

**Conceptualizando el objeto estadístico distribución de frecuencias:
Una propuesta con estudiantes de grado 8°**

Nelson Gutiérrez Camargo

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Maestría en Educación, énfasis en Educación Matemática
Bogotá, 2017**

**Conceptualizando el objeto estadístico distribución de frecuencias:
Una experiencia de aula con estudiantes de grado 8°**

Nelson Gutiérrez Camargo

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar el título de Magíster en
Educación, énfasis en Educación Matemática, modalidad Profundización.

Director

Pedro Javier Rojas Garzón

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Maestría en Educación, énfasis en Educación Matemática
Bogotá, Junio de 2017**

Agradecimientos

Agradezco a Dios por brindarme la fortaleza, el deseo y las oportunidades de cumplir mis metas.

Agradezco a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, especialmente a la Maestría en Educación, por brindarme la oportunidad de crecimiento profesional y personal gracias a sus excelentes maestros que la componen.

Agradezco al grupo de investigación de la Universidad Distrital MESCUD, especialmente a la profesora Martha Bonilla por sus invaluable ideas y aportes al presente trabajo y al profesor Pedro Rojas por brindarme las herramientas necesarias para la elaboración de este trabajo de grado.

A mi esposa Milady, todo su apoyo durante este proceso fue vital para la culminación del mismo.

A mis hijos Amy y Saíd, la motivación de seguir en constante crecimiento.

Resumen

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo caracterizar el razonamiento que tienen estudiantes de grado 8° en torno a una de las ideas fundamentales de la Estadística, la distribución de frecuencias, cuando se enfrentan a una secuencia de actividades que está enfocada en el desarrollo de la idea de Distribución abarcando los conceptos asociados a la misma. Tomando como referente principal la corriente de Freudenthal llamada Educación Matemática Realista y adaptando la secuencia propuesta por Bakker, utilizando una metodología cualitativa de investigación acción.

Se presenta en este informe la ruta que se trazó para proponer el diseño instruccional de la secuencia de actividades y la caracterización de los estudiantes entorno al concepto de distribución de frecuencias, una breve discusión con respecto a los resultados y las sugerencias para futuras investigaciones de esta misma línea.

Abstract

The aim of the current research is to describe the eighth graders reasoning regarding one of the fundamental ideas of statistics, the distribution of frequencies, when they face a sequence of activities which is focused in the idea of Distribution taking into account the concepts related rough the with the same thing. According with the main current of Freudenthal called Realistic Mathematics Education and the adoption of the sequence proposed by Bakker, using the qualitative methodology of action research.

The current report presents the way that is proposed to follow the instructional design of the activities sequence and the description of the students regarding the concept of distribution of frequencies, a brief discussion dealing with the results and the suggestions to further researches in the same topic.

Tabla de contenido

Introducción	1
1. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA	2
1.1 Antecedentes	2
1.2 Justificación	7
1.3 Problema de investigación	8
2. REFERENTES TEÓRICOS	9
2.1 Ideas fundamentales de la estadística.	9
2.2 Medidas de tendencia central.....	11
2.2.1 La Media.	11
2.2.2 Mediana.....	12
2.2.3 <i>Moda</i>	14
2.3 Medidas de dispersión.....	15
2.3.1 Rango:	16
2.3.2 Desviación media:.....	16
2.3.3 Varianza y desviación estándar:.....	16
2.4 Sistemas de representación.	18
2.4.1 Diagrama de barras y gráfico de sectores.	18
2.4.2 Polígono de frecuencias:	21
2.4.3 Gráfico de tallo y hojas.	22
2.5 Acerca de la distribución y la variabilidad	24
2.6 Una mirada desde la Fenomenología.....	28
3. FENOMENOLOGÍA HISTÓRICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS	31
3.1 Fenomenología del concepto de Media:	31
3.1.1 Como el resultado de estimar grandes cantidades.	31
3.1.2 Vista desde la geometría griega.	33
3.2 Fenomenología del concepto de Mediana.....	34
3.3 Fenomenología del concepto de Muestreo.	35
3.4 Fenomenología del concepto de Distribución.....	36
3.5 Fenomenología del concepto de Gráficos.	38
4. METODOLOGÍA	40
4.1 Población IEDR Cune.....	40
4.1.1 Análisis del plan de estudio de la IEDR Cune.....	41
4.1.2 Metodología del área de matemáticas de la IEDR Cune	46
4.1.3 Perfil del estudiante de grado octavo de la IEDR Cune.....	47
4.1.3. Plan de estudio y libros de apoyo de grado ocatvo.....	48
4.2 Construyendo una propuesta.....	51
4.3 Análisis de resultados	53
5. SECUENCIA DE ACTIVIDADES.....	55
5.1 Competencias y procesos generales:.....	55
5.2 Dificultades en el proceso de aprendizaje.....	57
5.3 Previsiones de aprendizaje.....	59
5.3.1 Actividad 1. Estimando cantidades.....	59
5.3.2 Actividad 2. La decisión de la granja.....	59

	vi
5.3.3 Actividad 3. Encontrando la media.....	60
5.3.4 Actividad 4. Construyendo gráficas.....	61
5.3.5. Actividad 5. Puntos y barras.	62
5.3.6 Actividad 6. El problema de Granja Extrema.....	62
5.3.7 Actividad 7. Una historia, tres distribuciones.....	63
5. DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA	64
6.1 Actividad 1. Estimando cantidades.....	64
6.2 Actividad 2. La decisión de la granja.....	68
6.3 Actividad 3. Encontrando la media.....	71
6.4 Actividad 4. Construyendo gráficas.....	73
6.5 Actividad 5. Puntos y barras.	76
6.6 Actividad 6. El problema de Granja Extrema.....	78
6.7 Actividad 7. Una historia, tres distribuciones.....	81
6. CONCLUSIONES	87
BIBLIOGRAFIA	90

Lista de ilustraciones.

Ilustración 1. Minitool usado en la primera etapa.....	2
Ilustración 2. De barras a puntos y a Histogramas.....	3
Ilustración 3. Distribuciones con igual media y diferente forma.....	12
Ilustración 4. Medianas en distribuciones simétricas.	13
Ilustración 5. Comparación entre media y mediana según la simetría.	14
Ilustración 6. Tres distribuciones F.....	15
Ilustración 7. Histogramas de frecuencias de la edad en unas poblaciones hipotéticas	17
Ilustración 8. Distribuciones con media igual, pero diferente desviación.	18
Ilustración 9. Población activa de Jaén (Barras).	19
Ilustración 10. Población de Jaén (Sectores).	20
Ilustración 11. Diagrama de frecuencias acumuladas del "número de calzado"..	21
Ilustración 12. Polígono de frecuencias de la distribución de las alturas de los alumnos.	21
Ilustración 13. Polígono acumulativa de la altura de un grupo de estudiantes.	22
Ilustración 14. Gráfico de tallo y hojas y gráfico de tallo y hojas extendido.	23
Ilustración 15. Construcciones de una distribución.	25
Ilustración 16. Problema “La altura de un muro”.	32
Ilustración 17. Cantidades como magnitudes.	33
Ilustración 18. Tiempo esperado y tiempo de vida.	34
Ilustración 19. Determinar la media a partir del total.	35
Ilustración 20. Conceptos asociados al objeto mental distribución.	53
Ilustración 21. Problema de los tratamientos medicos.....	58
Ilustración 22. Estrategia para la estimación de personas en la foto.	67
Ilustración 23. Se asigna un valor a cada barra.....	70
Ilustración 24. Construcciones que no cumplen los criterios mínimos.	73
Ilustración 25. Construcciones que no representan los criterios mínimos.....	74
Ilustración 26. Otra construcción que no representan los criterios mínimos.	74
Ilustración 27. Construcción Grupo 4.....	75
Ilustración 28. Construcción Grupo 3.....	75
Ilustración 29. Construcción Grupo 5.....	75
Ilustración 30. Construcción Grupo 7.....	76
Ilustración 31. Argumentos Grupo 1 y 7.	77
Ilustración 32. Argumentos Grupo 2.	78
Ilustración 33. Argumentos Grupo 7.	79
Ilustración 34. Operaciones realizadas por los estudiantes.....	79
Ilustración 35. Lenguaje utilizado por los estudiantes.....	80
Ilustración 36. Otras operaciones utilizadas.	80
Ilustración 37. Propuestas grupo 6 y 7.....	82

Lista de tablas

Tabla 1. Estadísticos usados por futuros profesores.	4
Tabla 2. Aspectos de la distribución de frecuencias.	10
Tabla 3. Población activa de Jaén (1980) según relación laboral.	19
Tabla 4. Consumo de proteínas per cápita en países desarrollados.	23
Tabla 5. Ideas acerca de variabilidad.	27
Tabla 6. Gráficas de algunas distribuciones.	38
Tabla 7. Obstáculos frente al área de Matemáticas.	43
Tabla 8. Niveles de Matematización.	54
Tabla 9. Grupos de estudiantes.	64
Tabla 10. Competencias asociadas a la construcción del gráfico.	84

INTRODUCCIÓN

La cantidad de datos que se tienen en la actualidad, el avance tecnológico que permite transmitir información al instante, la manera en la cual los medios de comunicación muestran la información, entre otras, son situaciones que ponen en evidencia la necesidad de tener una cultura estadística básica que permita interpretar y analizar la información para la toma de decisiones. En tal sentido, se reconoce la importancia de que en el contexto escolar se aborden objetos matemáticos (o estadísticos) desde la práctica matemática misma, a partir del estudio de fenómenos en el mundo, posibilitando la constitución de dichos objetos como medios de organización de tales fenómenos (Freudenthal, 1983).

En esta investigación se presenta una caracterización de la constitución del objeto mental *distribución* realizada por estudiantes de grado 8° (13-14 años), quienes no contaban con una formación estadística, pertenecientes a la Institución Educativa Departamental Rural Cune (Cundinamarca, Colombia), por medio de la implementación realizada de una secuencia de actividades adaptadas del trabajo realizado por Bakker (2004), que tuvo como propósito que los estudiantes identificaran un conjunto de datos como un todo, no como datos aislados. Se asumieron principios básicos de la Educación Matemática Realista (Bressan, 2005), trabajando con fenómenos del contexto social que pudieran ser representados y organizados con el objeto mental *distribución*, en tanto recurso fenomenológico para lograr comprensión del objeto matemático (o estadístico) *distribución de frecuencias* y procesos de matematización (Freudenthal, 1983).

1. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

En este capítulo, además de presentar los antecedentes relacionados con la investigación propuesta, y de reconocer sus aportes, se plantea la justificación para el desarrollo de este trabajo, así como los propósitos del mismo.

1.1 Antecedentes

Un estudio realizado por Bakker y Gravemeijer (2004) con estudiantes de grado séptimo y utilizando un software diseñado para la creación de gráficas llamado Minitool presenta los resultados que se obtuvieron al proponer una trayectoria de aprendizaje que involucraba tres etapas:

En la primera etapa se representa cada dato con una barra horizontal (como se muestra en la siguiente imagen) para que los estudiantes pudieran razonar acerca de los diferentes aspectos de la distribución: como la ubicación de la mayoría de los datos, el centro de la distribución y los datos extremos.

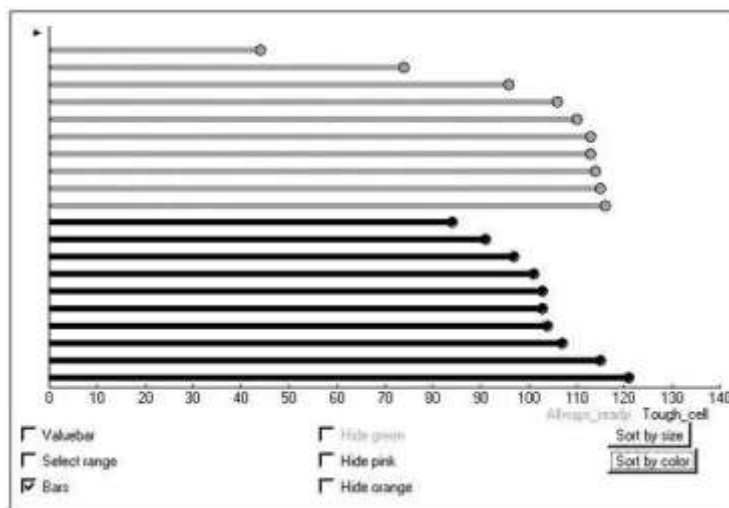


Ilustración 1. Minitool usado en la primera etapa.

Ellos debían realizar un informe a una revista teniendo en cuenta el rendimiento de dos marcas de pilas a las cuales se registró en la gráfica el tiempo útil que duraron 10 pilas de cada marca, obteniendo razonamiento por parte de los estudiantes para ubicar la media de la distribución por medio de la compensación de las barras, también en términos de la mayoría de los datos y la probabilidad para datos atípicos o extremos de la distribución asociando a la confiabilidad de la marca.

En la segunda etapa, el Minitool permite cambiar las barras por puntos y posteriormente por histogramas, como se muestra en la ilustración 2 a los cuales los estudiantes manifestaron su comodidad por esta representación

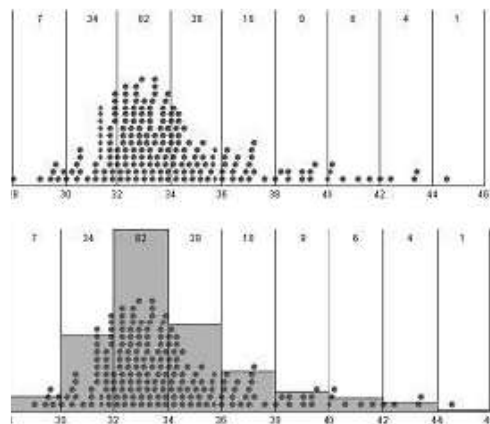


Ilustración 2. De barras a puntos y a Histogramas.

Los investigadores mencionan que para esta etapa de la trayectoria, los estudiantes razonaron en aspectos de la distribución como frecuencia, dispersión, cuartiles y mediana, además, el software permite realizar este cambio en la representación del conjunto de datos.

Para la última etapa los estudiantes deben proponer sus propias gráficas sin datos, para analizar y describir estas distribuciones con respecto al peso y la medida de un conjunto de personas, evidenciando razonamiento por parte de los estudiantes en términos de la posible forma de una distribución para desarrollar una visión más global del conjunto de datos.

Estas actividades propuestas por Bakker y Gravemeijer tiene una adaptación en el presente trabajo de grado, además que el concepto de distribución que se tendrá en cuenta está relacionado con las investigaciones de estos autores que se encuentran enmarcados en la corriente de la Educación Matemática Realista (E.M.R.), aportando elementos tanto al marco teórico como a la metodología.

