

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA CORRELACIÓN Y REGRESIÓN. ANÁLISIS DE SUS COMPONENTES

María M. Gea, Emilse Gómez-Torres, Carmen Batanero, Gustavo R. Cañadas

Universidad de Granada. (España)

Universidad Nacional de Colombia. (Colombia)

mmgea@ugr.es, egomezt@unal.edu.co, batanero@ugr.es, grcanadas@ugr.es

Palabras clave: correlación, regresión, conocimiento matemático-didáctico

Key words: correlation, regression, didactic-mathematical knowledge

RESUMEN

En este trabajo se analizan los conocimientos requeridos por el profesor de matemáticas para la enseñanza de la correlación y regresión, tema que se incluye en el currículo de Bachillerato (16-17 años) en España. Utilizamos el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2005; 2008) revisado con las sugerencias de Godino (2009; 2013). Se proponen ejemplos de cada una de las categorías de conocimiento del profesor en dicho modelo.

ABSTRACT

In this paper we analyze the knowledge required by mathematics teacher to teach correlation and regression, topic included in high school level (16-17 year olds) in Spain. We use mathematical knowledge for teaching model (Ball, Thames & Phelps, 2005; 2008) revised with the suggestions by Godino (2009; 2013). We propose examples in each category of teachers' knowledge.

■ Introducción

La correlación y regresión extienden la idea de dependencia funcional al estudio de relaciones entre variables estadísticas; su enseñanza se incluye en el nivel de bachillerato en España (16 años). Su importancia se deduce de sus múltiples aplicaciones en ciencias, tecnología, economía y gestión. No obstante, son pocas las investigaciones previas relacionadas con los conocimientos del profesor para explicar este tema.

En este trabajo partimos del modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (MKT de Ball, Thames y Phelps, 2005; 2008) revisado con las sugerencias de Godino (2009; 2013). Para cada una de las categorías resultantes, se proponen ejemplos de las competencias y conocimientos que debe adquirir el profesor en relación a los mismos.

Dichos ejemplos se han obtenido tras una revisión detallada de la literatura sobre enseñanza y aprendizaje de la correlación y regresión (por ejemplo, Estepa, 2004), del trabajo previo de Casey (2010) sobre formación de profesores y una experiencia de formación de profesores (descrita con mayor detalle en Gea, 2014).

■ Fundamentación teórica

Como se ha indicado, partimos del modelo de *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* de Ball, Thames y Phelps (2005; 2008), que describen las siguientes componentes de dicho conocimiento:

1. Dentro del conocimiento matemático: a) el *Conocimiento Común del Contenido* es puesto en juego por una persona instruida para resolver problemas matemáticos; b) el *Conocimiento Especializado del Contenido*, es particular del profesor, y lo habilita para planificar y desarrollar secuencias de enseñanza del contenido; c) el “*Conocimiento en el Horizonte Matemático*” (que denominamos en este trabajo *Conocimiento Avanzado del Contenido*) incluye aspectos más avanzados, por ejemplo aspectos históricos o filosóficos.
2. Respecto al conocimiento didáctico: a) el *Conocimiento del Contenido y los Estudiantes* incluye el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático; b) el *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza* incluye saber construir procesos didácticos pertinentes para tratar y corregir los errores y concepciones erróneas de los estudiantes; c) el *Conocimiento del Currículo* comprende las directrices curriculares, orientaciones, sus fines y motivaciones y los materiales curriculares.

El modelo anterior ha sido reinterpretado por Godino (2009; 2013), quien, respecto al conocimiento del contenido sólo considera el conocimiento común y avanzado. Además, divide el conocimiento didáctico, en seis facetas:

- *Faceta epistémica*, o conocimiento de los objetos y procesos matemáticos sobre el tema (incluye el conocimiento especializado del contenido de Ball, Thames y Phelps, 2005, 2008).
- *Faceta cognitiva*, que recoge el conocimiento del razonamiento del estudiante sobre el tema, su aprendizaje y dificultades.

