

## COMPETENCIAS PARA EL ANÁLISIS COGNITIVO DE TAREAS SOBRE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL POR PROFESORES EN FORMACIÓN

**Walter F. Castro, Juan D. Godino, Patricia M. Konic y Mauro Rivas**

Universidad de Antioquia. (Colombia)

Universidad de Granada. (España)

Universidad Nacional de Río Cuarto. (Argentina)

Universidad de los Andes. (Venezuela)

wfcastro82@gmail.com, jgodino@ugr.es, pkonic@gmail.com, rmauro@ula.ve

**Palabras clave:** análisis cognitivo, razonamiento algebraico elemental

**Key words:** cognitive analysis, elementary algebraic reasoning

### RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es informar sobre el desarrollo de competencias para el análisis de configuraciones cognitivas de tareas sobre razonamiento algebraico elemental efectuadas por maestros en formación sobre tareas resueltas por niños de escuela elemental. El marco teórico usado fue el Enfoque Ontosemiótico de la cognición y de la instrucción matemática. Los profesores suelen asociar el álgebra con técnicas de manipulación simbólica en lugar de asociarla con el “razonamiento algebraico” que suele estar presente en diversas ramas de las matemáticas. El desarrollo de competencias de análisis cognitivo de tareas de naturaleza algebraica puede ser una vía para promover un cambio en la concepción que los maestros tienen sobre el álgebra y su presencia en el currículo escolar. Los análisis cognitivos desarrollados por los maestros permitieron poner en evidencia sus conocimientos en torno a la naturaleza ontológica del álgebra.

### ABSTRACT

The objective of this communication is to report on the assessment of the development of preservice teachers cognitive analysis competencies of elementary algebra tasks, when discussing algebraic tasks solved by primary students. The Onto-semiotic Approach to cognition and mathematical instruction provided the theoretical frame to develop the study. The preservice teachers usually link algebra to symbolic manipulation instead of linking it to “algebraic reasoning” that characterizes some mathematics branches. The development of cognitive analysis competencies of early algebra tasks could be a way to foster a change not only in the beliefs that teachers hold on algebra but also in promoting its inclusion on primary curriculum. The cognitive analysis developed by the teachers allowed showing their knowledge in regard to the ontology of algebra.

## ■ Introducción

Algunos investigadores (Wagner y Kieran, 1989; Bednarz, Kieran y Lee, 1996) han informado sobre las dificultades de los niños en el tránsito desde la aritmética hasta el álgebra en el contexto curricular de la escuela secundaria. Kaput (2000) hizo una propuesta denominada “*algebra for all*”, en la que sugiere tomar acción para promover al álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas en lugar de ser inhibidora. Sin embargo, la inclusión del razonamiento algebraico en la escuela primaria requiere de maestros preparados para reconocer el álgebra y promoverla en la escuela primaria. La pregunta “¿Pueden los maestros de primaria enseñar álgebra?” formulada por Carraher y Schlieman (2007, p. 675) motiva el objetivo general del presente trabajo: la evaluación y desarrollo de competencias de análisis cognitivo de tareas sobre RAE.

## ■ Marco teórico y metodología

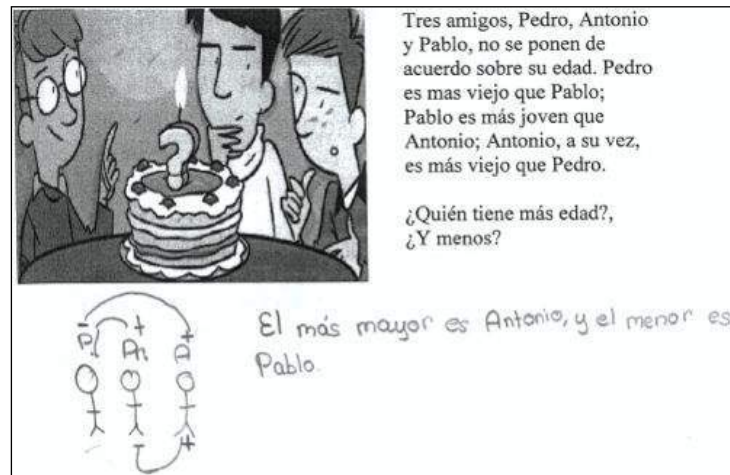
El marco teórico usado fue el Enfoque Onto-Semiótico de la Instrucción y la Cognición (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). Las herramientas teóricas usadas para efectuar el análisis epistémico-cognitivo (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008) permitieron llevar a cabo el análisis, específicamente se utilizaron las entidades primarias: lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades, y argumentos para desarrollar el análisis cognitivo. El análisis de estos elementos y las relaciones entre ellos permiten determinar el nivel de comprensión que los maestros adquieren sobre los objetos matemáticos presentes y emergentes de las tareas desarrolladas por niños de escuela elemental. La metodología adoptada para abordar el problema fue cualitativa. La indagación se realizó con dos poblaciones: la primera refiere a niños de escuela elemental, quienes resolvieron algunas tareas matemáticas con algunos rasgos algebraicos, y la segunda refiere a maestros en formación, quienes valoraron las tareas resueltas por los niños.

