1995), es de esta manera como Parménides niega la idea de la existencia del vacío, trabajado por sus predecesores como Anaxímenes, Heráclito y los pitagóricos.

Lo que “es” es inmóvil, limitado y eterno y por fuera del uno no hay más. Consideraba que el ser era como una esfera limitada, perfecta una, como un solo ser, acabado por donde se mire por lo tanto no concibió la idea de creer que algo era ilimitado e infinito.

> Puesto que no es nacido, es y siempre era y siempre será, y no ha tenido principio ni fin, sino que es infinito (_πειρον). Si de hecho hubiese nacido, tendría un principio (pues en un cierto momento habría comenzado a nacer) y un fin (en un cierto momento habría terminado de nacer); pero, puesto que no ha comenzado ni terminado y era y será siempre, no tiene por tanto, principio ni fin. Pues, no es posible que sea siempre y no sea todo (Heidegger, 1982)

Para Parménides el ser es único y perfecto, y esta concepción de perfección que provenía de los griegos dejaba de lado lo infinito, pues lo infinito era justamente lo que no lograba su ser lo que era imperfecto. Parménides rechazaba el pluralismo y la realidad de cualquier tipo de cambio*: para él todo era una realidad indivisible e invariable y cualquier apariencia de lo contrario era mera ilusión.* Parménides insistía en todas #las maneras posibles” en la delimitación de su *ser,* excluyendo así, el infinito y exigiendo que se pensara solamente en la finitud y limitación, ideas que contradeciría su discípulo y seguidor Melisso de Samos.

Melisso (440 a.C.) Siendo discípulo y seguidor de Parménides, separa desde el inicio sus ideas de las de su maestro, afirmando que la unidad no era algo finito, como creía Parménides, deduciendo de los textos de su maestro que si el ser en verdad era finito porque más adelante se mencionaría la eternidad del mismo, asi concluyó que el ser no era infinito. Uno de los argumentos que utilizo Melisso para dar pie a su teoría era que si lo Uno tiene un comienzo, un medio y un fin, ya no sería uno, sino tres. Al observar Melisso una esfera pensaba que si era limitada y finita, lo que está fuera de ella, solo podía ser el vacío, y esto contradecía la afirmación de su maestro. Además, concluye que lo uno es incorpóreo, sin forma, puesto que si fuera corpóreo, como afirmaba su maestro, tendría principio. Una de las razones por las cuales se puede creer que Melisso abandono la doctrina de su maestro Parménides, era el hecho de que en sus textos se hacen evidentes contradicciones sobre la infinitud y la eternidad del ser, Parménides en su fragmento 8 y posteriores, plantea nociones como finitud y eternidad, limite:

> Pero inmóvil en los límites de las grandes ligaduras (μεγάλων _ν πείρασι δεσμ′ν)\ existe sin comienzo (_ναρχον) ni fin (_παυστ1ον), puesto que la génesis y la destrucción\ se pierden a lo lejos, apartados de la (fe) convicción verdadera.\ Y siendo lo mismo, en lo mismo permanece, descansa en sí mismo;\ y así permanece firme en su posición, pues la poderosa necesidad (κρατερ_ γ_ρ _Ανάγκη)\ lo mantiene en las cadenas del límite que todo lo abarca (πείρατος _ν δεσμο_σιν _χει, τό μιν _μ__ς _έργει).\ que no es posible que lo que es no sea completo (ο_νεκεν ο_κ _τελεύτητον τ_ __ν Θέμις ε_ναι:\ pues nada le falta y si no, le faltaría de todo (Gonzales, 1983).

Posteriormente menciona que:

> Pero puesto que hay un último límite, es completo y acabado por doquier, semejante a la masa de una esfera bien redonda, absolutamente equidistante a

> partir del centro, pues no es posible ser mayor de un lado o menor 1del otro para nada: pues lo que no es no puede impedirle alcanzar la homogeneidad, ni lo que es que de algún modo sea aquí o allí mayor o menor ya que es por completo intacto: pues, igual por todas partes a sí mismo, reina de una manera homogénea en los límites. (Gonzales, 1983).

Parménides habla sobre la absolutividad del ser, discutiendo lo que "es" y no puede mencionar aquello que *"no es"*, Melisso por su parte, fisura la idea parminedeana, excluyendo todo aquello que proviene de lo sensible, hacienda asi una separación entre lo sensible (mundo físico) y lo intangible (ser), y grandes rasgos la consecuencia más inmediata es, en este sentido, la aceptación de lo infinito, lo homogéneo y la eternidad del ser. Para Melisso, la noción de infinito esta inherente en el "carácter esencial del ser" mientras que en Parménides el carácter esencial era que *"el ser no deja de ser"* y fuera del ser esta la nada.

Según Aristóteles, Melisso comete un error en el razonamiento sobre el infinito. Partiendo del poema de Parménides, dice Aristóteles que un *correcto procedimiento* nos llevaría a deducir *de la condición, la consecuencia*; pero *de la consecuencia no se puede deducir la condición*: la observación aristotélica señala que es entonces el consecuente su negación se da en la negación del consecuente entonces la negación del antecedente (ley del contrareciproco) sin embargo lo que hace Melisso, según Aristóteles se puede decir que si niego el antecedente puedo obtener la negación del consecuente, lo cual es falso. Aristóteles concibe que Melisso admite que si todo lo que es generado tiene un principio, entonces lo que no es generado no tiene principio; consecuencia: si el universo no es generado, será por tanto infinito. Este razonamiento de Aristóteles deja la puerta abierta para pensar en la posibilidad de un universo infinito según Melisso.

Pero a diferencia de Melisso, Zenón de Elea (450 a.c), discípulo también de Parménides de Elea, intenta defender la tesis de su maestro, la mayor parte de su trabajo lo dedico en buscar argumentos que soportaran las tesis de la escuela eleática. Zenón **era ajeno** a un sistema matematizado, es decir, para Zenón lo importante no era axiomatizar los procesos matemáticos y menos planearse concepciones propias alusivas al infinito. A Zenón le interesaba más buscar argumentos que contradijeran la escuela monista la que negaba la existencia del cambio de su maestro yendo en contra de la escuela pluralista Sin embargo, es Zenón a través de sus paradojas, quien hace el aporte, tal vez más significativo, trascendental e importante en el tratamiento que se le da posteriormente al infinito actual y a lo que posteriormente sería la salida a las paradojas que es el límite.

Los problemas con los procesos infinitos empiezan a hacerse evidentes con las paradojas, las cuales intentan controvertir el movimiento negando su posibilidad y trabaja, al igual que Parménides, en la unicidad y la homogeneidad del ser. Concluyendo así que el universo es uno solo, el método por el cual trabaja Zenón es lo que se conoce como reducción al absurdo que consiste en afirmar una tesis y llegar por medio de argumentos válidos a una contradicción concluyendo que la tesis que tomo como verdadera será falsa.

Las paradojas de Zenón son entonces, una serie de argumentos dedicados principalmente al problema del continuo y a una relación directa entre movimiento, tiempo y espacio. En estos argumentos es posible observar un proceso de divisibilidad infinita que lleva a contradicciones a nuestros sentidos donde el movimiento es imposible, tomaremos dos “Aquiles y la tortuga” y la “dicotomía” las cuales van a ser representativas del estilo de

Zenón. La aparición de este tipo de contradicciones es uno de los elementos de causalidad del llamado “horror al infinito”.

2.3.1 **La paradoja de Aquiles y la tortuga**

Existen varias versiones de la paradoja de Aquiles y la tortuga, es talvez una de las paradojas que ha sido más controvertida por ser una modelación empírica, la cual contradice en su argumento que el movimiento es posibles. La salida al problema de la paradoja, a través de la historia, ha sido matemática y física, sin embargo Aristóteles hace una apreciación utilizando la teoría que la recta está compuesta de infinitos puntos para llegar a una contradicción:

> Aquiles tendrá que recorrer un número infinito de puntos para alcanzar a la tortuga, pero esto es imposible, porque para darle alcance tendría que transcurrir un número infinito de instantes o «ahoras» desde el momento en que partieron. Pero, de esto, que es verdad, no se sigue que un número infinito de instantes constituya un tiempo infinito, como tampoco que un número infinito de puntos constituya una extensión o líneas infinita. (Aristóteles, Fisica, 1995, pág. 234).

Esta paradoja contradice el modelo matemático del movimiento mediante un cualquier experiencia que modele nuestra experiencia empírica, puesto que los sentidos nos dicen que es innegable que el más rápido alcance al más lento. El problema de esta paradoja está en pensar que el espacio recorrido por Aquiles para llegar a la tortuga, entendido como un segmento AB, es un espacio que se compone de infinitos puntos, por estar compuesto de infinitos “Aquiles no podrá pasar de un punto a otro, porque simplemente, entre dos puntos hay infinitos puntos”. Modernamente esta paradoja tendría internamente la noción de una *serie* que es convergente, y se puede demostrar que Aquiles si alcanza a la Tortuga y la podemos analizar de esta manera: Los tiempos en los que Aquiles recorre la distancia que lo separa del punto anterior en el que se encontraba la tortuga son cada vez más y más pequeños (hasta el infinito), y su suma nos da un resultado finito, que es el momento en que alcanzará a la tortuga.

Jorge Luis Borges en su libro *Avatares de la tortuga* hace mención, como ningún otro autor, al problema del infinito que aparece en esta paradoja. En este ensayo llama la atención sobre los inconvenientes del infinito planteado en las paradojas de Zenón:

> Aquiles corre diez veces más ligero que la tortuga y le da una ventaja de diez metros. Aquiles corre esos diez metros, la tortuga corre uno, la tortuga corre un decímetro, Aquiles corre ese decímetro, la tortuga corre un centímetro, Aquiles corre ese centímetro, la tortuga un milímetro Aquiles el pies ligeros ese milímetro, la tortuga un décimo de milímetro y así infinitamente sin alcanzarla (Borgues, pág. 256).

2.3.2 La dicotomía

La paradoja de la dicotomía, otro de los argumentos presentados por Zenón nos muestra otra contradicción de aceptar el infinito en forma actual, la imposibilidad de pasar de un punto a otro porque antes de llegar a su meta, tendrá que recorrer la mitad de la trayectoria, pero antes tendrá que recorrer la mitad de la mitad de la trayectoria total y asi sucesivamente por lo que el móvil quedara en flotando en el infinito, la paradoja es controvertida por Aristóteles donde argumentara que no es posible recorrer un espacio infinito en un tiempo infinito, el tiempo, argumenta Aristóteles, no está compuesto de instantes asi como la línea recta no puede estar compuesta de infinitos puntos (indivisibles)

> El movimiento es imposible, porque, si el espacio es divisible hasta el infinito, un móvil que parte del punto A para llegar al punto B tendrá que recorrer antes la mitad de la trayectoria, pero para que eso sea posible tendrá que alcanzar antes la mitad de la mitad, y así *ad inflnitum* (pues la línea siempre es divisible por dos); tendría entonces que recorrer un número infinito de puntos, lo cual es imposible en un tiempo finito (Aristóteles, Fisica, 1995, pág. 233)

Al igual que en la paradoja de Aquiles y la tortuga, la dicotomía intenta negar la posibilidad de movimiento en cuanto a que el número de puntos que hay en la distancia entre el árbol y Zenón es infinito porque al ser infinita no podría la piedra ni siquiera salir de la mano de Zenón. Esta paradoja se presenta como una variante de la paradoja anterior.

Matemáticamente, la paradoja de la dicotomía se puede ver como una serie que modele la mitad de la mitad, de la mitad etc. Por lo tanto modernamente, tenemos

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Esta serie también es una serie geométrica, la cual presenta una variante a la anterior y se puede calcular así: Suma: $\frac{a}{1-r}$ donde r =

$\frac{1}{2}$ $(que\ es\ el\ producto\ o\ razon\ de\ incremento)$ y a=$\frac{1}{2}$, reemplazando en la serie tendríamos

Suma= $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

Entonces cuando tenemos la sucesión de sumas parciales de la mitad de la mitad de la mitad de una cantidad dada tenemos como resultado 1 que es el punto donde la piedra alcanzará al árbol, es decir, una suma de cantidades infinitas siguiendo la razón de $\frac{1}{2}$ (la mitad) es finita.

A Zenón se le hace imposible ver la recta conformada de infinitos puntos (el continuo) porque aceptar esto significaba aceptar que el infinito es acabado, es decir aceptar el infinito actual. ***El límite no se alcanza***, con Zenón se niega a la posibilidad de la existencia del límite ya que aceptarlo llevaría a contradicciones, afirmaría Aristóteles; las paradojas son el ejemplo de que aceptar el infinito acabado daría como resultado un sistema inconsistente. Este pensamiento sería algo que formara parte de la cultura matemática de los pensadores y matemáticos posteriores y trascendería por mucho tiempo.

2.4 El planteamiento del infinito de los atomistas: Demócrito

Demócrito (460 – 370 a.C.) Es considerado como el último filósofo de la naturaleza, es decir el último que busco en la naturaleza la esencia primaria o *arje*. Su pensamiento estuvo muy fundamentado en el pensamiento de Parménides y los eleáticos. Demócrito pensaba, al igual que muchos predecesores, que las cosas no cambiaban; sin embargo propuso que todo lo que éramos, todo lo que nos rodeaba estaba compuesto por unas pequeñas piezas que eran eternas e indivisibles las cuales llamó “átomos”.

Demócrito afirmaba que estos átomos debían ser eternos y que, al no dividirse en partes más pequeñas, son por lo tanto la esencia de todo lo que nos rodea, son el inicio y el fin de todo, de donde todo viene y a donde todo va, pues cuando un átomo, decía Demócrito, se unía con otro formaba todo lo que nos rodea; sin embargo cuando algo moría era porque los átomos se separaban y al unirse con otros átomos formaban otra cosa.

Fundador junto a su maestro de la escuela atomista que tenía como principio, que todo lo que nos rodea es una mezcla de átomos, que son el origen de toda la materia y que las características de estos átomos es que son eternos, indivisibles e inmutables. Son entidades infinitamente pequeñas, Que son de diferentes tamaños y formas pero que las cualidades eran las mismas, que eran impenetrables y no se podían dividir.

