INSTRUMENTO DE VISUALIZACIÓN PARA EL ANÁLISIS COMPARATIVO DE PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE AULA

Edelmira Badillo, Lourdes Figueiras, Vicenç Font
Universitat Autónoma de Barcelona. (España)
Edelmira.Badillo@uab.cat, Lourdes.Figueiras@uab.cat, vfont@ub.edu

Palabras clave: práctica, mediatriz, conocimiento, profesor, primaria
Key words: practice, bisector, knowledge, teacher, primary

RESUMEN

En esta comunicación se presentan datos sobre la aplicación de una metodología de análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje que genera un instrumento que permite resaltar y visualizar los elementos esenciales de la actividad matemática en el desarrollo temporal de una clase (definiciones, proposiciones, propiedades, procesos matemáticos, etc.). Esta metodología de análisis se ha aplicado al estudio de los elementos comunes y las diferencias entre tres clases realizadas por tres profesoras diferentes en una misma institución, año y nivel escolar cuando enseñan el objeto matemático mediatriz. Los resultados de este análisis didáctico permiten inferir, además, aspectos del conocimiento matemático activado por las profesoras participantes en su práctica profesional de aula.

ABSTRACT

We report the use of an analytical tool to analyze teaching and learning processes and display the essential elements of mathematical activity (definitions, propositions, properties, mathematical processes, etc.) during the development of a class. It has been applied to the study of the commonalities and differences among three classes conducted by three different teachers in the same institution, year and school level when they teach about the perpendicular bisector. The results allow us to infer some aspects about the mathematical knowledge of the teachers involved.

Introducción

La investigación sobre el conocimiento matemático y el desarrollo profesional del profesorado ha adquirido una importante relevancia internacional en los últimos años (Ball, Thames y Phelps, 2008; Davis, 2008; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Fernández, Llinares y Valls, 2012, entre otros) y ha puesto de manifiesto su complejidad y las limitaciones del conocimiento producido por dichas investigaciones (Sullivan y Wood, 2008). Nuestro trabajo se ocupa del conocimiento matemático del profesorado puesto de manifiesto en su práctica docente y nos alejamos, por tanto, de modelos estáticos sobre el conocimiento que no nacen del análisis de dicha práctica.

Los objetivos que se han propuesto conseguir en esta investigación son: (1) Diseñar un instrumento de visualización de una clase de matemáticas que pueda dar cuenta de la complejidad matemática en términos de objetos y procesos y de sus interrelaciones; (2) Utilizar este instrumento como herramienta de análisis didáctico que permita resaltar los elementos esenciales de la actividad matemática en el desarrollo temporal de una clase y dar cuenta de algunos aspectos del conocimiento matemático activado por las profesoras participantes en su práctica profesional de aula y, (3) Dar cuenta de las similitudes y las diferencias de la actividad matemática de diferentes profesoras que abordan un mismo contenido matemático, en el mismo año escolar y la misma institución.

Aproximación metodológica

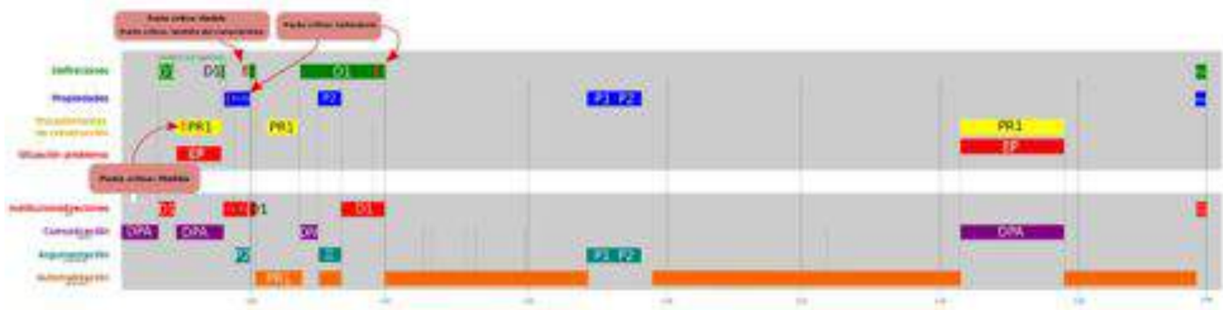
Se observaron tres clases de diferentes profesores (en lo sucesivo, Laura, Antonia y Encarna) en el último año de la escuela primaria (11-12 años) que explica la mediatriz. Los profesores llevan a cabo diferentes actividades matemáticas que muestran diferentes modelos de gestión del aula. Las tres clases fueron grabadas en vídeo y transcritas para su posterior análisis, buscando las similitudes y las diferencias en la actividad matemática desarrollada en cada clase (Badillo, Figueiras, Font y Martínez, 2013).