Se acudió a un instituto mixto de educación primaria situado en Granada (España), que permitió tomar datos sobre las competencias de resolución de tareas, que incluyeran elementos de RAE, por niños de sexto grado (11 a 13 años de edad) de escuela elemental. Los maestros se agruparon voluntariamente en seis grupos para analizar las tareas de los niños. Por razones de espacio, en este documento solo se muestran segmentos de la entrevista de dos grupos de maestros. Del conjunto de 24 documentos escritos por los escolares, escogimos nueve que tenían el texto escrito de la solución. Solo reportamos una de las tareas propuestas. Vale decir que muchas soluciones dadas por los niños no ofrecían ni el procedimiento ni la justificación y solo daban la respuesta final. En este documento tan solo mostramos una de las tareas propuestas a los niños y una solución a tal tarea.

## ■ Una solución dada por los niños

El enunciado de la tarea (Tomada de Ferrero, Luelmo, Gaztelou, Martin y Martinez, 2007 ; p. 25) se muestra en la Figura 1. Una posible solución a la tarea se exhibe a continuación: La primera condición afirma que “*Pedro es más viejo que Pablo*”, por tanto se ubica a Pedro a la derecha de Pablo. La tercera condición afirma que “*Antonio es más viejo que Pedro*”, así que se ubica Antonio a la derecha de Pedro. De tal suerte que Pablo es el más joven y Antonio es el más viejo. La segunda condición afirma que “*Pablo es más joven que Antonio*”; por lo tanto, esta no ofrece información adicional que la contenida en las condiciones primera y tercera. Vale decir que ninguno de los niños o de los maestros en formación se percató de este hecho.

Figura 1: Una Solución de los niños a la Tarea de las Edades.



Las soluciones de los niños se agrupan en dos categorías: Las que dan sólo la respuesta y las que dan un procedimiento de solución. El primer grupo no se consideró en esta investigación. Del segundo grupo se escogió una solución en la que los niños usan elementos pictóricos como parte del procedimiento de solución de la tarea. La confluencia de elementos pictóricos y la ausencia de una justificación escrita en español hacen de la tarea una buena actividad para que los maestros en formación reconozcan los objetos matemáticos y los significados puestos en juego en tanto que es usual que los niños den este tipo de respuestas. La propuesta de solución a la tarea que se discutió con los maestros se ilustra en la Figura 1.

El procedimiento de solución del niño contempla el uso de cuatro elementos pictóricos relacionados entre sí:

- Viñeta que representan a los amigos: Pablo, Pedro y Antonio.
- Letras que representan los nombres de los amigos: P para Pablo, Pr para Pedro y A para Antonio.
- Los signos menos (-) y más (+) puestos en la parte superior e inferior de las viñetas.
- Arcos que conectan a las viñetas de los amigos y que se corresponden con las comparaciones dadas entre las edades.

La tarea es especialmente interesante en tanto que contempla dos procedimientos imbricados que están en la base de la relación comunicativa entre niño y maestro. El proceso de “codificación” de la solución por parte del niño y el proceso de “descodificación” que el maestro debe realizar como parte de la labor de reconocimiento de los objetos y significados puestos en juego por el niño. La identificación de objetos y significados imbricados en la solución pictórica dada por los niños es un reto para el maestro; Ben-Chaim, Lappan y Houang (1988) y Presmeg (1986) consideran que los niños no tienen dificultad para generar imágenes visuales; sin embargo, los maestros suelen manifestar dificultades para razonar sobre lo pictórico (Eisemberg, 1994). A continuación, se comenta la interpretación dada a la solución del niño. El niño representa a los sujetos de la tarea mediante viñetas a las que asocia las iniciales de sus nombres

mediante una asignación unívoca. Posteriormente representa las relaciones entre sus edades mediante el uso de dos recursos gráficos: El signo menos (-) para indicar que el sujeto sobre o debajo del cual se ha escrito, es “más joven” y el signo más (+) para indicar que es “más viejo”, las comparaciones entre dos sujetos se simbolizan mediante un arco que conecta las dos viñetas correspondientes a los nombres de los amigos cuyas edades se comparan.