Es fácil entender a Demócrito, su concepción del infinito estaba dada por principios racionales, pues para él, los átomos son invisibles; acepta en su pensamiento que hay algo que ya no se puede dividir más, que la unidad era algo que se compone de infinitos átomos, de infinitos indivisibles; concepción que difiere del planteamiento de Aristóteles. Aceptar la primicia de los indivisibles como teoría, era aceptar que si se parte de un punto se puede llegar a otro, asi la trayectoria fuera infinita, es decir se encontraría magnitudes que ya no se puede dividir más, esto fue lo que intento demostrar Euclides, y que cuando junto todas esas piezas, que son infinitas, forman algo que es un ser terminado.

> Los átomos en el vacío es un rasgo inherente a ellos, un hecho irreductible a su existencia, infinito, eterno e indestructible (Novack, 1977)

Para Demócrito las partículas indivisibles constituían el principio fundamental de las cosas, las partes últimas de las cosas a lo que llamó átomo.

A manera de conclusión, Demócrito consideraba que los cuerpos continuos se componían de magnitudes indivisibles, y para establecer la medida de éste, bastaba con hallar la manera de sumar los infinitos átomos que la componían. El problema que nos plantea Demócrito y que será una cuestión nada fácil de resolver, es que si bien él cree que la unidad (el cuerpo continuo) estaba compuesto de átomos (magnitudes indivisibles) y que bastaba con sumar los infinitos indivisibles y saber cuánto mide el cuerpo; la cuestión es cómo plantear una suma infinita, pues esa era justamente el problema de lo infinitamente pequeño: si sumo algo infinitamente pequeño el resultado no será más que algo infinitamente pequeño. No es claro si Demócrito plantea o no la forma de sumar los indivisibles, pero si aporta de manera significativa en la construcción del límite.

Para Demócrito, Anaximandro Anaxágoras y los pitagóricos cada uno desde sus concepciones filosóficas matemáticas y metafísicas habría dado lo que se denominaría un principio fundamental y verían en el infinito que era justamente ese principio pues si no fuera así todo tendría un límite lo que es absurdo según la propia naturaleza en cambio como principio seria indestructible, eterno e inmutable y gobernaría todo las demás cosas.

3. EL PROBLEMA DEL LÍMITE Y EL INFINITO FILOSÓFICO

3.1 El infinito en la filosofía de Platón

Platón (427-347 a.C Discípulo de Sócrates. Tenía solo 29 años cuando Sócrates tuvo que tomas la cicuta. Este hecho lo acercaría mucho más al pensamiento filosófico y llegaría a fundar la Academia, una escuela de filosofía, matemáticas, gimnasia entre otras áreas

En inicios de su carrera filosófica, platón se interesó mucho por lo eterno y su relación con aquello que fluía. Demócrito había señalado antes que la naturaleza fluía, cambiaba, pero que todo lo que nos rodeaba era conformado por algo eterno e indivisible llamado átomo , Platón tomaría este pensamiento como raíz y plantearía que el mundo que nos rodea, el de los sentidos difiere del mundo de las ideas, lo que pertenece al mundo de los sentidos es la materia que se desgasta con el tiempo y contradice a Demócrito, afirmando que no hay algo de lo que éste conformado todo lo demás, no existen los indivisibles. Lo que está en el mundo de las ideas son moldes eternos de las cosas que nos rodea. Lo eterno era el molde de las cosas, dicho molde es eterno e inmutable.

Para Platón el término infinito significaba aquello que no lograba su ser, lo imperfecto, por eso cuando el habla de él ser como unidad, *el uno,* emparenta infinito con eternidad y así se refiere a que las cosas son perecederas en el mundo de los sentidos e imperecederas en el mundo de las idea. Para Platón el infinito era caos, Lo que es ilimitado será lo que es imperfecto y lo limitado lo finito será lo perfecto. El infinito en Platón hace referencia al No-Ser, dejándolo solo como potencia negándole actualidad. La no aceptación al infinito planteándolo como el no ser se hace evidente cuando con críticas a Zenón apoya la tesis de Parménides: el ser es uno, perfecto y eterno. El infinito carecía de medida y Platón lo resuelve acentuando su negatividad, porque para él, el infinito no denota plenitud sino imperfección y no acabamiento; en conclusión, el mal. Así cuando él se refiere a la plenitud se va a referir al infinito como aquello que no es efímero, a lo que no nace y muere.

> En este sentido, el saber será saber de eternidad –ideas– cuando llegue a ser saber de lo no ilimitado, saber de lo Uno. Aristóteles va a ser, si cabe, más contundente. Lo infinito, será declarado como no-ser; es más, va a negársele actualidad física dejándolo sólo como potencia; bien sea como infinito potencial, como lo muestra el acto de la división (v.g., la línea infinitamente divisible), o bien como infinito potencial por adición, tal y como muestra la serie numérica. En ambos casos se trata de lo infinito tal y como lo tratan los matemáticos (Ortiz, 1994)

Platón parece alejarse del infinito como problema que le concierne a las matemáticas y lo deja como una cuestión puramente filosófica. Posteriormente el neoplatonismo verá en el infinito una noción positiva, se verá el uno como algo perfecto, pues el pensamiento, que es infinito, viene el conocimiento y la inteligencia y así ver que de lo uno puede venir lo indefinido.

3.2 El infinito en la filosofía de Aristóteles: *la no aceptación del límite*

Aristóteles (383-322 a.C.), discípulo de Platón, asistió a la academia fundada por su maestro. Se interesó mucho por los procesos de la naturaleza, era un científico, igual que su padre, y vuelve al estudio del mundo de los sentidos sin dejar de lado la razón

Aristóteles dio la vuelta a lo que dejó su maestro Platón, difirió en muchos aspectos con éste dejando de lado el mundo de las ideas eternas e inmutables y estudiando los cambios de la naturaleza que fluía y se interesó mucho por trabajar el concepto del infinito, lo eterno y lo inmutable. Para él, el mundo no tiene más que lo que vemos. Parménides y Zenón concluían que el movimiento era imposible pues el paso del ser al no ser era inconcebible, Platón en cambio, dice que el mundo de las ideas es eterno no cambia pero que el de los sentidos es finito, Aristóteles por su parte, entiende como se da el paso de lo potencial a lo actual y es así como define dos tipos de infinitos, el actual y él potencial. Intenta, a diferencia de los pitagóricos, dar una solución a las paradojas de Zenón; sabía que no era tan fácil rechazar el infinito puesto que siempre llegaría a contradicciones, pero tampoco parecía sencillo aceptarlo por completo, pues también se presentarían contradicciones. Para dar solución a estas cuestiones escribe el libro *Física*, este escrito daría cuenta del pensamiento de Aristóteles en lo que al movimiento tempo y espacio concierne, plantea el continuo y la imposibilidad del infinito acabado

Aristóteles dedica los capítulos 7 y 8 del libro III de la *Física* a la demostración de la inexistencia del infinito actual, donde solo aceptaba el infinito como algo no terminado, algo que no lograba su ser y al que siempre se le puedo hallar algo fuera de él; es decir, para Aristóteles solo puede existir el infinito como potencialidad. En este libro, Aristóteles analiza cada una de las cuatro paradojas propuestas por Zenón e intenta dar la explicación, dejando de lado la idea del infinito como algo acabado por lo que sus explicaciones resultaron ser una salida tímida a la idea del infinito actual, expresando en ella lo que hemos llamado como el horror al infinito. “El corredor más rápido nunca alcanzara al corredor más lento” es así como se expresa Aristóteles de la paradoja de Aquiles y la tortuga, refiriéndose a que es un desafío de nuestros sentidos pues empíricamente no ocurre así

> Aquiles tendrá que Recorrer un número infinito de puntos para alcanzar a la tortuga, pero esto es imposible porque para darle alcance tendría que transcurrir un número infinito de instantes desde el momento en que partieron. Ahora bien, de esto, que es verdad, no se sigue que un número infinito de instantes constituya un tiempo infinito, como tampoco que un número infinito de puntos constituya una extensión o líneas infinitas. (Aristóteles, Fisica, 1995)

“El movimiento es imposible” es lo que concluye Zenón en su paradoja, es decir, si el espacio es divisible hasta el infinito, algo que parte de un punto A hasta un punto B tendrá que recorrer antes la mitad de la trayectoria, pero entonces tendría que alcanzar antes la mitad de la mitad, y así sucesivamente. Modernamente se podría ver como la sucesión $\sum \frac{1}{2n}$ En esta paradoja Aristóteles hace una diferencia entre un infinito por división y uno por añadidura y refutando a Zenón, explica que no se puede correr en un tiempo finito un número infinito de puntos, esto es: no se puede combinar el infinito actual con el infinito potencial. Aristóteles intentó superar estos problemas asumiendo que un segmento es infinitamente divisible, y este proceso de división es infinito potencial, dejando de lado la cuestión de que dicho segmento estuviera formado por infinitos puntos, planteada en las paradojas de Zenón. Este pensamiento llevo a Aristóteles a rechazar que la recta estuviera formada por puntos pues no se puede llegar de lo discreto a la continuidad, esto es separar el número de los procesos geométricos

3.2.1 El infinito actual y el infinito potencial

Aristóteles considera un conjunto finito como algo acabado y que, por lo tanto, es susceptible de enumerar. Aquello que no se puede enumerar es el infinito potencial, puesto que es algo inacabado. En contraposición con el infinito actual, el cual presenta de la siguiente manera, negando, desde la misma "definición" su existencia:

> Es imposible que los múltiples infinitos sean lo mismo; porque así como una parte de aire es aire, también una parte de lo infinito sería infinita, si lo infinito fuera una sustancia o un principio. Luego lo infinito tiene que carecer de partes y ser indivisible. Pero es imposible que un infinito actual sea así, pues tiene que ser una cantidad. Luego lo infinito existe como un atributo. Pero, si así fuera, ya se ha dicho antes que no se lo puede llamar principio, sino más bien a aquello de lo cual es atributo, como el aire o
> lo Par. De ahí que sea absurdo lo que dicen cuántos hablan a la manera de los pitagóricos, pues hacen de lo infinito una substancia y lo dividen en partes (Aristoteles, 1964, pág. 94)

De acuerdo a Aristóteles, el infinito solo puede entenderse como “aquello fuera de lo cual siempre hay algo” en contraposición a lo finito como ya se ha dicho antes Aristóteles dedico los capítulos 7 y 8 del libro III de la Física a la refutación total de un infinito en acto, aceptando solo el infinito potencial: la razón es que matemáticamente parece imposible operar con el infinito actual, pues llevaría a contradicciones; por ejemplo la proposición IX de los *Elementos* de Euclides “ Hay más números primos que cualquier conjunto de primos”, claramente se puede concluir que no existe un número primo que sea mayor a otros, el máximo; Por lo que los primos son potencialmente infinitos.

El rechazo al infinito actual se llevó a cabo hasta el siglo XIX, y es esta concepción la que llamaremos el “horror al infinito” radicado en el pensamiento aristotélico- euclidiano

3.2.2 El horror al infinito o la imposibilidad del límite

“No existe el infinito en acto” es de esta manera como se titula el libro quinto del libro III de *la Física* de Aristóteles, negando cualquier posibilidad de un infinito que se alejara de las explicaciones meramente racionales y no se puede escapar a nuestro sentidos. Aceptar el infinito en acto es aceptar que el infinito es una magnitud entonces se puede comparar y medir lo que sería absurdo, de la misma manera un individuo que es una unidad no puede ser divisible hasta el infinito lo único divisible eran las magnitudes, “si es individuo e indivisible no es infinito” (Aristoteles, 1964, págs. 605-607)

Para Aristóteles, aceptar el infinito en acto lo llevaría a contradicciones como esta: No es posible que el infinito exista como algo dotado de existencia actual, pues de ser divisible, cualquier parte de él que se tomara sería también infinita (Aristoteles, 1964) entre otras, para Aristóteles no se podía concebir la idea de que un infinito fuera mayor a otro; el infinito era un accidente ya que si se puede "contar" el infinito pues era justamente porque no era infinito y debía poseer una cantidad determinada. Sin embargo la no aceptación del infinito también llevaría a Aristóteles a contradicciones "es también evidente que de no existir el infinito, se derivan muchos absurdos, el tiempo en efecto tendría principio y fin" (Aristoteles, 1964). Fue cuando Aristóteles acepta que el infinito existe de manera potencial, existe un ser de manera potencial y existe un ser de manera actual, el infinito definitivamente no existe de manera actual, acepta que se puede definir un infinito por adicción, como por ejemplo el número; sin embargo cuando llega a las magnitudes define el infinito por divisibilidad cuando se refiere, por ejemplo, que la divisibilidad de la recta resultaba rectas y es de la misma manera potencial ya que siempre podremos encontrar algo por fuera de él y concluyendo también que las partes nunca podrán superar el todo sino que las partes siempre serán de menor magnitud. Esta conclusión sería, sin duda alguna, aquel horror al infinito que heredarían los filósofos y matemáticos posteriores.

Para Aristóteles el rechazo rotundo al infinito como algo acabado presupone que "no se puede tocar un número infinito de puntos, uno por uno, en un tiempo finito", haciendo alusión a la Paradoja de Zenón, no es aceptable que un infinito número de puntos lleguen a ser la unidad. Para Aristóteles no era lo mismo estar en contacto con algo y ser limitado, no se puede concebir entonces la idea de un límite. Si el límite existiera, dice Aristóteles, sería solamente en aquello conjuntos que tienen inicio, como por ejemplo, los naturales, y el límite seria justamente el elemento inicial, el más pequeño, pero nunca se dará que el límite éste en el infinito, pues siempre habrá uno más grande que él, por lo cual dejaría de ser límite. Mientras lo que está en contacto, es estar relacionado con otro ser y si se toca con algo es porque ese algo es finito al igual que lo primero. Esta idea Aristóteles la argumentaría en base a los que ya había mencionado Parménides. Todo este proceso explica lo que entenderemos como aquel horror al infinito en acto, la búsqueda de argumentaciones que lo negaran era el propósito más grande que tenía Aristóteles, quería encontrar a como fuera lugar un argumento sólido que le diera la razón, y lo encontraría, haciendo que este pensamiento fuera el dominante durante mucho tiempo, Euclides lo tomará como base para su pensamiento hipotético deductivo y seria el eje central para escribir su libro, *Elementos*.

