UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: 1. Marque con una **X** la opción escogida.
2. diligencie el formato con una letra legible.

Título del Trabajo:	La construcción de los números reales por Fred Richman y sus aportes para la comprensión de los números reales en el contexto de formación de profesores.
Se trata de:	Proyecto [ ] Informe Final [X]
Director:	Guillermo Ortíz Rico
1er Evaluador:	Luz Victoria de la Pava
2do Evaluador:	Maribel Patricia Anacona
Fecha y Hora	Año: 2014 Mes: 03 Día: 25 Hora: 11:00 am

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
Fabián Sánchez Villafañe	0129830	3487
Iván Darío Jaramillo Magaña	0441499	3487

Evaluación

Aprobado	X	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:	Mes:	Día:	Hora:

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas:

Guik Ortiz		Maribel Anacona
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

Observaciones:		**Recomendaciones:**		**Razón del Desacuerdo – Alternativas:**	

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

Erick Ortiz	F. Ettor	Maribel Plazaola
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES POR FRED RICHMAN Y SUS APORTES PARA LA COMPRESIÓN DE LOS NÚMEROS REALES EN EL CONTEXTO DE FORMACIÓN DE PROFESORES

IVÁN DARÍO JARAMILLO MAGAÑA

FABIÁN SÁNCHEZ VILLAFAÑE

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
Santiago de Cali, Marzo de 2014

LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES POR FRED RICHMAN Y SUS APORTES PARA LA COMPRESIÓN DE LOS NÚMEROS REALES EN EL CONTEXTO DE FORMACIÓN DE PROFESORES

IVÁN DARÍO JARAMILLO MAGAÑA

FABIÁN SÁNCHEZ VILLAFAÑE

Trabajo de Grado presentado para optar por el título de
Licenciado en Matemáticas y Física

Director
GUILLERMO ORTIZ RICO
Doctor en matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
Santiago de Cali, Marzo de 2014

RESUMEN

En este trabajo de grado se presentarán los aspectos fundamentales a los que recurrió Fred Richman para la construcción de los números reales (en un artículo publicado en la revista Mathematical Logic Quarterly en el 2008), se esbozará de manera general el camino que realiza Bourbaki en su propuesta estructuralista de la construcción de los números reales. Se reconstruirá la moderna construcción de los números reales realizada por el matemático Fred Richman, el cual sigue el camino de la lógica intuicionista de Brouwer y Heyting, como también, se evidenciará los aportes de Bourbaki en dicha construcción. Al presentar esta construcción, pretendemos dar a los profesores, nuevas perspectivas, no solo para la comprensión de $\mathbb{R}$ sino para que tengan herramientas que les permita desarrollar en sus estudiantes un pensamiento matemático.
Palabras clave: números reales, completez, Fred Richman, Bourbaki.

UN ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS CONSTRUCCIONES DE LOS NÚMEROS REALES POR BOURBAKI Y POR RICHMAN CON FINES EDUCATIVOS

INTRODUCCIÓN

En diferentes niveles de escolaridad se han presentado los números reales con la teoría axiomática, teoría que presupone la existencia de los números reales, dotándola de dos operaciones (suma y producto), las cuales cumplen con los axiomas de cuerpo y de orden, con base en los axiomas de orden y la relación de orden se hacen las definiciones de mínimo, máximo, cotas superior e inferior, definición de ínfimo y supremo, y por último el axioma de completez. Con esto se da por concluido la presentación de los números reales, resultando complejo para los estudiantes e inclusive desconocido. Esta axiomática de los números reales es común en los libros de cálculo, pues según (Arboleda, 2011, p.24) "*En la formación básica universitaria,* $\mathbb{R}$ *se introduce de manera axiomática y el estudiante termina por no entender la naturaleza y función de las propiedades de* $\mathbb{R}$*...*".

Tal como lo dice Arboleda la presentación tradicional de los números reales ha conllevado a que los estudiantes presenten deficiencias conceptuales y terminan por no comprender el dominio numérico de los reales.

Existen vacíos pedagógicos que subyacen en una presentación axiomática de los números reales (Arboleda, 2011, p.24) "*Esta presentación axiomática formal en la cual se diluye la necesidad de dar cuenta de cualquier característica del proceso de objetivación de* $\mathbb{R}$*, es un procedimiento "natural" empleado por los docentes para presentar los reales.*" En este orden de ideas para contribuir en el proceso de enseñanza de los números reales se presentará la construcción de estos números realizada por Richman, construcción que nos permite evidenciar nuevos aspectos de la constitución de los números reales, que no se evidencian en otras construcciones.

Una problemática en la enseñanza de los números reales, además de la presentación axiomática de $\mathbb{R}$, se observa cuando algunos docentes y textos de educación media (aunque no se pretende hacer un análisis de textos escolares), limitan el estudio de los números reales, al decir que estos son un conjunto que tiene como subconjunto a los números naturales, enteros, racionales e irracionales o simplemente se dice que $\mathbb{R}$ es la unión de los racionales con los irracionales, obviando los aspectos epistemológicos que antecedieron la construcción de los números reales.

En el proceso de formación docente se presentan las construcciones que históricamente ya son conocidas como la de Cantor, a través de sucesiones de Cauchy o la de Dedekind mediante cortaduras o inclusive muchas otras construcciones; pero cuando los docentes en ejercicio transmiten este conocimiento no lo hacen de una manera consciente a la luz de esas o algunas otras construcciones, pues según (Arboleda, 2011, p.24) "*En el grado 11 de la educación media, en donde sería más pertinente que se presentaran los fundamentos de la construcción de los números reales, el problema se deshace en una presentación seudo formal*".

La idea central de este trabajo de grado consiste en presentar otra aproximación a la construcción de los números reales, que permita mostrar otros significados, esta vez, desde los aportes de Richman y presentar a los profesores una opción diferente a las construcciones ya conocidas históricamente.

> La poca enseñanza de los reales no ha sido renovada ni modificada desde hace años, por lo que el fenómeno de transposición no está muy lejos de colapsar en una

obsolescencia externa (ocurre cuando el objeto de enseñanza ha envejecido en relación a la sociedad en general, el saber enseñado y popular no están distanciados) (Sanabria, 2005, pp.1,2).

Con la idea de renovar en aspectos de la constitución de $\mathbb{R}$ y con el propósito de indagar por los fundamentos epistemológicos que conllevaron a la constitución de los números reales, con esta nueva construcción de Richman, se pretende entrar a determinar; **¿Cuáles son los elementos fundamentales de la construcción de Richman de los números reales que puedan aportar a la comprensión de este concepto en el contexto de la formación de profesores?**

En ese sentido este trabajo de grado explorara esta nueva opción de construcción de los números reales para contribuir a la formación de profesores y así a la enseñanza de los números reales debido a la complejidad de su apropiación conceptual.

Además de la necesidad de renovar el conocimiento matemático envejecido, es indispensable el requerimiento que tienen los profesores de dominar el área específica en la que se está trabajando como lo dice Rico cuando se refiere a competencias del profesor de matemáticas: "*Dominio de los contenidos matemáticos de Educación Secundaria desde una perspectiva matemática superior y su conocimiento como objetos de enseñanza-aprendizaje*" (Rico, 2004, p.8).

En algunas construcciones de los números reales, se encuentra que estas utilizan herramientas como espacios métricos, pasando por alto que si tuviésemos una métrica ya tendríamos a los números reales, también utilizan cercanías muy próximas, pero aún para capturar la idea de acercamiento no son suficientes las vecindades en $\mathbb{Q}$. En la propuesta de construcción de los números reales de Richman, no sólo se usa una teoría muy general que evita contrariedades como el manejo que se le da a la distancia, sino por lo innovador que resultan ser los conceptos que allí se manejan, y aunque apela a la construcción de Bourbaki no utiliza filtros de Cauchy que pueden resultar siendo más complejos que los “conjuntos” que utiliza Richman.

Por lo anterior se tiene como objetivo presentar la construcción de los números reales por Fred Richman y evidenciar cómo Richman usó la construcción hecha por Bourbaki, en su construcción de los números reales.

Para esto se reconstruyo la presentación moderna de los números reales que desarrolló Fred Richman y se presentan ideas generales de la construcción de los números reales realizada por Bourbaki.

En el primer capítulo se presentarán algunos conceptos para que el lector pueda contextualizar y recordar unas definiciones que le ayudaran a comprender las construcciones de Richman y la de Bourbaki.

