

## CONCEPCIONES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN RESPECTO A LOS INTERVALOS DE CONFIANZA

**Luzdarí Rangel Ruiz, Gabriel Yáñez Canal**

Universidad Industrial de Santander, Grupo de investigación EDUMAT-UIS. (Colombia)

lrangelruiz@gmail.com, gyanez@uis.edu.co

**Palabras clave:** intervalos de confianza, nivel de confianza, teoría APOE

**Key words:** confidence intervals, confidence level, APOS theory.

### RESUMEN

Las investigaciones relacionadas con el aprendizaje de los intervalos de confianza reportan las dificultades y tipos de concepciones presentes en estudiantes, profesores, expertos e investigadores cuando se enfrentan a situaciones que requieren de su construcción e interpretación. Los estudios realizados hasta el momento alrededor de los IC son descriptivos y carecen de mayores explicaciones acerca de las razones que conducen a los estudiantes a tener dichas dificultades y tipos de concepciones. Para llenar este vacío hemos diseñado una investigación que pretende describir los razonamientos que realizan algunos profesores de matemáticas en formación, para argumentar en favor de las malas concepciones descritas acerca de los intervalos de confianza, especialmente alrededor de la precisión de la estimación. Precisamente, en este documento presentamos los avances de un estudio dirigido en este sentido y que está soportado en la teoría APOE.

### ABSTRACT

The research related to learning confidence intervals reported difficulties and types of concepts present in students, teachers, experts and researchers when faced with situations that require their construction and interpretation. Studies so far around the confidence intervals are descriptive and lack of further explanation about the reasons that lead students to have these kinds of difficulties and conceptions. To fill this gap, we have designed a research that aims to describe the arguments made by some math teachers in training, to argue in favor of misconceptions about the confidence intervals described, especially around the accuracy of the estimate. Indeed, in this paper we present the progress of a study conducted in this regard and is supported on APOS theory.

## ■ Introducción

Las investigaciones sobre los intervalos de confianza han permitido identificar una variedad de dificultades y concepciones presentes en estudiantes, profesores, expertos e investigadores cuando se enfrentan a situaciones que requieren de su construcción e interpretación. Estas malas concepciones, desde nuestra perspectiva, podrían explicarse debido a la cantidad de los conceptos estadísticos que subyacen en su construcción y que por ende necesitan ser integrados de manera adecuada. Las investigaciones realizadas hasta el momento, y que hemos podido identificar, no hacen referencia a las posibles causas de esas malas concepciones, carencia que motivó esta investigación que pretende conocer la forma como las personas se forman concepciones equivocadas de los intervalos de confianza. Nuestra investigación se centra en la construcción de un intervalo de confianza para la media poblacional con desviación estándar conocida. La expresión algebraica que da lugar a la construcción de un intervalo de confianza es la que sigue:

$$\bar{X} \pm Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Donde  $\bar{X}$  es la media muestral,  $Z_{1-\alpha/2}$  es el percentil de la normal estándar asociado al nivel de confianza  $1 - \alpha/2$  y  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  es la desviación estándar asociada a la media muestral.

A continuación presentamos de manera breve los antecedentes de investigación alrededor de los intervalos de confianza, el marco teórico que estamos utilizando para el diseño y análisis de los instrumentos a aplicar y los principales resultados obtenidos hasta el momento, relacionados con el efecto del tamaño muestral y el nivel de confianza en la precisión de la estimación.

## ■ Antecedentes

Behar (2001) estableció que estudiantes y expertos, presentan las siguientes concepciones en la interpretación de intervalos de confianza:

- Estudiantes y expertos asocian el nivel de confianza con el porcentaje de datos poblacionales que están contenidos en el intervalo de confianza. Es decir, un intervalo con un nivel de confianza del 95% contiene el 95% de los valores posibles de la población en estudio.
- Los estudiantes hacen una interpretación bayesiana del intervalo de confianza al suponer que el coeficiente de confianza es la probabilidad a posteriori de obtener el parámetro dentro del intervalo, una vez recogida la muestra.
- Estudiantes y expertos no asocian el nivel de confianza con una frecuencia relativa, es decir, no comprenden que el nivel de confianza lo que dice es que si se repite el muestreo muchas veces y se construye un intervalo de confianza para cada muestra obtenida, se espera que un porcentaje igual al nivel de confianza de dichos intervalos contengan el parámetro que se desea estimar, y por lo tanto existan algunos intervalos que no lo contengan.
- Los estudiantes asumen que altos niveles de confianza, manteniendo los demás datos constantes, conllevan a intervalos más estrechos.
- Estudiantes y expertos asumen que el ancho del intervalo es directamente proporcional al tamaño de la muestra, es decir, un incremento en el tamaño de la muestra conduce a que el ancho del intervalo aumente.
- Estudiantes y expertos consideran erróneamente que un intervalo de confianza contiene los valores de la media muestral y no los posibles valores del parámetro que se está estimando.