4. LA MATEMATIZACIÓN DEL INFINITO EN LA ANTIGÜEDAD

4.1 El infinito y el límite en Euclides

Euclides (325-265 a.C), Considerado como padre de la geometría perteneciente a la escuela de Alejandría. Los *Elementos* de Euclides conforman uno de libros más destacados de la historia de las matemáticas. Nace como una solución al problema de sistematizar las actividades matemáticas por medio de los axiomas postulados que se presentan en él.

Los *Elementos* de Euclides conformaran uno de los aportes más significativos y más apreciados de toda la historia matemática. Uno de los grandes legados de las matemáticas griegas es la necesidad de demostrar a través del sistema hipotético deductivo; durante más de 25 siglos los *Elementos* de Euclides se constituyeron en el "paradigma del proceso demostrativo"; sin embargo no es Euclides el iniciador del método deductivo, en la filosofía de Platón y Aristóteles ya era utilizado.

Los *Elementos* responden a una necesidad teórica de la época. El infinito de Euclides es presentado de manera potencial, puesto que, aunque no hace una definición de éste, se puede ver como en sus demostraciones lo acepta como potencia; por ejemplo cuando demuestra que existen infinitos números primos o cuando, de manera primaria, en su definición I.1 nos dice que *"punto es lo que no tiene partes"*; esta definición implica *finitud* *y delimitación*. Aristóteles ya había mencionado antes que la función del punto era delimitar los extremos de un segmento y no se interesa en demostrarlo, lo toma como cierto. Igualmente la definición I.6 “las líneas son extremos de la superficies”.

Euclides Hace una gran diferenciación entre las magnitudes y los números, las entiende como de naturaleza distinta por lo que la división de una recta parece no ser un problema pues, para Euclides, las magnitudes son continuas mientras que los números son discretos y en este sentido, los números son infinitos porque no se agotan y las magnitudes se pueden dividir indefinidamente pero no existe una magnitud infinitamente pequeña, lo que hereda de la filosofía aristotélica. *Los números son divisibles en partes que no son continuas*. Es esta diferenciación la que hace que Euclides abandone por completo la teoría que acepta la existencia del infinito en acto puesto que los números son infinitos de manera potencial porque son “inagotable” siempre se puede encontrar un numero diferente generado a partir del primero; sin embargo las magnitudes no son infinitamente pequeñas, se pueden dividir hasta el infinito pero este proceso nunca llega a su final.

Observemos en algunos de sus libros las diferentes proposiciones y definiciones, algunas de estas proposiciones que dan cuenta del pensamiento que tenía Euclides acerca de la relación magnitud- infinito. Analicemos la definición IV

> **Definición 4**. Se dice que las magnitudes guardan razón entre sí cuando, al multiplicarse, puedan exceder la una a la otra.

Analicemos lo que matemáticamente nos expresa la definición 4:

Sean dos magnitudes A y B, se dice que las magnitudes guardan razón entre si cuando, por la definición 1 y 2: Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor[2] , se tiene lo siguiente

$$nA > B, \text{ Sí A es menor que B}$$

$$mB > A \text{ Sí B es menor que A}$$

Esta definición constituye una aproximación a la propiedad arquimediana, con esta propiedad Euclides está negando la existencia de las magnitudes infinitamente grandes, las magnitudes infinitamente pequeñas y la magnitud cero, puesto que si aceptan, por ejemplo que A fuese una magnitud infinitamente grande, no existiría un n tal que $nB > A$, es decir B nunca podría ser mayor que A porque A es infinitamente grande. De igual manera supongamos que A fuera infinitamente pequeña y B mayor que A, nunca se podría dar que exista un m talque $mB > A$ porque no concibe, en ese momento, operaciones entre magnitudes infinitesimales, y no era posible que una magnitud infinitamente pequeña pudiera ser mayor que una unidad.

En la definición V, observamos otro ejemplo de cómo entendía Euclides el infinito, pues aunque él nunca lo define, basta con entender que en sus definiciones hay un infinito entendido de manera potencial.

> **Definición 5.** Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, respectivamente y cogidos en el orden correspondiente.

[2] Definiciones 1 y 2 del libro V (Euclides, Elementos, 1991)

Euclides viene trabajando toda una teoría de magnitudes para contradecir que no es posible las magnitudes infinitamente grandes e infinitamente pequeñas, y aunque parece que la cultura matemática de Euclides está basada en la teoría aristotélica, hay una definición que no es consistente con su teoría es la proposición XVI del libro IV donde hace mención a lo que se conoce como el ángulo de contingencia.

Euclides lo presenta asi

> **Proposición XVI.** La recta trazada por el extremo del diámetro de un circulo formando ángulos rectos con el mismo caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo (Euclides, Elementos , 1991, págs. 311-312)

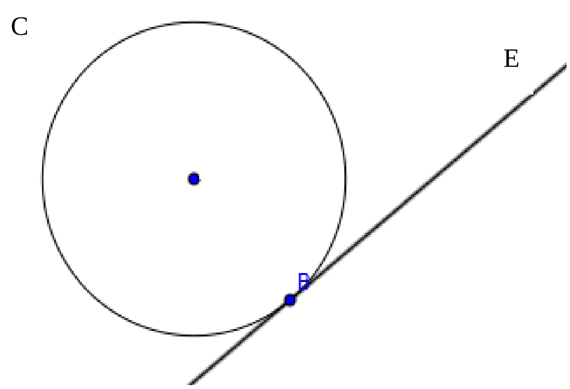

Figura 6: ángulo de contingencia

Para entender el ángulo de contingencia debemos analizarla desde el plano geométrico, para calcular el ángulo entre dos curvas dadas es necesario trazar sus tangentes y hallar el ángulo que forman entre las dos rectas trazadas, siguiendo el proceso descrito, se calcula la tangente de la circunferencia C la cual es la recta E y si se calcula a tangente a la recta E pues es la misma recta E que llamaremos E´, Euclides supone un ángulo entre $E\ y\ E´$es un ángulo que es menor que cualquier ángulo dado pero mayor a cero, es decir una magnitud infinitesimal. Es interesante ver como se hace alusión al hecho de que entre la línea recta y la circunferencia se formara un ángulo tan pequeño como se quiera, menciona Euclides, pero será diferente de cero donde lo puedo considerar mayor que un ángulo llano (plano), el ángulo de contingencia, es una magnitud que, justamente por ser magnitud, cumple con las definiciones anteriores, lo cual crea una contradicción, si ya en la definición V se hable de la no existencia de las magnitudes infinitamente pequeñas (e infinitamente grandes)

> Digo que en el espacio entre la recta AE y la circunferencia $\tau\theta A$ no se interpondrá otra recta. Digo también que el ángulo formado por el semicírculo BA y la circunferencia $\tau\theta A$ es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo y el restante comprendido por la circunferencia $\tau\theta A$ y la recta AE es menor que cualquier ángulo agudo rectilíneo (Euclides, Elementos , 1991, pág. 312)

Hace por tanto mención a que existe, modernamente hablando, un ángulo infinitesimal (infinitamente pequeño), el cual se puede operar porque es mayor que cero, pero será menor que cualquier cantidad dada en ángulo.

Se observa que esta diferenciación que hace Euclides, en el problema de la división hasta el infinito de una magnitud, es una propiedad únicamente de las magnitudes y, como ya se había indicado, las separa de los números, dejando el problema del infinito a un lado en el sentido que solo acepta el infinito, potencialmente hablando, como aquel infinito que no tiene fin, que es inacabado, aunque presente en su libro muchas contradicciones. Por ejemplo con la definición 20 del libro IX

> **Proposición 20:** Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos (Euclides, Elementos , 1991, pág. 226)

Es una proposición que establece en la línea del infinito potencial al establecer la infinitud de los primos no como un conjunto actualmente acabado, sino como un conjunto en proceso. Modernamente es que no hay un primo más grande que todos, si supongo que hay uno más grande que todos siempre puedo encontrar otro que es mayor que el que se supone, esta proposición viene amarrada a la definición de infinito potencial que se manejaba en la cultura aristotélica.

Otra de las definiciones son las presentadas en el libro X donde se trabaja la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad de las magnitudes

> **Proposición 1**. Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

> **Proposición 2**. Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la que queda nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables

Estas proposiciones se pueden ver modernamente como las primicias del límite. elas se pueden modelar como el límite de una sucesión. Otra de sus proposiciones habla de las magnitudes como razón de dos números, lo que se conoce como *la antifairesis* o algoritmo de Euclides que enlaza magnitudes con razones, estas proposiciones se heredan de manera directa de la inconmensurabilidad de los pitagóricos, la búsqueda de una razón le proporcionara a Euclides herramientas para relacionar las magnitudes con los números, pero son considerados diferentes como ya lo hemos mencionado. Algunas de estas proposiciones son:

> **Proposición 5**. Las magnitudes conmensurables guardan entre sí la misma razón que un número guarda con un número.
>
> **Proposición 6**. Si dos magnitudes guardan entre sí la razón que un número guarda con un número, las magnitudes serán conmensurables.
>
> **Proposición 7**. Las magnitudes inconmensurables no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número
>
> **Proposición 8**. Si dos magnitudes no guardan entre sí la razón que un número guarda con un número, las magnitudes serán inconmensurables.

Todas estas proposiciones contienen en su esencia la propiedad arquimediana con lo que el infinito actual no es aceptado, la conmensurabilidad de las magnitudes era un problema desde los pitagóricos y su trabajo por parte de Euclides es de tradición aristotélica. El límite en Euclides no se alcanza y será Arquímedes quien hará una aproximación al límite moderno pero de manera tímida y de tradición euclidiana.

4.2 El infinito y el límite en Arquímedes

Arquímedes (287 a.C) es uno de los matemáticos y científicos más grandes de la historia. Se le reconoce como perteneciente a la escuela de Alejandría. En vista de todas las paradojas que fueron surgiendo con el tratamiento que se le había venido dando al infinito en todas las teorías de la medida, algunos matemáticos vieron en la teoría atomista de Demócrito la salida conceptual a toda la teoría de medida, donde el infinito causa complicaciones. Sin embrago no fue posible dejar de lado las contradicciones presentadas en las paradojas de Zenón; en ellas Zenón argumentaba en contra de las teorías atomistas donde las llamaba teorías atomistas *"ingenuas"*. Es así como el método exhaustivo constituye una salida parcial a la no aceptación del infinito acabado. Arquímedes usó el método exhaustivo para calcular la medida de superficies, como salida al problema de las magnitudes inconmensurables. Mientras el trabajo de Euclides es cualitativo, la geometría de Arquímedes es cuantitativa, ya que, a diferencia de Euclides, Arquímedes busca cuantificar a las magnitudes. Además, supone formalmente dos consideraciones que serán importantes para su trabajo sobre el infinito:

1. Adopta fracciones y raíces inexactas como cantidades numéricas.
2. Establece formalmente procesos con el infinito

Será mediante el segundo aspecto que Arquímedes establecerá las primeras bases conceptuales para dar el primer paso al límite con los procesos infinitos y el continuo.

El trabajo que presenta Arquímedes se basa en el trabajo de Euclides para trabajar con su método exhaustivo, y la proposición X1 constituye la esencia del método arquimediano. Con esto, el punto de partida en el desarrollo del cálculo, se puede decir que los trabajos matemáticos de Arquímedes constituyeron los inicios del cálculo puesto que hay unas primeras respuestas a los problemas de las cuadraturas, con el cálculo de área y volúmenes y un aporte significativo en el cálculo de rectas tangentes. Estos trabajos tuvieron una influencia poderosa en las concepciones físicas y matemáticas de varias épocas. Se puede decir que con Arquímedes las matemáticas alcanzan grandes logros, pues no solo complemento la obra de Euclides, que era hasta el momento la forma de validar los razonamientos a partir de la axiomática, sino que la perfeccionó e incorporó procesos heurísticos

Será el trabajo de Arquímedes el punto de partida para el desarrollo del cálculo moderno, pues presentara una forma de solucionar problemas relacionados con el cálculo de áreas, longitudes, volúmenes y tangentes.

4.2.1 El método exhaustivo

Será a través del método exhaustivo que Arquímedes hará su gran aporte a la cuadratura del círculo, al cálculo de π y a la cuadratura de la parábola. El método exhaustivo se soporta en la proposición X1 de los *Elementos* de Euclides:

> **Proposición X1.** Dadas dos magnitudes desiguales, si la de mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su

mitad y se repite continuamente este proceso, quedara una magnitud menor que la magnitud dada. (Euclides, Elementos , 1991)

Esta demostración modernamente se puede ver como una sucesión tal que:

Sean M_0 y ε magnitudes Y M_1 , $M_2 \ldots M_n$

Entonces es la sucesión sería $M_1 < M_0$, $M_2 < M_1$, $M_{n+1} < M_n$

Por tanto existe un n tal que $M_n < \varepsilon$ lo que significa modernamente que el $\lim_{n\to\infty} M_n$ que es una sucesión convergente. Debemos llamar la atención en este punto puesto que, estamos probando que era necesario hacer uso del límite para que la demostración tuviera sentido, pero aceptar el límite era contradecir los precedentes históricos, que venían dados por Aristóteles. El trabajo de Arquímedes trató de determinar áreas y volúmenes de figuras, obteniéndolos a través de comparación. Su técnica fue la demostración por combinación del procedimiento llamado reducción al absurdo y el llamado método de exhausion.