En el segundo capítulo se realizará una breve descripción de la construcción de los números reales realizada por Bourbaki, haciendo énfasis en los aspectos fundamentales que llevaron a la constitución de los números reales.

En el tercer capítulo, se hace una reconstrucción detallada de la construcción de los números reales realizada por Fred Richman, la cual es el eje principal de este trabajo. Primero se expone la lógica intuicionista, o mejor llamada lógica constructivista, sistema lógico desarrollado por Heyting, que buscaba proporcionar una fundamentación formal para la teoría intuicionista de Brouwer. En un segundo momento se detalla la fundamentación teórica que llevó a la implementación de los espacios premétricos, aspecto determinante en esta construcción. Y finalmente se desarrolla la completez de los reales.

En el cuarto capítulo se hace una comparación entre la construcción de los números reales de Richman y la realizada por Bourbaki, y se menciona cómo Richman hace esa construcción de Bourbaki más entendible, donde no se utiliza filtros de Cauchy sino que se maneja una teoría más asequible como lo es el concepto de conjuntos.

Capítulo 1

PRELIMINARES MATEMÁTICOS

1.1 Espacios Métricos, Uniformes y Topológicos

Definición: *Un espacio topológico es un par* (X,τ)*, donde* X *es un conjunto, y* τ *es una familia de subconjuntos de* X *que verifica las siguientes condiciones*

(1) $X \in \tau$ *y* $\emptyset \in \tau$

(2) Dada una familia $\{A_i \in \tau, i \in I\}$ *de elementos de* τ *, su unión* $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ *también está en* τ*.*

(3) Si $A_{1,}A_2 \in \tau$*, entonces* $A_1 \cap A_2 \in \tau$ *(la intersección de dos elementos de la familia* τ *también es un elemento de la familia).*

Diremos entonces, que la familia τ *es una topología sobre* X*, y a sus elementos les llamaremos conjuntos abiertos de* (X,τ)

Ejemplo 1:

La topología más grande que admite un conjunto X es su conjunto potencia 2^X que contiene a todos los subconjuntos de X, es decir, en esta topología todos los conjuntos son abiertos. Esta topología se llama la topología discreta en virtud de que cada punto del espacio tiene una vecindad que no comparte con ningún otro punto. La topología discreta es la topología generada por la métrica discreta.

Ejemplo 2:

¿Cómo puedo dotar un conjunto X totalmente ordenado de una topología compatible?

La topología de orden sobre $(X,<)$ se define tomando como abiertos todos los U subconjuntos de X que se pueden expresar como unión de intervalos de la forma:

1.$(x,y) \coloneqq \{t \text{ tal que } x < t < y\}$, intervalos abiertos y acotados,

2. $(x,\rightarrow) \coloneqq \{t \text{ tal que } x < t\}$, colas a derecha,

3. $(\leftarrow,y) \coloneqq \{t \text{ tal que } t < y\}$, colas a izquierda.

En particular los racionales tienen una topología del orden, punto de partida de Bourbaki

Una vez definidos la estructura topológica, podemos definir formalmente uno de los conceptos más importantes de la topología: el de vecindad. A través de la noción de vecindad, podemos llegar al estudio de los límites, la convergencia y la continuidad, puesto que todos estos conceptos involucran la proximidad a un punto dado.

Definición: Un *espacio métrico* es un par (X,d), donde X es un conjunto arbitrario no vacío y $d: X \times X \to \mathbb{R}$ una aplicación, llamada *distancia o métrica*, tal que, para cualesquiera $x,y,z \in X$, se verifica:

(1) $d(x,y) \geq 0$

(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(3) $d(x,y) = d(y,x)$

(4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Ejemplo:

Si X es un espacio métrico, la topología generada por la colección de todas las bolas abiertas es una topología sobre X que se llama la topología métrica o la topología generada por la métrica. Los espacios métricos son una importante clase de espacios topológicos.

La topología usual sobre $\mathbb{R}$, y en general sobre $\mathbb{R}^n$, es la topología generada por la métrica usual.

Si la topología sobre un espacio X está generada por una métrica decimos que X es un espacio metrizable.

Definición: Un espacio métrico (X, d) se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Ejemplo:

1) Todo espacio métrico discreto es completo.

   El espacio métrico discreto. Sea X un conjunto no vacío cualquiera; definimos una distancia d_D como sigue:

$$d_D(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ si } x \neq y \end{cases}$$

   Esta distancia se llama *distancia discreta* y verificar las condiciones de distancia se reduce a una mera comprobación. Observemos además que cambiando el 1 por cualquier otro valor numérico obtenemos otra distancia, también discreta.

2) $(0,\infty)$ no es completo con la distancia usual

Definición: Una *estructura uniforme* sobre un conjunto X es una estructura constituida por la dación de un conjunto U de partes de $X \times X$ que satisfacen los axiomas siguientes [Bourbaki 1965, Lib III, cap. II, §1, Def. 1]:

$(\mathrm{F_I})$ Toda parte de $X \times X$ que contiene un conjunto de U pertenece a U

$(\mathrm{F_{II}})$ Toda intersección finita de conjuntos de U pertenece a U

$(\mathrm{U_I})$ Todo conjunto de U contiene la diagonal $\triangle$.

$(\mathrm{U_{II}})$ La relación $V \in U$ implica $V^{-1} \in U$.

$(\mathrm{U_{III}})$ Cualquiera que sea $V \in U$, existe $W \in U$ tal que $WoW \subset V$.

Los conjuntos de U son los *entornos* de la estructura uniforme definida sobre X por U. Un *espacio uniforme* es un conjunto dotado de una *estructura uniforme*, es decir, un par (X, U).

Ejemplo:

Sobre el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, se define de la manera siguiente una estructura uniforme, diré estructura uniforme aditiva: para cada $a > 0$ consideremos, en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$**,** el conjunto $U_a = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}: |x - y| < a\}$. Donde a pertenece al conjunto de los números racionales mayores que cero.

1.2 Conceptos relacionados con la construcción de Bourbaki

Definición: Un *filtro* sobre un conjunto X es un conjunto de partes $\mathfrak{F}$ de X que posee las siguientes propiedades [Bourbaki 1965, Lib. III, cap. I, §6, Def. 1]:

(I) Toda parte de X que contiene un conjunto de $\mathfrak{F}$ pertenece a $\mathfrak{F}$

(II) Toda intersección finita de conjuntos de $\mathfrak{F}$ pertenece a $\mathfrak{F}$.

(III) La parte vacía de X no pertenece a $\mathfrak{F}$.

Ejemplo:

Si $X = \{1,2,3\}$, se tiene que:

$$\wp(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Entonces:

$F = \big\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\big\}$ es un filtro en X, mientras que

$F' = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ no es un filtro en X.

Definición: Se dice que un filtro $\boldsymbol{F}$ sobre un espacio uniforme X es un *filtro de Cauchy*, si para todo entorno V de X, existe un conjunto pequeño de orden V que pertenece a $\boldsymbol{F}$. (Bourbaki, Lib III, cap. II, §3, Def. 2):

Ejemplo:

(Filtro elemental asociado a una sucesión). Sea X un conjunto y $(x_n)_n$ una sucesión de puntos en X. La familia

$$\{A \subseteq X: (\exists k)\ (\forall n \geq k)\ x_n \in A\}$$

es un filtro sobre X. También se dice que el filtro es un *filtro de Cauchy.*

En un espacio uniforme $(X, \mathcal{U})$, una sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ es de Cauchy si para todo $V \in \mathcal{U}$ existe un número natural *k* tal que para todo par $m, n \geq k$ se tiene $(x_m, x_n) \in V$

Definición: Se llama un filtro de Cauchy *mínimo* si contiene un filtro no más pequeño de Cauchy (con excepción de sí mismo).

Puede ser demostrado que cada filtro de Cauchy contiene un único filtro mínimo de Cauchy. El filtro de la vecindad de cada punto (el filtro que consiste en todas las vecindades del punto) es un *filtro mínimo de Cauchy.*

Definición*: Un* espacio completo es un espacio uniforme en el que todo filtro de Cauchy converge (Bourbaki, 1966, p.18)

Capítulo 2

IDEAS GENERALES DE LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES POR BOURBAKI.