Por su parte, Arteaga, Batanero y Ruiz, (2009), presentan los resultados de una investigación en la cual 135 futuros profesores (divididos en cuatro grupos) se enfrentaron a la comparación de dos distribuciones, cada uno de los participantes debía realizar sus propios registros y era libre de utilizar los gráficos y datos estadísticos que considerara necesarios, obteniendo los siguientes resultados:

	Correcto	Incorrecto	Total
Media	98	12	110
Mediana	62	26	88
Moda	93	4	97
Rango	60	6	66
Otra medida	43	0	43
dispersión			

Tabla 1. Estadísticos usados por futuros profesores.

Para los autores Arteaga, Batanero y Ruiz (2009, p. 136), cuando los estudiantes calculan algún estadístico “indica una primera aproximación a la idea de distribución, pues pasan del dato aislado a un resumen estadístico del conjunto de datos” aunque esto no es suficiente para entender el concepto de distribución, pues también se debe tener en cuenta, estadísticos de dispersión, la forma de la distribución y la variabilidad, en este sentido Sánchez y Orta (2013, p. 68) mencionan las razones para presentar este tipo de problemas y establecer el razonamiento de un conjunto de datos:

1. Comparar dos o más grupos puede estructurarse como una versión inicial e informal de inferencia estadística.

2. Los problemas que involucran comparaciones de grupos son a menudo más interesantes que los que involucran a un solo grupo.
3. Estudiantes de cualquier nivel requieren desarrollar estrategias para comparar grupos de datos.
4. En la comparación de grupos es importante realizar representaciones gráficas y obtener resúmenes (centro y dispersión) de los datos.

El aporte de esta investigación al presente trabajo está asociado al objeto matemático de distribución y específicamente a los resultados de una comparación de dos distribuciones, pues una de las actividades planteadas es precisamente la de comparar dos distribuciones, identificando el uso de estadísticos para el razonamiento y las dificultades que presentan los estudiantes ante este tipo de situaciones.

Uno de los aspectos en una distribución de frecuencias es la variabilidad que presenta, para ello se toma como base una de los estudios realizado por Estepa y del Pino (2013) quienes realizan una investigación asociada a este concepto, identificando la propuesta de libros de texto en la escuela y concluyendo que este concepto no es abordado en ninguno de los textos consultados.

Por otro lado, realizan un aporte al marco teórico, pues presentan las fuentes de la variabilidad (natural, por medición, del muestreo e inducida), las cuales se tienen en cuenta en la trayectoria propuesta en el presente trabajo de grado y un aporte a la fenomenología histórica, mostrando las diferentes contribuciones que se han realizado al concepto de distribución en su historia.

Otros estudios realizados por Cobo (2003) y Chan (2009), evidencian las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar las medidas de posición central y su representación, además presentan una serie de campos en los cuales se enmarcan algunos de los problemas que fueron utilizados para el presente trabajo de grado.

Un aporte de estos estudios está asociado al análisis de contenido del objeto matemático de la distribución de frecuencias pues en uno de los objetivos planteados en el estudio de Cobo (2003, p. 23) “Llevar a cabo un análisis del contenido matemático para determinar los campos de problemas, representaciones, procedimientos, definiciones y propiedades y argumentaciones que constituyen el significado de referencia de las medidas de posición central, en la introducción al análisis exploratorio de datos”, el investigador describe el proceso para realizarlo con las medidas de tendencia central aportando estas características para la análisis de la distribución.

Teniendo en cuenta la secuencia actividades propuesta y la importancia de la lectura, análisis y construcción de gráficos estadísticos se consultó una investigación de Arteaga, Batanero, Díaz y Contreras (2009) quienes proponen los elementos y competencias necesarias para hacer una lectura de un gráfico estadístico y las dificultades que manifiestan los estudiantes al momento de realizar el cambio de representación de una lista de datos a un histograma.

Esta investigación realiza aportes con respecto a los niveles de lectura que pueden realizar los estudiantes a un gráfico estadístico como lo propone Batanero, Díaz y Contreras (2009):

- Extracción de datos, que consiste en poner en relación un elemento de un eje con el de otro eje.
- Extracción de tendencias, cuando se es capaz de percibir en el gráfico una relación entre dos subconjuntos de datos que pueden ser definidos a priori o visualmente.
- Análisis de la estructura de los datos, comparando tendencias o agrupamientos y efectuando predicciones (p. 96).

Estos niveles ayudan a caracterizar las construcciones y lectura que realicen los estudiantes al momento de enfrentarse a estas tareas en la trayectoria propuesta en el presente trabajo de grado.

1.2 Justificación

El presente trabajo de grado surge desde la propia práctica docente, pues los temas de estadística generalmente, son propuestos desde el área para desarrollarse en las últimas sesiones del año escolar o no son tenidas en cuenta dentro del plan de estudios, además el enfoque presentado hasta el momento se basa en la aplicación de una serie de algoritmos para encontrar unas medias de tendencia central y dispersión, dejando de lado la comprensión y análisis de un conjunto de datos.

La pertinencia del presente trabajo está sustentada desde lo propuesto por los Lineamientos curriculares por parte del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, p. 17), se resalta que “el carácter globalizante de la probabilidad y la estadística está en la presencia del pensamiento aleatorio para la comprensión de fenómenos de la vida cotidiana y de las ciencias”. Por otra parte, los estándares básicos de competencia para el área de matemáticas (2006, p. 64), en tanto “ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar”, sustentan el desarrollo del Pensamiento Aleatorio desde la mirada de generar personas que puedan sustentar sus decisiones no solo del contexto escolar, sino fuera del mismo.

Por lo anterior se muestra la importancia desde lo planteado en el marco legal colombiano de trabajar los temas estadísticos, como una competencia básica para la interpretación de datos, que hoy en día se presentan en diversos campos de la vida cotidiana, como lo resalta Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos (2011), ya que el progreso de la sociedad ha permitido almacenar una gran cantidad de datos que se nos presentan en los medios de comunicación por medio de tablas y gráficos estadísticos, de las cuales deberíamos estar en la capacidad de leerlos y analizarlos.

No sólo en el ámbito de lo educativo se evidencia la importancia de este pensamiento, de hecho, algunos estudios plasman que este campo puede llegar a desarrollarse mucho más para una mejor comprensión, la enseñanza de la Estadística, para Godino (2004, p. 365) es la siguiente: “La principal razón para introducir el estudio de las situaciones aleatorias y las nociones básicas sobre probabilidad en la enseñanza primaria es que las tales situaciones son frecuentes en la vida cotidiana”. Esta importancia se extiende más allá del salón de clase, y según la enseñanza de la misma, permite al estudiante resolver problemas en cualquier campo en las cuales se presente.

1.3 Problema de investigación

Teniendo en cuenta la justificación y para desarrollar una cultura Estadística, como lo propone Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013, pp. 8-10) cuya finalidad es “la comprensión adecuada de las ideas estadísticas fundamentales”, específicamente la de Distribución de frecuencias para que el estudiante pueda “desarrollar la capacidad de leer, analizar, criticar y hacer inferencias a partir de distribuciones de datos” se propone el siguiente trabajo de grado cuyo propósito es caracterizar la constitución del objeto mental distribución, que constituyen estudiantes del grado 8° de la Institución Educativa Departamental Rural Cune (I.E.D.R. Cune).

Para alcanzar este propósito se diseñó una secuencia de actividades basada en la corriente de la Educación Matemática Realista, teniendo en cuenta una fenomenología histórica y didáctica, que permita identificar los fenómenos asociados al objeto de distribución.

2. REFERENTES TEÓRICOS

En este apartado se presentan ideas y referentes tomados en cuenta para la realización de la investigación, específicamente los referentes teóricos asociados a la distribución de frecuencias, los conceptos asociados a la misma y las representaciones más utilizadas para mostrar la información en un conjunto de datos, los autores que se han tomado como referencia para el presente trabajo dan una idea de lo que se espera construir en los estudiantes con la secuencia de actividades.

2.1 Ideas fundamentales de la estadística.

La Estadística nos ayuda en el análisis de datos, los cuales son usualmente presentados en diversos medios de comunicación utilizando tablas, pictogramas o histogramas, entre otros, la Estadística nos ayuda en la toma de decisiones a partir de la información que se nos muestra, en palabras de Cabría (1994, citado por Batanero, 2004, p. 9):

La estadística estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo. Está caracterizada por una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su objeto material; un modo propio de razonamiento, el método estadístico, lo que constituye su objeto formal y unas previsiones de cara al futuro, lo que implica un ambiente de incertidumbre, que constituyen su objeto o causa final.

La información que se obtiene de un colectivo a partir del estudio de una o más variables, puede ser organizada en una tabla en la cual se relacionen las clases o categorías y la frecuencia de cada una, a esta organización de los datos la llamamos distribución de frecuencias, según Batanero y Godino (2004, pág. 16) “cuando se comienza a analizar una nueva variable estamos interesados en saber los valores que puede tomar, el número total de datos y cuántas veces aparecen los diferentes valores. La distribución de una variable nos proporciona esta información”.

Esta distribución es llamada por Wild (2006) como una distribución empírica, pues en esta se ve la variación de los datos. Este autor realiza una clasificación de la distribución, las empíricas (la distribución de frecuencias) y las distribuciones teóricas, refiriéndose a las

distribuciones de probabilidad, ya que éstas “son un modelo potencial” para describir la variación. Según Levin (2004, pág. 178) “una distribución de frecuencias teórica es una distribución de probabilidades que describe la forma en que se espera varíen los resultados. Como estas distribuciones representan expectativas de que algo suceda, resultan modelos útiles para hacer inferencias y tomar decisiones en condiciones de incertidumbre”.

En relación con la distribución de frecuencias, Bakker y Gravemeijer (2004, p. 147) plantean que “Una característica esencial del análisis de datos estadísticos es que es principalmente acerca de describir y predecir las características agregadas de los conjuntos de datos”, haciendo una diferenciación entre los datos como los valores individuales y la distribución como entidad en sí misma. Estos autores proponen que una distribución de frecuencias está compuesta por 4 aspectos:

<i>Centro</i>	Media y mediana.
<i>Extensión</i>	Desviación estándar y rango intercuartílico.
<i>Densidad</i>	Frecuencia relativa y cuartiles.
<i>Simetría</i>	Posición de la mayoría de los datos.

Tabla 2. Aspectos de la distribución de frecuencias.

Los anteriores aspectos muestran una estructura compleja para el concepto de distribución de frecuencias, el cual a su vez hace parte de una estructura que incorpora ideas como la variación y el muestreo (Bakker y Gravemeijer, p. 149).

La distribución de frecuencias muestra el número de observaciones del conjunto de datos que caen en cada una de las clases de una variable, según Batanero (2004), “cuando estos valores son los resultados de un experimento estadístico, la llamamos variable estadística”, éstas se clasifican en: *cualitativas*, registran la presencia de un atributo o *cuantitativas*, cuando el resultado de la observación es un número.

Dentro de las variables cuantitativas se distingue entre variables *discretas* y *continuas*, “siendo *discretas* aquellas que por su naturaleza sólo pueden tomar valores aislados - generalmente números enteros - y *continuas* las que pueden tomar todos los valores de un cierto intervalo” (Batanero, 2001, p. 13). En palabras de Spiegel (1997, p. 2), “Una variable que puede tomar cualquier valor entre dos valores dados se dice que es una variable *continua*; en caso contrario diremos que la variable es *discreta*”.

Para realizar un análisis de una distribución de frecuencias se utilizan algunas medidas representativas que permitan el resumen del conjunto, dentro las más representativas se encuentran las siguientes, que se clasifican en:

2.2 Medidas de tendencia central.

En la toma de decisiones, una vez se cuenta con información cuantificada, resulta útil encontrar formas de resumirla de manera adecuada, para posibilitar así trabajar con un conjunto reducido de valores que sean reconocidos como datos representativos de dicho conjunto (Bressan, 2008). Una forma de resumir la información es acudiendo a medidas “centrales” en el conjunto de datos, en torno a los cuales sea posible distribuir tales datos, denominadas *medidas de tendencia central*. Entre estas medidas se destacan:

2.2.1 La Media.

Valor que se caracteriza por ser “la mejor estimación de una cantidad desconocida, cuando hemos hecho varias medidas de la misma y es la cantidad equitativa a repartir cuando tenemos diferentes cantidades de una cierta magnitud y queremos distribuirla en forma uniforme” (Batanero, 2004, p. 21). En relación con las características de la media, Orellana (2001, p. 33) destaca las siguientes:

- ✓ *Se usa para datos numéricos.*
- ✓ *Representa el centro de gravedad o el punto de equilibrio de los datos.*

- ✓ *La suma de las distancias de los datos a la media es cero.*
- ✓ *Es muy sensible a la presencia de datos atípicos.*

La media es única, y si bien es un valor representativo de la distribución (que no necesariamente hace parte del conjunto de datos) a partir del cual es posible tomar ciertas decisiones, no siempre permite mostrar el comportamiento de la distribución; por ejemplo, dos conjuntos de datos podrían tener la misma media, pero estar distribuidos de forma distinta, lo cual pone de manifiesto que esta medida es insuficiente para dar cuenta del comportamiento de los datos, como se muestra en la siguiente ilustración:

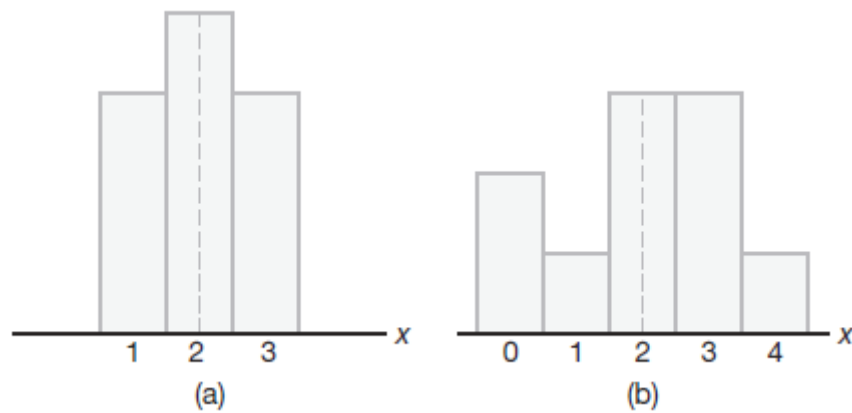


Ilustración 3. Distribuciones con igual media y diferente forma.

La media es de gran importancia para caracterizar las distribuciones teóricas porque describe el centro de una distribución de probabilidad, aunque por sí sola no describe la forma de la distribución.

2.2.2 Mediana.

Valor que permite, una vez ordenados los datos, generar dos conjuntos de igual cantidad de valores, es decir, garantiza que hay tantos valores mayores o iguales a esta medida, como aquellos que son inferiores o iguales a ésta.