En términos generales la demostración consiste en una aproximación de figuras geométricas conocidas inscritas y circunscritas sobre otra figura por conocer de manera que la diferencia entre una y otra sea tan pequeña como se quiera, de tal suerte que en el límite se considera es equivalente. Para entender la metodología de Arquímedes y la esencia de este método, vamos a "cuadrar" la siguiente figura

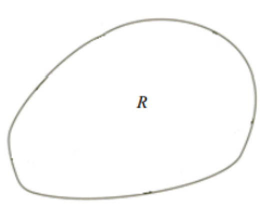

Figura 7: figura que se desea cuadrar

Tenemos entonces

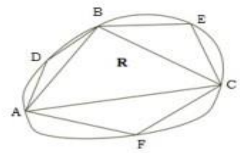

Figura 8: polígonos inscritos

Se inscriben una sucesión de figuras rectilíneas A, A2… An; de tal suerte que estas figuras crecen monótonamente. Estas figuras se escogen tal que $R - A1 \ldots R - An$ cumplan con la hipótesis de la proposición X.1 de los *Elementos.*

Esta demostración se realiza por medio del método reducción al absurdo, observemos como se presenta la demostración[3]

> Se supone R>A de lo cual R-A> 0 por lo tanto el principio de Eudoxo, existe n, tal que R-An < R-A esto significa que An >A lo cual es absurdo
>
> Se supone que R<A de lo cual A-R>0 por lo tanto la sucesión An tiene por limite A, se tiene que existe n tal que A-An < A-R y de aquí se deduce que An > R lo cual es absurdo.

Lo fundamental en esta demostración es que llegará un momento donde los polígonos inscritos se harán tan pequeños como se quieran que las diferencias entre aquellos espacios se harán infinitamente pequeñas también, por lo que la sucesión de polígono cuadrara totalmente la figura R, es decir, modernamente dicha sucesión alcanzara el imite en el infinito.

[3]La demostración es tomada de (Recalde L. , 2012)

Posteriormente, en el siglo XIV, se hace necesario establecer un método de cálculos de áreas y volúmenes sin hacer uso del método exhaustivo presentando por Arquímedes ya que este método presentaba limitaciones en figuras más elaboradas, sin embargo el método de Arquímedes no deja de ser importante, tal vez el más importante de la época, pues hace un contraste del infinito actual (infinito acabado) con la potencialidad, es la aceptación de que en el infinito el límite si existe, si se alcanza, a diferencia de lo que se venía trabajando en la cultura matemática, en especial con las paradojas de Zenón trabajada con Aristóteles y las demostraciones y conclusiones en los elementos de Euclides.

Haremos un salto histórico para entender los avances y retrocesos vividos en la edad media.

5. EL INFINITO EN LA EDAD MEDIA: UN DISTANCIAMIENTO DEL LÍMITE MATEMÁTICO

En la edad media el problema del infinito tiene una salida meramente religiosa, argumentada por la idea de la existencia eterna del mundo, en lo infinito e inmutable que es Dios o lo infinito que es el tiempo, donde ni el mundo, ni el tiempo, ni el mismo Dios, tenían principio ni fin. Estas ideas fueron expresadas por grandes pensadores cristianos y teólogos de esta época, dejando de lado la Matematización del infinito acabado, sin embargo las concepciones de los pensadores de la época nos da aportes en las culturas de los tiempos siguientes.

5.1 El infinito según Filopón

Uno de los grandes detractores de la idea del fin del mundo fue Juan Filopón de Alejandría (490-566) teólogo bizantino. Sus grandes obras hacen referencia a comentarios de las obras de Aristóteles y sobre la teoría del ímpetu. Filopón niega totalmente la idea de que el mundo pueda ser infinito, pues esto le generaba algunas contradicciones que, según él, invalidaban los argumentos del propio Aristóteles; por ejemplo, una de las paradojas que planteaba Filopón citaba así:

> Si el mundo no hubiera tenido principio, escribirá Filopón, se tendría que afirmar que el número de hombres engendrados hasta los tiempos de Sócrates tendría que ser infinito; más al agregar el número de hombres engendrados

> desde Sócrates hasta hoy se obtendría algo más grande que el infinito (Filopon, 1990)

Claramente Filopón no aceptaba la idea de que un infinito pudiese ser mayor que otro infinito, persistía la idea del horror al infinito como algo acabado donde no se es posible comparar el "tamaño" de algo que no tiene fin, los argumentos de Filopón se basaban fundamentalmente en las ideas que tenía Aristóteles de no aceptar el infinito en acto. Otra de las paradojas que se planteaba Filopón para refutar la posibilidad de un infinito mayor a otro era la siguiente:

> Cuando el Sol completa una revolución, decía Filopón, la Luna ha efectuado 12 revoluciones; suponiendo que el mundo no tuviera principio, es preciso admitir, de una manera u otra, que las revoluciones del Sol son infinitamente numerosas y que, por consiguiente, las revoluciones de la Luna representan un infinito doce veces más grande que otro infinito ¡absurdo! (Filopon, 1990)

Para Filopón no es posible que el infinito tenga una comparación con otro infinito, no solo porque no tienen fin, sino porque si era necesario compararlos, todos debían tener "el mismo tamaño", son magnitudes infinitamente numerosas, pensando en ellas, como el infinito meramente potencial. Los pensamientos y las ideas de Filopón tuvieron mucha trascendencia sobre toda la edad media y siglos posteriores.

Pero así como detractores del infinito actual, hubo también quienes estuvieron a favor de las ideas de Dios eterno y un mundo sin principio ni fin. Dios tenía que ser la explicación en esta época. Sin embargo, hubo muchos teólogos y filósofos que tratarían de unir la filosofía, la religión y la ciencia, dado que según ellos al unirlas no habría contradicciones.

5.2 El infinito en Santo Tomas Aquino

Tomás de Aquino (1224-1274) teólogo y filósofo cristiano católico. Aceptó de manera rotunda la existencia de un Dios omnipotente y supremo. Fue un gran profesor de filosofía en la universidad de París, pero su filosofía era un intento de unión de los pensamientos de Aristóteles con el cristianismo. Santo Tomas, a diferencia de Filopón, no estuvo de acuerdo con las ideas de Aristóteles y acepto la infinitud y la eternidad de Dios, negando cualquier posibilidad de la existencia del infinito actual.

Como cita a continuación

> Si se pudiesen concebir simultáneamente todos los elementos de un supuesto conjunto infinito, de manera que formasen una totalidad actualmente definida, podrían ser contados uno a uno, con lo que inevitablemente serían un número finito y se produciría una contradicción (Zellini, 2003)

Tomas de Aquino no aceptaba entonces, que la unidad o una totalidad como él la llamaba, pudieran estar conformadas de infinitos indivisibles, sino que si estos indivisibles forman una unidad es posible que los podamos contar persistiendo así en el temor a la aceptación del infinito acabado y pensar que un número infinito es una noción que carece de sentido y es de cierto modo una contradicción

Sin embargo, Santo Tomas postula la existencia de dos tipos de infinito: un infinito que depende de la forma y otro infinito que depende de la idea de materia. Esta diferenciación del infinito hace las distinciones de Dios y las ideas de Aristóteles sobre la materia.

Para Santo Tomas la esencia y la existencia de las cosas es la separación entre el infinito en acto y el infinito en potencia, Las cosas son accidentales, podrían simplemente no existir, su esencia no implica necesariamente su existencia. Esta esencia corresponde a la potencia aristotélica y la existencia corresponde con el acto aristotélico. El afirmaba que solamente Dios era esencia y existencia, únicamente "Dios es esencia y al mismo tiempo acto".

De la misma manera, nada pasa de la potencia al acto, solamente la acción de algo que ya está en acto. Santo Tomas afirmaba que "Dios es puro acto" y su existencia se prueba mediante la idea de causalidad filosófica, es decir, el motor inmóvil. Para él, la nada, nada puede producir, la nada, nada puede mover y la razón reclama un ordenante de las cosas hacia su fin, por eso, según Tomás de Aquino, tiene que existir un ser necesario como causa primera y como causa final. Ese ser es indiscutiblemente Dios como principio y como fin de todo. Según él, Dios, apartándose del pensamiento de Aristóteles, no es el ser necesario y eterno cerrado en sí mismo, sino que crea todo lo que nos rodea por amor y Él se comunica con el mundo, que es su propia creación, por amor porque en la divinidad, inteligencia y amor armonizan.

Tanto para Aristóteles como para Tomas de Aquino era claro que existía un Dios, y ese Dios lo iban a llamar la causa primera, esta causa era el inicio de todo a lo que Santo Tomas llamaría el principio de toda la creación y ese principio lo llamaría una teología natural inherente a todos los seres humanos, mientras que Aristóteles se referiría a este principio como aquel que pone en marcha todos los procesos naturales. Aristóteles pensaba en que había cadena evolutiva desde plantas, animales y seres humanos, y que la cumbre de esa escala era Dios. Era una especie de cúspide existencial lo cual se acomodaba muy bien para la teoría cristiana de Santo Tomas de Aquino. Tomas tomaría de Aristóteles todo aquello que no contradecía la teoría de la iglesia, y fue más allá, se aparta de la concepción de Platón que defendía la supremacía del alma y sostiene que forma una única substancia con el cuerpo. El hombre era la unidad finita. El hombre anhelaba siempre permanecer en ese modo de ser. Por eso, aunque sostiene la inmortalidad del alma, el destino del hombre se cumple en la resurrección donde el cuerpo y alma vuelven a ser uno.

Podemos ver, entonces, como en la edad media la idea del infinito parece cambiar el objetivo y tiene una explicación netamente religiosa, cambiando el término infinito por algunos otros términos como plenitud y eternidad. Pereciera ser que las explicaciones fuesen un abanico de posibilidades milagrosas que se separan de la posibilidad y de la explicación, separando la argumentación del mundo geométrico y empírico. Y ser este pensamiento explicado desde la perfección de Dios hasta la llegada *del Renacimiento,* donde el infinito llega ahora no como explicación religiosa ni numérica sino en la geometría y en el Arte que son el eje característico de este tiempo.

6. EL INFINITO DEL RENACIMIENTO

6.1 Los artistas del renacimiento: relación arte –espacio- infinito

Después de la edad media, época que se caracterizó por ser tardía en muchos ámbitos, entre ellos las ciencias, por el modo como fue concebida en esa época la teología, fue surgiendo el Renacimiento, donde de la mano de la cultura clásica, se introducen nuevas forma de pensamiento acerca del hombre y del mundo.

Uno de los grandes fenómenos que marcó esta época fue el surgimiento de los artistas, que hacen ruptura con los pintores medievales. El Renacimiento es una nueva forma de entender el arte, las obras ya no son controladas por el clero, sino que están bajo la protección de los príncipes y la burguesía. De esta manera se abandona definitivamente el anonimato y nace la figura del artista genial.

Apoyándose en las ideas del neoplatonismo, los artistas creyeron poder reconstruir el mundo de manera deductiva; considerando que el universo y todo cuanto existe es regido por principios matemáticos, por lo que el renacentista concibió la idea de la arquitectura como "la encarnación plástica de las proporciones universales" y trató, con su genialidad, transformar los espacios en sistemas matemáticos.; es así donde hay una relación matemática-arte, la cual alcanza un alto auge y resulta bastante evidente. Poco a poco se empieza a considerar el universo como un sistema dinámico de cuerpos en movimiento regido por las leyes matemáticas, y aunque la creencia de Dios como el origen del universo no desapareció del todo, la iglesia ya no tiene como mostrar que es el Gran Arquitecto quien diseña las ciudades y demás.

El trabajo en el arte, la música y la arquitectura de la época tampoco se alejarían de la relación finito–infinito y romper la arraigada teoría de la finitud no fue un tema sencillo en el Renacimiento, por ejemplo seguía predominando la idea fínista de Copérnico (1473-1543), quien consideraba el mundo como una esfera finita que mantiene el equilibrio del universo[4].

> Si el cielo fuera infinito y solo fuera finito en su concavidad interior, quizá con más fuerza se confirmaría que fuera del cielo no hay nada, puesto que cualquier cosa que estaría en él, sea cual sea la magnitud que ocupara, pero el cielo mismo permanecería inmóvil. Pues el argumento más fuerte para demostrar que el universo es finito es el movimiento (Copernico, 1539, pág. 110).

Pero pese a las razones teológicas y filosóficas que no dejaban postular un espacio infinito, los pensadores de la época empezaron a plantearse la posibilidad de la infinitud del espacio, pues con esta hipótesis muchos de sus problemas quedaban resueltos.

Es gracias al copernicano Thomas Digges (1546-1595) que la posibilidad de un espacio infinito entra a ser considerado

> El orbe de las estrellas fijas se extiende en altitud hacia arriba infinitamente y esféricamente siendo por ende inmóvil (…) este lugar infinito supera a todos

[4] Copérnico consideraba la esfera como la figura más perfecta del universo, que contiene a todo lo demás y la que tiene mayor capacidad (Copernico, 1539)

> los demás tanto en cualidad como en cantidad (Gyocoolea, recuperado 2013 , pág. 7).

Pero este punto de vista no tendría mayor impacto ni para el mismo Digges, pues al plantear que existía un único sol como centro del universo introduciría una paradoja del universo infinito.

Sería Giordano Bruno (1548-1600) quien aceptaría un infinito en acto del universo y proponérselo como tarea fue su gran aporte en esta época

6.1.1 El espacio infinito de Giordano Bruno

> No es necesario que el sol este en el centro del universo, de hecho no se haga necesario que exista un centro, un sistema solar copernicano puede estar situado en cualquier lado del universo infinito (Kuhn, 1957, pág. 301).

Giordano Bruno hace fuertes ataques a la teoría aristotélica, argumentado que no es posible que, basándose en las hipótesis de Aristóteles, se pueda concluir *que "el espacio está en sí mismo"* y que *"por fuera del universo no hay nada,* pues bastaría con preguntarse qué hay más allá del límite del mundo y del sol, es imposible encontrar una razón medianamente probable por la cual haya un límite del universo.

La concepción del universo es que es un espacio totalmente infinito, eterno e inmóvil, es la unidad que está compuesta de muchas cosas y factores, que al final será visto como la unidad. Bruno hace mención a la infinitud divina y la diferencia de la infinitud del universo, menciona que el universo es infinito, pero no es totalmente infinito, porque dentro de él podemos encontrar cosas que son finitas, es decir, de las infinitas cosas y mundos que tiene, cada uno es finito. Pero Dios es totalmente infinito porque excluye de si todo termino, es único y eterno.