Los resultados de Behar (2001) fueron corroborados posteriormente por otros investigadores (Cumming, Williams y Fidler 2004; Olivo 2008; Yáñez y Behar 2009; Kalinowski 2010; Salcedo, Lira, González y Yáñez 2011).

Yáñez y Behar (2009) realizaron un estudio con el propósito de explicar las razones que podrían respaldar las malas concepciones asociadas al nivel de confianza. Estos autores conjeturan que las malas concepciones alrededor del nivel de confianza asociado a los intervalos de confianza podrían explicarse a partir de los diferentes significados que asume el concepto de probabilidad en los intervalos generados a partir de la expresión:

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}\right) = 1 - \alpha, (1)$$

que es equivalente a

$$P\left(\mu - z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n} < \bar{X} < \mu + z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}\right) = 1 - \alpha (2)$$

En la expresión (1) se obtiene un intervalo centrado en  $\mu$  con extremos aleatorios en tanto que en la expresión (2) se tiene un intervalo centrado en  $\bar{X}$  con extremos fijos. El primer intervalo es el intervalo de confianza y el segundo es el intervalo de variación propio de la variable aleatoria  $\bar{X}$  y refleja información cuando se conocen los parámetros poblacionales  $\mu$  y  $\sigma$ . Esta equivalencia algebraica podría explicar, al menos, la creencia de que el intervalo contiene los valores de la media muestral y no los de parámetro que se está estimando.

Con base en los resultados reportados hasta el momento y en la teoría APOE se está realizando un estudio con el cual se pretende describir los razonamientos que hacen los profesores de matemáticas en formación, para dar respuesta a diferentes situaciones que involucren los IC, en términos de las estructuras y mecanismos mentales que un individuo desarrolla cuando aprende un concepto estadístico. Además, se busca plantear de manera hipotética un camino viable para la construcción exitosa de intervalos de confianza, que se espera sea usado como herramienta pedagógica y sirva para soportar futuros estudios.

### ■ Marco teórico: Teoría APOE

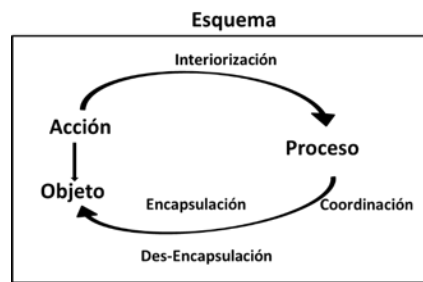
La Teoría APOE (Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) se fundamenta en la perspectiva teórica del constructivismo, específicamente en el concepto de abstracción reflexiva desarrollado por Piaget. Esta teoría da cuenta de las estructuras y mecanismos mentales que un individuo desarrolla cuando aprende un concepto matemático. Estas estructuras (acciones, procesos, objetos y esquemas) que son resultado de la aplicación de mecanismos mentales (abstracciones reflexivas) llamados interiorización, coordinación, encapsulación, des-encapsulación, tematización y generalización (Dubinsky, 1991), están relacionados como se muestra en la figura 1.

El proceso de construcción de un concepto matemático se inicia con la manipulación, de manera física o mental, de objetos o estructuras construidos previamente por el sujeto. Esta manipulación recibe el nombre de acción, que una vez interiorizada pasa a formar un proceso; una vez que este proceso es encapsulado pasa a ser un objeto cognitivo. Un objeto se puede des-encapsular para volver al proceso que le dio origen y de esta manera coordinarlo con otros procesos para llegar a un único proceso que

posteriormente será encapsulado. Por lo tanto, un sujeto puede llegar a la construcción de un proceso de dos formas, ya sea mediante la interiorización de acciones o a partir de la coordinación de dos o más procesos. La interacción de estas estructuras y mecanismos mentales dan lugar a un esquema que puede ser utilizado para resolver un problema matemático en particular.

En general, el proceso de construcción de un concepto matemático requiere del desarrollo de este tipo de concepciones (concepción acción, concepción proceso y concepción objeto) que no siguen una secuencia lineal. La teoría APOE cuenta con un elemento llamado descomposición genética que permite describir de manera hipotética las estructuras y mecanismos mentales que se espera un individuo desarrolle para la construcción exitosa de un concepto matemático (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros &Weller, 2014). Esta descomposición genética es de gran utilidad para el diseño de uno o más instrumentos con el objetivo de promover las construcciones y mecanismos mentales sugeridos en el análisis teórico.

