LA MODELACIÓN Y LA TRANSVERSALIDAD DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO: EL CASO DE LA ESTABILIDAD

David Zaldívar, Andrés Ruiz-Esparza, Johanna Mendoza y Tamara Del Valle
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. (México)
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
jdzaldivar@crfdies.edu.mx, andresruizep@gmail.com, ejmendoza@cinvestav.mx, tamaradc.mat@gmail.com

Palabras claves: modelación, transversalidad, estabilidad
Keywords: modelling, cross-cutting nature, stability

RESUMEN
La modelación y la graficación, desde una postura Socioepistemológica, se consideran desde una visión de construcción social, lo cual implica no centrar la mirada en el objeto matemático, sino en las argumentaciones que se hacen de dichos objetos, en tanto su uso y su desarrollo. Para reflexionar sobre ello, se abordará la propiedad de estabilidad, con el fin de promover la matemática funcional presente en el cotidiano de los ciudadanos en aquellos procesos de modelación y de reconocer el carácter transversal que tiene la matemática para con otras disciplinas científicas que aportan elementos para el diseño de tales situaciones.

ABSTRACT
From a socioepistemological point of view, the concepts of modelling and graphing are considered as social constructions. Thus, the focus is not in the mathematical objects, but the arguments that are made of such objects, while they are in use in specific situations. To establish a stance about the modelling and graphing we reflect upon the phenomenon of stability, from its functionality to promote arguments that are in the daily life of citizens and to recognize the cross-cutting nature of mathematics to other scientific disciplines.

Introducción

En los últimos años, la modelación gana terreno como estrategia de enseñanza de la matemática. Asimismo, se han analizado las ventajas de considerar a la gráfica como un medio para la visualización de las funciones y demás expresiones analíticas. Sin embargo, considerar a la modelación y la gráfica únicamente como "una aplicación de la matemática" y "la representación del concepto de función", respectivamente, opaca aspectos funcionales que pudieran conformar un marco de referencia para el rediseño del discurso matemático escolar (dME).

El presente curso parte de una reflexión y crítica a dichas visiones, a partir de la implementación y discusión de diseños de situación basados en la categoría *desarrollo de red de usos del conocimiento matemático* (Méndez, 2013). De esta manera, la modelación y la graficación no se consideran únicamente como estrategias de enseñanza, sino que permiten centrar la mirada en las argumentaciones que se hacen de los objetos, en tanto su uso y su desarrollo (Cordero, 2008).

A partir de actividades que abordan la propiedad de estabilidad, se muestra y discute, por una parte, la matemática funcional presente en el cotidiano de los ciudadanos con relación a esta propiedad (Cordero, 2013), y por otra, el carácter transversal de la matemática para con otras disciplinas científicas.

Modelación y transversalidad del conocimiento

Si hablamos de modelación se identifican dos posturas que aluden, por un lado a representar la realidad y, por el otro a una aplicación de estructuras de conocimiento a una situación real. En la modelación matemática se requiere de un objeto predeterminado, ya sea para representarlo o distinguirlo de otro. En la Matemática Educativa, con respecto a este tópico, se estudian las clases de representaciones y sus relaciones, así como los registros semióticos y su articulación con los procesos cognitivos del individuo (Cordero, en prensa). Cualquiera de estas posturas de la modelación está relacionada con la realidad, y más aún consideran que la realidad preexiste al conocimiento.

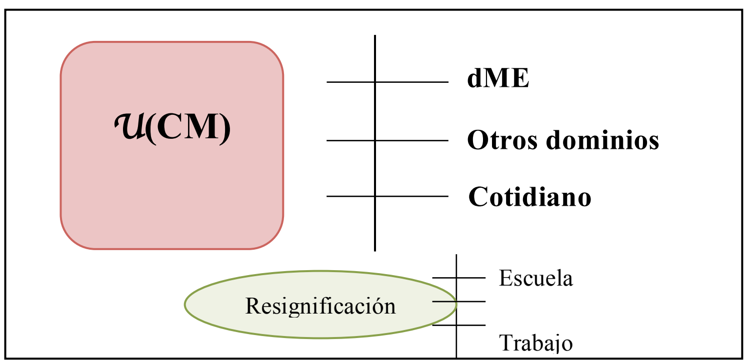
Si consideramos la realidad como lo habitual en escenarios del trabajo, la ciudad y las disciplinas, la categoría de modelación es otra. Debería responder a lo que es de utilidad al humano en una situación específica. No es la modelación matemática, que responde a la obra matemática, es una modelación más cercana al humano, a sus costumbres y vivencias, a una matemática funcional. En esta postura, la modelación es una práctica que centra su mirada en los significados, procedimientos e instrumentos que una comunidad pone en uso al enfrentar situaciones específicas propias de su cotidiano. *Es una práctica plasmada, específicamente como la argumentación de la situación en cuestión* (Cordero, 2011; p383), la cual está compuesta de resignificaciones con sus respectivos procedimientos *que se van construyendo de acuerdo* con *las operaciones que los participantes son capaces de hacer, con las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar y con los conceptos que van construyendo progresivamente* (Cordero, 2011, p. 384).