Para la construcción de los números reales, Bourbaki inicia con el conjunto de los números racionales con una estructura de grupo totalmente ordenado, luego le introduce una topología. Luego Bourbaki define un grupo topológico $\langle \mathbb{Q}, +, \tau \rangle$, es decir, un grupo con una topología y una operación continua, continua con respecto a la topología absoluta de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$, para $\mathbb{Q}^+$. Ahora se necesita definir la cercanía entre dos puntos cualquiera de $\mathbb{Q}$, entonces introduce una estructura que permita establecer que tan cerca estas dos puntos de $\mathbb{Q}$, dotándolo de una estructura uniforme que sea compatible con $\langle \mathbb{Q}, +, \tau \rangle$, los espacios uniformes son la generalización de los espacios métricos y los grupos topológicos. Básicamente Bourbaki tiene una "maquinaria" para que siempre que se tenga un grupo topológico, este lo hacía corresponder con un espacio uniforme, lo cual será la uniformidad de $\mathbb{Q}$.

Ahora un espacio uniforme es como devolverse por la métrica, entonces formo los U_q, de tal forma que $U_q = \{(x, y): |x - y| < q\}\ q \in \mathbb{Q}^+$, aún no se tiene $\mathbb{R}$, entonces se forma una colección de $U_q\ \forall q \in \mathbb{Q}^+,$ como la uniformidad $\{U_q\}$ es compatible con el grupo topológico $\mathbb{Q}$, por lo tanto se tiene el espacio uniforme $\langle \mathbb{Q}, \{U_q\} \rangle$.

Los espacios uniformes no tienen por qué ser completos, por lo que ciertos límites de sucesiones no están en el conjunto, este es el problema de la generalidad con la que se cuenta cuando se tiene un espacio uniforme. De igual forma, cuando se tiene un espacio métrico, se puede meter en un espacio métrico completo, es decir, se le agregan los límites, entonces el problema principal se resume, en que cuando se tienen los racionales y se le introducen los límites, ahí es que se tiene el conjunto de los números reales.

..

Bourbaki para hacer que el espacio uniforme $\langle \mathbb{Q}, \{U_q\} \rangle$ sea completo, define la noción de filtros, no trabaja con sucesiones porque estos son convergencias del orden de los naturales y acá trabaja con una convergencia más fuerte, es decir cambia las sucesiones por los filtros. La noción de filtro utilizada por Bourbaki generaliza la noción de sucesión y ofrece como ventajas técnicas desprenderse del sistema numérico natural. Los filtros son comparables por la relación de inclusión conjuntista y así permiten introducir la noción de límite en los espacios uniformes y topológicos.

Existen sucesiones de racionales que no convergen en $\mathbb{Q}$, de igual forma existen filtros sobre los racionales que no convergen en $\mathbb{Q}$ como espacio topológico. Esto quiere decir, que a pesar de que el filtro se acerca a un punto, este punto no se puede identificar, ya que este punto no pertenece a este espacio topológico. De igual manera Dedekind demostró que existen cortaduras que no son producidas por números racionales. Por todo lo anterior se puede entender que $\mathbb{Q}$ es un espacio topológico no completo.

Aunque la estructura uniforme permite a $\mathbb{Q}$ con estructura topológica contar con la noción de cercanía dos a dos. Pero la noción de filtros no es adecuada en esta estructura uniforme a pesar de contar con una convergencia más amplia que la de las sucesiones, entonces, generaliza las sucesiones de Cauchy, por lo tanto define los filtros de Cauchy.

Ahora Bourbaki reúne todos los filtros de Cauchy y los vuelven un espacio uniforme, creando un espacio cualquiera con todos los filtros de Cauchy, todo filtro de Cauchy converge, por la misma definición, que cada filtro que converge (con respecto a la topología definida por la estructura uniforme) es un filtro de Cauchy, por lo tanto, se garantiza que el espacio uniforme formado por los filtros de Cauchy es completo

Al igual que sucede con las sucesiones, que van a "definir" los números reales, en la construcción de cantor, las cuales son las de Cauchy, en el caso de Bourbaki estas corresponden a los filtros de Cauchy, aquellos que contienen conjuntos “arbitrariamente pequeños”. Para el caso de las sucesiones, los números reales son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy, igualmente pasa con los números reales vistos como filtros de Cauchy. Pero en los filtros de Cauchy, en vez de escoger clases de equivalencia, se escoge un representante que está dado por la noción de filtro minimal de Cauchy. Se llama un filtro de Cauchy mínimo, si no contiene un filtro más pequeño de Cauchy. Puede ser demostrado que cada filtro de Cauchy contiene un único filtro mínimo de Cauchy.

Bourbaki desarrolla la completez de $\mathbb{R}$ mediante una formulación general de la completez de espacios uniformes. Realizan una extensión del espacio uniforme de partida a una estructura $\mathbb{R}$, formada por todos los filtros de Cauchy minimales sobre $\mathbb{Q}$. Y sobre $\mathbb{R}$ definen una colección de entornos que dependen de los entornos de la estructura uniforme de partida. Con lo cual muestran que efectivamente $\mathbb{R}$ goza de una estructura uniforme, este nuevo espacio uniforme $\mathbb{R}$ es de Hausdorff, y es completo, es decir que todo filtro de Cauchy converge, y su límite es único, resultando una inmersión natural del espacio inicial en el nuevo espacio, donde esta inmersión es densa sobre el nuevo espacio, densidad que permite, mediante extensiones uniformemente continuas, asegurar la estructura de grupo topológico para el nuevo espacio. Y con procedimientos de la misma forma se le termina asignando la estructura de cuerpo numérico ordenado con las operaciones continuas con respecto a la topología adquirida de la estructura uniforme, y esta última estructura es la de los números reales

Capítulo 3.

COMPLETEZ DE LOS NÚMEROS REALES POR FRED RICHMAN

3.1 Nociones acerca del intuicionismo

Richman es inspirado por la lógica intuicionista, o mejor llamada lógica constructivista, el cual es el sistema lógico desarrollado por Heyting, que buscaba proporcionar una fundamentación formal para la teoría intuicionista de Brouwer:

> El *intuicionismo* fue la respuesta de Brouwer al logicismo de Russell, a la matemática no constructiva y a las paradojas, y se apoya en tres tesis radicales: i) los objetos matemáticos se construyen directamente en la intuición pura, siendo por ello previos al lenguaje y a la lógica; ii) las leyes que rigen el comportamiento de dichos objetos derivan de su construcción, no de la lógica, como pretenden Frege, Russell y los logicistas y iii) en la matemática no es admisible ninguna teoría que rebase el marco de lo dable en la intuición, como sostienen Hilbert y los Cantorianos. (Torres, 2005, p.15).

Como el objeto matemático a tratar son los números reales, para los cuales se parte de un conjunto inicial, cabe aclarar que “El intuicionismo se fija principalmente en aquellos objetos matemáticos que se pueden construir a partir de otros, es decir aquellos que se pueden definir en un número finito de pasos” (Gutiérrez, 2009, p.5). Por lo tanto para la lógica constructivista no es permitido un objeto matemático al que no se le pueda mostrar como una construcción, iniciando desde algún objeto conveniente.

A continuación mostraremos tres ejemplos clásicos que ilustran la existencia de los objetos, pero para los intuicionistas estos serían rechazados, en virtud, de que "*La existencia de los objetos matemáticos depende de la posibilidad de construcción de los objetos mismos; por tanto, "existen" sólo aquellos seres matemáticos que son construidos*" (Torres, 2005, p.16).

Ejemplo 1: Queremos demostrar que existen dos números irracionales a y b tales que a^b es un número racional. Sea $c = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Si c es racional, entonces hacemos $a = b = \sqrt{2}$ y terminamos. Si c es irracional, es decir, no es racional, entonces observando que $c^{\sqrt{2}} = 2$ podemos hacer $a = c$ y $b = \sqrt{2}$. En cualquier caso, tenemos dos números irracionales a y b tales que a^b es un número racional. Pero....

¿Cuáles son esos dos números?

En esté ejemplo se ve claramente que con la matemática tradicional, se garantiza la existencia de algunos objetos matemáticos, en esté ejemplo sería un número, pero que no podemos decir exactamente cuál es. Por eso esta clase de demostraciones y definiciones, no son aceptadas en la lógica intuicionista.

Ejemplo 2: (tomado de (Gutiérrez, 2009, p.6))

- Sea *k* el mayor primo tal que *k − 1* es primo y si tal número no existe entonces k = 1.
- Sea l el mayor primo tal que $l - 2$ es primo y si tal número no existe entonces $l = 1$.