Para el caso de las distribuciones teóricas, como una distribución continua cuya función de densidad de probabilidad es simétrica, algunos autores como Devore (2008, pág. 140) señalan: “la gráfica a la izquierda de un punto en particular es una imagen a espejo de la gráfica a la derecha de dicho punto, tiene una mediana \hat{u} igual al punto de simetría puesto que la mitad del área bajo la curva queda a uno u otro lado de este punto”. Como se muestra en la siguiente ilustración:

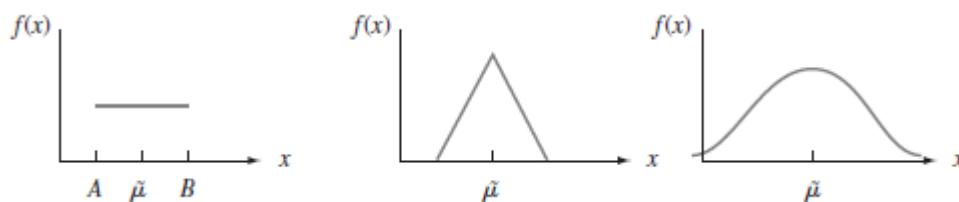


Ilustración 4. Medianas en distribuciones simétricas.

Otras características de la mediana según Batanero (2001, pág. 38)

- ✓ *Al calcular la mediana no usamos todos los valores observados de la variable, lo que la limita como medida de tendencia central.*
- ✓ *No puede ser aplicada a distribuciones de variables cualitativas.*
- ✓ *Como medida de tendencia central, presenta ciertas ventajas frente a la media en algunas distribuciones ya que no se ve afectada por valores extremos de las observaciones. La mediana es invariante si se disminuye una observación inferior a ella o si se aumenta una superior, puesto que sólo se tienen en cuenta los valores centrales de la variable. Por ello es adecuada para distribuciones asimétricas o cuando existen valores atípicos.*
- ✓ *Conserva los cambios de origen y de escala.*
- ✓ *La mediana es insensible a la distancia de las observaciones al centro, ya que solamente depende del orden de los datos.*

Relación entre media y mediana. Estas dos medidas están relacionadas con la forma de la distribución, en la siguiente ilustración se muestra la forma de tres distribuciones diferentes, cuando estas dos medidas son la misma y cuando estas dos medidas son diferentes, mostrando un comportamiento sesgado a la derecha cuando la media es menor que la mediana y un comportamiento sesgado a la izquierda cuando la mediana es menor que la media.

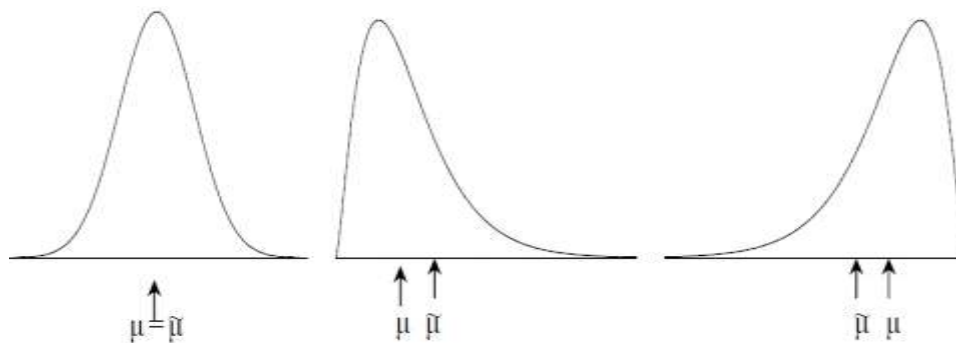


Ilustración 5. Comparación entre media y mediana según la simetría.

2.2.3 Moda.

En un conjunto de datos, la moda es el valor que ocurre con mayor frecuencia. Puede no existir o ser multimodal. Según Batanero (2004, pág. 22): “es una medida de tendencia central poco eficaz ya que si las frecuencias se concentran fuertemente en algunos valores al tomar uno de ellos como representante los restantes pueden no quedar bien representados, pues no se tienen en cuenta todos los datos en el cálculo de la moda”.

Algunas ventajas y desventajas de la moda son las siguientes, como lo menciona Levine (pág. 86):

- ✓ *Se puede utilizar como una posición central para datos tanto cualitativos como cuantitativos.*
- ✓ *Los valores extremos no afectan indebidamente a la moda.*
- ✓ *Cuando los conjuntos de datos contienen dos, tres o más modas, es difícil interpretarlos y compararlos.*

Relación entre media, mediana y moda: Cuando los valores de las medidas de tendencia central son la misma, la forma de la distribución es simétrica, otro comportamiento de la distribución se describe cuando los valores de estas medidas son diferentes y sólo se presenta una moda, como se muestra en la siguiente imagen.

Algunas de las distribuciones de probabilidad que presentan una sola moda es la distribución normal y la distribución F, la cual está sesgada a la derecha y tiende a hacerse más simétrica conforme aumenta el número de grados de libertad en el numerador y el denominador, como se muestra a continuación:

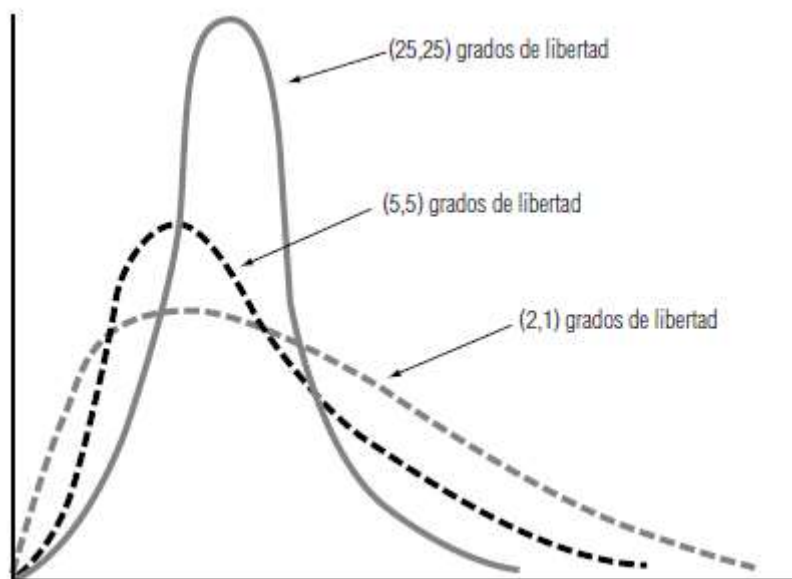


Ilustración 6. Tres distribuciones F.

2.3 Medidas de dispersión.

Las medidas de tendencia central nos indican los valores en torno a los cuales se distribuyen los datos, sin embargo para el análisis del conjunto es importante identificar otras características que no son posibles de identificar con las medidas de posición central, para ello utilizamos las medidas de dispersión, Batanero (2004, pág. 23) caracteriza éstas medidas de la siguiente manera: *“son estadísticos que nos proporcionan una medida del mayor o menor agrupamiento de los datos respecto a los valores de tendencia central.*

Todas ellas son valores mayores o iguales a cero, indicando un valor cero la ausencia de dispersión". Dentro de estas medidas se encuentran:

2.3.1 Rango:

Se define, en un conjunto de datos, como la diferencia entre el valor mayor de los datos y el valor menor, algunas de las características que propone Orellana (2001, pág. 40) son:

- ✓ *Es muy simple de obtener.*
- ✓ *Es extremadamente sensible a la presencia de datos atípicos.*
- ✓ *Ignora la mayoría de los datos.*
- ✓ *En general aumenta cuando aumenta el tamaño de la muestra (las observaciones atípicas tienen más chance de aparecer en una muestra con muchas observaciones).*

En consecuencia, reportar el rango o el máximo y el mínimo de un conjunto de datos, no informa demasiado sobre las características de los datos.

2.3.2 Desviación media:

Se define como la media de las desviaciones respecto del valor central que se considere, tomadas en valor absoluto, Para Batanero (2001, pág. 23) "puede calcularse con respecto a cada uno de los valores centrales: media, mediana o moda".

Otro de los autores que definen esta medida es Spiegel (1997, pág. 91) "se define en términos de desviaciones absolutas respecto a la mediana u otro promedio, en vez de la media".

2.3.3 Varianza y desviación estándar:

La *varianza* puede pensarse como "promedio" de las distancias de las observaciones a la media elevadas al cuadrado; según Orellana (2011, pág. 42), en tanto la varianza no tiene

las mismas unidades que los datos, se define la *desviación estándar* como la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Propiedades de la desviación estándar, que denotaremos como s :

- ✓ s mide la dispersión alrededor de la media, por lo tanto es natural elegir esta medida de dispersión cuando se usa la media como medida de posición.
- ✓ $s = 0$ solamente cuando todos los datos son iguales, de otro modo $s > 0$.
- ✓ s es una medida de dispersión *muy sensible* a la presencia de datos atípicos. De hecho, es más sensible que la media ya que las distancias están elevadas al cuadrado.

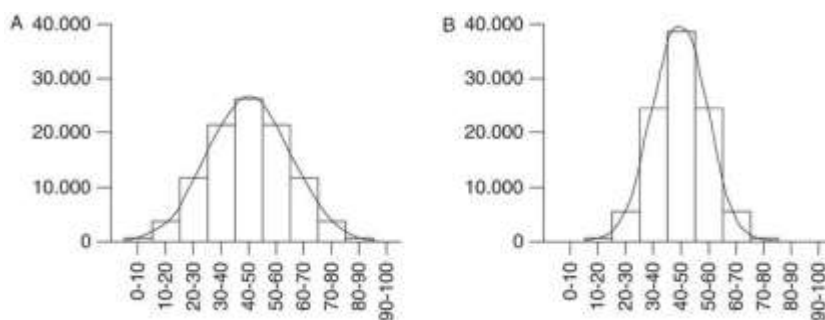


Ilustración 7. Histogramas de frecuencias de la edad en unas poblaciones hipotéticas de 100.000 individuos. En ambas poblaciones la media es 44,5; las desviaciones estándar son 14,9 en A y 10,0. Tomado de <http://www.elsevier.es/>

Las medidas de centralización junto con las medidas de dispersión están presentes en las distribuciones de frecuencia (ilustración 5) y en las distribuciones de probabilidad, por ejemplo para el caso de la distribución normal, que según Levin, es muy importante por dos razones (2004, pág. 209):

“Primero, tiene algunas propiedades que la hacen aplicable a un gran número de situaciones en las que es necesario hacer inferencias mediante la toma de muestras. Segundo, la distribución normal casi se ajusta a las distribuciones de frecuencias reales observadas en muchos fenómenos, incluyendo características humanas (peso,

altura, coeficiente intelectual), resultados de procesos físicos (dimensiones y rendimientos)”.

Un comportamiento que presenta características comunes, pero que depende tanto de la media, como de la desviación estándar, como se muestra en la ilustración 6:

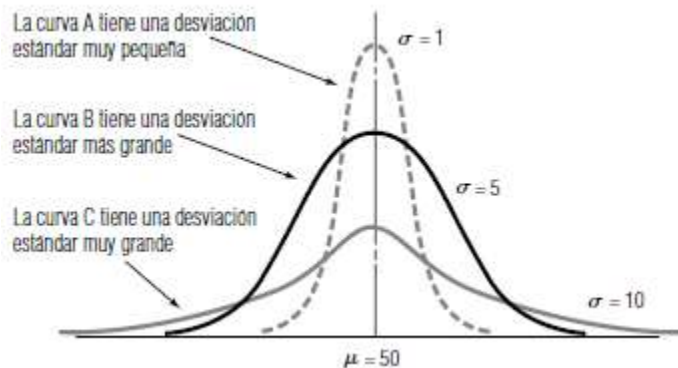


Ilustración 8. Distribuciones con media igual, pero diferente desviación.

2.4 Sistemas de representación.

En ocasiones resulta útil la representación gráfica de una distribución de frecuencias que permita una lectura rápida del comportamiento de la misma, como lo sustenta Batanero (pág. 24) “una apreciación global y rápida de los mismos”. Los gráficos más utilizados en la educación media para representar una distribución de frecuencias son:

2.4.1 Diagrama de barras y gráfico de sectores.

Usualmente se utilizan para graficar variables cualitativas y discretas, como se muestra a continuación.

En la siguiente tabla de datos se presenta la población activa de Jaén (1980) según relación laboral.

Relación laboral	Frecuencia
Patronos	4.548
Trabajadores autónomos	17.423
Cooperativistas	2.406
Empleados fijos.	61.935
Trabajadores eventuales	47.358
Trabaja en empresa familiar	3.580
Otros	.98
Total	138.248

Tabla 3. Población activa de Jaén (1980) según relación laboral. Tomado de Batanero (2001, pág. 26)

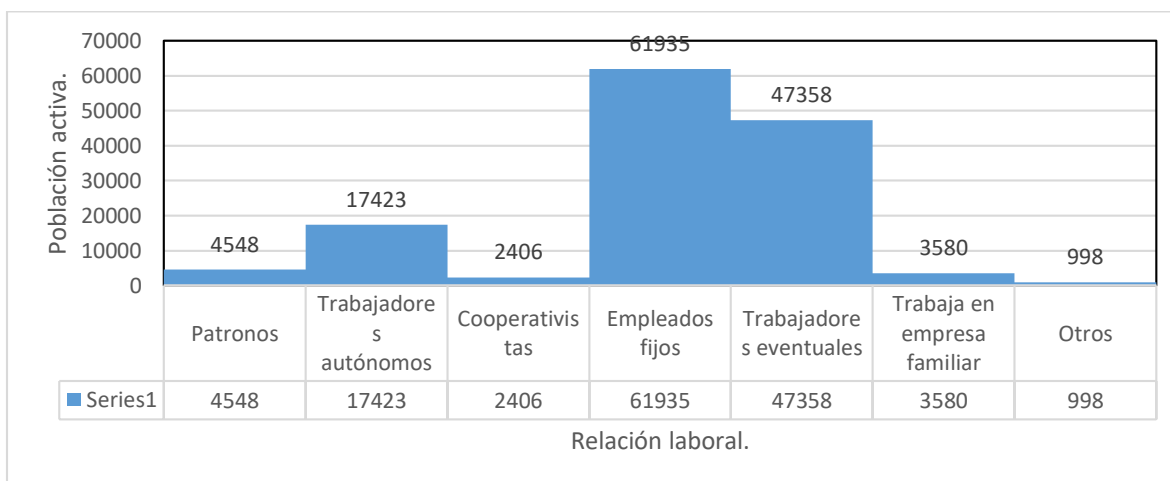


Ilustración 9. Población activa de Jaén (Barras).

En cada modalidad de la variable observada, se construye una barra cuya altura corresponde con la frecuencia absoluta de dicha observación.