Bruno expone sus ideas del infinito argumentando que no es necesario preguntarse por tiempo y espacio, sino sobre cuál es la naturaleza de ese espacio

> Existe un solo lugar llamado el vacío con infinitos globos en los cuales vivimos, al cual le llamamos infinito, y no hay capacidad, sentido, posibilidad o naturaleza que pueda limitarlo (Kuhn, 1957).

Sus concepciones son muy cercanas a lo que hoy se concibe como infinito en acto, la posibilidad de pensar en un universo que esté compuesto por infinitos mundos, finitos; abre la posibilidad de aceptar infinitos acabados y libera el concepto infinito de la materia. El límite ya no es un lugar o un espacio.

6.2 Los procesos infinitos

6.2.1 El cálculo de los indivisibles en Cavalieri

El matemático italiano Bonaventura Cavalieri (1598, Milán) quien fue alumno de Galileo Galilei en la época del renacimiento; siempre se interesó por las matemáticas y en especial por la geometría; su trabajo estuvo altamente inspirado por los trabajo de Euclides, y su aporte más significativo es el uso de los indivisibles. Cavalieri establece en su libro *geometría, indivicibilus continuorum nova quadam ratione promota* (1635), un desarrollo teórico de lo que se conoce como el método de los *indivisibles.* Antes del siglo XVII solo se podían hallar volúmenes de cuerpos exclusivos que ya habían sido tratados en la geometría de Arquímedes, y algunos otros por matemáticos como Kepler (1571-1630).[5] El paso del cálculo de volúmenes mediante la comparación fue uno de los catalizadores del cálculo infinitesimal.Cavalieri hace uso de diferentes niveles de indivisibles para instaurar los objetos geométricos. Por ejemplo: los puntos van a ser los indivisibles de la recta, la recta serán los indivisibles de los planos y los planos los indivisibles de los sólidos; de este modo ¿Qué entiende Cavalieri por indivisible? Las magnitudes geométricas serán compuestas de un número infinito de elementos, o de indivisibles, que serán entonces los últimos términos de la descomposición que se puede hacer de dicha figura. Será con estos indivisibles que Cavalieri aportara de manera significativa al cálculo de figuras rectilíneas planteando el principio que lleva su nombre:

> Si dos volúmenes tienen igual altura y si secciones hechas por planos paralelos a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en una razón fija, entonces los volúmenes de los sólidos también están en esa misma razón. (Recalde L. , 2012)

Podemos entender que el método de los indivisibles es un procedimiento mediante el cual Cavalieri logra establecer la medida de ciertas magnitudes visualizando la composición de una figura a partir de infinitos indivisibles de manera actual. Sin embargo Cavalieri esquiva el horror al infinito mediante la teoría de razones y proporciones euclidianas. Cavalieri no realiza la suma de la totalidad de los indivisibles componentes,

[5] Conocido por su teoría de las leyes del movimiento de los planetas en su órbita alrededor del sol

sino que establece relaciones entre estas “sumas”. Modernamente sería una forma de calcular la integral definida sin la noción rigurosa del paso al límite.

Con este principio que se fundamenta la geometría de los indivisibles y constituye uno de los catalizadores del cálculo. Históricamente, Cavalieri tiene una posición muy ambigua frente a la noción de infinito, pues mientras aceptaba que la esencia de las magnitudes no eran los indivisibles, fundamenta su cálculo de áreas y volúmenes sobre ellos y los utiliza para calcular áreas, por lo que en un escrito le aclara a galileo que los indivisibles no son más que un instrumento para el cálculo de cuadraturas y su tratamiento es independiente del continuo.

Cavalieri se adopta al concepto de infinito y continúo de Aristóteles. Intenta un tratamiento algebraico de los procesos infinitos a través del proceso de “suma de todas las líneas” que lo denomina ***ominus*,** haciendo un tratamiento aritmético y estableciendo una generalización de lo finito a lo infinito. Desde su visión, al hacer la suma a partir del proceso del *ominus* supone algo así como la convergencia de una suma de una cantidad no numerable de indivisibles. La justificación del método de los indivisibles proviene de la suposición de la existencia de la medida de una magnitud acotada. Esto involucra el límite, pero no como proceso, sino como un acto acabado que da por la finitud de las figuras en consideración. Recordemos que las figuras euclidianas son acotadas

6.2.2 El infinito y el inicio de la formalización del límite en Fermat:

Pierre de Fermat (1601-1665), fue un matemático destacado, que junto con Rene Descartes es reconocido como uno de los iniciadores de la geometría analítica. Trabajó con el cálculo diferencial antes que Newton y Leibniz y también en algebra; sin embargo sus aportes fueron más significativos en la teoría de números, estableció algunas propiedades de los números primos así como uno de los enigmas más significativos, conocido como el "último Teorema de Fermat."

Como ya habíamos mencionado, Fermat trabaja con el cálculo diferencial antes que Newton; aportó de manera significativa al problema de las cuadraturas con el método de cálculo de máximos y mínimos. Fue gracias a la invención de la geometría analítica, uno de sus grandes aportes, donde encontraríamos su título publicado en 1636 *Methodus ad disquirendam maximian at minimam*, en el cual encontraremos el primer proceso analítico para hallar máximos y mínimos, cuya aplicación se deriva directamente del cálculo de la tangente en un punto.

Para aplicar este método lo que hace Fermat es que dado un segmento AB y un punto P del segmento

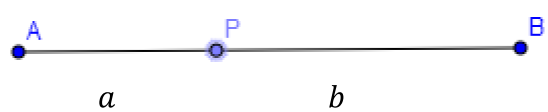

Figura 10

En este proceso llamamos la atención al hecho de que si trabajo con un *E* que al principio hace las veces de cantidad muy pequeña, pero con la que puedo operar sobre todo dividir por E, puesto que es diferente de cero pero cuando suma o resta será una magnitud que puede desaparecer a conveniencia, esto es un acercamiento a esa cantidad infinitesimal que si bien es operable y puedo dividir por ella, posteriormente es tomada como una cantidad tan pequeña que la puedo igualar a cero, estamos en el proceso casi formal de la búsqueda del limite

Se trata de encontrar que el área formada por los dos segmentos resultantes sea máxima.

Es decir si $AP = \ a\, Y\ PB = \ b$ tenemos el producto $a(b-a)$ (1)

si denotamos el signo ~ como "casi iguales" tenemos que

$a(b-a) \sim (a+E)(b- \ (a+E)$ (2)

Si se realizan las operaciones correspondientes se tiene que

$ab \ - \ a^2 \sim ab - \ aE \ + \ Eb - \ aE \ - \ E^2$ (3)

Simplificando se tiene que

$Eb \sim 2aE + \ E^2$ (4)

Si dividimos por E ambas expresiones tenemos que

$b \sim 2a \ + \ E$ (5)

$Si\ E = 0$ Entonces $b \sim 2a, es\ decir\ b = 2a$ Para que el área sea máxima

Fermat introduce el símbolo E para hacer referencia a infinito como operador

7. EL INFINITO EN LAS RAÍCES DEL CÁLCULO

7.1 Una aproximación al concepto formal del límite en Wallis

A John Wallis (1616-1703) se le conoce como el predecesor del cálculo infinitesimal. Wallis, en su obra *La aritmética de los infinitos,* los aportes de Descartes y Cavalieri fueron ampliamente trabajados y finalmente sistematizados. Estableció una teoría amplia sobre el tratamiento de algunas familias de cuadraturas. Dentro de su obra también hallamos un método significativo que le da Wallis a las potencias, ampliando la noción desde los naturales hasta los racionales. Introdujo el símbolo ∞, para denotar el infinito, en el año de 1655 publica un tratado sobre las curvas de segundo grado, el cual aporto de manera significativa a los trabajos que realizó René Descartes. El trabajo más importante de Wallis, publicado en el año de 1656, Es *Arithmetica Infinitorum,* en el cual trabajaba sobre un análisis a la series de potencias, donde los métodos analíticos de Cavalieri y Descartes fueron ampliamente sistematizados, aunque estos trabajos, posteriormente, recibirán criticas fuertes. El trabajo de Wallis tiene sus raíces en la suma de indivisibles de Cavalieri, lo que hace Cavalieri es formalizar una suma infinita de líneas, lo cual le da como resultado una superficie que desea calcular, es decir, trabaja con el infinito actual, mientras que Wallis divide el intervalo B_1B_2 en h partes iguales y la sumatoria de todas las h me da como resultado el área de la figura que se desea calcular.

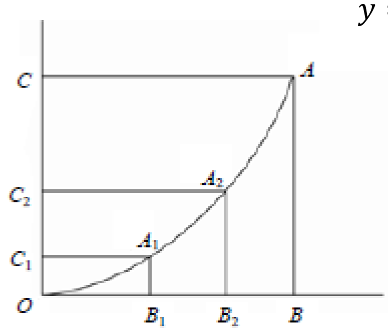

Figura 12

La clave en la demostración de Wallis está en considerar que cada rectángulo B_iB_j tiene base infinitesimal y altura A_i, ya no considera el intervalo B_iB_j compuesto de indivisibles, como sucedía con Cavalieri, sino que el intervalo B_iB_j es de magnitud infinitesimal. Ahora, obviamente, entre más pequeña sea las bases de los rectángulos, mejor será la aproximación, por tanto Wallis considera la figura OAB formada por infinidades de segmentos paralelos, donde h la base del rectángulo, si $h \rightarrow \infty$ (rectángulos de base infinitesimal), la sumatoria de todas las h me da como resultado el área de la figura. Lo que hace Wallis en esta demostración es hallar el límite de una sucesión para él una parte infinitamente pequeña de a es $\frac{a}{\infty}$, Wallis saca el cociente de los límites, cuando por medio de la igualdad $\frac{CUAD\ OAB}{CUAD\ OCAB} = \frac{1}{X}$, utiliza el denominador X como una cantidad desconocida y lo pasa a multiplicar, hallando asi el valor de X, el cual es la cuadratura de la figura $y = x^n$

Wallis da un paso fundamental a la formalización del límite, recoge el trabajo de Cavalieri y lo mejora significativamente para aportar al cálculo de la cuadratura, lo que modernamente se puede considerar como la integral

$$\int_0^a x^n = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

El aporte de Wallis daría como resultado la formalización del cálculo, el uso de los infinitesimales seria los inicios en los trabajos de Newton y Leibniz.

7.2 El cálculo de fluxiones en Newton: Los infinitesimales como elementos auxiliares de operatividad

Isaac Newton (1643-1727) es conocido como el creador del cálculo junto con Leibniz. Los dos logran establecer una teoría del cálculo introduciendo cantidades infinitamente pequeñas que funcionan como cantidades que siendo diferentes de cero aparecen y desaparecen a conveniencia Newton logra, con el proceso de interpolación, la cuadratura del círculo, además pone toda su atención en el tratamiento de series, Newton introduce el proceso de sumas infinitas y trabaja procesos infinitesimales definiendo las variables como movimiento en función del tiempo, es decir Newton no consideraba las cantidades formadas por partes sino que describen un movimiento continuo. El resultado más famoso de los desarrollos en series es conocido como el Binomio de Newton, donde descubre que los numeradores y los denominadores siguen el patron del triangulo de pascal y con el cual logra cuadrar el círculo. Sin embargo de estos resutados es sugestivo cómo Newton, a través del metodo de fluxiones, fundamenta su desarrollo teorico a partir de conceptos físicos. El continuo geométrico se hereda del continuo espacial y el continuo de la variable del continuo del tiempo. Esta interpretación física de lo geométrico le permite definir las curvas de manera parámetrica, acercándose al moderno concepto de función.

A partir de algunos procedimientos, y de la aceptación de cuadraturas para funciones polinómicas, Newton generalizó sus resultados. El cálculo, como rama autónoma empieza a emerger históricamente. Esto se nota con mayor claridad en la regla 1 de su memorable *De analysi*, donde trata el caso de exponentes fraccionarios:

$$Regla\ 1: si\ y = ax^{m/n}\ entonces\ \frac{na}{m+n}x^{mn/n}\ corresponde\ a\ su\ cuadratura$$

Al realizar la demostración del resultado anterior, Newton introduce el símbolo "*o*" con el cual representa una cantidad muy pequeña, pero diferente de cero. Esto quiere decir que puede actuar como denominador, pero cuando aparece sumando o restando desaparece, por ser tan pequeña que no adiciona nada ni sustrae nada: "*o*" simboliza un incremento *infinitesimal* como ya había mencionado Wallis. Newton introduce los infinitesimales como operadores, donde divide por ellos, pues los considera distintos de cero; observemos la demostración[6]

Sea la figura siguiente, en la cual el área de *ABD* = *z*, *AB* = *x*, *BD* = *y*. Tomamos, *BM* = *o*, *BK* = *v*, tales que el área de *BDLM* = área *BKHM* = *ov*. Que sería el área del triángulo infinitesimal

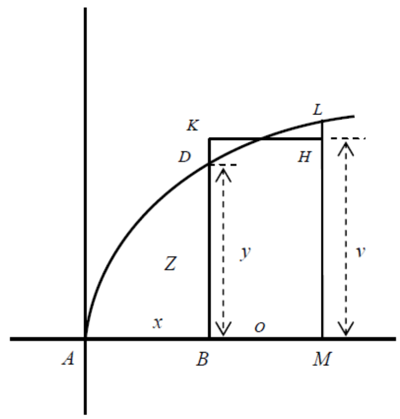

Figura 13

Veamos en esta demostración que la cantidad infinitamente pequeña aparece y desaparece a conveniencia.