Por ejemplo, consideremos cierto fenómeno: el movimiento de los planetas. *A priori,* no lo vemos*;* sin embargo, lo reinterpretamos con ideas, con cosas que uno hace a la luz de la cultura, de las formas de conocer, de formas de vivir. Al no verlo, con los ojos físicos, sino con los ojos de la mente, se construyen las propias ideas, se hacen ajustes en su estructura hasta alcanzar un patrón deseable que soporte el desarrollo del razonamiento y la argumentación propias del cotidiano en el que se encuentra inmerso, que *a priori* no responden a una estructura de la obra matemática.

Esta postura alternativa de la modelación, nos obliga a estudiar las resignificaciones de los usos del conocimiento en los escenarios habituales de las comunidades de conocimiento que emergen al enfrentar una situación específica. Así lo que es de utilidad para un ingeniero, no necesariamente lo será para un biólogo, un matemático, un economista, un profesor o para la gente. Esto obliga a la Matemática Educativa a reconfigurar como objeto de estudio la transversalidad y proponer un modelo de los usos del conocimiento matemático (U(CM)) en diferentes escenarios y dominios: la escuela, el trabajo y la ciudad (Figura 1).

Todo lo que evidencie el modelo, será aquel conocimiento que se desarrolle y se acepte como producto material social que tenemos que enseñar y aprender; con base en ello se construirán diseños de situación de aprendizaje que promoverán la construcción de la argumentación situacional en lo que pudiera considerarse una aula extendida.

Figura 1. Modelo de Transversalidad de los Usos del Conocimiento Matemático



■ La propiedad de estabilidad

Para ejemplificar nuestra postura de modelación y transversalidad del conocimiento matemático, tomamos como caso de estudio la estabilidad. Se han identificado situaciones propias en algunos dominios de conocimiento como el dME y el cotidiano del ciudadano donde se resignifica la estabilidad en la modelación-graficación.

El pasaje de resignificación de la estabilidad consiste en poner en juego el momento cuando el comportamiento asintótico alude a la forma de la tendencia, lo que obliga a que la gráfica sea argumentativa. En ese sentido, la gráfica de la función *y(x),* en la ecuación $y'(x)+y(x)=F(x)$ consiste en considerar una función con comportamiento tendencial. La construcción formula la tendencia y el patrón de comportamiento. La argumentación no sería otra cosa que establecer relaciones entre dos funciones, *F(x)* y *y(x)*, a través de determinar un comportamiento que tiende a otro comportamiento cuando *x* toma valores grandes, con ello el participante reconstruye significados a la ecuación diferencial lineal (Sólis, 2012).

Para ejemplificar lo antes mencionado, se presentan dos casos de análisis. En cada caso la estabilidad se resignifica en la *búsqueda de la permanencia* a través de patrones que expresan variaciones. De esta manera, la estabilidad se argumenta como un comportamiento tendencial.

■ Caso 1: ¿Frío o caliente? (Ruiz-Esparza, 2014)

El presente diseño de situación está perfilado para un escenario de socialización de la ciencia, en el que los conocimientos de los participantes sobre la variación de la temperatura se complejizan en el desarrollo de actividades que involucran la experimentación con ayuda de sensores y software graficador. Consta de tres momentos significativos descritos a continuación:

Momento de mantenimiento: El primer momento pretende discutir con los participantes aspectos que están relacionados con el fenómeno de la temperatura de los cuerpos. Para ello, se establecen actividades las cuales evocan tales aspectos por medio de representaciones pictográficas –dibujos– y gestos, que expresen la interpretación de su realidad subjetiva y cómo explican el fenómeno en cuestión. Para ello se plantea la situación: *Dibuja algo que se enfría y/o algo que se calienta*. Antes de concluir con esta actividad y posterior a la revisión de las producciones de los participantes, se plantean las preguntas como las siguientes: *¿Qué hay entre caliente y frio?, ¿o entre frio y caliente?; ¿Qué ocurre entre un dibujo y otro?*