Por un lado, k = 3 ya que para cualquier entero n > 3, si n es par es divisible por 2 y si es impar n−1 será divisible por 2. Por otro lado, saber cuál es el valor de l, es establecer si la colección de parejas de números primos gemelos es finita o infinita. Aunque hay razones para pensar que la colección es infinita, dada la infinitud de los números primos, en 1919 Viggo Brun demostró la convergencia de la serie:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\cdots$$

De los inversos de los pares de números gemelos. Si esta serie fuera divergente tal y como lo hace $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ la suma de los inversos de los números naturales, entonces podríamos afirmar la infinitud de las parejas de los primos gemelos. Sin embargo, que la serie de Brun converja no muestra si hay infinitas o finitas parejas de primos gemelos, pero sí establece razones para pensar que no sea infinita. Es decir, hasta la fecha no sabemos si la sucesión de primos gemelos es finita o infinita, de hecho no tenemos siquiera elementos que nos permitan conjeturar fuertemente sobre alguno de los dos hechos. Los intuicionistas afirman que l no puede definir un entero dado que no consideran válido el tercio excluido

Ejemplo 3: (tomado de (Gutiérrez, 2009, pp.5 y 6)) ¿Cuál será el valor de verdad de la siguiente afirmación? *45 días antes de que Arquímedes gritará desnudo "eureka", en Siracusa nació un primogénito llamado Platón*. Es evidente que en este momento no tenemos una respuesta sobre la veracidad o falsedad de este enunciado, ya que difícilmente sabremos si el primogénito nació o no ese día. Con lo que una proposición como *el primogénito llamado Platón que nació 45 días antes de que Arquímedes gritara desnudo "eureka", permaneció toda su vida en Siracusa o no permaneció toda su vida en Siracusa* no puede ser aceptada según los parámetros intuicionistas. De hacerlo (como por ejemplo el estilo clásico), asignaríamos propiedades a el “primogénito”, con lo que cualquier deducción sobre esta proposición tendría el riesgo de basarse en absurdos. El intuicionismo rechaza esta inseguridad y sugiere que solo podemos inferir afirmaciones usando al primogénito, cuando hayamos podido comprobar su nacimiento o no.

En este ejemplo se evidencia que en la lógica clásica, muchas proposiciones son aceptadas y verificadas. Pero que para la lógica intuicionista, estos razonamientos no serían válidos.

En cuanto a Fred Richman, este sigue la lógica intuicionista, reflejando esta teoría en su construcción de los números reales, en palabras de Richman: “para los matemáticos en ejercicio, la matemática constructiva es una forma de ver las matemáticas desde una perspectiva fresca, centrando su atención en las cuestiones de interés que se filtran por las grietas de un tratamiento clásico” (Richman, 2000, p.1).

3.2 Preliminares y noción de aproximación

Las construcciones de los números reales a través de la historia ofrecen un sin número de conceptos que han aportado nuevas herramientas para el entendimiento y manejo de los números reales y de otros conceptos relacionados como la continuidad, los límites y la convergencia de sucesiones. En esta sección seguiremos una construcción moderna de los números reales, en la que se evidencian nuevos conceptos matemáticos que continuarán con la dinámica de seguir aportando herramientas para la apropiación de dicho conocimiento, ya sea para su aprendizaje o bien sea para su enseñanza.

A continuación se mostrará la construcción de los números reales por Fred Richman, parte principal de nuestro trabajo, en el que mostraremos aspectos teóricos que le permitieron a este lograr esta construcción.

Richman desea realizar una construcción matemática[1] sin el axioma de elección; pero para explicar esto, primero hay que decir que este tiene una postura intuicionista, inspirado en Brouwer y Heyting. Para De Jongh:

> El intuicionismo pretende que los objetos matemáticos existen en la medida en que han sido construidos y que la validez de las demostraciones emana de su construcción: en particular, pretende las afirmaciones existenciales deberían apoyarse en la construcción efectiva de sus objetos. (De Jongh, p.1).

Ahora siguiendo los lineamientos intuicionistas, Richman escogerá una noción de completitud que sea conveniente cuando no se tenga derecho a usar el axioma de escogencia contable. El Axioma de elección implica el principio de tercero excluido, esto es incompatible con las construcciones matemáticas, la razón es porque el principio del tercero excluido es la fuente de los aspectos no constructivistas de las matemáticas, por lo que su rechazo permite pensar en las matemáticas algorítmicamente hablando, sin pensar en algoritmos.

La idea consiste en completar un espacio, pero para completar este espacio de racionales, Richman construye un elemento r que esté en la completación de un espacio X. Es suficiente mostrar que, para cada n, se construirá un elemento x *de* X que esté cerca de r, a una "distancia" menor o igual a $1/n$, simbólicamente, $d(x,r) \leq 1/n$. Es decir poder construir los x tan cercanos como yo quiera del r,

[1] Por "construcción matemática". Richman se refiere a hacer las matemáticas en el contexto de la lógica intuicionista, eso es, sin el principio del tercero excluido Ver (Richman, F. 2000).

pero en este caso no usaremos la definición formal de distancia, porque si se cuenta con el concepto de distancia, ya se tendría con el conjunto de los números reales, puesto que la noción de distancia o métrica se define como una función que va hasta los números reales. Entonces Richman plantea que para cada n se escoge un x, de alguna manera lo que se está haciendo es una elección de una sucesión, de tal manera que cada uno de esos x_n esté a una distancia menor a ${}^{1}/_{n}$ de r, simbólicamente $d(x_n, r) \leq 1/n$ para todo n. Lo que hizo fue escoger varios x_n de tal manera se va acercando cada vez más a r, Richman ve entonces el problema de encontrar r como un problema de límite, pues para construir este conjunto, lo que se está escogiendo es una sucesión, de alguna manera, se está haciendo una elección contable, es decir se están escogiendo infinitos números cada vez más cerca de r, ahora bien, estos x_n y x_m, deben cumplir intuitivamente las propiedades de distancia y la propiedad de desigualdad triangular, por lo que $d(x_n, x_m) \leq {}^{1}/_{n} + {}^{1}/_{m}$ para todo n y m. Con esto en realidad se está diciendo que la elección que se está haciendo es una sucesión regular, porque para cierto n y m muy grandes, estos serán menores que un cierto épsilon (ε). Ahora el conjunto de sucesiones regulares x y y que convergen a un r, esto es exactamente una clase de equivalencia de sucesiones bajo la equivalencia $x \equiv y$ si y solo si $d(x_n, y_m) \leq {}^{1}/_{n} + {}^{1}/_{m}$ para todo n y m. Así, una secuencia regular que converge a *r* es simplemente una función de elección para la secuencia de conjuntos:

$$S_n = \{x \in \mathrm{X} : d(x, r) \leq {}^{1}/_{n}\}$$

En este contexto, hay una clara diferencia entre un procedimiento que acepta un numero natural y retorna un numero racional con ciertas propiedades y una función que devuelve un numero racional, para cada número natural. Esta última se hace sin usar el axioma de elección.

Cuando se opera sin el axioma de elección, es natural centrar la atención en la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$, la cual tiene la siguiente propiedad que si $x \in S_n$ y $y \in S_m$ entonces $d(x,y) \leq 1/n + 1/m$. En la idea de usar sucesiones regulares de conjuntos para construir conjuntos completos, en la cual se construyen aproximaciones a r, siguiendo el espíritu intuicionista de Brouwer y Heyting. Las sucesiones regulares x que se presentan no están dadas por una regla, por el contrario están dadas por un procedimiento secuencial infinito o estas resultan de la escogencia de sucesiones tal que $x_n \in S_n$ para algún n.

En este punto de la construcción, se requiere en un sentido muy práctico, tener un concepto de aproximación bien definido, que es uno de los primeros objetivos de la construcción de los números reales,

> Para determinar si dos objetos del mundo real están "próximos" o no, necesitaremos conocer la medida del espacio que los separa. Es decir, se requiere representar con un número real positivo a dicha separación; el cual nos dirá en términos cuantitativos que tan "próximos" están los dos objetos (Anacona & Ortiz, 2011, p.166).

3.3 Espacios premétricos

Al igual que en otras construcciones aquí también se parte del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, ahora este conjunto se debe completar, en su intento por completarlo Richman definió la sucesión de conjuntos S_n, pero se encuentra con la noción de distancia, al querer mirar la cercanía entre elementos de esta sucesión. Usar espacios métricos presupone la existencia de los números reales, esto se debe a la definición de espacio métrico, en la cual se define la noción de distancia o métrica, la cual se define como una función que va de $X \times X$ en $\mathbb{R}$.