Para el análisis de las transcripciones se utilizaron dos de los cinco niveles del modelo de análisis didáctico propuesto por el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Pochulu y Font, 2011). El primero de dichos niveles explora las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de instrucción, entendidas como secuencias de acciones sujetas a reglas matemáticas. El segundo se centra en los objetos primarios y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas.Un primer nivel de análisis mostró que la actividad matemática no se desarrolla de manera uniforme durante la clase, pero hay intervalos en los que la densidad de los procesos, definiciones, procedimientos, etc. es mayor.

Análisis y discusión de los datos

El análisis detallado de objetos primarios y procesos matemáticos, ilustra aspectos relevantes de la estructura y funcionamiento de cada una de las clases y permite diferenciar muchos de los elementos de la actividad matemática, así como establecer relaciones entre ellos. En términos metafóricos, podemos decir que se obtiene una *radiografía* de la clase (Pochulu y Font, 2011), que, además, es la herramienta que permite la comparación entre las tres clases. La Figura 1 permite visualizar los elementos que hemos considerado más significativos en esta radiografía.

Figura 1. Radiografíadela clase deLaura. Ver Tabla1para las descripcionesde la etiqueta.



La Tabla 1 resume los objetos y procesos (y sus códigos) que se han tenido en cuenta para el análisis de la práctica de las tres maestras. A modo de ilustración, presentamos la gráfica de la clase de Laura (Figura 1) que permite visualizar que la actividad matemática no se desarrolla de manera uniforme sino que hay momentos de acumulación de dicha actividad, y esto se lleva a cabo durante los primeros cinco minutos.

La Figura 1 muestra que la mayoría de los objetos primarios son presentados por la maestra en los primeros cinco minutos. En términos de procesos, se dedica mucho tiempo (75%) para automatizar el procedimiento de construcción de la mediatriz. El proceso de comunicación predominante es la exposición magistral, y sólo un tiempo corto se dedica al proceso de argumentación. Además, durante el proceso de argumentación hay una falta de consistencia lógica sobre la validez de la utilización de la medición directa para probar o producir construcciones geométricas. La comunicación entre los estudiantes y el profesor sólo se produce cuando se introducen la definición D_1 y las propiedades P_1 y P_2. Los intervalos de tiempo que se dedican a la institucionalización son muy breves (un único intervalo de dos minutos para las propiedades P_1 y P_2).

Tabla 1. Codificación de objetos y procesos que intervienen en la clase sobre mediatriz

Objetos matemáticos	
Definición: en la gráfica aparecen señalados los momentos de la secuencia en la que las maestras trabajan, explícita o implícitamente, la definición de la mediatriz.	
D_1:	Línea perpendicular que pasa por el punto medio del segmento.
D_2:	Lugar geométrico formado por todos los puntos que equidistan de dos puntos dados.
D_2A:	Lugar geométrico formado por todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento dado.
D_2B:	Línea (frontera) que, dados dos puntos, separa al plano en dos regiones de manera que en una región todos los puntos están más cerca de uno de los dos puntos dados que del otro.
Propiedad: cualquier afirmación, relacionada con la definición y el procedimiento de construcción de la mediatriz, que puede ser cierta o falsa, pero que hay un intento de justificarla en la clase.	

P_1:	La recta construida corta al segmento en el punto medio.
P_2:	La recta construida es perpendicular al segmento dado.
P_3:	Los puntos de la frontera (D_2B) están alineados.
Procedimiento de construcción: una serie de pasos para la construcción de la mediatriz, explícita o implícitamente.	
Pr_1:	Procedimientode Euclides parala construcción dela mediatriz(Libro I, prop.X.): dado un segmento, se construye un triángulo equiláteroque lo tenga por base (Prop. I)y se bisecasu ángulo opuesto (prop. IX).
Pr_2:	Procedimiento del lugar geométrico: dados dospuntos,encontrarotros dospuntos equidistantesde ellos y unirloscon una línea recta.
Pr_3:	Procedimientodel carpintero: dado unsegmento, medir su longitudcon una reglagraduada, encontrarsu punto medioytrazarlaperpendicularen el punto mediocon las escuadras o eltransportador de ángulos.
Situación problema: tareas que desencadenan la actividad matemática, ejemplos y contraejemplos.	
T:	Tarea.
EP:	Tarea con ejemplos paradigmático.
ENP:	Tarea con ejemplos no paradigmáticos.
CE:	Contraejemplos
Procesos matemáticos	
Institucionalización(I): una definición, propiedad y/o procedimiento se consensua explícitamente como algo válido, y a partir de ese momento se asume como conocido.	
Automatización (A): se pretende que un cierto procedimiento se repita mecánica e individualmente.	
Comunicación (C): se expresan contenidos matemáticos de forma oral y/o escrito o explícitamente se excluye la argumentación matemática. En nuestro análisis hemos distinguido tres tipos de comunicación:	
EP: Exposición de la profesora. DPA: Diálogo entre profesora-alumnos. DA: Diálogo entre alumnos.	
Argumentación (Ar): es cuando se siguen o se crean cadenas de argumentos matemáticos.	
Modelización (M): es cuando aparece, por lo menos alguna de las siguientes fases de la modelización, (a) presentación del problema en contexto extramatemático, (b) descontextualización, (c) trabajo dentro de las matemáticas, (d) contextualización y, (e) transferencias a otros contextos.	