La intencionalidad de las preguntas anteriores es problematizar los argumentos que se elaboran en la primera actividad. Como se puede observar, la actividad intencionalmente busca confrontar las estructuras concretas de los participantes que dejen ver qué tipo de elementos se ponen en discusión en este primer momento de la situación. Al asumir los *mantenimientos de rutina* como argumentación, esta actividad permite entender las variadas formas culturales de saber (asociadas al fenómeno), constituidas y estructuradas histórica y socialmente, que son concretas, pragmáticas, vivenciales, que se repiten y son usadas para salvaguardar cierto grado de simetría entre la realidad subjetiva y la objetiva, es decir, involucra al ser social en tanto el "otro" inmerso en un escenario (Zaldívar, 2014).

Momento de anticipación–crisis. En este segundo momento, los significados que se tratan de generar en los participantes tienen que ver con los modelos que se obtienen con ayuda de la tecnología escolar (sensores de temperatura), y que están relacionados con argumentos que involucran lo asintótico. Para este momento de la situación, se plantean *experimentos* relacionados con los fenómenos en cuestión, en los que la constante es la clase de tareas que se piden a los participantes: anticipar la gráfica de movimiento o de la temperatura de acuerdo a la descripción verbal del experimento, y explicarla de acuerdo a sus argumentaciones del fenómeno; por ejemplo:

Experimento 1. A una taza con la mitad de agua templada, con el sensor adentro de la taza.

Experimento 2. Se calienta un trozo de silicón en una pistola hasta derretirse, y se coloca en el silicón derretido el sensor de temperatura.

- *¿Qué es lo que va a pasar?*
- *¿Cómo va a ser la gráfica que va a proporcionar el sensor?*
- *Una vez realizado el experimento, ¿en qué se parecen sus gráficas y en qué no?*

Experimento 3. Consideremos dos recipientes con agua a diferentes temperaturas: una olla o vasija amplia con agua fría, y una taza con agua caliente

- *¿Cómo es la gráfica de la temperatura de cada uno?*
- *¿Qué ocurrirá al introducir la taza en la olla?*
- *¿Cómo serán las gráficas producidas por el sensor?*
- *Una vez realizado el experimento, ¿en qué se parecen sus gráficas y en qué no?*

En este momento el cotidiano se relaciona con la tecnología y su funcionamiento, lo cual posibilita las realizaciones múltiples y ajustes en la estructura de la gráfica, y simulaciones con diferentes parámetros. Además, la tecnología permite la discusión y el reconocimiento de puntos de referencia, tales como los ejes cartesianos y el origen del mismo.

Momento de generación–funcionalidad. La intencionalidad de este tercer momento es mantener una estructura más compleja de argumentaciones sobre lo estable a partir de la construcción de gráficas cartesianas como modelos explicativos de la situación planteada. Aquí se plantea una tarea de reversibilidad, es decir, ya no se presenta un fenómeno para anticipar su gráfica, sino que se les brinda a los participantes el bosquejo de una gráfica y se les pide plantear los lineamientos de un experimento que produzca tal gráfica.

■ Caso 2: ¿Con cuál botella te quedas? (Del Valle, 2015).

En Del Valle (2015) de argumentaciones de *optimización Arg(op)*. La situación de selección requiere de un instrumento, el cual lo dirige hacia algún ideal (sino la selección podría ser al azar); se trata de elegir el que esté más próximo al ideal (tomando en cuenta las variables de condición). El ideal al cual se tiende con la selección es a lo que le hemos llamado estable. El diseño de situación se desglosa en 2 momentos. En el primero se promueve la adaptación desde maniobras tangibles y en el segundo, las maniobras implican adaptaciones desde lo continúo.

Momento 1:

Actividad 1:	*Actividad 2*
De las botellas entregadas ¿Cuál contiene una cantidad de líquido similar a la botella con tapa rojo?	De las botellas entregadas ¿Cuál de las botellas contiene una cantidad de líquido similar a la botella de color rojo?
	

En el primer momento, se requiere seleccionar una de las botellas etiquetadas de la "A" a la "E". La selección no es azarosa, ya que se requiere seleccionar aquella que tenga una cantidad de líquido que más se aproxime al líquido que contiene la botella de tapa roja en la actividad 1 y a la botella de color rojo en actividad 2. Precisamente, el líquido que contienen estas últimas botellas son el referente para realizar la selección, convirtiéndose en el patrón que dirigiré la toma de decisión. Por consiguiente, lo estable se convierte en aquel instrumento necesario en una situación de selección para generar argumentaciones.