Según Richman, si se desea una noción de completez que sea aplicable a la construcción de los números reales así como a los espacios métricos, se necesitará un concepto más general. Para Richman no hay necesidad de usar una teoría tan fuerte como la de filtros sino algo un poco más débil; para él los espacios uniformes muestran un grado básico de generalidad, se requiere de algo lo suficientemente general pero simple. Desde donde se tengan las mismas ideas generales pero que podamos acceder con unas pocas herramientas conjuntistas.

Nosotros acompañaremos la idea de Richman cercana a los Bourbaki (espacios uniformes) pero con el uso de conjuntos, en otras palabras, este ya no trabajará con sucesiones ni filtros sino con conjuntos, la idea de filtros Richman la va a cambiar por familias de conjuntos regulares. Lo que en sí está diciendo este es que no hay necesidad de usar una teoría tan fuerte como la de filtros sino un poco más débil; para demostrar que cuando se parte de $\mathbb{Q}$, al final debe aparecer un conjunto que sea completo, entonces este coge el conjunto de las familias regulares y de alguna manera tiene que completarlo, esto con la idea de no trabajar con los conceptos que se trabaja en la teoría de los Bourbaki, los cuales requieren un nivel de abstracción y apropiación mucho más fuertes.

Entonces al ver ahora esas sucesiones de Cauchy como conjuntos, para Richman estas serán el conjunto de familias regulares, es decir estas reemplazarán los filtros de Cauchy a través de la noción de espacio premétrico. Noción muy cercana a la espacio métrico pero que no asume la completez. Que es justamente "la noción problemática" en la conceptualización de los números reales.

La información necesaria para convertir un conjunto X en un espacio premétrico es una familia E_q de subconjuntos simétricos de $X \times X$ ordenados por números racionales no negativos q. Al igual que en los espacios uniformes nos referiremos a estos como entornos, esto se debe a que con las estructuras topológicas y con la noción de vecindad no podemos dar referencia a la cercanía dos a dos, sin tener un punto de referencia establecido, cosa que si pasa con los entornos, con los cuales si podemos establecer la cercanía entre dos puntos arbitrarios, en otras palabras los puedo comparar dos a dos. Tal como lo expresa la teoría topológica de los Bourbaki. La idea geométrica de un entorno con la métrica usual se evidencia en la recta real, un entorno con centro en q (Figura 1), puesto que se puede usar la definición de distancia para mirar cercanía, podemos definir con exactitud la distancia entre dos puntos. Ahora con $\mathbb{Q}$ al no poder usarse la distancia, cuando se tiene un espacio $E = \left\{E_q : q \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}\right\}$ donde cada uno de estos es de la forma $E_q = \{(x, y) : |x - y| < q\}$, entonces se forma de E_q para todo $q \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, es casi como un espacio métrico pero se está midiendo en pareja y la distancia no se mide con números reales, solo racionales. Aquí podemos comparar varias parejas entre sí, y poder definir cuál pareja se encuentra más cercana. (Figura 2).

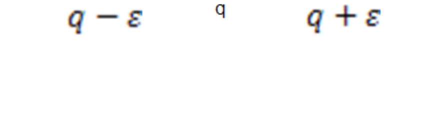

Figura 1

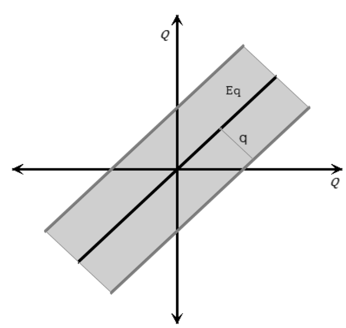

Figura 2

Richman propone las siguientes condiciones:

1. $d(x, y) \leq 0$ si y solo si $x = y$ (separado)
2. para todo x, y existe q tal que $d(x, y) \leq q$ (no puntos al infinito)
3. $d(x, y) \leq p$ si y solo si $d(x, y) \leq q$ para todo $q > p$ (continuidad superior)
4. si $d(x, y) \leq p$ y $d(y, z) \leq q$, entonces $d(x, z) \leq p + q$ (triangulo)

Estas condiciones permiten definir una métrica sobre X dejando a $d(x, y)$ ser el número real que resulta de $\mathrm{ínf}\{\mathrm{q} \in \mathrm{Q}: \mathrm{d}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq \mathrm{q}\}$. Por esto para definir un valor métrico finito se necesitará la condición de que no hay puntos en el infinito, una condición que de otro modo parece sin importancia. Cuando se impone la condición clásica trivial:

5. si $p < q$ entonces ocurre que $d(x, y) \leq q$ o que no se cumple $d(x, y) \leq p$ (puntos localizados)

Se tiene que X cuenta con una estructura métrica, pero con esto, se tendría la noción distancia, la cual está definida como una función que va de $X \times X$ en $\mathbb{R}$, por lo que inevitablemente se tendría en el conjunto de llegada, al conjunto de los números reales. Al no contar con la condición de puntos localizados se puede pensar la noción de distancia ($d(x, y)$) como un número real generalizado. Si se hace esto, un espacio premétrico es simplemente un espacio métrico donde la distancia son los números reales generalizados. Cualquier espacio métrico es un espacio premétrico con puntos localizados. El conjunto de los números racionales es un espacio premétrico con puntos localizados si $d(x, y) \leq q$ se define como $|x - y| \leq q$.

Siendo $\langle \mathbb{Q}, \{E_q\} \rangle$ Richman tiene inicialmente el conjunto de E_q con una estructura de espacio premétrico, esto es lo que tiene Richman con cierta propiedad, decir que $(x, y) \in E_q$, es lo mismo que $d(x, y)$ por notación, entonces él trabaja con los conjuntos formado por E_q, los cuales tienen unas propiedades muy parecidas a las de entornos. Sobre todo usaremos la notación más conveniente, $d(x, y) \leq q$ se presentará en términos de entornos como $(x, y) \in E_q$(Figura 3), sin comprometerse con la definición de distancia $d(x, y)$. En otras palabras, Si E es un entorno de una estructura uniforme sobre X, se expresa la relación $(x, y) \in E_q$ como "x y y son cercanos de orden *q*". Efectivamente esta definición nos permite decidir matemáticamente cuándo dos puntos x, y de X son cercanos, dos a dos

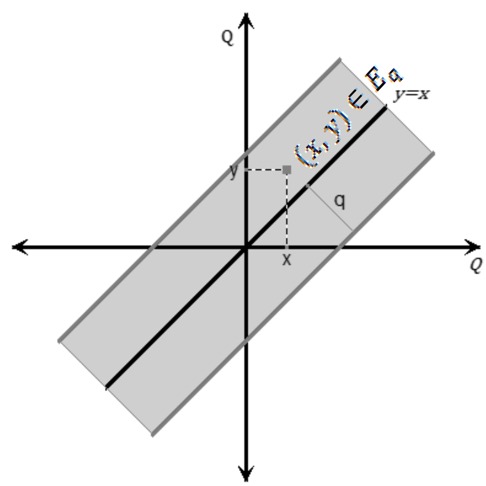

Figura 3

$E_q = \{(x, y): |x - y| \leq q\}$ Este es el entorno, el cual para este caso está contenido en el producto cartesiano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, y el centro de este entorno es la recta $y = x$, que es el caso en el cual $q = 0$ es E_0.

Con la nueva definición de espacio premétrico, estas condiciones de espacios métricos se redefinen de la siguiente manera, para que no se entre en contrariedades con el uso de la distancia entre dos puntos:

1. $(x, y) \in E_0$ si y solo si $x = y$
2. Para todo x, y existe q tal que $(x, y) \in E_q$
3. $(x, y) \in E_p$ si y solo si $(x, y) \in E_q$ para todo $q > p$
4. si $(x, y) \in E_p$ y $(y, z) \in E_q$, entonces $(x, z) \in E_{p+q}$
5. si $p < q$ entonces ocurre que $(x, y) \in E_q$ o $(x, y) \notin E_p$

Observaciones; respecto a las condiciones anteriores:

1. Para todo entorno E_p, cualquier punto en este, se dice cercano así mismo. Lo que garantiza la reflexividad, por lo que $(x, x) \in E_0$ para todo x que pertenezca a un espacio premétrico.
2. Esta condición de existencia, garantiza que dados dos puntos en un espacio premétrico siempre habrá un entorno E_p para algún p, en el que (x, y) esté contenido.
3. Si se tiene un punto en un entorno para un p determinado E_p, siempre se podrá establecer otro entorno para un q,E_q, que contenga a este punto, siempre y cuando q sea mayor que p $(q > p)$.
4. Esto nos dice que si tenemos un $(x, y) \in E_p$ y otro punto $(y, z) \in E_q$, entonces el punto (x, z) por la desigualdad triangular pertenece al entorno de la suma de $p + q$, E_{p+q}.
5. Esta condición nos dice que si $p < q$, entonces ocurrirá que $(x, y) \in E_q$ o que (x, y) no pertenece a E_p. Puesto que si perteneciera a E_p entonces por consiguiente pertenecería a E_q, por ser $p < q$.(condición 3).