- *Faceta afectiva*, conocimiento del grado de implicación (interés y/o motivación) del alumnado. Las facetas cognitiva y afectiva conjuntamente corresponden al conocimiento del contenido y el estudiante en el modelo MKT de Ball y colaboradores.
- *Faceta mediacional*, conocimiento de uso de recursos tecnológicos y materiales apropiados para la enseñanza y aprendizaje del tema.
- *Faceta interaccional*, modelos de comunicación entre los actores del proceso de instrucción. Las facetas mediacional e interaccional cubren el conocimiento del contenido y la enseñanza, en el MKT de Ball y colaboradores.
- *Faceta ecológica*, capacidad para valorar el grado en que el proceso de enseñanza se ajusta al proyecto educativo de la institución y al entorno del estudiante. Cubre el conocimiento del currículo en el MKT de Ball y colaboradores y es algo más amplio.

■ Investigaciones previas

En este trabajo se ha tenido en cuenta la siguiente bibliografía sobre correlación y regresión:

- *Estudios sobre razonamiento covariacional*, que es una actividad cognitiva fundamental del ser humano (Moritz, 2004; Zieffler, 2006; McKenzie y Mikkelsen, 2007). Algunos trabajos indican sesgos en este razonamiento, como la *correlación ilusoria*, donde los sujetos crean sus propias teorías sobre la correlación entre dos variables, sin tener en cuenta la correlación en los datos (Chapman y Chapman, 1967). Otro sesgo descrito es el *efecto de la regresión*, donde en investigaciones experimentales pueden confundirse efectos del tratamiento con la tendencia de la variable a acercarse a su media, en dos medidas consecutivas de la misma magnitud (Engel y Sedlmeier, 2011).
- *Destrezas requeridas para traducir datos bivariados* de representación numérica o descripción verbal a gráfica o tabular, y viceversa (Moritz, 2004; Sánchez Cobo, 1999).
- *Concepciones incorrectas sobre la correlación*: Estepa (1994) describe la *determinista* (aceptar sólo la dependencia funcional), *local* (pensar que se puede medir la correlación sólo con parte de los datos; *unidireccional* (no aceptar como correlación la correlación inversa) y *causal* (confundir correlación y causalidad). Estas concepciones permanecen después de la enseñanza (Batanero, Godino y Estepa, 1998).
- *Investigaciones sobre conocimiento del profesor* para la enseñanza de la correlación y regresión. Entre los pocos existentes destaca el de Casey (2010), quien en un trabajo con profesores de secundaria muestra dificultades similares a las encontradas en investigaciones previas con estudiantes. Por ejemplo, algunos profesores utilizan sus teorías previas en la resolución de los problemas, sin tener en cuenta los datos; muestran la concepción causal; o no entienden la necesidad de proponer a los estudiantes problemas donde no exista correlación. Describe el conocimiento del profesor para la enseñanza de asociación, destacando, entre otros, el conocimiento de las propiedades de la recta de regresión y del coeficiente de correlación.

■ Método

Como se ha indicado, el objetivo del trabajo fue proponer ejemplos específicos del conocimiento requerido por el profesor para la enseñanza de la correlación y regresión. Se fijaron como facetas del conocimiento, las seis consideradas por Godino (2013) para el conocimiento didáctico; además se consideraron el conocimiento común y avanzado del contenido. Para cada una de estas facetas se procedió a buscar ejemplos del conocimiento específico del profesor, en la forma siguiente:

1. Para el conocimiento común y avanzado de la correlación y regresión se analizaron 16 libros de texto usados actualmente en la enseñanza del tema. Según consulta realizada a la Consejería de Educación de Andalucía, se seleccionaron por ser los más utilizados.
2. Para el resto de componentes del conocimiento del profesor se ha revisado con cuidado la literatura de investigación sobre correlación y regresión. Asimismo, se utilizan los resultados de una experiencia de formación con una muestra de 65 futuros profesores de secundaria, en un curso al que se dedicaron 5 horas para trabajar con la correlación y regresión. Todos ellos eran licenciados en Matemáticas o Ingeniería, con edades entre 22 y 40 años. En una primera sesión (2 horas y media) trabajaron con un proyecto estadístico que recogía los principales conceptos, propiedades, procedimientos y representaciones del tema. Sus respuestas escritas nos permitieron evaluar su conocimiento común y avanzado del contenido, a la vez que reforzar este conocimiento. En una segunda sesión (también de 2 horas y media) y una vez corregido el proyecto, los futuros profesores realizan el análisis de la idoneidad didáctica del proyecto sobre correlación y regresión trabajado en la primera sesión. Sus respuestas escritas permiten evaluar las diferentes facetas de su conocimiento didáctico a la vez que lo desarrolla.