En la actividad 2 se pretende provocar una ruptura en la manera en que se está seleccionando, ya que la forma de las botellas es diferente, lo estable es de diferente naturaleza.

Momento 2:

Actividad 1:

Con un flujo constante de agua se llena un recipiente de forma desconocida. Al completar la capacidad del recipiente se obtiene la siguiente información:

Tiempo de llenado en segundos (s)	Altura del volumen que lleva el agua dentro de la botella en milímetros (mm)
0	30
5	132
15	256
30	447
45	606

Qué función representa de mejor manera el llenado del recipiente.

a) ***f(s) = 15s + 73.5***

b) ***f(s) = 13,4s +35***

c) ***f(s) = 14.03s + 30***

d) ***f(s) = 14.03s +73.5***

Actividad 2:

Con un flujo constante de agua se llena un recipiente que posee una forma desconocida. La información arrojada al llenarse el recipiente se muestra en la siguiente tabla:

Tiempo de llenado en segundos	Altura del volumen que lleva el agua dentro del recipiente (mm)
1	15
3	40
6	47
8	85
9	88
…	…
40	¿…?

Si nos conviene interpretar el llenado del recipiente como un comportamiento de variación uniforme. Entonces, ¿cuál es ese comportamiento?
Si a los **40** segundos de llenado el recipiente rebasa su capacidad máxima ¿Cuál es la altura del recipiente?

En el momento 2, lo estable es la recta que representa de mejor manera el comportamiento del llenado de una botella. En la actividad 1 se pide seleccionar explícitamente entre las opciones que allí aparecen, lo estable está en la búsqueda del menor margen de error entre los datos de la tabla y las funciones que representa esos datos. En cambio, en la actividad 2, se espera que formulen lo estable, y así seleccionar la recta que mejor represente el comportamiento de los datos de la tabla y proponer una altura aproximada del recipiente.

Comentarios finales

Las actividades que se presentaron se integran a un programa de investigación amplio, emergente y en continuo desarrollo dentro del campo de la Matemática Educativa. Dicho programa tiene por finalidad entender *la construcción social del conocimiento matemático en escenarios sociales* y se ubica dentro de la gama de las tendencias actuales que abogan por caracterizar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de una manera transversal y en escenarios socioculturales, en contraposición con posturas individualistas y centradas únicamente en el desarrollo de objetos matemáticos.

Lo transversal desde esta postura también significa tensar aspectos que desde las investigaciones en la disciplina parecen inamovibles, por ejemplo: la noción de aula, el funcionamiento del conocimiento en escenarios no escolares y otras formas en que las personas se relacionan con el conocimiento, es decir, de "ser" con el conocimiento. En los ejemplos que se mostraron justo basar los diseños en categorías de conocimiento tal como la *modelación-graficación* y la *optimización*, nos permitió evidenciar que lo estable permea las explicaciones y argumentaciones de los participantes de manera transversal a la luz del uso de las gráficas que se presentaban o en las estrategias de selección de las que se echaba mano para dar explicaciones. Así, el posicionamiento sobre lo funcional como parte medular de los diseños, permite dar cuenta de aquella matemática que está opaca en las explicaciones escolares, pero que surge desde los participantes y sus argumentos.

Por último, la intención principal del curso fue motivar una reflexión y una crítica profunda al dME, así como un posicionamiento sobre la modelación y graficación desde una postura Socioepistemológica. Consideramos que es posible reinterpretar la importancia que revisten dichas nociones en el ámbito escolar, con la finalidad de ubicarlas en un estatus distinto al que actualmente tienen y de esta manera afectar de manera benéfica al sistema didáctico. Pero también fue dejar ver, con los ejemplos concretos, que al centrar la atención en lo funcional, la transversalidad se amalgama con los usos del conocimiento matemático.

Agradecimiento. Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Las Resignificaciones del Uso del Conocimiento Matemático: la Escuela, el Trabajo y la Ciudad. Clave 0177368

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. (2011). La modelación y la graficación en la matemática escolar. En L. M. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta y A. R. Hernández Ulloa (Coords.), *Razonamiento Matemático. Epistemología de la Imaginación. (Re)pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa* (pp. 377-399). Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (en prensa). Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: El Eslabón de la Matemática y el Cotidiano. En Díaz y Arrieta (Eds.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa*. España: Díaz de Santos.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica.* Tesis de doctorado no publicada. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Ruiz-Esparza, A. (2014). *Rediseño de una situación específica desde una categoría del cotidiano: de la divulgación hacia la socialización de la ciencia*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Solís, M. (2012). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo. Caso de la predicción y la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Zaldívar, D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.