Se presentan algunos definiciones básicas que se encuentra en (Richman, 2008).

La *clausura* de un subconjunto S de un espacio premétrico X es:

$$\bar{S} = \{x \in X: \text{ para cada } q > 0 \text{ hay un } s \in S \text{ tal que } d(x,s) \leq q\}$$

Se dice que S es *cerrado* si $\bar{S} = S$ y *denso* si $\bar{S} = X$. Los subconjuntos E_q son cerrados en el espacio $X \times X$ por la desigualdad triangular y la continuidad superior. Si f es uniformemente continua sobre subconjuntos acotados, entonces $f(\bar{S}) \subset \overline{f(S)}$. El subespacio premétrico sobre un subconjunto S de X está dado por la restricción de las relaciones $(x,y) \in E_q$ a S.

3.4 La completez de los reales: las familias regulares

Una *familia regular* de subconjuntos de X es una familia de subconjuntos no vacíos S_q indexados por números racionales positivos q, con la propiedad que $d(x,y) \leq p + q$ para todo $x \in S_p$ y $y \in S_q$. La idea es que los S_q consistirá de algunos elementos de X que está a una "distancia" menor que q de un elemento de la completación de X. En la práctica, se mostrará cómo construir un elemento de X que está a una distancia menor que q de un elemento de la completación de X. En esta construcción, se creara un conjunto con las aproximaciones, que son las escogencias antes mencionadas.

Entonces ahora Richman en lugar de tomar los filtros de Cauchy porque él no tiene filtros, toma las familias regulares y estas familias regulares debe completarlas, veamos:

Sean dos familias regulares S y T son equivalentes si $(x, y) \in E_{p+q}$ para todos $x \in S_p$ y $y \in T_q$ esto es, $S_p \times T_q \subset E_{p+q}$. Escribiremos $S \sim T$ si S y T son equivalentes

Afirmación. $\sim$ Es una relación de equivalencia

- $S \sim S$ ya que $\forall_{p,q}\, S_p \times S_q \subset E_{p+q}$ por ser S una familia regular■
- $S \sim T\ entonces\ T \sim S$

$$
\begin{aligned}
S \sim T &\Leftrightarrow \forall_{p,q},\ S_p \times T_q \subset E_{p+q} \\
&\Leftrightarrow \forall_{x,y}\, \forall_{p,q}\, (x \in S_p \wedge y \in T_q \rightarrow (x, y) \in E_{p+q}) \\
&\Rightarrow \forall_{p,q} \forall_{x,y} \left(x \in S_p \wedge y \in T_q \rightarrow (y, x) \in E_{p+q}\right) \\
&\Rightarrow \forall_{p,q}\, T_q \times S_p \subset E_{p+q} \\
&\Leftrightarrow T \sim S■
\end{aligned}
$$

- $S \sim T\ \wedge T \sim U\ entonces\ S \sim U$

$\forall_{p,q,r} \begin{matrix} S_p \times T_q \subset E_{p+q} \\ T_q \times U_r \subset E_{q+r} \end{matrix}$ Por demostrar $S_p \times U_r \subset E_{p+r}$

$sea\ (x, y) \in S_p \times U_r$

Siendo $T_q \neq \emptyset\ \exists y \in T_q$ Ahora se sabe que si

$$
\begin{matrix} (x, y) \in E_{p+q} \\ (y, z) \in E_{q+r} \end{matrix}
$$

Entonces por la desigualdad triangular se tiene que

$$
(x, z) \in \ (E_{p+q} \cup E_{q+r})
$$

Ahora por la condición 4, antes mencionada se tiene que $(x, z) \in E_{p+2q+r}$ ahora se forma la intersección de todos estos E_{p+2q+r} para todo $q \in \mathbb{Q}^+$

$$
\bigcap_{q \in \mathbb{Q}^+} E_{p+r+2q} \sim E_{p+r}
$$

Entonces $(x,z) \in E_{p+r}$ por lo que se concluye que $S_p \times U_r \subset E_{p+r}$ ■

Ahora Richman, define los elementos de *la completación* $\hat{X}$ de X como las clases de equivalencia de familias regulares de subconjuntos. Entonces la estructura premétrica sobre $\hat{X}$ es definida por $d(S,T) \leq q$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $a,b,c \in \mathbb{Q}^+$ y elementos $s \in S_a$ y $t \in T_b$ tal que $a+b+c < q+\varepsilon$ y $(s,t) \in E_c$.

Hay una función natural de X a $\hat{X}$ que toma $x \in X$ y lo relaciona con una familia regular S^x definida por $S_q^x = \{x\}$ para todo q.

Se dice que X es *completo* si esta función natural es sobreyectiva. Por la continuidad superior, esto dice que si T es una familia regular, entonces existe $x \in X$ tal que $(x,t) \in E_q$ para todo $t \in T_q$.

Es decir se toman las familias regulares y se comprueba que estas son completas, porque los números reales son las sucesiones de Cauchy. Entonces lo mismo pasa aquí pero no se cuenta con las sucesiones de Cauchy sino que se le da clases de equivalencia, esto es lo que cambia en la construcción de Richman con respeto a otras construcciones, él coge estas familias regulares, se forma el cociente dado por una relación de equivalencia y crea los números reales, le da la misma estructura que tenía y después muestra que es completo. Para esto necesitará de un par de teoremas que se demostrarán a continuación.

Vamos a presentar la prueba de Richman de la completación, primero enunciamos un lema que se usará en la prueba.

Lema 3.4.1 *Si* T *es una familia regular y* $x \in T_q$*, entonces* $d(S^x, T) \leq q$.

Demostración: Para un $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, se definen los valores convenientemente para usar la definición de estructura premétrica, sea $a = b = \mathcal{E}/4$ y $c = q + b$. Ahora si $x \in T_q$ y $t \in T_b$ entonces $(x, t) \subset E_{q+b=c}$. Por otra parte, $a + b + c = q + \frac{3\mathcal{E}}{4} < q + \varepsilon$ ■

Teorema 3.4.2 *La completación* $\hat{X}$ *de un espacio premétrico* X *es un espacio premétrico. La función natural de* X *en* $\hat{X}$ *es una inmersión densa y la estructura premétrica sobre* $\hat{X}$ *extiende la estructura premética en* X*. Más aún, si* X *tiene puntos localizados, entonces también los tiene* $\hat{X}$.

***Demostración*:** Para demostrar que $\hat{\mathrm{X}}$ es un espacio premétrico, es necesario probar que cumple las condiciones mostradas anteriormente. Es evidente que la simetría y la continuidad superior permanecen. Para verificar separación, suponemos que $d(S, T) \leq 0$. Entonces para cada $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, existen $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$ y elementos $s \in S_a$ y $t \in T_b$ de tal forma que $a + b + c < \varepsilon$ y $d(s, t) \leq c$. Mostraremos que $S_p \times T_q \subset E_{p+q+\varepsilon}$ para cada $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, por lo cual $S_p \times T_q \subset E_{p+q}$ por la condición 3 de los espacios premétricos. Por la definición de equivalencia de dos familias regulares, se tiene por la conclusión anterior que *S* es equivalente a *T.* Suponemos que $u \in T_q$y $v \in S_p$. Entonces $d(u, t) \leq q + b$ y $d(s, v) \leq p + a$ y con $d(t, s) \leq c$ entonces por la desigualdad triangular tenemos que:

$$d(u, v) \leq p + q + a + b + c < p + q + \varepsilon$$

Por la desigualdad triangular, suponemos que $d(S, T) \leq p$ y $d(T, U) \leq q$. Nosotros queremos mostrar que $d(S, U) \leq p + q$.

Para cada $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ hay $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$ y elementos $s \in S_a, t \in T_b$ con $a + b + c < p + \varepsilon/2$ y $d(s, t) \leq c$. También existe $a', b', c' \in \mathbb{Q}^+$ y elementos $t' \in T_{a'}, u \in U_{b'}$ con $a' + b' + c' < q + \varepsilon/2$ y $d(t', u) \leq c'$. Así

$$a + a' + b + b' + c + c' < p + q + \varepsilon$$

y $s \in S_a$ y $u \in U_{b'}$ con $d(s,u) \leq c + b + a' + c'$. Sea $c'' = c + b + a' + c$. Entonces $a + b' + c'' < p + q + \varepsilon$, $s \in S_a$ y $u \in U_{b'}$ con $d(s,u) \leq c''$.