Newton toma la curva $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ de donde $z^2 = \frac{4}{9}x^3$

Si se hace una variación del infinitesimal o en la variable x la cual producirá una variación *ov* en el área total, por tanto $(z + ov)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3$. Aquí o y ov son funciones como variaciones tan pequeñas como se quiera, posteriormente desarrollando los binomios y reemplazando $z^2 = \frac{4}{9}x^3$ simplificando y dividiendo los dos miembros de la expresión resultante por o, dado que el infinitesimal o es diferente de cero, quedará,

$$2zv + ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2)$$

Entonces Newton toma *BM* infinitamente pequeño, de tal manera que *v* se hace igual a *y*, y además *o* se hace igual a cero, entonces $2zy = \frac{4}{3}x^2$, De tal forma que al sustituir z por su valor inicial se obtiene, $y = x½$.[7]

Obsérvenos que es un proceso mediante el cual Newton presenta un método para hallar la razón instantánea de una variable respecto a otra. Específicamente, está mostrando que el

[7] Demostración tomada del articulo (Recalde l. C., 2012)

área puedo obtenerse mediante el proceso de hallar una razón de cambio. En este último proceso el infinitesimal o desaparece, puesto que al ser una cantidad infinitamente pequeña al sumar (o restar) no representa un cambio significativo por tanto se puede omitir. Veamos que esto es un obstáculo epistémico proveniente del horror al infinito, newton no acepta e limite por tanto debe suponer infinitesimales que manipula de tal manera que cuando ya no los necesita los hace desaparecer porque él no determina una forma de sumar dichas cantidades, Newton generaliza sus resultados tal que Para el caso general sigue los mismos delineamientos del caso particular:

Si $\frac{na}{m+n}x^{mn/n}$ = z entonces $\frac{na}{m+n} = c$ y $m + n = p$

Asi $c.x^{\frac{p}{n}} = z$ entonces $c^n x^p = z^n$ sustituyendo $x = x + o$ y $z = z + o$

Resolviendo y omitiendo los términos que por estar "o" a la larga desaparecerán, Cancelando los términos iguales $c^n, x^p y\, z^n$, tenemos: $y = ax^{m/n}$. De manera inversa si $y = ax^{m/n}$. Entonces $y = ax^{m/n}$=z.

Observemos que es un proceso mediante el cual Newton presenta un método para hallar la razón instantánea de una variable respecto a otra. Específicamente, está mostrando que el área puedo obtenerse mediante el proceso de hallar una razón de cambio.

Uno de los aspectos de gran relevancia histórico es que Newton demuestra esta proposición por el método directo, en un procedimiento que se asemeja al método épsilon-delta que usamos en la actualidad.

Cuando a Newton se le presentan críticas a los infinitesimales evanescentes, resuelve dar una solución desde la física y dota a la curva de movimiento (curva mecánica) donde introduce las fluxiones y los fluentes. Cuando a Newton se le presentan críticas a los infinitesimales evanescentes, resuelve dar una solución desde la física y dota a la curva de movimiento (curva mecánica) donde introduce las fluxiones y los fluentes

Newton busca dar solución a las críticas recibidas por Berkeley, por el uso del concepto infinitesimal, cantidades evanescentes que aparecen y desaparecen a conveniencia, utilizando la noción de infinitesimal que había sido esbozada por Wallis. Para justificar el proceso recurre a las nociones físicas de fluxiones y fluentes, interpretando las curvas como la trayectoria del movimiento de un punto, esto le da una salida al problema de los infinitesimales desde la física.

Los fluentes los entendería Newton como cantidades que varían en el tiempo y las fluxiones serian la rapidez con la que esas cantidades varían[8]. Si x y y son las fluentes entonces $\dot{x}$ y $\dot{y}$ serían las fluxiones respectivamente. Sin embargo lo que realmente le interesara a Newton será la razón entre las fluxiones $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, la cual nos da como resultado la pendiente de la tangente a la curva, modernamente, la derivada.

> Los infinitos cuando se consideran sin ninguna imitación o restricción, no son iguales ni distintos, ni guardan ninguna proporción uno con respecto al otro (Newton, 1962)

7.2 Los infinitesimales en Leibniz

Wilhelm Leibniz (1646-1716) filósofo y matemático de los siglos XVII y XVIII. Se le conoce como el último "gran genio universal" debido a que realizo contribuciones en

[8] Tomado de (Recalde l. C., 2012, pág. 23)

física, matemáticas, filosofía, política e historia, pero tal vez uno de sus más grandes aportes fue en el cálculo infinitesimal, que junto con Newton, propusieron métodos para hallar áreas bajo una curva dada; a partir de la curva define bajo la figura una sucesión de polígonos cuyas ordenadas están a igual distancia, La cuadratura de una curva corresponde a la suma de todas las ordenadas. La diferencia entre dos ordenadas consecutivas da una magnitud pequeña y corresponde aproximadamente a la pendiente de la tangente correspondiente. Entre más pequeña sea la diferencia de dos ordenadas consecutivas, mejor será la aproximación a la cuadratura de la curva. Este resultado es de gran importancia para casos particulares sin embargo no era un resultado que se pudiera aplicar de manera general a todas las curvas, por esta razón Leibniz recurre al *triángulo característico* incorporado por Pascal, el cual utiliza como soporte en la determinación de cuadraturas y tangentes como operaciones inversas

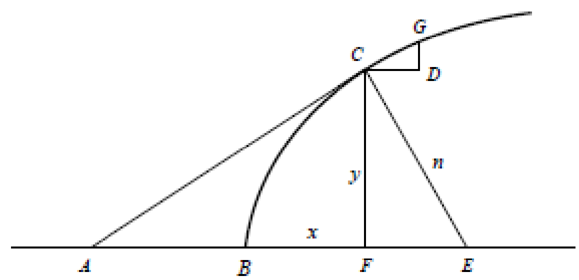

Figura 13: triángulo característico

Leibniz define el triángulo característico como el triángulo CDG (figura 13), el cual tiene sus lados infinitesimales, es decir $CD = dx$ y $DG = dy$ y donde, a través de la semejanza de triángulos, puede hallar la cuadratura de una curva.[9]

[9] Los símbolos dx y dy son introducidos por Leibniz para denotar infinitesimales como operadores, al igual que Newton. Modernamente tienen otro significado

Una de las aplicaciones del *triángulo característico,* es el método de transmutación, donde Leibniz generaliza el método de los indivisibles de Cavalieri y la relación entre la tangente y la cuadratura de curvas. Es decir Leibniz, sin alejarse de los infinitesimales de Wallis y Newton, considera las cantidades dx y dy como magnitudes infinitamente pequeñas, que define como una magnitud mayor que cero, pero menor que cualquier otra dada, es así como se convierten en operadores que se pueden sumar y dividir, aunque no haya un método establecido para ello, y cuando es necesario, funcionan como denominadores, puesto que son diferentes de cero.

Leibniz trabaja con infinitesimales, al igual que Newton; en particular en el triángulo característico, que es un triángulo rectángulo cuyos catetos corresponden a diferenciales (cantidades infinitamente pequeñas), y es así como reafirma los aportes de Wallis en el trabajo con las curvas. Además utiliza operadores, como lo hacía Newton para dar una salida al problema del infinito, los infinitesimales como operadores facilitan el cálculo de cuadraturas, donde obligatoriamente se hace necesario el uso del límite como formalizador del infinito potencial; sus trabajos no son aceptados totalmente, sin embargo abren el camino al uso de limite, que es el concepto por excelencia en la domesticación del infinito.

8. El ANÁLISIS Y LA DOMESTICACIÓN DEL INFINITO

A partir de este momento se produce un movimiento conceptual por dos rutas. En la primera ruta se intenta fundamentar los procesos infinitos. En la segunda ruta se trata de evadir el infinito mediante los métodos finitistas del álgebra.

En el año de 1797, Joseph-Louis Lagrange utiliza los infinitesimales para el estudio de las funciones algebraicas, pero en textos anteriores como *Análisis residual* intentó no trabajar con cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. Sin embargo, Lagrange no pudo generalizar su método y a finales del año 1784, en el marco de la academia de Berlín, donde era director del área de matemáticas, se abre una convocatoria a quien sea capaz de elaborar una teoría clara sobre el infinito matemático. El premio lo gana en 1786, Simón Antoine Jean L'Huillier, quien define el límite como el valor que un variable puede llegar a diferir en menos que una cantidad arbitrariamente pequeña. En esta perspectiva L'Huillier demostró los teoremas del cociente y el producto de un límite. También es L'Huillier quien introduce la notación Lím para referirse al límite. Además define la derivada como el límite del cociente de las diferencias o cociente incremental $\frac{dy}{dx}$ y la llama razón diferencial y la integral como la inversa de la razón diferencial llamada la razón integral.

8.1 Las paradojas del infinito de Bolzano

El matemático checo Bernardo Bolzano (1781-1848), empieza a construir una teoría coherente del infinito. Introduce, por primera vez, una versión conjuntista e identifica los conjuntos infinitos con los números naturales. Es Bolzano quien incorpora una definición más o menos acabada de función y clasifica las funciones en continuas y discontinuas. Además, con el teorema que lleva su nombre hace un tratamiento del infinito actual al establecer resultados con conjuntos infinitos de puntos como un todo en un intervalo acotado. En sus desarrollos matemáticos, Bolzano libera al cálculo del concepto del infinitesimal

> Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ Entonces para cada u tal que $f(a) < u < f(b)$ Existe al menos un c dentro de (a, b) tal que $f(c) = u$. [10]

Este teorema fue demostrado por Bolzano en 1817, buscando sentar el análisis bajo unos cánones de rigor propios de la actividad matemática. Su obra más conocida, *Paradojas del infinito*, contiene una discusión profunda sobre problemas de rigor del análisis y en especial sobre las contradicciones que conlleva el uso del infinito. Este libro produce un cambio significativo, pues empieza a cambiar la tradición sobre el infinito actual, planteada desde Aristóteles. En *Paradojas del infinito*, el infinito actual empieza a tener un status de concepto bien definido y es asociado directamente con los conjuntos y las magnitudes, al extremo que muchos historiadores consideran que fue tomado como referencia por Cantor, aunque él no lo certifique.

En *Paradojas del infinito*, Bolzano va a postular dos conceptos centrales sobre los que se fundamenta el infinito:

- El infinito es atributo de todos los conjuntos

[10] (Bolzano, 1851)

- El infinito admite diferentes grados, los infinitos no tiene todos el mismo tamaño. [11]

Posteriormente Bolzano se pone en la tarea de comparar y ordenar los infinitos y este es el punto de partida para establecer el inicio de la operativa del infinito.

> Cuando dos conjuntos son infinitos pueden estar en una relación tal que es posible acoplar cada miembro del primer conjunto con algún miembro del segundo conjunto de tal manera que por ninguna parte ningún miembro de los dos conjuntos quede sin acoplarse y ninguno de ellos aparezca en dos o más acoplamientos …
>
> … uno de los conjuntos puede contener al otro como una parte de sí mismo (Bolzano, 1851, pág. 64)

Es así como, en sus demostraciones sobre las cuestiones del infinito, Bolzano trabaja alrededor de la biyección como criterio para comparar conjuntos.

> Quien acepte la existencia de multiplicidades infinitas y, por lo tanto, de cantidades que también lo son, se encuentra igualmente obligado a admitir la existencia de cantidades infinitas que se distinguen entre sí de diversas maneras, de acuerdo con su magnitud de tamaño (Bolzano, 1851, pág. 49).

Para hacer explicita su teoría, Bolzano da ejemplos:

Si por ejemplo escribimos la serie de números naturales

[11] Definiciones tomadas de (Bolzano, 1851)

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots., n, n+1 \ldots\ inf$$

El símbolo S_1: $1 + 2 + 3 + \ 4 + \ 5 + \ \ 6 \ldots.\ n + \ \ n + 1 \ldots\ inf$ representará la suma de todos los números naturales

Ahora si tenemos la serie $1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0, \ldots., n^0, (n+1)^0 \ldots inf$

El símbolo S_2: $1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + 5^0 + \cdots + n^0 + (n+1)^0 \ldots\ inf$ representará la suma infinita de unidades, que va a representar el conjunto de todos los naturales. A pesar de que no parezca, asegura Bolzano, estos dos conjuntos van a hacer iguales

Sobre la operatividad del infinito, Bolzano se plantea que no es posible asignarle un número determinado a un conjunto infinito, contrario a lo que propone Cantor, negándose así la posibilidad de extender un campo de la aritmética del infinito actual.

Bolzano habla de manera amplia sobre el concepto de continuidad afirmando en su libro que si una cantidad arbitrariamente pequeña x se acerca tanto como quiere a a, no tiene que ser cero, cuando $x = a$. Igualmente una cantidad x que se incrementa al infinito cuando se aproxima a a no tiene por qué ser realmente infinita, cuando $x = a$, que es una aproximación al concepto del límite, así mismo afirma que hay cantidades en geometría que no cumplen esta *ley de continuidad* como por ejemplo la magnitud de las líneas y ángulos que determinan los perímetros y las superficies de los polígonos y poliedros.

Menciona, Bolzano, que los trabajos que se han hecho anteriormente han presentado errores, pero que, aunque han presentado defectos justificados, las reglas que se presentan para hacer cálculos con el infinito permite obtener resultados correctos, entendiendo sí que aunque muchos de sus predecesores tenían como base la intuición de que el trabajo con el infinito acabado daba resultados que parecían correctos, que esto sirvió de base para sus resultados que si bien fueron incompletos porque, afirma Bolzano, no lograron expresar sus pensamientos con toda la claridad que hubiera sido deseada,[12] fueron trabajos majestuosos e hicieron aportes al trabajo con el límite y el infinito en sus respectivas épocas.

Finalmente Bolzano presenta un método que, según él, es una manera de trabajar con el infinito justificadamente; utiliza como base el cálculo diferencial e integral. El punto importante en este método es que no acepta el cálculo de las cantidades *infinitamente pequeñas* como se ha trabajado hasta ahora, pues, afirma Bolzano, que se estaba excluyendo justamente las magnitudes que se necesitaban, las que más interesaban; lo que hace es demostrar que esas cantidades variables que van a ser dependientes tienen derivadas.