**Figura 1. Construcciones mentales que intervienen en el proceso de comprensión de un concepto matemático (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996, p. 9)**



Con esto en mente vamos a presentar a continuación la metodología de este estudio y algunos resultados.

### ■ Aspectos metodológicos

La investigación contempla tres fases: 1. Análisis teórico alrededor de los intervalos de confianza, en el cual después de realizar una búsqueda sistematizada sobre las investigaciones de corte didáctico alrededor de los intervalos de confianza, algunas de las cuales se mencionaron en el apartado dedicado a los antecedentes, se realizó un análisis de los textos utilizados por los estudiantes que son parte del estudio con la finalidad de conocer la forma como los intervalos de confianza son abordados en cada uno de los textos. Posteriormente se diseñó, validó y aplicó un cuestionario que, además de ratificar las concepciones mencionadas, permita conocer las razones que las justifican. El cuestionario constó de 9 ítems, de los cuales 7 se plantearon a partir de los cuestionarios de algunos de los investigadores reportados previamente; 2. Con base en la descomposición genética hipotética que es resultado del análisis teórico, se diseñaron entrevistas de corte didáctico para conocer más ampliamente, de manera hipotética, las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes desarrollaron alrededor de los intervalos de confianza; 3. planteamiento de una descomposición genética refinada de los intervalos de

confianza. Estas tres fases están basadas en el paradigma de investigación planteado por la Teoría APOE, específicamente el primer y tercer componente.

A continuación exponemos algunos resultados de la primera fase relacionados con la precisión de los intervalos de confianza, para lo cual presentamos dos de los ítems propuestos, algunas respuestas dadas por los estudiantes y las razones aducidas.

*Ítem 7. Si aumenta el tamaño muestral, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional.*

Las preguntas propuestas en los cuestionarios de las investigaciones citadas se plantean directamente buscando la asociación entre el tamaño muestral y su efecto en el tamaño del intervalo (Behar, 2001; Olivo y Batanero, 2007; Olivo, 2008), en esta ocasión, variamos un tanto la pregunta de tal forma que en lugar de hablar del tamaño del intervalo hablamos de la *precisión* de la estimación. Este cambio en el enfoque de la pregunta se debe a que de manera hipotética suponemos que la razón para la mala interpretación del efecto que sobre el tamaño del intervalo tiene el tamaño muestral se basa en una asociación aparentemente intuitiva: “a más datos, mayor precisión de la estimación y por tanto más grande el intervalo” es decir, la precisión interpretada en términos de confianza de obtener el valor del parámetro en el intervalo construido, es como si el nivel de confianza dependiera, a su vez, del tamaño muestral, lo que conduce a aumentar el tamaño del intervalo.

A pesar de que la mayoría (12 de 15) asumieron como verdadera la afirmación del ítem 7, limitaron su justificación a la ley de los grandes números y al teorema central del límite, sin referencia explícita al intervalo de confianza. En las siguientes ilustraciones se presentan las respuestas de algunos estudiantes para responder afirmativamente al ítem 7.

Figura 1: Respuesta de un estudiante al ítem 7.

Ítem 7. (Verdadero) entre más grande sea el tamaño de la muestra, la distribución de la muestra  $\bar{x}$  parece más a una distribución normal y por tanto  $\bar{x}$  va a ser más aproximada a  $\mu$ . Esto se tiene por el Teo central

(Verdadero) entre más grande sea el tamaño de la muestra, la distribución de la muestra se parece más a una distribución normal y por tanto  $\bar{x}$  va a ser más aproximada a  $\mu$ . Esto se tiene por el teorema central del límite.

Aunque el estudiante omite que no solamente el teorema central del límite afirma que la distribución muestral de  $\bar{x}$  se parece más a una normal sino que su varianza disminuye y por lo tanto los valores de  $\bar{x}$  son más cercanos a  $\mu$ , es claro que su intuición es válida y refleja una buena concepción intuitiva de precisión.

Figura 2: Respuesta del estudiante al ítem 7

7. Entre más grande es la muestra se mejora la estimación y la probabilidad mejora (L. Grandes Números)

*Entre más grande es la muestra se mejora la estimación y la probabilidad mejora (Ley de los grandes números)*

A pesar de la confusión entre estimación y probabilidad, este estudiante adopta el enfoque frecuencial de la probabilidad para argumentar que el aumento del tamaño muestral produce una mejor estimación. Aunque no son procesos equivalentes, guarda en su intuición la idea de que al aumentar el tamaño muestral las estimaciones son mejores.