Para mostrar que la estructura premética en $\hat{X}$ extiende la de X, debemos mostrar que $d(S^x, S^y) \leq q$ exactamente cuando $d(x,y) \leq q$. Teniendo en cuenta que $d(S^x, S^y) \leq q$ exactamente cuando para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, existen a, b, c con $a + b + c < q + \varepsilon$ y $d(x,y) \leq c$. Si $d(x,y) \leq q$, entonces nosotros podemos escoger $a = b = \varepsilon/3$ y $c = q$ para mostrar que $d(S^x, S^y) \leq q$. A la inversa, supongamos $d(S^x, S^y) \leq q$. Para mostrar que $d(x,y) \leq q$, es suficiente para mostrar que $d(x,y) \leq q + \varepsilon$ para todo ε. Pero $d(x,y) \leq q + \varepsilon - a - b$

Que X esta inmerso densamente en $\hat{X}$ es inmediato por el lema 3.4.1

Finalmente, mostraremos que si X tiene puntos localizados, entonces también $\hat{X}$ los tiene. De hecho, mostraremos que si X es un subconjunto denso de Y, y X tiene puntos localizados, entonces *Y* tiene puntos localizados. Supongamos que $p < q$ y $y_1, y_2 \in Y$. Escojamos $x_1, x_2 \in X$ de tal forma que

$$d(x_i, y_i) \leq a < (q - p)/4$$

Si $d(x_1, x_2) \leq q - 2a$, entonces $d(y_1, y_2) \leq q$. Si $d(y_1, y_2) \leq p$, entonces $d(x_1, x_2) \leq p + 2a$. Pero si X tiene puntos localizados, entonces o bien se tiene que $d(x_1, x_2) \leq q - 2a$ o no $d(x_1, x_2) \leq p + 2a$. ■

Cada familia regular T da lugar a una familia más grande C equivalente definida como $C_q = \{x \in X : d(S^x, T) \leq q\}$. El lema 3.4.1 muestra $T_q \subset C_q$. Lo que queda por demostrar es que *C* es una familia regular, es decir, si $x \in C_p$ y $y \in C_q$, entonces $d(x,y) \leq p+q$. Esto es inmediato de la desigualdad triangular en $\hat{X}$. Por lo que cada elemento de $\hat{X}$ tiene un representante canónico.

Teorema 3.4.3 *Si X es un subconjunto denso de un espacio premétrico Y, y Z es un espacio premético completo, entonces cualquier función (uniformemente continua) de X a Z se extiende de forma única a una función (uniformemente continua) de Y a Z.*

Demostración: Sea $f: X \to Z$ una función uniformemente continua sobre subconjuntos acotados. Extenderemos f a $g: Y \to Z$. Basta con mirar a f en subconjuntos acotados de X, por lo que podemos suponer que f es uniformemente continua. Para cada $y \in Y$, se define una familia regular de subconjuntos de Z como

$$S_q(y) = \{f(x): d(x,y) \leq p \text{ y } f(E_{p+\varepsilon}) \subset E_q \text{ para algunos } p, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$$

En una prueba típica podríamos decir, o insinuar, cosas como estas: Para definir $g(y)$ en el espacio completo Z, necesitamos aproximar $g(y)$ dentro q. Escogemos *p* y ε de modo que $f\left(E_{p+\varepsilon}\right) \subset E_q$. Escogemos x de modo que $d(x,y) \leq p$. Entonces $f(x)$ es una *q*-aproximación a $g(y)$. Aquí vamos a completar los detalles.

Para mostrar que $S(y)$ es una familia regular, suponemos que $f(x) \in S_q(y)$ y $f(x') \in S_{q'}(y)$ con sus correspondientes testigos $p, \varepsilon, p', \varepsilon'$. Escogemos x'' tal que $d(x'',y) \leq \min(\varepsilon, \varepsilon')$. Entonces $d(x,x'') \leq p+\varepsilon$ y $d(x',x'') \leq p'+\varepsilon'$, por lo tanto $d\left(f(x), f(x'')\right) \leq q$ y $d\left(f(x'), f(x'')\right) \leq q'$, donde $d\left(f(x), f(x')\right) \leq q+q'$. Por lo que la familia $S(y)$ es regular.

Debido a que Z es completo, existe un único $z \in Z$ de modo que $d(s,z) \leq q$ para cada $s \in S_q(y)$. Definimos $g(y) = z$.

Para mostrar que g extiende a f, suponemos que $y \in X$ y $s \in S_q(y)$. Entonces tenemos s = *f(x)*, donde $d(x,y) \leq p$ y $f(E_{p+\varepsilon}) \subset E_q$. Así $d(s, f(y)) \leq q$ para cada $s \in S_q(y)$, así $g(y) = f(y)$ por la definición de $g(y)$.

Para mostrar que g es uniformemente continua mostramos que si $f(E_p) \subset E_q$, entonces $g(E_{p-\varepsilon}) \subset E_q$ para algún $\varepsilon > 0$. Es suficiente mostrar que $g\left(E_{p-\varepsilon}\right) \subset E_{q+\delta}$ para cualquier $\delta > 0$. Hay un positivo $\theta \leq \varepsilon/2$ de modo que $f(E_{2\theta}) \subset E_{\delta/2}$. Supongamos que $d(y,y') \leq p - \varepsilon$. Existen $x, x' \in X$ de modo que $d(x,y) \leq \theta$ y $d(x',y') \leq \theta$ porque X es denso en Y.

Por lo que $f(x) \in S_{\frac{\delta}{2}}(y)$ y $f(x') \in S_{\frac{\delta}{2}}(y')$, por lo cual

$$d(f(x), g(y)) \leq \delta/2 \text{ Y } d(f(x'), g(y)) \leq \delta/2.$$

Tenga en cuenta que $d(x,x') \leq p$ porque $\theta \leq \varepsilon/2$, así $d(f(x), f(x')) \leq q$, por lo que $d\left(g(y), g(y')\right) \leq q + \delta$, esto es lo que queríamos mostrar■

Capítulo 4.

CONTRASTES GENERALES DE LAS CONSTRUCCIONES DE LOS NUMEROS REALES POR BOURBAKI Y RICHMAN.

Bourbaki para su construcción de los números reales, toma como punto de partida una topología sobre $\mathbb{Q}$, luego le asocia una estructura uniforme, lo que le permite hablar de cercanías dos a dos. Para hacer que este espacio sea completo, deben agregar los límites, entonces definen la noción de filtro.

Los filtros son la generalización de las sucesiones Cauchy, como los límites de las sucesiones tienen una convergencia muy débil entonces Bourbaki prefiere usar los filtros de Cauchy, los vuelven un espacio uniforme, luego miran que este espacio sea completo, es decir, que todo filtro de Cauchy converge.

Richman tiene el mismo problema; tiene $\mathbb{Q}$ y quiere meterlo dentro de un espacio completo, la idea de filtros la va a cambiar por familias regulares, lo que en sí está diciendo Richman es que no va a usar una teoría tan fuerte como la de filtros, por lo que coge las familias regulares que se manejan como conjuntos y luego lo que debe hacer es completarlas.

Richman tiene inicialmente a $\mathbb{Q}$ como una colección de E_q para todo $q \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, el cual es un espacio $\langle \mathbb{Q}, \{E_q\} \rangle$ con una estructura de espacio premétrico, entonces él trabaja con estos conjuntos. Richman trabaja las sucesiones de Cauchy no como sucesiones sino como conjuntos, es decir, estos serán familias regulares, las cuales reemplazarán los filtros de Cauchy. Entonces para mirar que es completo y al no contar con las sucesiones de Cauchy, Richman coge las familias regulares, seguido define una relación de equivalencia, parte el conjunto de estas familias regulares por esta relación, siendo el conjunto resultante, los números reales. Luego se observa que esa partición sea un conjunto completo.

Bourbaki no hace relación de equivalencia, como los filtros están ordenados él coge el más pequeño y lo toma como representante, al conjunto de estos los llama filtros regulares minimales que denota como $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$, entonces para él poder decir que ese $\mathcal{F}_{\mathcal{R}}$ es un espacio como el que partió entonces tiene que darle la estructura de espacio uniforme. Con Richman se tiene el mismo problema, se tienen las familias regulares, se parten con la relación de equivalencia y a eso se le llama $\mathbb{R}$, pero como se partió de espacios premétricos, entonces se le debe dar la misma estructura del conjunto del que partió, una estructura de espacio premétrico.