8.2 Cauchy: La domesticación del infinito a través del concepto de Límite

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) puede considerarse fundador del análisis matemático. Uno de los aportes más relevantes de Cauchy fue haber formalizado el cálculo, escogiendo definiciones y procesos de demostración que estuvieran libres de referentes físicos, geométricos o metafísicos. El primer paso substancial en el proceso de rigorización del análisis fue dado por Cauchy en sus libros *Cours d´Analyse* de 1821 y *Leçons sur le Calcul Infinitésimal* de 1823.[13] En estos dos libros de texto, basados en sus cursos dictados en la *École Polytechnique* de Paris, Cauchy termina un cuerpo teórico que contiene los conceptos base del análisis moderno: número real, función, límite, números complejos, derivada e integral.

[12] (Bolzano, 1851, pág. 68)
[13] (Cauchy, 1821)

Cauchy considera importante definir las cantidades infinitamente grande e infinitamente pequeña, por lo que el concepto de límite está directamente relacionado con el infinito, y empieza a dar una serie de definiciones, con ella formaliza el concepto de función, limite, derivada e integral, veamos cada una de ellas, comenzando por la noción de variable:

> Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente, y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable (Cauchy, 1821).

8.2.1 Formalización del Concepto límite con Cauchy

Cauchy introduce el concepto de límite como soporte del cálculo y lo toma como base para las definiciones de la derivada, la integral y la convergencia. Fue precisamente Cauchy el primero en incorporar una definición de límite, la cual aparece en su tratamiento de inecuaciones. Los trabajos de Cauchy se convierten en la plataforma para la rigorización del análisis en la escuela de Weierstrass.

> Antes de Cauchy el límite se podría considerar como una herramienta para aproximar, al colocarlo en la base de su exposición sistemática de la teoría, se

> ve enfrentado a la necesidad de elaborar su definición precisa y de establecer sus propiedades. (Recalde L. C., 2012, pág. 6)

Cauchy también define uno de los conceptos más importante en la formalización del límite como lo es el de cantidad variable.

> ***Definición de cantidad variable*:** Una cantidad variable es aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes los unos de los otros. (Recalde L. C., 2012, pág. 7)

En su libro *Curso de Análisis* de 1821, Cauchy introdujo formalmente la definición de límite como soporte y fundamento del cálculo.

> ***Definición de límite****:* Cuando los valores que va tomando sucesivamente una variable particular, se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acaban por diferir de él tan poco como queramos, entonces éste último valor, recibe el nombre de límite de todos los anteriores. (Recalde L. C., 2012, pág. 7)

Esta definición deja de lado los infinitesimales de Newton y Leibniz, incorporando nuevos elementos como la distancia; además define la derivada y la integral de una función, incorporó las nociones de cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, como cantidades variables y no como cantidades fijas, al estilo de Newton y Leibniz

Cauchy llama la atención en la importancia de relacionar las nociones de *límite* e *infinito,* es asi como incorpora la definición de cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas:

> Un *infinitamente pequeño* es una cantidad variable cuyos valores numéricos sucesivos decrecen indefinidamente, tornándose menores que cualquier número dado. En otras palabras, cuando su límite es cero. Una cantidad deviene *infinitamente grande* cuando sus valores numéricos sucesivos, que crecen más y más, de modo que rebasan cualquier número dado (Cauchy, 1821).

Lo más importante de esta definición es su concepción sobre la continuidad, y por lo tanto sobre variación numérica. Cauchy presenta su definición de función continua utilizando los infinitésimos

> ***Definición de función continua:*** La función $f(x)$ es una función continua de la variable *x* entre dos límites asignados, si para cada valor de *x* entre esos límites, el valor numérico (absoluto) de la diferencia $f(x+a) - f(x)$ decrece indefinidamente con a. En otras palabras, la función $f(x)$ será continua entre dos límites, si un incremento infinitamente pequeño de la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma (Cauchy, 1821, pág. 90).

Podríamos decir que con Cauchy, el Análisis adquiere bases sólidas, al definir los infinitesimales sin hacer alusión a cuestiones metafísica o intuitiva. Abriendo el camino para el estudio riguroso de las nociones de derivada e integral.

8.3 El estilo épsilon-delta de Weierstrass

Karl Theodor Weierstrass (1815-1897), es conocido como el padre del análisis moderno; su trabajo constituye nuestro punto de llegada, pues es quien finalmente logra introducir significativos aportes en el trabajo con el límite a partir de la técnica "épsilón-delta"y el preámbulo de los que se trabaja hoy día y es el épsilon y el delta, la formalización de los procesos potenciales y que candidatos a formalizar el infinito acabado. Los trabajos de Cauchy sirvieron de base para los desarrollos de Weierstrass, conocido como el «padre del análisis moderno». Si bien Cauchy definió limite y continuidad, no hace una distinción entre continuidad en un punto y continuidad de un intervalo por lo cual queda el camino libre para que Weierstrass haga sus aportes al análisis, como considera que la definición de continuidad es importante, realiza un amplio trabajo al respecto.

Weierstrass dio las definiciones de continuidad, límite y derivada de una función, con base en la técnica delta-épsilon que siguen vigentes hoy en día. La definición que se presenta a continuación de continuidad es la que se trabaja actualmente, su éxito es que utiliza totalmente el lenguaje simbólico evitando la frase *"la variable se aproxime al límite"* pues siempre se iban a presentar ambigüedades.

Dado cualquier ε positivo, existe un δ tal que para $0 < n < \delta$, la diferencia $f(x \pm n) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el limite de f(x) cuando $x = x_0$ (Molfino & Buendia, 2010, pág. 31)

Esta definición permite que ya no se piense en el límite como un proceso (dinámico) y se acepte el límite como un objeto (estático) superando el horror heredado al infinito. También le permitió demostrar formalmente un conjunto de teoremas que no estaban muy bien fundamentados como el teorema del valor medio, el teorema de Bolzano-Weierstrass y el teorema de Heine-Borel y realizó aportes en convergencia de series, en teoría de funciones periódicas, funciones elípticas, convergencia de productos infinitos, cálculo de variaciones, análisis complejo. Uno de los aspectos que se discute frecuentemente tiene que ver con el tipo de infinito que se maneja en el concepto de límite. Si bien se considera que a través del límite se logra formalizar el infinito potencial, es un hecho que gran parte de la teoría del análisis relacionada con los conceptos básicos parte de la consideración del infinito actual. Aunque sabemos que sólo hacia finales del siglo XIX, George Cantor establece una teoría formal del infinito actual, es un hecho que en el corazón del concepto de límite hay una aceptación implícita del infinito actual de los trabajo de Cauchy y Weierstrass pues son quien finalmente hacen aportes de manera significativa a combatir el horror al infinito en acto.

9. LIMITE-INFINITO: OBSTÁCULOS EPISTEMOLOGICOS EN EL PROCESO ENSEÑANZA APRENDIZAJE DEL CÁLCULO.

El infinito tiene un papel esencial e incuestionable en las matemáticas modernas; para el matemático y el licenciado en matemática de hoy en día es una “noción matemática” con la cual es necesario trabajar. Por tanto, llevar el infinito a las aulas de clases es el reto hoy de cada educador matemático tanto a los docentes de la básica como de la media; sin embargo no es difícil documentar que una de las causas del fracaso por parte de los estudiantes que ingresan a la universidad en los primeros cursos de cálculo es el poco dominio de los conceptos fundamentales, porque en sus instituciones educativas no se dedica el tiempo suficiente a los últimos ejes temáticos del grado undécimo como son el límite, la derivada, la integral, entre otros, sino que incluso algunas instituciones pasan por alto el área de cálculo para dedicarse a otros propósitos propios de la institución. Pero hay que llamar la atención en el hecho de que algunos docentes no “dominan” los conceptos fundamentales. Clásicamente se atribuye a la baja formación de los estudiantes y del docente la causa del problema, muy pocas veces se examina las dificultades intrínsecas y propias de los conceptos, pues aquellos conceptos que han tomado siglos su formalización y comprensión, por parte de muchos matemáticos en diferentes contextos, se pretende enseñar en sesiones de uno o dos semestres bajo presiones académicas, créditos que cumplir y tres o más áreas de conocimiento que entender. El estudiante y el docente finalmente no pueden evitar enfrentarse a los llamados obstáculos epistemológicos, aquellos que son heredados del conocimiento como tal y que no importan los esfuerzos de las partes, siempre están ahí presentes, entorpeciendo el proceso de aprendizaje por parte de los estudiantes. Esta situación es vista con preocupación por académicos, catedráticos e investigadores que, buscando la manera de aportar al problema del fracaso, se remiten a los estudios históricos y epistemológicos donde indagan formas de abordar el problema de la mejor manera. Una de las conclusiones a la que se ha podido llegar es que unos de los conceptos más difícil de asimilar es el concepto del límite, pues en su sutil definición que hemos obtenido por Cauchy y Weierstrass, hay una necesidad de entender el infinito actual y el infinito potencial, lo cual no está sucediendo, en muchos casos, ni con nuestros maestros ni con nuestros estudiantes

Remitiéndonos a una revisión panorámica del desarrollo histórico del cálculo, hemos encontrado que a través de más de 2.500 años se dieron una serie de contextualizaciones y re contextualizaciones teóricas cuya trascendencia generalmente no se ha tenido en cuenta en las aulas de clases. Entre estos aspectos podemos señalar la estrecha relación entre el límite y los procesos actual y potencialmente infinitos. En nuestro estudio histórico del infinito vemos que nace la necesidad de diferenciar y entender el infinito potencial. Estos aspectos nos remiten obligatoriamente a los inicios de las matemáticas occidentales en la antigüedad griega. En especial nos conducen directamente al llamado “horror al infinito”, que consiste en la no aceptación de los procesos infinitos acabados. Para Aristóteles todo sistema científico debía ser consistente, y la aceptación del infinito actual llevaría a contradicciones; claramente, el ejemplo está en las paradojas de Zenón, si se aceptaba que el continuo estaba compuesto como un agregado actualmente infinito de puntos es en sí mismo contradictorio. Por tanto se acepta solo el infinito potencial, aquel que se da en un proceso sin fin.

Es importante llamar la atención en el hecho que Arquímedes, en su método exhaustivo, basado en la proposición X.1 de Euclides, calcula algunos límites; pero, de ningún manera, podemos decir que Arquímedes defina tal noción. Sin embargo, el método permite calcular con infinitas figuras, inscritas o circunscritas, algunas cuadraturas. Si analizamos la proposición X.1, podemos afirmar que se están dando condiciones, tipo épsilon-delta, para que el límite de una sucesión converja a cero.

Los matemáticos griegos concibieron el método exhaustivo para encontrar la cuadratura del círculo. Este método se apoya en la suposición de que la diferencia entre la medida de un círculo y uno de sus polígonos inscritos puede ser tan pequeña como se quiera; todo depende del número de lados que contenga ese polígono. Se trata, justamente, del cálculo de una sucesión que converge a cero.

Un hecho poco comentado en los libros típicos de Historia de las matemáticas es que en los *Elementos*, Euclides incorpora en la proposición XVI, analizada en el primer capítulo, el llamado ángulo de contingencia; es un ángulo formado entre una circunferencia y su recta tangente en un punto determinado. Es un ángulo tan pequeño como se desee, pero mayor que cero. Con esta proposición encontramos una magnitud infinitamente pequeña, un ángulo que siendo mayor que cero, es menor que cualquier ángulo dado. Euclides no utiliza este ángulo en ninguna operación geométrica, simplemente lo enuncia como una propiedad de la tangente a una circunferencia.

En la edad media se dan cambios sustanciales en la forma de hacer ciencia. El orden escolástico impone condiciones y métodos. La discusión sobre el infinito pasa a un nivel teológico. Desde la teología se planteaba que si podía haber "algo" que podía denominarse infinito acabado ese algo debía ser únicamente Dios. Al utilizar palabras como eterno, omnipotente, perdurable, entre otras denominaciones, para el infinito, se designaban propiedades de la divinidad. De esta forma, se podría decir que en la cultura matemática perduraba la idea aristotélica de la no existencia del infinito actual en la Matemática.

En el renacimiento resurge la necesidad de indagar sobre el infinito matemático, en especial con el estudio del espacio y el universo infinito. Los artistas de la época utilizaron las matemáticas para hacer florecer y embellecer sus obras de arte; en este sentido uno de grandes aportes fue la noción de *punto de fuga*, mediante el cual se daba perspectiva a las pinturas. También hay un resurgir de la discusión filosófica respecto al infinito, en particular con Giordano Bruno, el espacio, el lugar y posición que ocupamos en nuestro universo es un importante objeto de estudio, después de las teorías copernicanas las cuales afirmaban la centralización del universo. Bruno afirma que el sol era solamente una estrella que hacía parte de nuestro universo infinito que el sol no era el centro y que el universo no tendría por qué tener un centro, esta afirmación le da otro punto de vista al límite entendido desde las matemáticas, las matemáticas parecen resurgir después de un receso medieval.

Matemáticamente, en este periodo, la indagación sobre el infinito resurge en los trabajos de Cavalieri, quien establece un formalismo para tratar el infinito actual en el marco de cuadraturas y curvaturas. A partir del denominado *Principio de Cavalieri* se hace posible la comparación entre dos figuras utilizando principios atomistas. Cavalieri formaliza esta suma, del latín $omninus$, fijando unas reglas operativas muy particulares, obtenidas de la generalización de las operaciones finitas. A través del $Ominus\ x$, que se traduce: súmese continuamente "todos los objetos x", Cavalieri esquiva el horror al infinito de los antiguos para incorporar sumas actualmente infinitas camufladas en la teoría de razones y proporciones, pues el proceso se efectúa a partir de comparaciones sucesivas que le permiten obtener resultados en cascada; esto es, de dimensiones inferiores a dimensiones superiores. El método de los indivisibles fracasa por dos razones fundamentales: (1) no se puede extender para todos los casos, pues los procesos operativos algebraicos son limitados. (2) La falta de un sustento formal para los indivisibles y el $ominus$.

Con Wallis se da un paso trascendente que lleva de los indivisibles a los infinitesimales; concepto controversial que se convertirá en una herramienta conceptual en los trabajos de Newton y Leibniz. Con el proceso del uso de los infinitesimales estamos muy cerca del concepto de límite. Sin embargo, críticos de la talla de Berkeley, entendieron que la salida a través de los infinitesimales constituía una falsa salida al problema del horror al infinito planteado por los antiguos.