Los resultados de todos estos análisis forman parte de la tesis doctoral de Gea (2014). En lo que sigue presentamos algunos ejemplos de conocimientos de los futuros profesores, identificados con alguno de los métodos anteriores.

■ Conocimiento del contenido con respecto a correlación y regresión

3.1. Conocimiento común

El análisis realizado de los 16 libros de texto llevó a identificar tres campos de problemas principales en el estudio de la correlación y la regresión:

- *Organización y representación de datos bidimensionales*: se incluyen aquí tareas como construcción de tablas de datos bidimensionales, elaboración de diagramas de dispersión, diagramas de barras o histogramas tridimensionales, así como lectura y traducción de estas representaciones.
- *Análisis de la existencia de relación entre variables*: son tareas que consisten en el estudio de la posible correlación entre dos variables, su dirección y grado de intensidad; generalmente basadas en la interpretación de dicha relación a partir del diagrama de dispersión o del coeficiente de correlación.
- *Ajuste de un modelo a los datos* o problema de regresión: una vez detectada una relación intensa o moderada entre dos variables, interesa encontrar una función que sirva para predecir una variable en función de la otra.

Como parte de su conocimiento común del contenido, el profesor debe conocer y mostrar competencia en la solución de los anteriores problemas. Ello le lleva a la necesidad de conocer el lenguaje gráfico, verbal y numérico asociado al tema, dominando términos específicos y los correspondientes conceptos (por ejemplo, variable y distribución bidimensional, centro de gravedad, método de mínimos cuadrados, correlación, covarianza, modelo lineal, coeficientes de regresión), así como las expresiones simbólicas asociadas. Igualmente, el profesor ha de conocer los procedimientos asociados, como cálculo del coeficiente de correlación, obtención de la recta de regresión o realización de estimaciones con la misma. Finalmente se han de entender las propiedades de los conceptos citados y ser capaz de realizar

justificaciones elementales de dichas propiedades. En nuestro estudio de evaluación con 65 futuros profesores, ellos mostraron un conocimiento común adecuado en todos estos puntos. Paradójicamente, lo más difícil para ellos fue la interpretación de algunos gráficos (Gea, Batanero, Cañadas y Contreras, 2013).

■ Conocimiento avanzado

En cuanto al conocimiento avanzado de correlación y regresión, podríamos incluir el del uso de recursos tecnológicos, como la calculadora o la hoja de cálculo, para realizar los cálculos y gráficos necesarios en la resolución de los problemas. El tratamiento de la tecnología es muy escaso en los libros de texto analizados; además, no suelen incluir la interpretación de los resultados obtenidos con la misma o una reflexión que ayude al profesor a analizar la potencialidad de estas herramientas para el desarrollo del tema.

También destacamos como parte del conocimiento avanzado, la competencia del profesor para trabajar con proyectos estadísticos, que permiten contextualizar el estudio de la correlación y regresión. Dicho trabajo no se reduce a la aplicación mecánica de la estadística, pues es necesario identificar los procedimientos a aplicar, ya que los proyectos son en general abiertos. Además, el volumen de datos es mayor que el usual en los problemas propuestos en los libros de texto. En Batanero, Díaz y Gea (2011) se propone un proyecto basado en datos reales, en el que se utilizan herramientas para visualizar datos multivariados, como el diagrama de burbujas dinámico, que es especialmente adecuado para el trabajo con la correlación y regresión.

En nuestra experiencia de formación de profesores (Gea, 2014), únicamente la tercera parte de los 65 futuros profesores participantes mostraron este tipo de conocimiento en unas actividades opcionales de ampliación (fuera de las sesiones en el aula). Del resto no tenemos información, al ser la actividad opcional puede que no supieran realizarla o que simplemente no la hicieran por falta de tiempo, pues cursaban otras materias en simultánea.