La identificación de las relaciones, su simbolización y el uso que se hace de esta para dar la respuesta a la tarea estaría en la base del RAE. Es posible identificar una “regla de signos”: La viñeta a la que se le asignan dos signos “menos” corresponde al amigo que es más joven, la viñeta que tiene asignados un signo “menos” y un signo “más” corresponde a quien tiene la edad intermedia y finalmente, la viñeta que tiene asignados los dos signos “más” corresponde al amigo que tiene más edad. La indeterminación también se aprecia en este ejercicio: hay una relación de orden que puede ser establecida a partir de las condiciones dadas en el problema. A partir de condiciones se halla una relación.

### ■ Análisis realizados por los maestros en formación

En esta sección se mostrarán los análisis epistémico-cognitivos que los maestros en formación realizaron de la tarea de las edades, resuelta por los escolares (Figura 1). Los análisis realizados se hicieron durante una reunión de trabajo sostenida al final del periodo escolar universitario; las transcripciones muestran las opiniones de los maestros en formación que fueron extraídas del audio de dicha reunión y de las notas de campo del investigador. Las transcripciones revelan los análisis hechos por los maestros, los cuales muestran diversas concepciones. Se informa sobre sesiones de discusión sostenidas con maestros de grupos diferentes sobre la misma tarea; esto nos permitirá contrastar las opiniones de los maestros. Luego se exhibirán los análisis epistémico-cognitivos que dos grupos de maestros en formación realizaron sobre la tarea. A continuación, se exhibirá la tarea y posteriormente las discusiones sostenidas con los maestros en formación. Se aplicó el método de entrevista semiestructurada. Los estudiantes son identificados con la letra “E” seguida de un número; el investigador se identifica con la letra “I”.

### ■ Análisis epistémico-cognitivo realizado por los maestros

En esta sección se exhibirá el análisis epistémico-cognitivo que dos grupos de maestros en formación realizaron sobre la tarea de comparación de las edades.

#### Grupo G4

Los maestros en formación al ser interrogados sobre la naturaleza algebraica de la tarea, se muestran indecisos. El investigador continúa con el cuestionamiento:

I: ¿Es de razonamiento algebraico elemental?

E4: hmmm...creo que no, pues no hay números aunque si hay variables

E5: Tiene que asignar variable, por ejemplo x es Pedro.

I: ¿x es Pedro?

E5: Si x es Pedro

E6: x es la edad de Pedro o que es más viejo o joven.

Los estudiantes valoran la naturaleza algebraica de la tarea en función del concepto de “variable”, que es asociado por los maestros en formación, con valores desconocidos en la tarea. Kücherman (1981, p. 104)

establece la diferencia entre incógnitas y variables; para este autor una incógnita es una letra cuyo valor numérico puede ser determinado, mientras que una variable se ve como *“letra que representa un rango de valores no especificados, y como una relación sistemática entre tales valores”*.

### Grupo G5

Se entrega la solución que aparece en la Figura 1. El investigador continúa con el cuestionamiento:

I: La niña da esta respuesta y ofrece estos dibujos. Por favor, resuélvanlo para ver si la solución dada por la niña es correcta.

I: ¿Cómo lo resuelven ustedes?

E2: Igual que está resuelto aquí.

I: Estas rayas que unen a Pedro con Antonio, y a Pablo con Pedro, ¿Qué significan?

E2: Pedro es más mayor que Pablo, que es más joven; por eso aquí ponemos más y un menos, luego Pedro es más viejo que Pablo, Pablo es más joven que Antonio, entonces Pablo también es más joven que Antonio y Antonio a su vez es Antonio más viejo que Pedro.

I: Entonces, estas rayas significan que se está relacionando y ¿este signo más?

E2: Quiere decir eso, joven y viejo.

I: ¿Ustedes ven algo más en la solución, ven más símbolos, algo más que podamos interpretar?

E2: Al ver que aquí es más y aquí es más, pues es el más mayor [El estudiante señala los símbolos + y + que están arriba y debajo de la viñeta que representa a Antonio]. Luego al ver que aquí es más y aquí es menos porque es el mediano digamos, y aquí son los menos [Señala la viñeta que corresponde a Pablo].