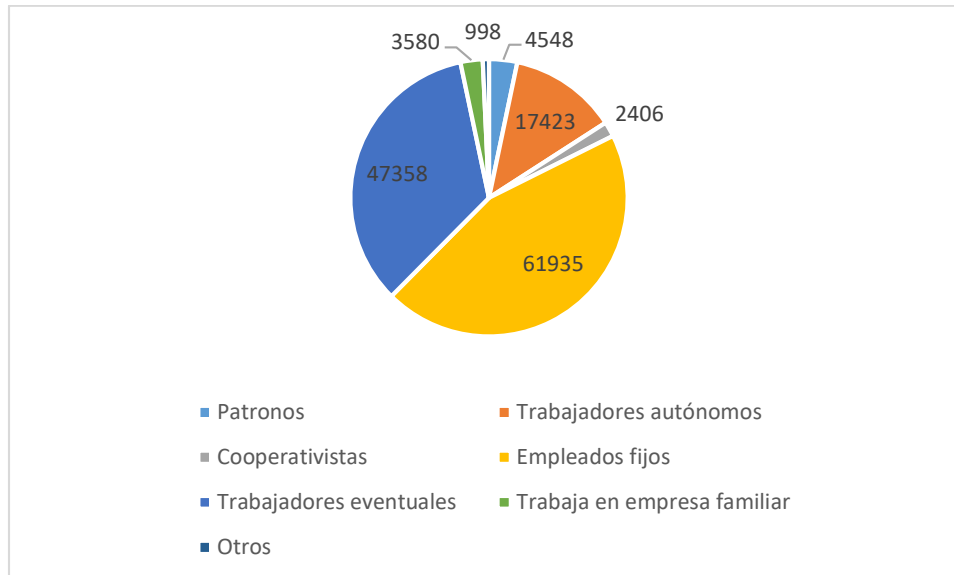


Ilustración 10. Población de Jaén (Sectores).

Esta gráfica nos proporciona información del “peso” de cada una de las observaciones con respecto a las otras y con respecto al total.

Para el caso de las variables cuantitativas discretas, se utilizan las mismas representaciones que las variables cualitativas discretas, la diferencia radica en que la variable cuantitativa aparece ordenada.

En ocasiones es importante establecer el número de valores que son menores que uno dado, para ello se puede representar las frecuencias absolutas acumuladas y las frecuencias relativas acumuladas para conocer esta información.

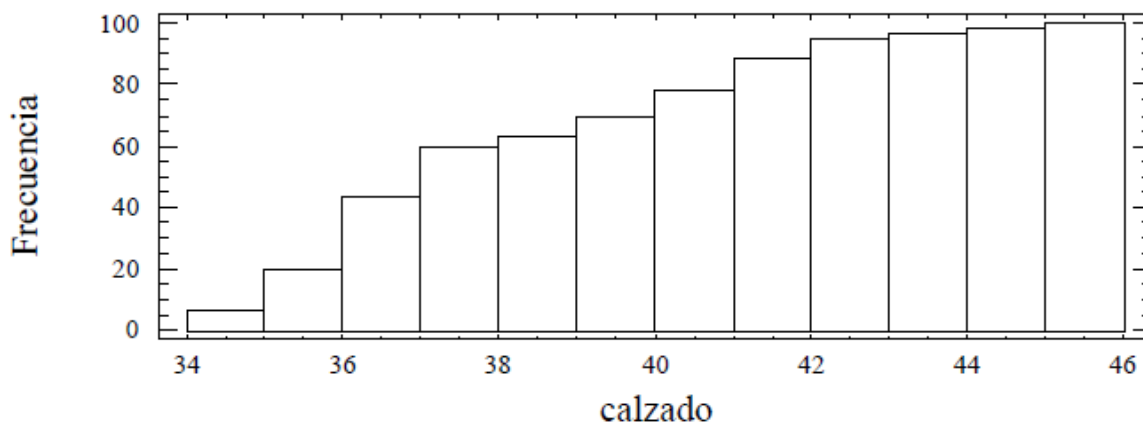


Ilustración 11. Diagrama de frecuencias acumuladas del "número de calzado". Tomado de Batanero (2004, pág. 18).

2.4.2 Polígono de frecuencias:

Son utilizados frecuentemente, junto al histograma, para representar una variable agrupada, para Batanero (2001, pág. 30) el polígono de frecuencias “es la línea que resulta de unir los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos de un histograma de frecuencias”. Como se muestra en el siguiente ejemplo.

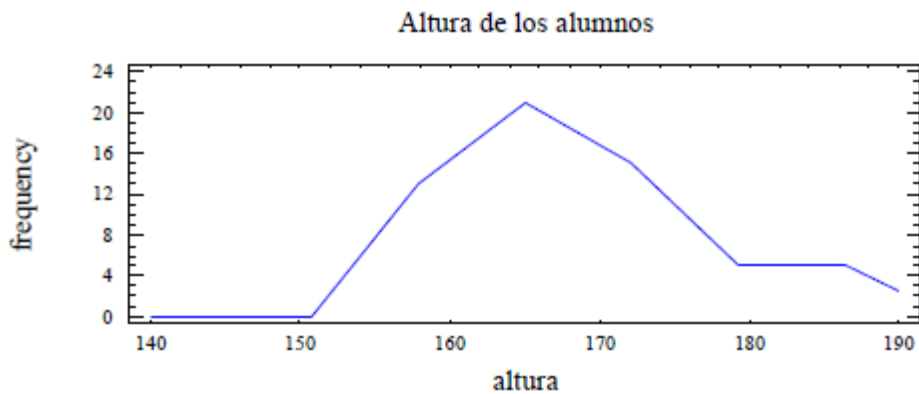


Ilustración 12. Polígono de frecuencias de la distribución de las alturas de los alumnos. Tomado de Batanero (2001, pág. 30)

También se utiliza el polígono de frecuencias para representar la frecuencia relativa acumulada, esta representación se caracteriza por tener una forma ascendente. A continuación se presenta el polígono de frecuencias asociado a la gráfica anterior.

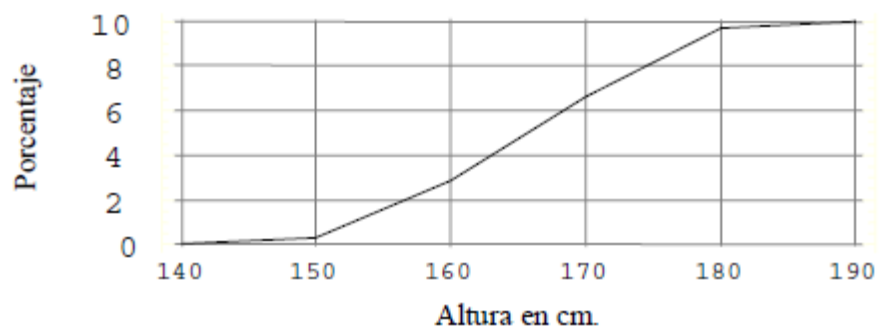


Ilustración 13. Polígono acumulativa de la altura de un grupo de estudiantes.

2.4.3 Gráfico de tallo y hojas.

Para Orellana (2001, pág. 18) el gráfico de tallo y hojas nos brinda la siguiente información:

- ✓ El rango de las observaciones y los valores máximos y mínimos.
- ✓ La forma de la distribución: Si es aproximadamente simétrica o es asimétrica.
- ✓ Cuántos picos o modas tiene la distribución.
- ✓ Si existen datos que se aparten notablemente del conjunto (datos atípicos).

Como ejemplo se presentan los datos sobre consumo diario per cápita de proteínas en 32 países desarrollados, después de ordenarlos de menor a mayor:

7.83	9.03	10.56
8.06	9.16	10.52
8.45	9.23	10.75
8.49	9.34	10.86
8.53	9.39	10.89
8.60	9.42	11.07
8.64	9.56	11.27
8.70	9.89	11.36
8.75	10.00	11.58
8.92	10.28	11.76
8.93	10.41	

Tabla 4. Consumo de proteínas per cápita en países desarrollados. Tomado de Orellana (2001, pág. 19).

Realizando el gráfico de tallo y hojas de la información obtenida, y el gráfico de extendido (cada tallo se subdivide de 0 a 5 y de 6 a 9) se obtiene la siguiente representación:

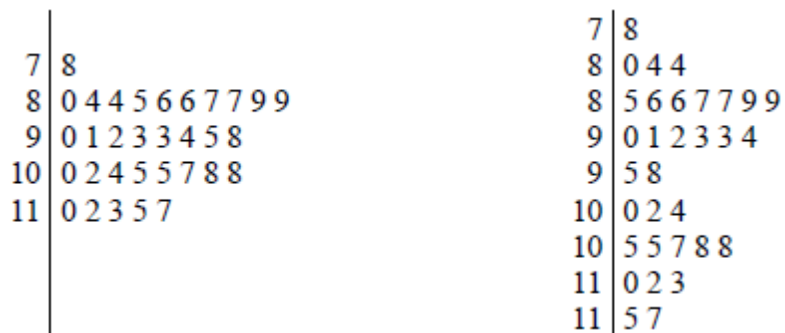


Ilustración 14. Gráfico de tallo y hojas y gráfico de tallo y hojas extendido. Tomado de Orellana (2001, pág. 19).

Para Batanero (2001, pág. 33), las ventajas de esta representación con respecto al histograma son las siguientes:

- ✓ Su fácil construcción.
- ✓ Se puede observar con más detalle que el histograma, porque los rectángulos del histograma pueden ocultar distancias entre valores de los datos. Sin embargo, estas

lagunas se pueden detectar en la representación del trinco, porque retienen los valores numéricos de los datos.

2.5 Acerca de la distribución y la variabilidad

La enseñanza de la Estadística y la Probabilidad ha tenido un desarrollo considerable en los últimos años debido a su importancia en la formación general del ciudadano (Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, 2011); estas dos ramas de las matemáticas permiten generar modelos que incluyen múltiples variables o efectos impredecibles a diversas situaciones de la vida cotidiana (Rocha, 2010), de las cuales deberíamos estar en la capacidad de reconocerlas y afrontarlas.

Desde los Lineamientos Curriculares-Matemáticas (1998, pág. 33), la Probabilidad y la Estadística:

“[...] desarrollan procedimientos para cuantificar, proponen leyes para controlar y elaboran modelos para explicar situaciones que por presentar múltiples variables y de efectos impredecibles son consideradas como regidas por el azar, y [...]. El carácter globalizante de la probabilidad y la estadística está en la presencia del pensamiento aleatorio para la comprensión de fenómenos de la vida cotidiana y de las ciencias”,

y en tal sentido, se plantea la necesidad de trabajar estas dos ramas de las matemáticas, proponiendo un razonamiento que se pueda extender al campo de lo cotidiano.

Por su parte, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2003) sustentan la enseñanza de los temas Estocásticos de la siguiente manera “intentar predecir dentro de ciertos rangos el curso de los acontecimientos respectivos y de tomar decisiones lo más razonables posibles ante la imposibilidad de saber con certeza lo que va a pasar.” es decir, que el estudiante que muestre una apropiación de este pensamiento, que en los Estándares lo llaman Aleatorio, puede estar en la capacidad de tomar decisiones en situaciones no determinísticas basado en modelos asociados a los fenómenos que percibe.

Según Godino (2004, pág. 47), la principal razón para introducir el estudio de situaciones aleatorias y las nociones básicas sobre probabilidad en la enseñanza primaria es “...que tales situaciones son frecuentes en la vida cotidiana”. Esta importancia se extiende un poco más del Pensamiento Aleatorio, y según la enseñanza de la misma, permite al estudiante resolver problemas donde intervienen variables pasando de una situación real a un modelo matemático.

Partiendo de lo anterior, y basándose estudios y currículos en diversos países, algunos autores como Burrill y Biehler (citado por Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2011, pág. 9) han identificado las ideas fundamentales que deberían desarrollarse con los estudiantes de básica para generar una mejor cultura estadística las cuales son: datos, gráficos, variabilidad aleatoria, asociación y correlación, probabilidad y distribución, esta última, como la capacidad de leer, analizar, criticar y hacer inferencias a partir de los agregados de los datos y no de cada dato aislado.

Bakker y Gravemeijer (2004) desarrollaron una investigación orientada a comprender el análisis que realizan los estudiantes cuando comparan distribuciones. Plantean que “el primer paso para comprender la idea de distribución es verlos como valores diferentes de la misma variable y ser capaz de construir una distribución que tenga un valor central dado” (pág. 130); sin embargo, desde los resultados arrojados por esta investigación se evidencia que los estudiantes tienden a repetir datos muy cercanos a la media (Ilustración 15, construir una distribución C dadas A y B).



Ilustración 15. Construcciones de una distribución.

Un acercamiento a la idea de distribución, sugiere la diferenciación de los datos como valores individuales y la de distribución como entidad en sí misma, a la cual se le asocian aspectos como: centro (media y mediana), extensión (rango, desviación estándar y rango intercuartílico), densidad (frecuencia y cuartiles) y asimetría (posición de la mayoría de los datos). Para dichos autores este concepto *“tiene una estructura compleja, pero es también parte de una estructura más grande que consta de grandes ideas, como la variación y el muestreo. Sin variación, no hay distribución, y sin toma de muestra, en su mayoría no hay datos”*

Para Arteaga, Batanero y Ruiz (2009) existen dos características básicas asociadas a la distribución que son las medidas de posición central y las medidas de dispersión, con las cuales los autores generan en su investigación unas categorías inclusivas según las respuestas de los estudiantes a los cuales se les aplicó el instrumento: no las tienen en cuenta, sólo utilizan para el análisis las medidas de posición central ó tienen en cuenta, además, las medidas de dispersión.

Para Reading y Shaughnessy (2004, citado por Arteaga et. al 2009, pág. 130) para comprender la distribución se debe cumplir con otro requisito, percibir la idea de variabilidad la cual *“está siempre presente en los datos”*, aunque en Estadística la variabilidad es una palabra polivalente y se puede asociar a *“variabilidad de resultados posibles en un experimento aleatorio, variabilidad en los datos recogidos, variabilidad en una variable aleatoria, variabilidad en las muestras o la distribución muestral”*.

Reading y Shaughnessy (2004) sugieren que los términos de variación y variabilidad se utilizan indistintamente, pero afirman que al realizar una búsqueda en los diccionarios se puede evidenciar que la *“variación”* es un sustantivo usado para describir el acto de variar o cambiar la condición, y la *“variabilidad”* es el adjetivo que se le asocia a la variable, lo que significa que algo es apto o susceptible de variar o cambiar. Como lo menciona Estepa y del Pino (2013) *“variabilidad es una característica (propensa a variar) de una entidad observable y el significado de variación la descripción o medida de esa característica”*.