Los futuros profesores que realizaron las actividades complementarias utilizaron conjuntos de datos y recursos de exploración en el servidor de las Naciones Unidas (<http://hdr.undp.org/en/data-explorer>). Asimismo, fueron capaces de utilizar la hoja de cálculo para obtener las ecuaciones de modelos de regresión para las variables que analizaron. Estos participantes no se limitaron al modelo lineal (recta de regresión), sino que en algunas variables ajustaron parábolas o funciones exponenciales o logarítmicas. Puesto que este tipo de regresión no aparece en el currículo, lo consideramos como parte del conocimiento avanzado del contenido.

■ Componentes del conocimiento didáctico

La revisión de bibliografía sobre el tema, así como el trabajo con los 65 futuros profesores en la segunda actividad descrita, permitió identificar conocimientos didácticos específicos de la correlación y regresión. A continuación presentamos algunos de estos ejemplos, clasificados según las facetas del conocimiento didáctico en el modelo de Godino:

- *Faceta epistémica*: Los futuros profesores que realizaron las actividades de ampliación fueron capaces de proponer problemas nuevos de correlación con datos; asimismo identificaron variables posibles con diferentes tipos de correlación (directa, inversa, independencia) e intensidad. Propusieron igualmente ejemplos de correlación lineal y no lineal.
- *Faceta cognitiva*: Algunos de los futuros profesores identificaron concepciones erróneas y errores en el trabajo con la correlación y regresión. Sería necesario que todos ellos identificasen las concepciones incorrectas sobre la correlación. propuestas por Estepa (1994): concepción unidireccional, causal, determinista y local.
- *Faceta afectiva*: Fue más difícil en nuestro estudio que los futuros profesores diferenciaron las emociones (pasajeras) de las actitudes (estables). Sin embargo, una parte de ellos fueron capaces de buscar datos y contextos que promuevan actitudes positivas en sus estudiantes, mostrando la utilidad de la correlación y regresión.
- *Faceta mediacional*: Una parte de los futuros profesores realizaron un análisis crítico de algunos applets en Internet, sugiriendo su posible uso en la clase y el tipo de ejercicios que podría plantearse con ellos; además, algunos señalaron también sus ventajas e inconvenientes en la enseñanza de la correlación y regresión.
- *Faceta interaccional*: Los participantes fueron capaces de valorar las posibilidades del proyecto trabajado para fomentar la participación y comunicación de los estudiantes en el aula, así como para detectar sus conflictos y errores en el tema de la correlación y regresión. Igualmente algunos propusieron actividades complementarias de evaluación.
- *Faceta ecológica*: Los participantes pudieron conectar la correlación y regresión con otros temas trabajados previamente por el alumno como las funciones y el álgebra, y con los contenidos curriculares. Igualmente valoraron su aplicabilidad en las ciencias sociales o naturales.

■ Reflexión final

En este trabajo hemos descrito algunos ejemplos de conocimientos requeridos por el profesor de matemáticas para la enseñanza de la correlación y regresión desde el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza de Ball, Thames y Phelps (2005; 2008), reinterpretado según sugerencias de Godino (2009; 2013).

Debido a la limitación de espacio, nos hemos restringido a unos pocos ejemplos en cada una de las categorías. Todos ellos pueden ampliarse hasta llegar a la lista completa de conocimientos y competencias que debe adquirir el profesor para la enseñanza del tema. Nuestros ejemplos han sido sugeridos por nuestra propia investigación como formadores de profesores (Gea, 2014), el análisis de libros de texto, y de la extensa investigación previa.

Es claro que este amplio y variado conocimiento se va forjando con la práctica de la docencia, pero aún así, sería bueno que la formación inicial de profesores trate de dotarles con unos mínimos conocimientos para iniciar su labor. Puesto que el tiempo disponible para la formación inicial suele ser escaso, se plantea el problema de buscar situaciones adecuadas, que contextualicen el conocimiento didáctico y sirvan para reforzar simultáneamente el conocimiento matemático y didáctico de los futuros profesores.