■ Similitudes y diferencias entre la actividad matemática de las tres clases

La clase de Laura es una clase magistral, la de Encarna se basa en la resolución de problemas de tipo constructivista y la de Antonia es una clase que mezcla elementos de los dos modelos de gestión anteriores.El análisis que hemos llevado a cabo en términos de objetos y procesos matemáticos nos permite sacar algunas conclusiones sobre el tipo de actividad matemática que promueve cada uno de estos modelos de gestión y cómo se distribuye a lo largo del tiempo, así como tener un panorama comparativo de los tres modelos al mismo tiempo. En ninguna de las tres clases, la presencia de objetos y procesos matemáticos se desarrolla de manera uniforme, puesto que hay fases de acumulación. En las tres clases, esta fase de acumulación ocupa aproximadamente entre un cuarto y un tercio del tiempo total. Sin embargo, en la de Laura ocurre desde el inicio, en la de Antonia pasados los primeros minutos, mientras que en la de Encarna sucede al final.

En cada caso hay definiciones y procedimientos diferentes. En la clase de Laura, se institucionalizan D_1 y PR_1, y un alumno sugiere el PR3. En la clase de Antonia, se institucionalizan D_1 y PR_2. En la clase de Encarna, se institucionaliza D_{2b} y no se institucionaliza ningún procedimiento de construcción. Las propiedades P_1 y P_2 aparecen en los tres casos, pero P_3 aparece solamente en el caso de Encarna.

En las tres clases hay un proceso predominante, que ocupa aproximadamente tres cuartas partes del tiempo total. En las clases de Laura y Antonia este proceso es el de automatización, que transcurre inmediatamente después de la fase de acumulación y llega hasta el final. En cambio, en el caso de la clase de Encarna, este proceso es el de comunicación y ocupa aproximadamente las tres cuartas partes del total de la clase. Resaltamos que en esta tercera clase aparecen los procesos de modelización y de argumentación, los cuales tienen poca o nula presencia en las otras dos clases.

■ Análisis de algunos puntos críticos

El análisis de los momentos de acumulación ha permitido detectar cuáles son los puntos críticos relevantes para la investigación y que se han señalizado mediante una admiración en figura 1. Un punto crítico es una manifestación de las dificultades o potencialidades que tiene el profesor al enfrentarse a la complejidad del objeto matemático mediatriz. Las dificultades se manifiestan en forma de errores, omisiones, falta de consistencia lógica en el discurso del profesor, etc. Las potencialidades sin embargo se manifiestan con una acción orientada positivamente a la mejora del aprendizaje de los alumnos.

Hemos detectado tres puntos críticos. Dos de ellos informan sobre el conocimiento matemático del profesorado. En este grupo hemos definido el *punto crítico Coherencia* que está relacionado con la falta de coherencia entre el procedimiento de construcción de la mediatriz y la definición que se explican en la clase; y el *punto crítico de Medida* que está relacionado con las dificultades y potencialidades que tienen las maestras para enfrentarse con la complejidad del objeto matemático mediatriz. El tercer punto crítico definido *Gestión del Conocimiento en la interacción* da cuenta del profesor como gestor de su conocimiento. Es decir, cómo utiliza su conocimiento matemático para atender (o no) a las necesidades de aprendizaje de los estudiantes durante la interacción. Es importante hacer notar que este tipo de puntos críticos está relacionado con la toma de decisiones de los profesores durante la interacción y no necesariamente con su nivel de conocimiento del objeto matemático que está enseñando. A continuación profundizaremos en el punto crítico de medida.

Punto crítico Medida. En las tres clases aparecen puntos críticos relacionados con la medida directa. En el caso de Laura y Antonia, están relacionados con sus dificultades para enfrentarse con la complejidad del objeto matemático mediatriz y, en el caso de Encarna, con su potencialidad para gestionarla.