Orta y Fernández (2013) realizan una revisión de los trabajos realizados por otros autores que consideran la variabilidad como esencial para el desarrollo de una “cultura estadística”, y como idea clave para constituir el concepto de distribución, destacando precisamente el reconocimiento que cada uno de ellos hace de este concepto, lo cual se sintetiza en la siguiente tabla:

AUTORES, AÑO	IDEAS ACERCA DE VARIABILIDAD.
Moore, 1990.	La variabilidad es el corazón de la Estadística.
Watson, Kelly, Callingham y Shaughnessy, 2003.	Indispensable para la existencia de la Estadística.
Wild y Pfannkuch, 1999.	La proponen como uno de los tipos de pensamiento estadístico relacionado con el aprendizaje y la toma de decisiones, lo cual deriva de su omnipresencia.
Garfield y Ben-Zvi, 2008.	La comprensión de las ideas de dispersión y variabilidad en los datos es una componente clave en la comprensión del concepto de distribución y es esencial para hacer inferencias estadísticas.
Konold y Pollatsek, 2004.	Recomiendan que en el análisis de datos se consideren conjuntamente centro (señal) y la variabilidad (ruido), porque ambas ideas son necesarias para darle sentido a los datos.
Watson, Callingham y Kelly, 2007.	La comprensión de la variabilidad se relaciona con la percepción de la incertidumbre, con cambios previstos e imprevistos y con valores atípicos en las situaciones o en los datos.
Bakker, 2004.	La dispersión tiene un significado cercano a los conceptos de variable e incertidumbre, porque si hay variabilidad, vivimos en la incertidumbre y, si algo no está determinado o es cierto, hay variabilidad.

Tabla 5. Ideas acerca de variabilidad.

Ahora bien, es necesario reconocer diversos tipos de variabilidad, dependiendo de las fuentes que la generan (Estepa y del Pino, 2013, p. XX):

- Variabilidad natural: esta variabilidad se asocia a la naturaleza de las cosas, como lo menciona “*Si tomamos medidas sobre seres naturales de una misma especie encontramos diferencias, debido a que los individuos son diferentes*”, si por ejemplo se toman estuches de crema dental de un supermercado, no todas las

cremas tendrán la misma cantidad, para este caso se muestra la variabilidad entre conjuntos y elementos de un mismo conjunto.

- Variabilidad en la medida: Se evidencia por varias causas, entre ellas la relación de unidad de medida y “cosa” a medir, en la primera componente se habla de una medida poco precisa (la edad de una persona sólo dada en términos de años) o un instrumento no muy fiable o adecuado (medir en metros algo muy pequeño) y para la segunda se puede ver la variabilidad por la “cosa” como tal está en constante cambio (presión sanguínea).
- Variabilidad inducida: Si se realiza un experimento para identificar el ambiente más adecuado para que germine una semilla, además de la variabilidad natural de que las semillas no son las mismas, está la variabilidad inducida, en este caso puede ser al clima, al fertilizante usado o las condiciones de suelo e hidratación.
- Variabilidad de muestreo: Si se toman dos muestras diferentes de una misma población se esperarían resultados diferentes, de allí la importancia de establecer una muestra que se asocie más a la población.

Generar una cultura estadística más acorde con las exigencias del mundo de hoy propone el trabajo de la Estadística no como una serie de técnicas para hallar datos dentro de un conjunto, sino que permita el hacer predicciones, buscar explicaciones y causas de la variación, como lo proponen Reid y Reading (2008, pág.42): “Notando y reconociendo la variación; el modelado y la medición de la variación para los fines de predicción, explicación, o de control; explicando y tratando con variaciones y utilizando estrategias de investigación en relación a la variación”.

2.6 Una mirada desde la Fenomenología.

La realidad que nos rodea puede organizarse, estructurarse y matematizarse, por medio de estos procesos una persona puede apropiarse de la matemática, por tal razón es importante buscar fenómenos del contexto de los estudiantes que puedan ser matematizados por ellos

a través de su propia experiencia, para Freudenthal (1993), los alumnos deben matematizar la realidad reinventando modelos, conceptos, operaciones y estrategias matemáticas que le permitan pasar de una clase de fenómenos internos o externos de la matemática a un modelo matemático; en este sentido, Rico (2003, pág. 2) plantea que “[...] mediante este organizar, estructurar y matematizar cada individuo se apropia personalmente de las matemáticas. Por tanto, hay que buscar aquellos fenómenos del entorno de los niños que pueden matematizarse mediante ciertas partes de las matemáticas. Hay que volver a la historia, en particular, y comprobar cómo fue descubierta mediante ensayo y error en su época. Describir cómo las matemáticas organizan los fenómenos”.

Para el caso de la distribución de frecuencias se plantea a continuación los fenómenos que son organizados por los conceptos, estructuras e ideas matemáticas asociados a ésta, desde lo propuesto por Cobo (2003):

Fenómenos asociados a la media:

- ✚ *Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores.*
- ✚ *Obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme.*
- ✚ *Obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dados cuya distribución es aproximadamente simétrica.*
- ✚ *Conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable con distribución aproximadamente simétrica.*

Fenómenos asociados a la mediana

- ✚ *Encontrar un resumen estadístico de posición central, en situaciones en las que la media no es suficientemente representativa.*
- ✚ *Encontrar un resumen estadístico de posición central para variables ordinales.*
- ✚ *Efectuar comparaciones de dos o más colecciones de datos usando gráficos de caja.*

Fenómenos asociados a la moda

- ✚ *Obtener como valor representativo de una colección de datos, el más frecuente de ellos, en situaciones en las que lo que interesa fundamentalmente es el valor dominante del conjunto.*
- ✚ *Encontrar el valor representativo en datos cualitativos.*

Fenómenos asociados a la dispersión

- ✚ *Encontrar una medida que permita la comparación de dos o más conjuntos, cuando la media es igual, pero los datos son diferentes.*
- ✚ *Identificar la forma de una distribución cuando no hay variabilidad en los datos del conjunto.*
- ✚ *Encontrar el valor mínimo y el valor máximo en una distribución de frecuencias.*

Fenómenos asociados a los gráficos

- ✚ *Encontrar patrones y tendencias que pueden ser difíciles de evidenciar en los datos.*

Desde la perspectiva de Freudenthal es importante reconocer los tipos de fenómenos que pueden ser matematizados por los niños, teniendo en cuenta la historia de la humanidad y como surgen los conceptos matemáticos, como ha sido su desarrollo y que dificultades se presentaron al ir formalizando el concepto, pues esto puede dar una idea de las dificultades que pueden surgir en los estudiantes, de tal manera que esta fenomenología puede aportar a la construcción de la secuencia.

3. FENOMENOLOGÍA HISTÓRICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

El análisis fenomenológico tiene dos componentes, por un lado pretende identificar los fenómenos que dan sentido a un concepto matemático y por otro establecer las maneras en las que está organizado el fenómeno, Freudenthal distingue varios tipos de fenomenología, entre los cuales está la fenomenología histórica, la cual según Puig (1997, pág. 7) “se presta especial atención a los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extendió a otros fenómenos”.

En este apartado se presentará una fenomenología histórica de los conceptos estadísticos, en particular de: media, mediana, muestreo, distribución y gráficos, la cual pretende identificar algunos aspectos asociados a la secuencia de actividades y que pueda relacionarse los fenómenos que dieron inicio a los conceptos mencionados a dicha secuencia.

Las ideas presentadas en este capítulo están basadas en el trabajo realizado por Bakker (2004),

3.1 Fenomenología del concepto de Media:

A continuación se presentan los campos de fenómenos que dieron origen al concepto de Media.

3.1.1 Como el resultado de estimar grandes cantidades.

Se presentan a continuación tres situaciones que, desde lo planteado por Bakker (2004), concibieron el uso de la media como una estrategia de solución, los cuales se caracterizan por estimar el número total de una colección grande de objetos:

Situación 1: Estimar el número de hojas de una rama

Según Hacking (India, antes del siglo IV, citado por Bakker, p. 54), para abordar esta situación, “el protagonista “*Rtuparṇa*” estimó el número de hojas de un árbol frondoso. Estimó que el número en la base de una sola rama, lo multiplicaba por el número estimado de ramitas en el ramas, obteniendo 2095, que después de una noche de recuento resultó ser muy cerca de la cifra real”.

Siguiendo las ideas de Bakker, aunque se desconocen los argumentos del protagonista de la historia para la escogencia de la rama, una actividad como la anterior puede generar discusiones en torno a la escogencia de una rama particular que cumpla condiciones como: “no es la más grande, pero tampoco es la más pequeña”, escogiendo una rama que sea la más representativa del grupo de ramas.

Situación 2: La altura de un muro

Para enfrentar esta situación, se construían escaleras que pudieran estar a la misma altura de los muros (usualmente del enemigo); para ello enviaban varias personas para que hicieran el conteo de los ladrillos de dicho muro, y a partir de la información obtenida procedían a establecer la altura requerida para las escaleras.

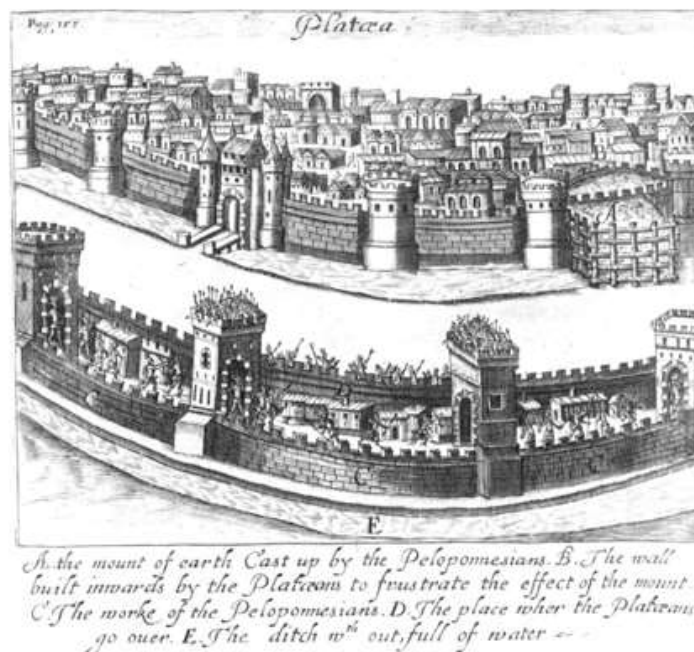


Ilustración 16. Problema “La altura de un muro”.

A partir de los diversos conteos realizados por las personas enviadas, se definía la altura tomando la cantidad o el número que más aparecía en dichos conteos; en este sentido, se puede evidenciar un uso de lo que ahora se denomina *moda*, en tanto valor que más se repite. Además, se puede vislumbrar un uso de la *media* para establecer el espesor de los ladrillos, pues se establecía una medida que representara el tamaño (altura) de un ladrillo.

Situación 3. El tamaño de las tripulaciones de los buques.

Para poder establecer la cantidad de tripulación de los buques, Homero establecía el número de buques (como 1200) y dice que la tripulación de cada barco “Boetian” era de 120, y la tripulación de cada barco “Filoctetes” era de 50 hombres.

Se puede establecer la cantidad de personal utilizando un promedio entre la cantidad mayor y la cantidad menor, para Bakker (2004) “esto se llama el rango medio, que se define como la media aritmética de los dos extremos” (pág. 55).

3.1.2 Vista desde la geometría griega.

Desde los planteamientos de Bakker (2004), aunque existen algunas diferencias de la concepción de la media aritmética en la geometría griega, con la media aritmética en estadística, como la misma definición lo propone: el número medio de b y c se llama la media aritmética si y sólo si $a-b = a-c$ difiere de la definición actual en estadística en la cual $(a + c) / 2$, y adicionalmente en la geometría griega se habla de dos casos (b y c) mientras que en la estadística se puede generalizar, es importante resaltar que los griegos representaban números y magnitudes con barras:



Ilustración 17. Cantidades como magnitudes.

Y según palabras de Bakker “una representación de este tipo podría ayudar a los estudiantes a darse cuenta de que la parte de la barra más larga que “sobresale” (en comparación con la barra del medio) compensa la parte correspondiente de la barra más corta” (pág. 153).

3.2 Fenomenología del concepto de Mediana.

Bakker reconoce que existen dos campos importantes en los cuales se pueden evidenciar los fenómenos que debían ser organizados por la mediana, uno de ellos asociado a la esperanza de vida:

Afirma que en 1669 Christiaan Huygens se dio cuenta de que había una diferencia entre el tiempo esperado de vida restante y el tiempo de vida que la mitad de la población alcanzaría. El 28 de noviembre de 1669, escribió: “dos conceptos diferentes: la expectativa o el valor de la edad futura de una persona, y la edad en la que tienen la misma oportunidad de sobrevivir o no”.

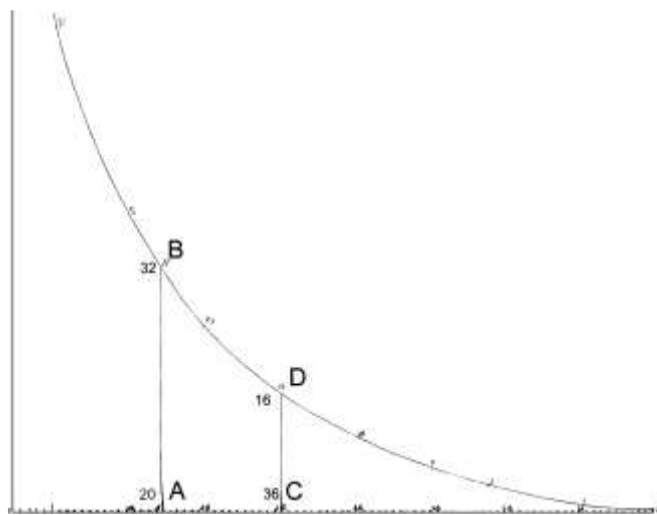


Ilustración 18. Tiempo esperado y tiempo de vida.

El segundo campo está ligado a la probabilidad. Cournot (1843/1984) definió la mediana como el valor x_0 para los que la distribución función F satisfecho $F(x_0) = 1/2$ y explicó que se trata de la relación calidad que el área bajo la gráfica es la misma a la izquierda y a la derecha.

Dos jugadores, uno apuesta del valor de menos de x y el otro de más de x , apostarían con las mismas oportunidades. Con un número muy grande, el cociente de la mayor (o menor) que los valores de x y el número total de valores no difieren mucho de la fracción $1/2$ (Cournot, 1843, p. 83).

3.3 Fenomenología del concepto de Muestreo.

En la investigación realizada por Bakker se reportan tres campos de fenómenos que dieron inicio al concepto de muestreo, los cuales se describen a continuación:

3.3.1 *Estimación y muestreo*. En un libro de geometría del siglo XVI (Kobel, 1535) aparece la siguiente situación para establecer la medida estándar de un pie. Se realiza una medición de 16 pies a la salida de una iglesia, como se muestra a continuación y se espera que se pueda determinar la medida de los pies de los feligreses.



Ilustración 19. Determinar la media a partir del total.