Las respuestas ilustradas evidencian que los estudiantes han logrado construir una asociación entre resultados importantes como el teorema central del límite y la ley de los grandes números y la precisión de una estimación. La carencia que ambos reflejan es su imposibilidad de obtener una expresión algebraica que les permita llegar a una conclusión más sólida. El estudiante que menciona el teorema central del límite no logró establecer un vínculo sólido entre este resultado y los intervalos de confianza, es decir, si bien tiene claro que la justificación es este teorema no sabe cómo expresarlo algebraicamente. En el caso del estudiante que menciona la ley de los grandes números el vínculo es más difícil de crear, se trata apenas de una idea de acercamiento todavía lejana del acercamiento propio de la construcción de los intervalos de confianza que se relaciona con la distribución muestral de  $\bar{x}$ .

**Ítem 8.** Si aumenta el nivel de confianza, aumenta la precisión de la estimación de la media poblacional.  
F\_\_ V\_\_

Esta pregunta tiene la misma forma de la anterior pero ahora con el nivel de confianza. Este cambio en el enfoque clásico que han asumido todas las investigaciones mencionadas, responde a una hipótesis de los autores que suponen que la razón para la mala interpretación del efecto que sobre el tamaño del intervalo tiene el nivel de confianza se basa en una asociación aparentemente intuitiva: “más confianza mayor precisión” es como si se asumiera la confianza en términos de la calidad de la estimación en sí misma y no asociada a un intervalo mayor.

11 de los 15 estudiantes responden positivamente: a mayor nivel de confianza, mayor precisión. En la Figura 1 se presenta las razones aducidas por un estudiante para responder afirmativamente esta afirmación.

Figura 3: Respuesta de un estudiante al ítem 8.

Ítem 8: lo que me indica el porcentaje es la probabilidad de que la media poblacional se encuentre en este intervalo, luego si aumenta, la precisión aumenta más no la exactitud.

Lo que me indica el porcentaje es la probabilidad de que la media poblacional se encuentre en este intervalo, luego si aumenta, la precisión aumenta más no la exactitud.

Con esta respuesta el estudiante, además de asumir el nivel de confianza como una probabilidad, asume que al aumentar esa probabilidad aumenta la precisión, es decir, si es más probable de encontrar ese valor en el intervalo construido es, entonces, más preciso el intervalo.

### ■ Conclusiones

Con base en lo expuesto anteriormente y en las respuestas de los demás estudiantes consideramos que la mayoría de ellos tienen una concepción acción de los intervalos de confianza para la media poblacional, ya que dependen de la expresión  $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , en caso de que la recuerden, para construir el intervalo de confianza, de manera mecánica, sin reflexionar sobre los efectos de los conceptos estadísticos que intervienen de manera directa en la construcción del mismo como lo son *el nivel de confianza*, *el tamaño muestral* y *la desviación estándar poblacional*. En algunos casos esta concepción acción pareciera estar un poco más evolucionada, sin embargo, de acuerdo a las respuestas ofrecidas por los profesores de matemáticas en formación que participan en el estudio, no se observa evidencia de una concepción proceso de intervalo de confianza, hecho que se espera corroborar con la entrevista didáctica.

### ■ Referencias bibliográficas

- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In: E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education 2* (pp. 1-32). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *Apos theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje de la estadística*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad Politécnica de Catalunya. Barcelona, España.
- Cumming, G., Williams, J. y Fidler, F. (2004). Replication, and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics* (3), 299- 311.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.



- Kalinowski, P. (2010). Identifying misconceptions about confidence intervals. In C. Reading (Ed.), Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8, July, 2010)*, Ljubljana, Slovenia. Voorburg.
- Olivo, E. y Batanero C. (2007). Un estudio exploratorio de dificultades de comprensión del intervalo de confianza. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 12(1),73-51
- Olivo, E., (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Granada, España.
- Salcedo, A; Lira, B; González, J; Yáñez, G (2011). Interpretación de intervalos de confianza por docentes en formación. En E. Blanco (Comp), *Investigación Educativa: Venezuela en Latinoamérica Siglo XXI, Venezuela: Centro de Investigaciones Educativas (CIES)*, 209-229.
- Yáñez, G y Behar, R. (2009). Interpretaciones erradas del nivel de confianza en los intervalos de confianza y algunas explicaciones plausibles. En M. J. González; M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación*. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.