Los estudiantes han asignado un significado plausible a los signos “+” y “-” usados por los niños.

I: ¿Ustedes creen que este dibujo, esta representación de [la solución] del problema lo podría uno defender ante un colega maestro de primaria como que representa una solución algebraica o que pone en juego elementos de álgebra?

E2: Yo no sé qué decirte sinceramente; a lo mejor por la relación de signos... es que no lo sé.

Los maestros se muestran indecisos frente al carácter algebraico de la representación de la tarea. Desde la concepción institucional dominante del álgebra de la secundaria es difícil valorar la solución de la tarea anterior como “algebraica”, sin embargo, desde una visión ampliada del álgebra, es posible identificar algunos elementos matemáticos que aparecen en la estrategia de solución dada por el niño, como algebraicos en naturaleza.

## ■ Conclusiones

### Creencias sobre la inclusión del RAE

Los hallazgos señalados en este trabajo indican que existe una marcada tendencia a identificar el RAE con: Encontrar valores desconocidos cualitativos o cuantitativos, mismos que se asocian con el concepto de “incógnita” o “variable”; simbolizar relaciones numéricas y resolver tareas verbales, reemplazar letras por números y encontrar “valores faltantes”, los procedimientos efectuados sobre letras, la precedencia de la aritmética sobre el álgebra, la cerradura de las operaciones en aritmética contra la no cerradura en álgebra.

### Sobre los análisis realizados por los maestros

Los análisis realizados por los maestros en formación ponen en evidencia su comprensión de las soluciones dadas por los niños, logran identificar los errores de los niños y conjeturan las posibles causas de los mismos. Los objetos matemáticos que los maestros en formación identifican suelen coincidir con las entidades primarias correspondientes a elementos lingüísticos, conceptos y procedimientos. Sin embargo, se observa cierto distanciamiento entre las estrategias de solución dadas a las tareas por los maestros en formación y aquellas dadas por los niños. Los maestros manifiestan la tendencia a valorar las estrategias de los niños desde su propia solución. Hines y McMahon (2005) reportan que los maestros en formación se muestran poco inclinados a considerar los métodos menos avanzados de los niños y consideran que las estrategias de los niños deben ser reemplazadas por las estrategias “correctas” que los maestros proponen y con las cuales están más familiarizados. En algunos casos, los maestros no logran proponer hipótesis factibles en relación con las estrategias o errores de los niños. Sin embargo, se debe decir que en algunos casos los niños ofrecen soluciones poco elaboradas en términos de la escritura; tal vez esto dificulta la labor de reconocimiento de conocimientos matemáticos usados por los niños, por parte de los maestros. Durante las sesiones se intentó que los maestros en formación expresaran sus creencias en relación con los rasgos algebraicos que podrían ser atribuidos tanto a las tareas como a las estrategias de solución dadas por los niños. Estos hallazgos coinciden con los resultados de Stump y Bishop (2002), quienes encontraron que las concepciones algebraicas sostenidas por los maestros en formación son bastante limitadas y describen al álgebra en términos de solución de ecuaciones, del hallazgo de valores desconocidos o como una herramienta para la resolución de tareas.

### ■ Referencias bibliográficas

- Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.). (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. T. (1988). The effect of instruction on spatial visualization skills of middle school boys and girls. *American Educational Research Journal* 25(1), 51-71.
- Carraher, D. W. & Schlieman, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester, K. Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* 2, 669-705. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Eisemberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematic* 26, 109-113.
- Ferrero, L; Gaztelou, I., Luelmo, M.J., Martin, P. & Martinez, L. (2007). *Matemáticas para sexto grado*. Editorial Anaya.
- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education* 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. & Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. En De Bock, D; Søndergaard B.D., Gómez-Alfonso B. & Litwin Cheng, . C. ( Eds.) *ICME 11*. Morelia: ICME.
- Hines, E. & McMahon, M. T. (2005). Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: Observations from preservice teachers. *School Science and Mathematics* 105(2), 88–105.

- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA.
- Kücheman, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*, 102-119. London: John Murray.
- Presmeg, N. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics* 6(3), 42-46.
- Stump, S. & Bishop, J. (2002). Preservice elementary and middle school teachers' conceptions of algebra revealed through the use of exemplary curriculum materials. *Proceedings of the 24<sup>th</sup> Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Athens, GA: Reporte Eric 471 781.
- Wagner, S. & Kieran, C. (Eds.). (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.