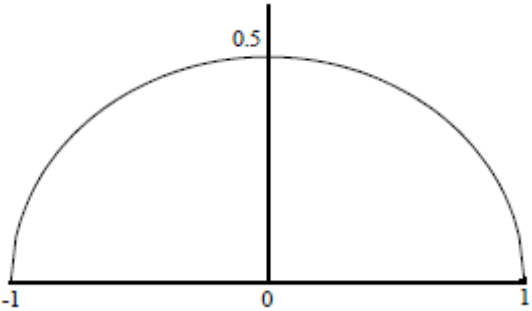
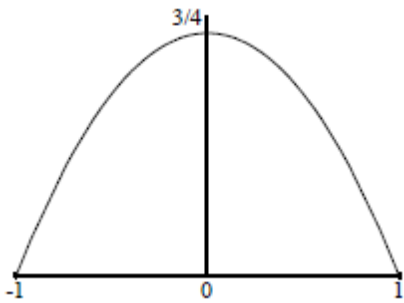
Esta actividad presenta una relación con las ya mencionadas anteriormente, especialmente con la estimación de las hojas, aunque esta parte de un total para establecer una media y la de estimación parte de una media para estimar un total, aunque la actividad no está centrada en las características de las 16 personas, si poseen algunas características que puedan establecer la medida estándar de un pie a partir del grupo de feligreses.

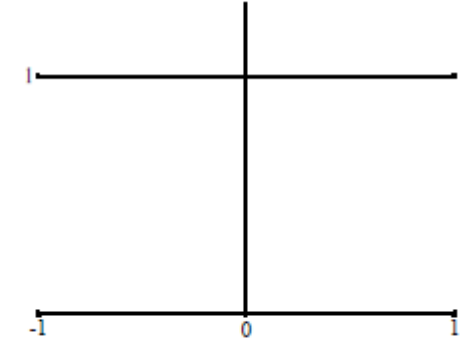
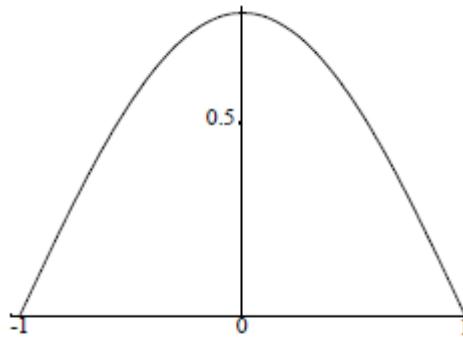
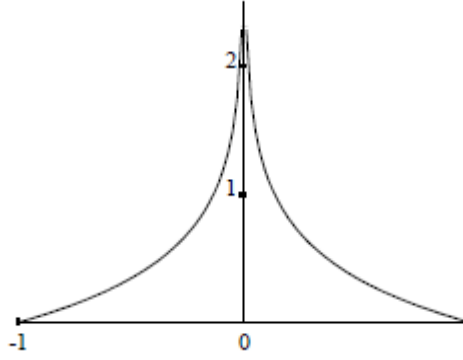
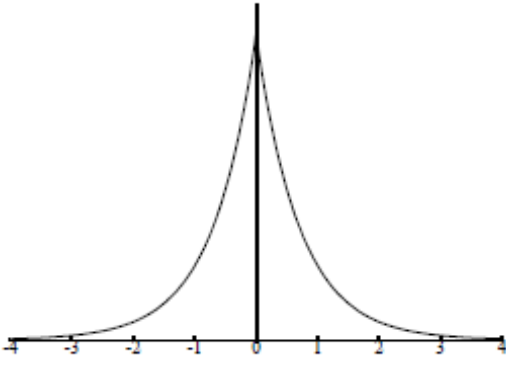
3.3.2 *Toma de decisiones*. Rabinovitch, 1973. Algunos ejemplos están asociados a la ley judía y muestran relaciones de proporcionalidad: “9 de cada 10 tiendas venden un tipo de carne”, mostrando comportamientos del total de la población y relaciones de probabilidad, pues al encontrar un pedazo de carne tenemos una probabilidad de que corresponda a ese tipo de carne o no.

3.3.3 *Muestreo aleatorio*. Gran parte de la historia en estadística se asocia a los censos que debían realizar para establecer decisiones en las civilizaciones antiguas, según Bakker (2004): “podemos inferir que el muestreo se puede utilizar para diferentes propósitos, tales como la búsqueda de un número total, la búsqueda de una medida basado en un total, y tomar una decisión. Históricamente la siguiente etapa consistió en utilizar muestras para obtener información acerca de una población” (pág. 64).

3.4 Fenomenología del concepto de Distribución.

Una forma de resumir o modelar un conjunto de datos es mediante el objeto "distribución". Según Bakker (2004, p. 89), el concepto de distribución surgió en el siglo XVIII de la teoría de los errores, Simpson en 1756 quiso mirar la relación “entre los errores cuando funciones de probabilidad simples usados para argumentar que la media de varias observaciones era mejor que una sola observación” (Bakker, p. 74). Simpsón lanzó su idea de distribuciones de probabilidad y posteriormente otros autores propusieron alternativas de error entre ellos Lagrange, Lambert, Benoulli, Laplace y Gauss.

Lambert (1765): semicírculo aplanado.	$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ $-1 < x < 1$	
Lambert (1776): parabólica continua.	$f(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)$ $-1 < x < 1$	

Lagrange (1776): uniforme continua.		
Lagrange (1781): Función coseno.	$f(x) = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ $-1 \leq x \leq 1$	
Laplace (1781): función logaritmo.	$f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{ x }$ $-1 \leq x \leq 1$	
Laplace (1774): doble exponencial.	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2} x }$	

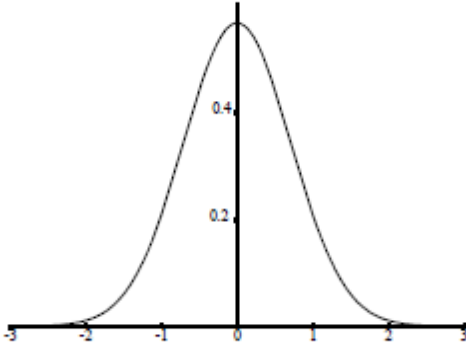
<p>Gauss (1809) y Laplace (1810): Ley del error de la distribución normal.</p>	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$	
--	--	--

Tabla 6. Gráficas de algunas distribuciones.

En el contexto de la altura de la gente, podemos pensar en muchos factores que influyen en este incluyendo la altura de sus padres, su dieta en su juventud, su edad, y sus deportes. Incluso si estos mismos factores no se distribuyen normalmente, su suma más o menos lo es. Esto explica por qué tantos fenómenos se pueden describir mediante la distribución normal según Sittig y Freudenthal, 1951, citado por Bakker (2004).

Algunos autores han sugerido que para conocer toda la distribución, basta con conocer dos medidas: Si conocemos el valor de M [mediana o la media], así como la de Q conocemos la totalidad Esquema [distribución normal]. M expresa el valor medio de todos los objetos contenidos en el grupo, y Q define su variabilidad. (Galton, 1889, p. 61).

3.5 Fenomenología del concepto de Gráficos.

Teniendo en cuenta que los gráficos estadísticos se utilizan para visualizar comportamientos de una manera más sencilla que al intentar deducirlos de una distribución de frecuencias, Beniger y Robyn (1978, citado por Bakker, 2004, p. 80) distinguen cuatro áreas problemáticas en las cuales se pueden evidenciar fenómenos que pedían ser organizados mediante gráficas:

5.1 *Organización espacial* (siglos XVII y XVIII), por ejemplo, un mapa de Halley con líneas de la declinación magnética (1701); aunque inicialmente los científicos tenían la

necesidad de trabajar con datos tabulares según Bakker, no fue sino hasta la década de 1830 que las revistas científicas comenzaron a grabar gráficos.

5.2 *Comparación discreta* (XVIII y principios del siglo XIX), por ejemplo la barra de Playfair tabla de importación y exportación en Escocia (publicado en 1786); entre otras, también aparecen por esta época líneas de tiempo para comparar la vida de unas 2.000 personas célebres, antes del siglo XIX las distribuciones se asumieron simétricas. Cuando la estadística se aplicó en más contextos como la economía y las ciencias sociales, había una necesidad de hacer distinciones entre los diferentes tipos de distribuciones (simétrica o asimétrica, frecuencia o densidad de distribución, muestreo o distribución de la población).

5.3 *Distribución continua* (siglo XIX) surge el histograma y la ojiva (frecuencia acumulada), gracias a Fourier quien realizó este gráfico para representar la población de París por grupos de edad. Según Bakker (2004) “el histograma surgió de un gráfico de barras. Esto también podría indicar, desde una perspectiva histórica, que un histograma es un gráfico más avanzado que un gráfico de barras” (pág. 92).

5.4 *Distribución multivariante y de correlación* (finales de los XIX y principios del siglo XX) con gráficos y diagramas de correlación tridimensional y otros gráficos que surgieron como el de tallo y hojas.

El presente capítulo ayuda a realizar una fenomenología histórica de los conceptos asociados a la distribución de frecuencias, el conocer dichos fenómenos puede ayudar a realizar una previsión de lo esperado por los estudiantes, pues se espera que las dificultades a las que se enfrentó la humanidad para resolverlas aparezcan en el aula de clase, por otro lado puede ayudar a la realización de una secuencia de actividades coherente con la evolución de la historia del concepto a trabajar y por último, el conocer la evolución y las dificultades puede poner en el rol del estudiante al docente.

4. METODOLOGÍA

Desde un enfoque cualitativo, este trabajo de tipo descriptivo-interpretativo, se desarrolla desde la metodología investigación-acción, pues se caracteriza el razonamiento que realizan los estudiantes de grado octavo a partir de sus respuestas a cada una de las tareas propuestas en la secuencia de actividades en torno al concepto de distribución de frecuencias basado en el marco teórico del presente trabajo y las investigaciones previas consultadas.

4.1 Población IEDR Cune

La secuencia de actividades se aplicó a un curso de grado 8° de la Institución Educativa Departamental Rural Cune, ubicada en la vereda del mismo nombre en Villeta Cundinamarca, Institución de carácter oficial que cuenta con dos cursos por grado en básica secundaria, con un promedio de 20 estudiantes por curso, los estudiantes viven en su mayoría en la vereda Cune y algunos en veredas aledañas y sus familias se dedican, en la mayoría de los casos, a cuidar y/o administrar fincas.

Para seleccionar el curso al cual se le aplicaría la secuencia de actividades, se tomó en cuenta las investigaciones previas del concepto de distribución de frecuencias, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas asociados a este concepto y la secuencia propuesta por Bakker, sugiriendo un trabajo con estudiantes de grado octavo, el cual cuenta con 23 estudiantes que se encuentran entre los 13 y los 16 años de edad, 9 de los 23 estudiantes ha repetido al menos un grado de escolaridad hasta el momento, 4 de los 23 estudiantes tiene acceso a internet en la casa, y aunque 11 de los estudiantes manifiesta que tiene celular propio, ninguno de ellos accede desde el dispositivo a internet.

El área de matemáticas diseñó para el año 2014 el plan de estudios, el cual, para el caso de los estudiantes de grado octavo es de una intensidad horaria de 7 sesiones a la semana, cada sesión de clase es de 60 minutos. Por convenio interno con el docente, una de las sesiones

semanales es destinada para el desarrollo del Pensamiento Geométrico y otra sesión es destinada para el desarrollo del Pensamiento Aleatorio.

Pese a lo anterior, el curso ha manifestado que en grados anteriores han recibido entre 1 ó 2 sesiones de clase correspondientes al Pensamiento Aleatorio, las cuales están enfocadas a hallar las medidas de tendencia central como la moda, mediana y media de una distribución de frecuencias ya establecida.

Las sesiones que se utilizaron para proponer la secuencia de actividades empezaban con una lectura general por parte del docente, luego los estudiantes que estaban ubicados por grupos que ellos mismo realizaron, recibían la actividad, cada grupo tenían un tiempo aproximado de 60 a 80 minutos para desarrollar las tareas propuestas; el docente realizaba acompañamiento a las respuestas de los estudiantes y asesoraba de manera particular las inquietudes de los grupos de trabajo. Para finalizar se proponía una mesa redonda en la cual, cada grupo debía explicar la manera en la cual abordó la situación.

4.1.1 Análisis del plan de estudio de la IEDR Cune

En este apartado se realizará una caracterización al plan de estudios del área de matemáticas propuesto por los docentes de la Institución Educativa Departamental Rural Cune, ubicado en Villeta Cundinamarca, identificando en la propuesta, la metodología y los estándares propuestos para el desarrollo del pensamiento aleatorio correspondiente al grado 8°.

El plan de estudios propuesto para el área de Matemáticas en la Institución Educativa Departamental Rural Cune, surge como una necesidad de aportar en el mejoramiento de la estimación y el cálculo mental, además es “indispensable insistir en la operatoria y el cálculo mental, en la comprensión de los conceptos y el desarrollo de los procesos, en la formulación y solución de problemas” (pág. 3), presentado dos enfoques, la matemática como una herramienta para desarrollar cálculos mentales y como resolución de problemas.

Para los docentes que proponen el plan de estudios del área de matemáticas en el 2014, se debe favorecer el desarrollo de los procesos y habilidades de pensamiento, estimulando la creatividad y las operaciones mentales, “generando procesos mentales superiores, contribuyendo a organizar la mente para la toma de decisiones, para la formulación, análisis y solución de problemas” (pág. 4) pues, para los autores se deben incluir estos procesos para hablar de una educación integral del individuo.

Se puede evidenciar la resolución de problemas como parte importante en la construcción del pensamiento matemático para este plan de estudios, por tal razón está incluida en la propuesta para ser desarrollada en el aula de matemáticas, a través de estrategias pedagógicas incluidas el uso de aparatos electrónicos y computadores, aunque esto no se evidencia en el desarrollo de las clases, pues el colegio no cuenta con conectividad a internet y en la sala de sistemas no se cuenta con equipos que puedan desarrollar aplicaciones o programas diseñados para desarrollar conceptos matemáticos.

El área de Matemáticas propone los siguientes 5 obstáculos como problemáticas para el buen desarrollo de las clases del área, aunque el documento no especifica la metodología implementada ni se presentan las evidencias para describir estos obstáculos. Los cuales se sintetizan en el siguiente cuadro:

Bajo nivel de razonamiento matemático.	Este problema se manifiesta en la dificultad que tienen los alumnos para explicar lo que leen, para interpretar el lenguaje matemático, en la falta de interpretación de modelos matemáticos y en la dificultad para resolver problemas.
Temor a las matemáticas.	Se manifiesta como temor a expresar sus ideas, inseguridad al expresar sus conceptos y el no empleo de estrategias diferentes a las sugeridas por el profesor.