Sería Cauchy quien daría ese gran paso de entender el límite no como una herramienta, sino como un concepto a través del cual se formalizaban los proceso potencialmente infinitos, como salida al "horror al infinito" de los antiguos. De esta manera, los infinitesimales, cantidades actualmente infinitas, se definen con base al límite, en un proceso formal que no lleva a las contradicciones planteadas por Aristóteles, pero en su línea de desarrollo filosófico.

Tal como lo se ha mostrado en (Arbeláez G. I., 2010) sin bien el límite constituye una salida conceptual a la implementación del infinito potencial, como telón de fondo aparee el infinito actual. Concretamente la instauración del infinito actual, por parte de Cantor, tuvo como antecedente importante la implementación del concepto de límite. En otras palabras los procesos infinitos, actuales y potenciales, se encuentran dialécticamente relacionados

9.1 El horror al infinito en el siglo XXI

Son muchas las investigaciones en la actualidad que han tomado como punto de referencia el concepto de límite atendiendo a las dificultades de los estudiantes en los primeros cursos de la universidad. Muy pocas de éstas hacen referencia directamente a la tensión entre el infinito actual y el infinito potencial. Sin embargo, hemos documentado algunos trabajos que de alguna manera serán utilizados como punto de referencia en nuestra investigación

En su tesis *doctoral Estudio micro genético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso*,[14] César Delgado (1998) realiza un estudio de caso con relación a la secuenciación y control de obstáculos y dificultades conceptuales, con el fin de desarrollar los esquemas conceptuales de los alumnos que dan cuenta de las definiciones matemáticas de límite y continuidad. El objetivo de este trabajo es estudiar el problema de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad, en el caso de un primer curso de cálculo a nivel Universitario, para proponer explicaciones que ayuden a comprender las fuentes de la problemática y, así encontrar soluciones a las dificultades que se presentan en la enseñanza de estos conceptos fundamentales del cálculo. La conclusión principal es la posibilidad de establecer situaciones didácticas que permitan controlar la evolución conceptual y establecer una relación eficaz entre aprendizaje y desarrollo cognitivo.

En la tesis doctoral *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión* de Rosa Elvira Páez Murillo (2004)[15] se pretende evidenciar que las nociones fundamentales del cálculo (derivada e integral) están definidas en términos de la noción de *límite*. Por lo tanto, es primordial entender este último para la comprensión de los conceptos en cálculo. Un problema significativo, en el quehacer académico de profesores y para la propia investigación en

[14] (Delgado, 1998)
[15] (Paez, 2004)

educación matemática, es el afrontar que un considerable número de alumnos no alcanzan los rendimientos esperados en este tipo de asignaturas. El problema de su bajo rendimiento académico se refleja en los resultados obtenidos en pruebas internacionales como el TIMSS (1997), o en los resultados que ofrece la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2000). Lo anterior es un simple indicador para procesos que busquen mejorar la educación.

Una pregunta a responder es ¿qué factores intervienen en los procesos de enseñanza que mejoran el aprendizaje de los estudiantes? Con la metodología, que se realiza a través de entrevistas, se pretende dar cuenta de la idea que tiene el estudiante del concepto de límite y la conclusión general del trabajo es las dificultades encontradas por los estudiantes en la adquisición del concepto de límite se relacionan directamente con el manejo de lo finito ilimitado. Este trabajo aporta al problema pues tiene como hipótesis la existencia de una tensión entre lo actual y lo potencial que en general no es considerado.

Sin embargo, en estos trabajos, la identificación de los obstáculos epistemológicos no es el objetivo principal por lo que hace parte de nuestro objetivo y que hace que nuestra tesis deferente deseando hacer un aporte al proceso enseñanza aprendizaje

9.2 Identificación de algunos obstáculos epistemológicos propios del concepto de límite.

En este largo proceso histórico y epistemológico, hemos identificado algunos obstáculos epistemológicos propios del concepto de límite, los cuales, ahora y en la antigüedad, han causado dificultad para la comprensión de los conceptos fundamentales y no han permitido que se formalice el infinito. Esto hace que la enseñanza del cálculo sea uno de los desafíos de la actualidad y la preocupación de docentes e investigadores, no solo de las carreras en matemáticas y licenciaturas, sino a afines, como ingeniería entre otras. En este sentido vamos a ir enunciando cada uno de ellos y analizando algunas de sus consecuencias en la enseñanza y el aprendizaje del límite.

- Tal vez uno de los más importantes sea la definición que se tiene de límite en la cotidianidad, por el inconveniente justamente de utilizar el término "límite", el cual es entendido como una barrera, muro, pared, o un respaldo final de algo, una línea real o imaginaria de un lugar o espacio; Este obstáculo lleva a que se experimenten contradicciones como las que se dan con las paradojas de Zenón. Esta definición intuitiva que tienen los estudiantes del bachillerato y primeros semestres de universidad, no le permiten comprender el infinito acabado, es herencia propia del horror al infinito de la antigüedad.

- Otro de los obstáculos es el de generalización, consistente en llevar las propiedades de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos; pensar, por ejemplo, que las operaciones que se cumplen en lo finito se cumple en lo infinito sin comprender que lo que se está llevando a cabo es justamente el límite como formalización del proceso infinito. Un ejemplo en esta dirección se da cuando en la clase de cálculo se presenta la operación $\infty + \infty = \infty$; aquí los estudiantes creen que están aplicando procesos de sumar infinitos o tratar a ∞ como una cantidad numérica, cuando lo que se está aplicando es el límite de una función por ejemplo dada asi

$$\lim_{x\to\infty} x + x^2 = \lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty + \infty = \infty$$

El procedimiento son aplicaciones de las propiedades de los límites y lo se debe comprender es ¿qué sucede en el infinito?, potencialmente hablando. La salida es comprender que el límite formaliza la potencialidad de los procesos infinitos, el resultado no es una magnitud sino un proceso acabado.

- Finalmente uno de los obstáculos más reiterativo es el uso de las expresiones *"infinitamente grande"* e *"infinitamente pequeño"* Debido a que intenta ligarse con cuestiones cotidianas, ya que concebir algo que sea infinitamente pequeño tiene otras connotaciones, como por ejemplo el átomo, el cual es considerado como algo "infinitamente pequeño", como ya se había mencionado en Demócrito y el universo es considerado como algo "infinitamente grande"; en este sentido sugiere que sigue siendo lo infinitamente grande considerado como un infinito potencial. En resumen, las nociones de infinitamente grande e infinitamente pequeño siguen siendo muy empíricas; los jóvenes parecen no estar preparados para enfrentar los trabajos de los transfinitos de George Cantor, los cuales se pueden considerar como la formalización del infinito actual, pues ni siquiera lo potencial del infinito ha sido superado.

9.2.1 El horror al infinito: un obstáculo en sí mismo

El temor a aceptar procesos acabados es una experiencia que sienten estudiantes, docentes e investigadores en los estudios del cálculo, es una herencia griega y moderna, porque la experiencia empírica parece decirnos lo contrario, la no aceptación de los procesos infinitos acabados van en contra de nuestros sentidos y se puede considerar en sí mismo un obstáculo propio de la noción, porque en todo los cursos de cálculo en los primeros semestres hay una negación por dejar atrás los procesos potencialmente infinitos y aceptar los actualmente infinitos. Desde los primeros grados de escolaridad vemos como, a veces de manera inconsciente, estamos negándoles la posibilidad a los estudiantes de aceptar el infinito utilizando expresiones que cohíben e uso del límite matemático.

Pero, si los obstáculos siempre estarán presentes ¿Cómo lograremos el éxito de una clase de cálculo?

Es claro que el infinito no es fácil de estudiar, la historia nos confirma que no será factible la introducción en un par de clases de colegio y universidad; los obstáculos epistemológicos propios del concepto no se pueden evitar, están intrínsecos en el concepto y por tanto en las clases. Es un proceso que se debe hacer despacio y no forzar ni condicionar su uso, así se lograran resultados distintos a los que se han obtenido hasta ahora. El esfuerzo debe ser de investigadores y didactas juntos, quienes deben buscar estrategias de acercamiento al campo de las ciencias, en este caso las matemáticas. El colegio y la universidad deberían tener puntos de contacto, tanto metodológicamente como conceptualmente; de esta forma se suavizaría en algo la distancia conceptual del estudiante que se gradúa y logra entrar a la universidad. El límite es un concepto difícil, pasó por muchos procesos para lograr la formalización, su enseñanza es difícil y su estudio también pero debemos docentes y estudiantes tomar conciencia de que el infinito hace parte de nuestra cultura y el límite no es ajeno a los procesos matemáticos actuales, si bien los obstáculos no se pueden evitar, tomar conciencia de ello, con ayuda de la historia y epistemología, nos darán herramientas para trabajar con ellos en el aula de clase.

Bibliografía

Arbeláez, G. &. (s.f.). *Aspectos culturales estéticos y epistemológicos del infinito matemático.* Documento de trabajo. Cali: Universidad del Valle .

Arbeláez, G. I. (2010). *La Evolución del Análisis Matemático en Colombia: 1850-1950.* Cali: Tesis doctoral, Universidad del Valle.

Arbelaez, G., & Recalde, L. (s.f.). Aspectos históricos y culturales, estéticos y epistemológicos del infinito matemático. Cali: Universidad del Valle.

Aristoteles. (1964). *Obras.* Madrid: Aguilar.

Aristóteles. (1995). *Física.* Madrid: Gredos.

Bolzano, B. (1851). *Las paradojas del infinito.* (L. S. 1991, Trad.) México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias: UNAM.

Borges, J. L. (1975). Avatares de la tortuga. En J. Borges, *Obras completas* (págs. 254-259). Buenos Aires: Emecé.

Cauchy, l. (1821). *Curso de Analisis.* Mexico: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias: UNAM.

Copernico, N. (1539). S*obre las revoluciones (de las orbes celestes).* Madrid: Nacional.

Coriat, M. &. (2000). Representación de números reales en la recta. E*nseñanza de las ciencias, 1*(18), 25-34. Buenos Aires: Universidad de Granada.

De la Torre, A. (2002). Aspectos históricos relativos al concepto del infinito. *educación e historia, 10*(2), 93-110. Cali: Universidad del Valle.

Delgado, C. (1998). *Estudio microgénetico de esquemas conceptuales asociados a definicion de límite y continuidad en universitarios de primer curso.* Universidad Autónoma de Barcelona: Departamento de didactica de las matemáticas y de las ciencias experimentales.

Euclides. (1991). *Elementos.* Madrid: Gredos.

Filopon, J. (1990). *Criterio* (Vol. 63). Barcelona: Surgo.

Gonzales, S. (1983). Una precision sobre el *es* en Pármenides. *El Básilico* , 62-70. Madrid.

Gyocoolea, R. (recuperado 2013). Metafísica del infinito y concepto de espacio en Giordano Bruno (1548-1600). *A parte rie*. Madrid: Universidad politécnica de Madrid.

Heidegger, M. (1982). *Pármenides.* Madrid: Akal.

Hernandez, J. A. (2000). Biografia del infinito: la noción de transfinitud en George Cantor y su presencia en la prosa de Jorge Luis Borgues. S*ignos literarios y linguisticos, 2*(2), 131-139. Pittusburg: University of Pittusburg.

I. Grattan, G. (1984). La aparicion del analisis matematico y los progresos en sus fundamentos desde 1780 a 1800. *En Del cálculo a la teoría de conjuntos. una introducción histórica* (págs. 126-193).Madrid: Alianza.

Kuhn, T. (1957). *La revolución copernica* . Barcelona: Ariel

Leibniz. (s.f.). Obtenido de http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/ideas/documentos/bombal.pdf

Mallado, F. J. (2010). Límite finito de una sucesión: fenomenos que organiza. T*esis doctoral*. Granada: Editorial de la Universidad de Granada.

Molfino, V., & Buendia, G. (2010). El límite de funciones en la escuela: Un analisis de su institucionalizacion. R*evista electrónica de investigación en educación de ciencias*, 27-40. Buenos Aires.

Newton. (1962). Obtenido de http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/ideas/documentos/bombal.pdf

Novack, G. (1977). L*os origenes del materialismo.* Bógota: Pluma.

Paez, R. (2004). Procesos de construcción del proceso de límite en un ambiente de aprendizaje corporativo, débate cientifico y autorereflexion. *Tesis doctoral*. Mexico: Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN.

Recalde, L. (2012). *De los fundamentos de las matemáticas.* Cali, Colombia : Universidad del Valle.

Recalde, L. C. (10 de Diciembre de 2010). Los filosofos presocraticos: La naturaleza como fuente de experiencia abstracta. *Revista de Ciencias*, *14*, 87-99.

Recalde, l. C. (2012). El cálculo y la solución al problema de las cuadraturas. *Lectura 7,* 19-20.Cali: Universidad del Valle.

Recalde, L. C. (2012). La instauracion del algebra y del analisis como rama de las matematicas. *Lectura 8*, 5-16.Cali: Universidad del Valle.

Romero, C. (1996). Una investigacion sobre los esquemas conceptuales del continuo. ensayo de un cuestionario. *enseñanza de las ciencias*, *14*(1), 3-14. Barcelona.

Stewart, I. (1988). *Conceptos de las matematicas modernas* . Madrid: Alianza Universidad.

Toledo, D. (2011). El mito del caos del primogenio y su vínculo con la cosmogonias filosóficas de Tales y Anaximandro de Mileto. *stoa*, *2*(4), 55-78. México: Universidad Veracruzana.

Vazquez, A. (2011). La sentencia de Anaximandro. *Cuaderno de materiales*(23), 715-152. México.

Waldegg, G. (enero-junio de 1996). Identificacion de obstáculos didacticos en el estudio del infinito actual. *Revista mexicana de investigacion educativa, 1*(1), 107.122. México.

Zellini, P. (2003). *Breve historia del infinito.* Barcelona: Siruela S.A.