En nuestra experiencia de formación de profesores utilizamos un ciclo formativo compuesto de dos partes:

- a) En la primera, los futuros profesores trabajan con un proyecto estadístico en el que se incorporan las principales ideas de correlación y regresión. Sus respuestas escritas nos permitieron evaluar su conocimiento común y ampliado del tema, a la vez que lo refuerza.
- b) En la segunda parte se propone a los futuros profesores evaluar los componentes de la idoneidad didáctica del proyecto trabajado en la primera parte, utilizando la guía de análisis propuesta por Godino (2009; 2013). Esta actividad nos sirvió para describir ejemplos de los componentes del conocimiento didáctico que los futuros profesores ponen en práctica en su análisis. A la vez, permite reforzar dicho conocimiento didáctico.

Este método de trabajo con los futuros profesores se ha revelado, por tanto, útil para mejorar su formación en el escaso tiempo disponible. Nuestra experiencia sugiere la importancia de contextualizar la formación de profesores en situaciones que les resulten motivadoras, como es el trabajo con actividades que puedan usar con sus futuros estudiantes y el análisis de la idoneidad didáctica de dichas actividades.

El trabajo con el proyecto ha permitido, además, contextualizar las situaciones problemas, equilibrar las tareas según la intensidad y el sentido con que se relacionan las variables, y ofrecer más variedad de modelos de ajuste distintos al lineal. Se presentaron una variedad de representaciones y traducción entre ellas, prestando atención a la notación simbólica con que se definen los conceptos y el uso de las propiedades asociadas a los mismos. Además, se presenta a los futuros profesores el trabajo con proyectos y el uso de herramientas tecnológicas que facilitan el tratamiento de los datos, como se señala en las diversas recomendaciones para la enseñanza de la estadística (por ejemplo, Franklin, Kader, Mewborn, Moreno, Peck, Perry y Scheaffer, 2007).

Agradecimiento. Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

■ Referencias bibliográficas

- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2005, abril). Articulating domains of mathematical knowledge for teaching. Trabajo presentado en *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, Montreal, QC, Canadá.
- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Batanero, C., Díaz, C., y Gea, M. M. (2011). Estadísticas de la pobreza y desigualdad. En C. Batanero y C. Díaz (Eds.), *Estadística con proyectos*. (pp. 73-96). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1998). Building the meaning of statistical association through data analysis activities. En A. Olivier y K. Newstead, (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 221-236). Stellenbosch, South Africa: Universidad de Stellenbosh.

- Casey, S. A. (2010). Subject matter knowledge for teaching statistical association. *Statistics Education Research Journal*, 9(2), 50-68. Recuperado el 8 de marzo de 2015 de: [http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ9\(2\)_Casey.pdf](http://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ9(2)_Casey.pdf)
- Chapman, L. J. y Chapman, J. P. (1967). Genesis of popular but erroneous psychodiagnostic observations. *Journal of Abnormal Psychology*, 72(3), 193-204.
- Engel, J., y Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE study* (pp. 247-258). New York: Springer.
- Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada. España.
- Estepa, A. (2004). Investigación en educación estadística. La asociación estadística. En R. Luengo (Ed.). *Líneas de investigación en Educación Matemática* (pp. 227-255). Badajoz: Servicio de Publicaciones. Universidad de Extremadura.
- Franklin, C. Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A preK- 12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Recuperado el 8 de marzo de 2015 de: www.amstat.org/education/gaise/.
- Gea, M. (2014). *La correlación y regresión en bachillerato: Análisis de libros de texto y del conocimiento de los Futuros profesores*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada. España.
- Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2013). Un estudio empírico de las situaciones-problema de correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. *Investigación en Educación Matemática XVII*, 293-300.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.
- McKenzie, C. R. M., y Mikkelsen, L. A. (2007). A Bayesian view of covariation assessment. *Cognitive Psychology*, 54(1), 33-61.
- Moritz, J. (2004). Reasoning about covariation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 221-255). Dordrecht: Kluwer.
- Sánchez Cobo, F. T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada. España.
- Zieffler, A. S. (2006). *A longitudinal investigation of the development of college students' reasoning about bivariate data during an introductory statistics course*. Tesis doctoral, Universidad de Minnesota. Estados Unidos. Recuperada el 8 de marzo de 2015 de: <http://iase-web.org/documents/dissertations/06.Zieffler.Dissertation.pdf>.