Poca aplicación de las matemáticas en situaciones cotidianas.	A pesar del manejo de conceptos matemáticos por parte del alumno, éstos no tienen sentido para su vida, ya que no pueden realizar su transferencia a situaciones de la práctica cotidiana y a solucionar los problemas que se presenten en diferentes contextos.
Problemática juvenil.	Los conflictos propios de la juventud impiden el buen desempeño académico. La mayoría de los estudiantes de hoy viven en un ambiente de descomposición familiar en aumento gradual y vivencian su sexualidad de manera precoz, lo que los lleva a sumergirse en sus propios conflictos restando importancia a su superación personal a nivel académico y originando un proyecto de vida sin metas ni ilusiones.
Motivación.	El estudiante no llega al colegio con una actitud positiva frente a la academia, su meta fundamental es obtener su título, sin tener en cuenta las ventajas que en el concierto escolar revisten la dedicación, el empeño y el verdadero deseo de superación. A esta condición, se suma la falta de motivación que el docente imprime a su clase, lo que acrecienta la dificultad motivacional dentro del ambiente académico.

Tabla 7. Obstáculos frente al área de Matemáticas.

Teniendo en cuenta los marcos anteriores, se presentan los objetivos generales para el área de matemáticas, los cuales se clasifican en Educación básica primaria y básica secundaria, para esta investigación sólo se tendrán en cuenta los objetivos generales de secundaria, teniendo en cuenta el curso en el cual se aplicará la secuencia.

- Construir el conjunto de los números naturales a partir de colecciones, de objetos concretos y en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva, multiplicativa y potenciativa.

- Adquirir habilidad para el cálculo aritmético mental y para el cálculo escrito, con ayuda de calculadora y sin ella.
- Construir el conjunto de los números fraccionarios a partir de operadores sobre magnitudes concretas y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva y multiplicativa.
- Resolver situaciones de la vida diaria que requieran el uso de los números fraccionarios y de las operaciones entre ellos.
- Construir algunos subconjuntos de números reales a partir de situaciones geométricas y realizar el estudio del conjunto de los números reales y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva y multiplicativa.
- Resolver situaciones de la vida diaria que requieran el uso de los números reales y de las operaciones entre ellos.
- Realizar cálculos numéricos utilizando las propiedades de las operaciones fundamentales estudiadas en el conjunto numérico respectivo.
- Adquirir habilidades y destrezas para formular, plantear y resolver problemas que permitan la aplicación de modelos matemáticos.
- Explorar el espacio en dos y tres dimensiones y construir modelos imaginarios del mismo y desarrollar algunos sistemas conceptuales y simbólicos que permitan manejar esos modelos.
- Calcular longitudes, áreas y volúmenes de figuras en el espacio.
- Identificar los diferentes sistemas métricos y ejercitar las conversiones de unidades.
- Analizar sistemas de datos estadísticos, calcular sus medidas de tendencia central y de dispersión y representarlos gráficamente.
- Identificar y utilizar correctamente las conectivas del lenguaje ordinario: y; o; si... entonces; si y sólo si.
- Reconocer y utilizar correctamente los conectores y cuantificadores del lenguaje ordinario: todos, cada uno, algún, alguno, algunos, ningún, ninguno, nadie, algunos no, hay, no hay.

- Determinar y representar conjuntos y subconjuntos, realizar operaciones y establecer las diferentes relaciones que se dan entre ellos.
- Generar todas las permutaciones y combinaciones de objetos tomados de conjuntos de pocos elementos, atendiendo a condiciones previamente determinadas.
- Reconocer, analizar y representar relaciones en sistemas específicos y en particular relaciones de orden y de equivalencia.
- Reconocer, analizar y representar operaciones en sistemas específicos y en particular operaciones conmutativas y asociativas.

Los objetivos planteados están orientados por los Estándares Básicos en Matemáticas, además se proponen componentes para cada uno de los cinco pensamientos propuestos en los Estándares, siendo los componentes del pensamiento aleatorio los siguientes: “Se procurará garantizar que los estudiantes sean capaces de plantear situaciones susceptibles de ser analizadas mediante la recolección sistemática y organizada de datos. Además, estarán en capacidad de ordenar y presentar esos datos y, en grados posteriores, seleccionar y utilizar métodos estadísticos para analizarlos y desarrollar y evaluar inferencias y predicciones a partir de ellos. Se propone ejercitar la lectura crítica de algunos informes estadísticos, comerciales y financieros que aparecen en la prensa y en revistas especializadas”. (pág. 11).

El documento en el cual se establece el plan de estudio continúa con las competencias y el perfil de los estudiantes para el área de matemáticas clasificados por grupos de grado, para el curso al cual está propuesta la secuencia, el cual pertenece al conjunto de grados 8° y 9° se propone lo siguiente:

Competencias

1. Interpreta y utiliza el lenguaje algebraico para convertir una situación de la vida diaria en una expresión matemática para buscarle su solución.
2. Operacionaliza expresiones algebraicas como monomios y polinomios en modelos matemáticos relacionados con situaciones de la vida diaria.

3. Identificar situaciones que permitan la aplicación de los diversos casos de factorización.
4. Aplicar las operaciones de los diferentes sistemas numéricos (Reales, Imaginarios y Complejos) para la solución de problemas en contextos reales.
5. Transformar y resolver situaciones cotidianas mediante la aplicación de sistemas de ecuaciones lineales.
6. Identificar la estructura de una ecuación cuadrática y aplicar métodos de solución en la interpretación de situaciones cotidianas.
7. Comprender y aplicar en contextos matemáticos y no matemáticos las funciones lineales y cuadráticas para dar solución a un problema del entorno.
8. Comprender las propiedades del plano y del espacio así como de las formas geométricas que se hallan en ellos a través del uso de las transformaciones en contextos matemáticos y no matemáticos.
9. Está en capacidad de comprender el sentido de los axiomas, las definiciones y los teoremas geométricos teniendo habilidades argumentativas para realizar demostraciones deductivas de teoremas geométricos.
10. Comunica y expresa la información que se percibe al observar los objetos tridimensionales.
11. Entender y apreciar mejor las formas circulares presentes en nuestro entorno manejando diferentes métodos de demostración deductiva.
12. Analizar y aplicar los conceptos de área superficial y volumen en situaciones matemáticas y no matemáticas.

Estas competencias planteadas pueden asociarse a cada uno de los cinco pensamientos planteados por los Estándares Básicos, sin embargo no aparecen competencias específicas al pensamiento aleatorio, esto indicaría que los docentes que proponen este plan de estudio, no identifican la importancia de desarrollar una cultura estadística ni de los conceptos asociados como la distribución de frecuencias en los estudiantes de este conjunto de grados.

4.1.2 Metodología del área de matemáticas de la IEDR Cune

En la I.E.D.R. Cune no se ha establecido un modelo pedagógico que pueda orientar la planeación y ejecución de las clases, sin embargo se propone una metodología propia del área, la cual parte del fundamento que el alumno es el eje del proceso educativo y que pretende incluir dentro de las sesiones de clase las siguientes características:

La metodología debe motivar, buscar el punto y el momento para predisponer al estudiante para que aprenda. A través de la aproximación al concepto se pretende que el estudiante adquiera nuevos conocimientos pasando por lo real, gráfico y simbólico. Igualmente el uso de la socialización del saber, se buscará el desarrollo de las actividades en grupo.

Se propiciará el aprendizaje de las matemáticas haciendo énfasis en los procesos y combinando los conocimientos que el alumno ha adquirido en grados anteriores para la construcción de nuevos conocimientos.

Se promoverá el trabajo en grupo a través del cual el alumno mostrará sus esfuerzos y progresos, así como su dinamismo y creatividad.

La interacción entre la teoría y la práctica se considerará a través de la resolución de problemas lo cual permite que el alumno aplique los conocimientos adquiridos, analice, critique, verifique el cumplimiento de condiciones y encuentre soluciones a diversas situaciones que se puedan presentar.

4.1.3 Perfil del estudiante de grado octavo de la IEDR Cune

Cada una de las áreas propone un perfil de estudiante por grupos de grado, para el caso de Matemáticas del conjunto de grado 8° y 9° se caracteriza por “la comprensión mental de la variable frente a hechos cotidianos, manipula proporciones y expresiones algebraicas, plantea preguntas y resuelve problemas aplicando las ecuaciones lineales y cuadráticas. Analiza y aplica los conceptos de área superficial y volumen a situaciones del entorno” (Plan de estudios, pág. 15).

Estas características están basadas en la Teoría de Piaget, para los autores del plan de estudios es “necesario reconocer en el alumno la presencia gradual de una serie de procesos que usualmente se han señalado en el aprendizaje de las Matemáticas, y que provienen de la teoría del desarrollo cognoscitivo de Piaget” (pág. 4).

El perfil propuesto por los docentes está caracterizado por las competencias que se espera desarrollar para este conjunto de grados, el perfil no incluye aspectos de la personalidad, ni del estado mental de los jóvenes a esta edad. Además, las competencias que se estipulan no están asociadas al pensamiento aleatorio.

4.1.3. Plan de estudio y libros de apoyo de grado octavo

Para el año académico 2017 los docentes del área de matemáticas deben presentar un nuevo plan de estudio del área de Matemáticas teniendo en cuenta que el colegio entró a partir del año 2016 en jornada única y la intensidad horaria de Matemáticas pasa de cinco horas semanales a siete horas semanales (una hora semanal del pensamiento geométrico y una hora semanal del pensamiento aleatorio).

La institución cuenta con una serie de libros para el área de matemáticas llamado “La postprimaria: una alternativa para la Educación Básica Rural. Matemáticas 8° grado”. De James Velasco, Luis Rojas y Yolanda Gallardo. 2000. Ministerio de Educación Nacional, libros que son utilizados cuando el docente considere pertinente, pues desde la dirección académica de la institución no se obliga la utilización de este material.

La I.E.D.R. Cune no tiene registro del año que empezó como escuela rural en la Hacienda Cune (se estima desde los años 50's), para el año 2005 la escuela empieza con postprimaria y un modelo de escuela nueva para los grados 6°, 7°, 8° y 9°, con docentes capacitados para impartir todas las áreas en un mismo curso, caracterizada además, por la implementación de proyectos productivos como el vivero de plantas nativas y plantas

medicinales, el proyecto de convivencia y el proyecto de lombricultivo. Posteriormente la Institución es aprobada para implementar bachillerato académico empezó según resolución número 005851 de julio 10 en el año 2009 y Hasta el momento ha tenido cinco promociones.

El libro que corresponde al grado 8° presenta una estructura de 5 unidades y capítulos por cada unidad, aunque no aparece ninguna unidad que pueda asociar al desarrollo del pensamiento aleatorio ni la constitución del objeto mental de distribución de frecuencias, a continuación se muestran las unidades y los capítulos del libro correspondiente a grado 8°:

Unidad 1. Los Reales.

- *Los números irracionales.*
- *El sistema de los números reales.*

Unidad 2. Expresiones algebraicas.

- *Operaciones con expresiones algebraicas.*
- *Factorización productos notables.*

Unidad 3. Funciones lineales y cuadráticas.

- *Funciones lineales.*
- *Función cuadrática y ecuación cuadrática.*

Unidad 4. Geometría: Movimiento en el plano.

- *Desplazamiento en el plano.*
- *Rotando, Rotando.*
- *Reflejando el mundo.*
- *Traslaciones y rotaciones como reflexiones lineales*
- *Isometrías y Homotecias.*

Unidad 5. Lógica: Cuantificadores.

Este libro surge a partir de un diagnóstico socioeconómico de las áreas rurales de Colombia, teniendo en cuenta la modernización tecnológica del campo y el empobrecimiento de la población vinculada directamente a la producción agrícola, el Ministerio de Educación Nacional desarrolló este material como apoyo al conjunto de grados de 6° a 9° en convenio con la Universidad de Pamplona.

Las actividades que se incluyen en el texto de grado 8°, se ubican en la perspectiva de “adoptar procesos que contribuyan a generar acciones que aproximan la educación básica rural a la realidad vivida con los educandos y sus familias” (pág. 2), en las actividades que se revisaron se propone el trabajo en grupo y la argumentación como una constante para el aula de matemáticas, la mayoría de las situaciones están asociadas al campo.

“En la finca de mi amigo Felipe se cultiva habichuela, arveja y tomate. Un día de mercado llevan 7 bultos de habichuela, 9 de arveja y 26 cajas de tomate. Si cada bulto de habichuela es vendido a \$25.200 y el de arveja a \$32.000, reciben en total \$724.000; ¿A cómo vendieron cada caja de tomate?”

Se consultó el libro correspondiente a grado 9° para identificar propuestas de actividades en las cuales se desarrolle el pensamiento aleatorio, sin embargo en su estructura no está el planteamiento de éstas actividades.

Para el trabajo que se pretende desarrollar con los estudiantes de grado octavo y el objetivo de la constitución del objeto mental de distribución, se espera incluir esta propuesta dentro del plan de estudio, teniendo en cuenta la distribución académica y la hora destinada para el pensamiento aleatorio, que aplica para este año, pues el colegio entró en jornada única.

4.2 Construyendo una propuesta.

Uno de los objetivos del presente trabajo de grado es caracterizar la constitución del objeto mental distribución, que constituyen estudiantes de grado octavo, para ello se adaptó la secuencia de actividades propuesta Bakker basada en la corriente de Educación Matemática Realista y planteada para grado séptimo del currículo holandés, adaptación que tiene en cuenta las asesorías semanales del grupo de investigación MESCUD de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, investigaciones previas entorno a la comparación de distribuciones, una fenomenología histórica y el contexto al cual pertenecen los estudiantes de la I.E.D.R. Cune.

Las ideas fundamentales en estadística según lo propone Burrill y Biehler (2011), para asumir una postura crítica frente a la información estadística que se nos presenta a diario son: datos, gráficos, variabilidad aleatoria, asociación y correlación, probabilidad y para la presente investigación: distribución, específicamente la distribución de frecuencias en estudiantes de grado 8° de Educación Básica, según los Estándares básicos en Matemáticas para este grado, que hace parte del conjunto de grados 8° y 9°, se propone entre otras: “Comparar e interpretar datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas)” MEN (pág. 18).

Desde los Lineamientos se propone que la enseñanza de la Estadística “crea la necesidad de un mayor uso del pensamiento inductivo al permitir, sobre un conjunto de datos, proponer diferentes inferencias, las cuales a su vez van a tener diferentes posibilidades de ser ciertas” MEN (pág. 48). de esta manera se pretende que la presente secuencia ayude a evidenciar esas diferentes inferencias que realizan los estudiantes con respecto a una misma situación, además “se hace necesario que su enseñanza se aborde en contextos significativos”, de ahí la necesidad de adaptar la presente secuencia al contexto de los estudiantes de la IEDR Cune, para posibilitar que los grupos argumenten sus resultados desde la propia experiencia.