En la construcción de los números reales de Cantor, este define la relación de equivalencia en las sucesiones de Cauchy sobre $\mathbb{Q}$, forma el cociente dado por esta relación y a eso lo llama $\mathbb{R}$, como se partió de un cuerpo algebraico, en este caso un cuerpo arquimediano, se demuestra que este cociente es un cuerpo arquimediano y luego que es completo, es decir que toda sucesión de Cauchy en este cuerpo converge.

De la misma forma, Richman toma las familias regulares que son casi como los números reales, define una relación de equivalencia entre ellas, pasa al cociente, crea los números reales, le da la misma estructura que tenía y después muestra que es completo. Está sigue siendo una construcción clásica, no es una construcción novedosa en ningún sentido sino que se diferencian en las herramientas que utilizan. En cuanto a lo realizado por Bourbaki y Richman, la idea de fondo es la misma que la de Cantor y Dedekind. Pero lo que es cierto, es que la herramientas como los conjuntos usadas por Richman no son tan complejas como los filtros de Cauchy que usa Bourbaki.

CONCLUSIONES

Con la intención de contribuir en el proceso de enseñanza de los números reales se presentó la construcción de estos números realizada por Richman, construcción que nos permitió evidenciar nuevos aspectos de la constitución de los números reales, que no se evidencian en otras construcciones.

Richman inició con una idea intuitiva, definiendo el conjunto de los números que no hacen parte de los racionales, estos serían los $x \notin \mathbb{Q}$, entonces forma sucesiones con elementos de $\mathbb{Q}$ que serán muy próximos a un número x, los cuales están muy próximos unos de otros, de tal manera $\{x_n\} \longrightarrow x$. Ahora piensa en cada $x_n \in E_p$. Seguido establece como expresar entre entornos la noción intuitiva de sucesiones de Cauchy.

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in E_p \\ x_m \in E_q \end{array}\right\} \Longrightarrow x_n, x_m \in E_{p+q}$$

Como Richman está inspirado en el intuicionismo de Heyting y Brouwer, este escoge un x_n de cada E_p, pensándolo como una secuencia infinita. Luego el problema de completar $\mathbb{Q}$, para eso Richman formula un procedimiento infinito de selección, el cual consiste en coger un elemento de cada entorno, de un conjunto infinito de entornos que gocen de un buen comportamiento (según las sucesiones de Cauchy).

Como apenas es natural, al hablar de entornos, Richman está pensando en nociones basadas en topología; la rama de la matemática que trata el conjunto de elementos, en las que sus elementos tienen cercanías arbitrarias, sin embargo, no se quiere llegar tan lejos en la manipulación de estos objetos. Richman piensa en cercanías muy próximas a espacios métricos pero sin tener una métrica definida como tal, pues si se tuviera una métrica, por su misma definición ya se tendría el conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}_0^+$, todo esto porque la definición de distancia entre puntos, se encontraría implícitamente en el conjunto antes mencionado.

Como se está partiendo de los números racionales $\mathbb{Q}$, entonces los números q se tomaron como elementos de $\mathbb{Q}_0^+$, más aún para capturar la idea de acercamiento no es suficiente las vecindades de $\mathbb{Q}$ y tampoco hay que extrañarse con la introducción del "cero", pues se quiere acercar lo más próximo a la idea de métrica.

Ahora Richman necesitó definir la noción de acercamiento entre dos puntos, para eso quiso capturar la idea intuitiva "x está cerca de y" entre los elementos de una vecindad. Lo primero es definir dos números (x, y) $\in V_\varepsilon$, decir que "x está muy cerca de y" cuando se comparan dos a dos, y se tienen dos elementos iguales, esta noción $(x, x) \in V_\varepsilon$ captura bien esta la idea que tiene Richman. Por eso, él definió estas vecindades como subconjuntos de un entorno formado a partir de $\mathbb{Q}$, entonces $V_\varepsilon \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Luego si $x = y \ donde \ (x, y) \in V_\varepsilon$ se tiene que mirar que es V_ε , para lo que una respuesta natural seria que $V_\varepsilon = \{(x, x): x \in \mathbb{Q}\}$. Así podemos tomar que los $E_q \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\, ; con\ q \geq 0$. Con lo cual tendríamos por intuición que "x está cerca a y" si y solo si $(x, y) \in E_q$ para algún $q \in \mathbb{Q}^+$. De acuerdo a que tan pequeño sea q, tendremos una mayor cercanía entre dos números determinados, así $x = y$ equivale a tener que $(x, y) \in E_0$.

Cerca de la estructura uniforme de Bourbaki, si se quiere entre métrica y estructura uniforme, se define una estructura premétrica, en la cual los $\left\{V_q \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : |x-y| \leq q\}, q \in \mathbb{Q}_o^+ \right\}$ satisfacen las condiciones mencionadas. Por lo que se puede deducir que $\langle \mathbb{Q}, V_q \rangle$ es un espacio premétrico.

Esta construcción de los números reales cuenta con un lenguaje matemático y teoría matemática que se ajusta a las exigencias de los primeros años universitarios, ya sea de Licenciatura en Matemática o en Matemática pura, pues sus estudiantes tendrán la madurez necesaria para afrontar esta construcción, que cuenta con una teoría asequible, lo cual facilita la comprensión o apropiación del concepto de número real.

Al presentar esta nueva construcción de los números reales de Fred Richman se dejan en evidencia sus aportes, fundamentos teóricos y conceptuales a los profesores en formación inicial y permanente, para que estos tengan nuevas herramientas para la comprensión de $\mathbb{R}$, debido a la naturaleza compleja de la apropiación conceptual de los números reales, pues como lo menciona (Recalde & Arbeláez, 2011, p.11) "*concretamente en casos de la enseñanza de objetos matemáticos como los números reales que, por la naturaleza compleja de su desarrollo y apropiación conceptual, exigen el diseño de nuevas perspectivas y posibilidades agenciadas desde diversas disciplinas*".

BIBLIOGRAFIA

1. Anacona, M., & Ortiz, G. (2011). La noción de vecindad en la apropiación de los reales. En G.I. Arbeláez & L.C. Recalde (Comps). *Los números reales como objeto matemático (pp. 163- 191). Santiago de Cali: editorial Universidad del Valle.*
2. Arbeláez, G.I., & Gálvez. (2011). El conjunto de los números reales como objeto matemático: la "construcción" de Dedekind. En G.I. Arbeláez & L.C. Recalde (Comps). *Los números reales como objeto matemático (pp. 135- 161). Santiago de Cali: editorial Universidad del Valle.*
3. Arbeláez. G.I & Recalde. L.C (Comps). *Los números reales como objeto matemático. Santiago de Cali: editorial Universidad del Valle.*

4. Arboleda, L.C. (2011). Objetividad Matemática, Historia y Educación Matemática En G.I. Arbeláez & L.C. Recalde (Comps). *Los números reales como objeto matemático (pp. 135- 161). Santiago de Cali: editorial Universidad del Valle*
5. Bourbaki.N. (1966). *Elements of Mathematics General Topology Part 1. Addison Wesley Publishing.*
6. *Brouwer, L. (1951). Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*. Cambridge University Press.
7. De Jongh, D*. Intuicionismo.* Institute for Logic, Language and Computation. Universiteit van Amsterdam.
8. *Gutiérrez, J. (2009). Lógica intuicionista dual y algebras de co-Heyting. Tesis* de grado. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

9. Richman, F. (2008).*Real numbers and other completions*. Mathematical Logic Quarterly, 54, p. 98–108. Doi: 10.1002/malq.200710024

10. Richman, F. (2000). *Constructive mathematics without choice*. *Reuniting the antipodes---constructive and nonstandard views of the continuum*, Schuster et al. eds., Kluwer, Synthese Library, 199--205.

11. Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Revista Curriculum y Formación del profesorado*, 1-15.

12. Sánchez, D (2012). *Los números reales por Bourbaki y por Choquet: un estudio comparativo de las construcciones con fines educativos.* Tesis de grado. Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia

13. Sanabria, G. (2005). Los números reales utilizando cortaduras de Dedekind y sucesiones de Cauchy: Una propuesta didáctica. IV CIEMAC.

14. Torres, C. (2005). Kant visto desde las matemáticas**.** Revista Digital Universitaria [en línea]. 6(1). recuperado de http://www.revista.unam.mx/vol.6/num1/art06/int06.htm