En los dos extractos siguientes, de la clase de Laura, se ilustra la falta de consistencia lógica de su discurso con relación a la validez de la medida para la demostración y la construcción geométrica. En el primer extracto, un alumno pretende utilizar un procedimiento de construcción del punto medio del segmento basado en la medida utilizando una regla y se le dice que no es preciso. Se observa que la profesora impone como norma que la medida directa con regla no es válida en un procedimiento de construcción geométrico:

Profesora: Por lo tanto la mediatriz del segmento no es nada más que la línea recta perpendicular a este segmento que lo divide en dos partes exactamente iguales, ¿de acuerdo? ¿Cómo se hace para conseguir ese centro de ese segmento y partirlo en dos mitades iguales? Dime.

Alumno: Podría subir eso y medir con esto (levanta una regla)

Profesora: Lo podría medir con la regla, pero me saldría exactamente, exactamente igual. Podría…

Alumna: con el compás

Profesora: con el compás. Con el compás (Agarra el compás de pizarra) es el instrumento de medida adecuado con el cual el centro del segmento me va a salir a la perfección (…)

En cambio, en el segundo extracto que aparece a continuación, la profesora utiliza la medida directa para comprobar que la construcción cumple las propiedades de la definición. En este caso, substituye una demostración por una comprobación basada en medida de ángulos:

Profesora: Por lo tanto, una condición es que la recta que divide al segmento en dos partes iguales, la mediatriz del segmento ha de ser perpendicular. ¿Cómo puedo yo saber si estas dos rectas son perpendiculares? ¿De qué manera lo tengo que hacer? perpendicular (con las manos señala los cuatro cuadrantes que se forman en la intersección del segmento y la recta perpendicular a él).

Alumno: Midiéndolo con el transportador de ángulos.

Profesora: Midiéndolo con el transportador de ángulos. (Agarra el transportador de ángulo de madera)

Alumno: Un ángulo recto.

Profesora: y me tiene que dar…

Alumnos: Un ángulo recto, noventa.

Profesora: …y me tiene que dar cuatro ángulos rectos. Uno, dos, tres, y cuatro. Si yo pongo el transportador de ángulos aquí (coloca el transportador sobre el segmento y mide el ángulo del primer cuadrante) y lo hago coincidir, a ver, fijaros que me sale perfectamente un ángulo de 90°. ¿Lo veis? Si lo pongo al revés aquí me sale también exactamente 90°. Por lo tanto yo puedo decir que la mediatriz del segmento es la recta perpendicular a ese segmento que divide a ese segmento en dos partes perfectamente iguales. Exactamente.

■ Consideraciones finales

En este trabajo se ha aplicado una metodología de análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje, basado en el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS, que ha generado un instrumento que permite resaltar y visualizar los elementos esenciales de la actividad matemática en el desarrollo temporal de la clase (definiciones, proposiciones, propiedades, procesos matemáticos, etc.). Se trata de un instrumento que se puede aplicar al análisis de la mayoría de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este instrumento permite visualizar los elementos comunes y las diferencias entre clases realizadas en una misma institución, año y nivel escolar cuando se enseña el mismo contenido matemático.

El análisis realizado permite: (1) caracterizar el contenido matemático (en términos de objetos primarios y procesos) que se ha puesto en juego en las clases y, (2) inferir las limitaciones y potencialidades del conocimiento de las profesoras para enfrentarse a la complejidad del objeto matemático mediatriz. Dichas limitaciones y potencialidades se manifiestan primero, en las diferencias evidenciadas en el diseño e implementación de sus clases respectivas y, segundo, en la manera como resuelven los puntos críticos que hemos analizado. Este tipo de análisis consideramos que es una aportación relevante para investigadores interesados en el estudio del conocimiento matemático activado por los profesores en su práctica de aula.

Finalmente, nuestro trabajo también es una aportación para la formación del profesorado de matemáticas. En particular, para el desarrollo de la competencia de análisis didáctico del profesorado. Para su desarrollo, es necesario: (1) seleccionar episodios de aula, (2) realizar el análisis de las prácticas profesionales observadas en estos episodios y del conocimiento matemático-didáctico activado en dichas prácticas, (3) diseñar un ciclo formativo en los que se utilizan estos episodios y el análisis realizado en el punto 2 y, (4) implementar estos ciclos formativos en la formación inicial y/o permanente de profesores de matemáticas. El trabajo que aquí se presenta hace aportaciones a las fases 1 y 2.

Agradecimientos. Este trabajo se enmarca en la agenda científica del Grupo de Investigación en Práctica Educativa y Actividad Matemática –GIPEAM; en particular, dentro del Proyecto EDU2012-31464 y, del proyecto EDU2012-32644.

Referencias bibliográficas

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V., Martínez, M. (2013). Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias, 31 (3),*207-225.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59*(5)*, 389-407.

Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM)*, *14*(2), 86-91.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education* Online First. DOI 10.1007/s11858-012-0425-y.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,14(3)*, 361-394.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8(3)*, 255-281.

Sullivan, P. y Wood, T. (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development. Rotterdam, The Netherlands: Sense publishers.*