Teniendo en cuenta lo anterior se consultaron investigaciones previas que pudieran contribuir a las hipótesis de aprendizaje de la constitución del objeto mental de distribución e identificar posibles categorías de análisis que nos permitan describir la matematización que realizan los estudiantes de dicho objeto: Descripción de la variabilidad estadística de datos en el contexto de una situación de tratamientos médicos (Orta, Fernández 2013), Comparación de distribuciones por futuros profesores (Arteaga, Batanero, Ruiz, 2009), Uso de gráficos estadísticos en la comparación de distribuciones por parte de futuros profesores (Ruiz, Arteaga, Batanero, Contreras, 2011) y la tesis doctoral llamada: Design research in statistics education on symbolizing and computer tools. (Bakker. 2004). Se adaptó una secuencia de actividades, teniendo en cuenta las características de la población en la que se implementaría, el currículo asociado al grado, entre otros, que esperan constituir en los estudiantes de grado 8° el objeto de distribución.

Con este marco de referencia se propone el siguiente objetivo asociado a la implementación de la secuencia: Describir la matematización horizontal y vertical que los estudiantes realizan para la constitución del objeto mental distribución, entendiendo este proceso como lo propone Freudenthal “lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad” (1968, pág. 7), aplicando la adaptación de la secuencia propuesta por Bakker en la tesis mencionada, que además de diseño de las actividades, incluye el diseño instruccional y las hipótesis que se plantearon inicialmente, mostrando en cada actividad el propósito de la misma y el concepto o conceptos a desarrollar que hacen parte del objeto mental de distribución (Ilustración 20), además de una estrecha relación de las actividades con la fenomenología histórica de este concepto.



Ilustración 20. Conceptos asociados al objeto mental distribución.

4.3 Análisis de resultados

La recolección de los datos está centralizada en los elementos que permitan la caracterización de la constitución del objeto mental distribución, describiendo el alcance real de los estudiantes con respecto al objeto mental y para esta descripción se toman como referente las categorías de análisis de la propuesta de Freudenthal de la EMR, en la cual los estudiantes se encuentran en un proceso de “matematización progresiva”, para Freudenthal (1991, citado por Bressan, 2005, pág. 6), este proceso admite 4 niveles de comprensión:

Nivel.	Características.
Situacional.	El conocimiento de la situación y las estrategias es utilizado en el contexto de la situación misma apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.
Referencial.	Aparecen los modelos gráficos, materiales y las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema.

General.	Se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias, que supera la referencia al contexto.
Formal.	Se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales.

Tabla 8. Niveles de Matematización.

La adaptación de la secuencia de actividades está destinada para que los estudiantes empiecen a razonar acerca de la distribución como un conjunto de datos y no como datos aislados, empezando a describir una distribución de frecuencias de manera informal, para Freudenthal, estaríamos en una matematización horizontal, pues los estudiantes estarían organizando y resolviendo el problema de una situación cotidiana a través de utilizar algunas herramientas matemáticas y un lenguaje no formal para describir el comportamiento de las situaciones.

Posteriormente los estudiantes deben inventar una distribución de frecuencias con ciertas características dadas, pues al permitir que los estudiantes inventen sus propios conjuntos de datos pueden pensar en un conjunto como un todo en lugar de los datos individuales, esto sumado a cambios de representaciones de las distribuciones de frecuencias como el diagrama de puntos o un histograma de barras horizontales son características del nivel referencial.

Y por último, cuando los estudiantes realizan compensaciones para estimar datos como la media, dividir el conjunto en dos grupos iguales, identificar los valores extremos o la cantidad de la muestra, pueden ubicarse en un nivel general, pues utilizan aspectos matemáticos para el análisis de las distribuciones.

5. SECUENCIA DE ACTIVIDADES

A continuación, se presenta la secuencia de actividades propuesta y lo que se espera de cada actividad, se pretende realizar una relación de los conceptos asociados a la distribución de frecuencias que se desarrollan por cada actividad y la relación con la fenomenología histórica o los aportes de la misma. La secuencia también está sustentada desde la parte legal, intentando ubicarla en el grupo de niveles acorde con los Estándares Básicos de Competencias como se muestra a continuación.

5.1 Competencias y procesos generales:

Los Estándares básicos de competencias en matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación en el año 2006 caracteriza la idea de competencia de la siguiente manera:

“La noción de competencia... es entendida como saber hacer en situaciones concretas que requieren la aplicación creativa, flexible y responsable de conocimientos, habilidades y actitudes... las competencias son transversales a las áreas del currículo y del conocimiento. Aunque generalmente se desarrollan a través del trabajo concreto en una o más áreas, se espera que sean transferidas a distintos ámbitos de la vida académica, social o laboral”

Posteriormente se especifica lo que es ser matemáticamente competente, centrando la mirada en los procesos generales, los cuales se espera desarrollar con los estudiantes:

- *Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas.*
- *Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista.*
- *Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración.*

- *Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz.*

El presente trabajo de grado está destinado a constituir en los estudiantes de grado octavo el objeto mental de distribución, teniendo en cuenta los Estándares básicos en competencias para el área de matemáticas del conjunto de grados 8° y 9° asociados al pensamiento aleatorio y sistemas de datos, los cuales presentan una relación con la secuencia de actividades que se propone en el presente trabajo:

- Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones.
- Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).
- Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explico sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.
- Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón).
- Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.
- Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas).
- Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas.

Aunque la secuencia está relacionada con éstos Estándares, es importante aclarar que el objeto mental a constituir es la distribución de frecuencias, esperando que los estudiantes puedan entre otras:

- Describir y predecir propiedades del conjunto de datos y no de cada dato aislado.
- Identificar los datos estadísticos como una propiedad del conjunto y no para calcular alguna medida.

5.2 Dificultades en el proceso de aprendizaje

Para Bakker y Gravemeijer (Citado por Batanero, 2004 pág. 2) comprender la idea de distribución implica ver los datos como valores diferentes de la misma variable y poder construir una distribución dada una medida de posición central, aunque algunas investigaciones como la de Shaughnessy y Ciancetta (2002) han mostrado que los estudiantes construyen distribuciones dada una medida de posición central asignando valores muy cercanos a esta medida.

Dentro de la estructura que hace parte de la distribución se encuentran las medidas de posición central y de dispersión, aunque en algunas investigaciones como las de Konold, Pollatsek, Well y Giagnon (1997), han demostrado que sólo un porcentaje de los estudiantes utilizan las medidas de dispersión para comparar distribuciones y algunos no utilizan la media como medida de comparación, “en lugar de ello, comparan directamente las frecuencias absolutas de algunos valores” (pág. 2).

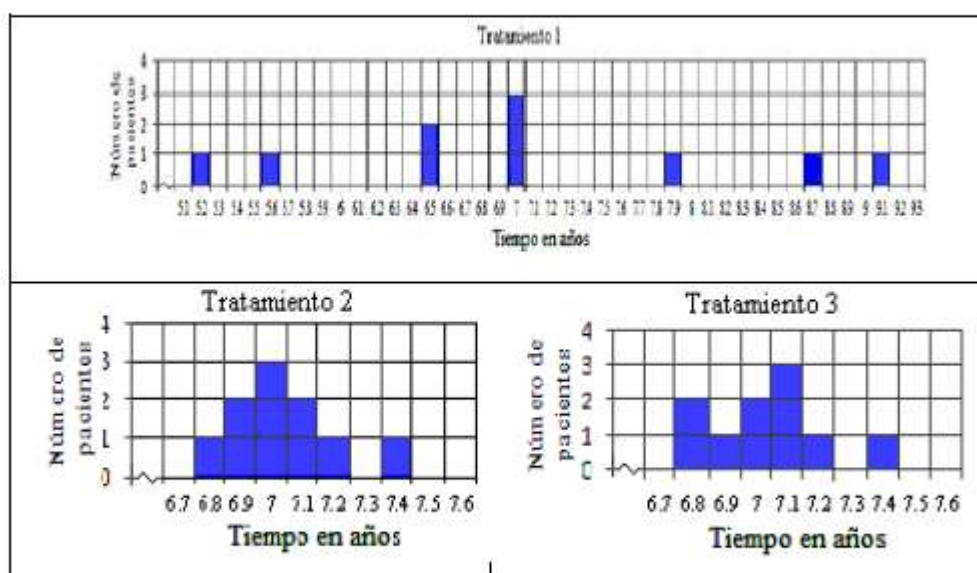
Arteaga y Batanero (2009) reportan en un estudio que se llevó a cabo con futuros profesores, a los cuales se les solicitó comparar dos distribuciones las siguientes dificultades:

- No pueden traducir los resultados en el contexto del problema.
- Las intuiciones sobre la variabilidad de los fenómenos aleatorios es pobre en los estudiantes.
- Aunque el cálculo de las medidas de posición central fue sencillo, la mayoría de los estudiantes se limita a calcularlos, pero no los interpreta ni los usa para la comparación.
- Los alumnos no llegan a captar el significado de la dispersión ni su utilidad en la comparación de dos distribuciones.

Orta y Fernández muestran los resultados obtenidos en un estudio que se realizó con estudiantes de grado octavo en la comparación de distribuciones, esta actividad también se

implementó a los estudiantes de primer semestre de la Maestría en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Córdas para identificar los procedimientos utilizados, la manera en la que perciben la variabilidad en una distribución y argumentar la decisión basados en estos parámetros.

Considera que debes aconsejar a una persona que padece una enfermedad grave, la cual es tratable con medicamentos que pueden extender la vida por varios años. Es posible elegir entre tres opciones, dependiendo del tratamiento. Según el tipo de medicina, las personas tienen diferentes reacciones a las sustancias, para algunas, éstas tienen el mismo resultado, mientras que para otras, puede ser mayor o menor. A continuación se muestra la representación gráfica de los distintos tratamientos.



- ¿Qué tratamiento preferirías (1,2 o 3)? ¿Por qué?
- ¿En cuál de los tratamientos hay más variabilidad? Explica tu respuesta

Figura 1. Problema de los tratamientos médicos.

Ilustración 21. Problema de los tratamientos médicos.

Algunas de las dificultades encontradas en esta investigación reportadas por los autores están centradas en las formas que percibieron los estudiantes la variabilidad, “sus respuestas se enfocaron en una característica de las distribuciones como las percepciones de cambio, la reducción de la variabilidad y el basarse en un extremo o en repeticiones de datos”.

5.3 Previsiones de aprendizaje.

Teniendo en cuenta las competencias y las dificultades descritas anteriormente, se propone una secuencia de actividades que ayude a la constitución del objeto mental de distribución, para cada una de las actividades se plantean los objetivos de la misma y los posibles caminos que seguirán los estudiantes para resolver las tareas propuestas:

5.3.1 Actividad 1. Estimando cantidades

Basada en la fenomenología histórica, la actividad tiene como propósito que los estudiantes puedan utilizar una noción de promedio para estimar el total de personas que aparecen en la imagen, para esto se espera que los estudiantes desarrollen una estrategia para calcular el número total de personas partiendo de un rejilla “promedio” (ni la más llena, ni la más vacía), teniendo en cuenta que las personas no están distribuidos de una manera uniforme. Además de lo anterior, se espera que los estudiantes aborden esta situación de diferentes maneras: contar la cantidad de personas que hay a lo largo y a lo ancho de la imagen y multiplicar estos valores para hallar la cantidad de personas. Formar grupos, ya sea de manera aleatoria o con algún criterio, y estimar la cantidad de grupos que pueden formar y multiplicarlo por la cantidad de personas que hay en cada grupo.

Puede generarse una discusión asociada a la manera en la que se distribuyen las personas en la imagen, además de la cantidad de personas que hay en cada una de las rejillas formadas por los estudiantes y la posterior escogencia de una rejilla como representativa del grupo, desarrollando en los estudiantes algunas ideas asociadas a la media, pues al realizar diferentes estimaciones de una cantidad desconocida, los estudiantes pueden estimar el total a partir de la suma de las estimaciones realizadas y dividir las entre la cantidad de estimaciones.

5.3.2 Actividad 2. La decisión de la granja.

La actividad anterior pretende desarrollar algunas nociones con respecto a la media, no como un algoritmo sino como el centro de gravedad del conjunto de datos; la variabilidad, pues los asistentes no están distribuidos de una manera uniforme y existe una variabilidad en las estaturas de un curso de grado octavo; la representatividad y el muestreo, esperando que para la actividad siguiente, que compara dos distribuciones representadas en gráficas de barras horizontales, puedan realizar una comparación centrándose en el conjunto de datos y no en cada dato aislado.

Para esta actividad 2, al comparar las dos gráficas, se espera que los estudiantes razonen en torno a los diferentes aspectos de una distribución, específicamente a los aspectos de forma (simétrica o asimétrica) tomando una decisión basada en la ubicación de la mayoría de los datos; aspectos de extensión (rango), al tomar una decisión influenciada en los valores extremos de cada una de las distribuciones, éstos aspectos deben ser argumentos para que los estudiantes puedan tomar una decisión caracterizando el conjunto de datos y no centrándose en datos individuales.

5.3.3 Actividad 3. Encontrando la media.

La primera actividad de la estimación (conteo de personas, actividad 1) junto con la experiencia de los estudiantes con los gráficos de barras (actividad 3), constituye la base para la estimación de la media (Bakker, 2004). “De esta manera, los estudiantes pueden desarrollar los aspectos cualitativos y conceptuales de la media” tales como:

- La media es un valor que pertenece al rango de la distribución, es decir que no puede estar ubicada después del valor máximo y ni del mínimo (en algún lugar en el centro), además que no necesariamente coincide con un dato de la distribución.
- Para el cálculo de la media, se deben tener en cuenta todos los datos, por esta razón puede ser una medida representativa para la comparación de las distribuciones dadas (la influencia de todos los valores de datos).

- Resume una distribución de frecuencias (que dice algo sobre el total, se da cuenta de todo valores, y que puede ser utilizado para comparar dos conjuntos de datos).

La diferencia de representación con respecto a la actividad 1, está asociada a la obtención de los datos, pues en la primera, no aparecen datos numéricos, son los estudiantes los que asocian un número a las rejillas y de ahí pueden utilizar una estrategia para multiplicar una medida representativa para obtener el total estimado, mientras que en esta actividad aparecen los datos representados en barras, con lo cual se espera que los estudiantes realicen una “compensación” para determinar la media de las distribuciones.

5.3.4 Actividad 4. Construyendo gráficas.

Inventar datos de acuerdo con las características agregadas de las marcas de baterías, puede estimular a los estudiantes a desarrollar una visión global de los datos, pues deben generar una distribución de frecuencias representadas en barras horizontales que cumpla con las condiciones dadas centrándose en la forma en la que se distribuyen los datos como conjunto y no en el valor individual de cada dato. Al responder preguntas como ¿qué es una marca fiable con una larga vida útil? Se espera que los estudiantes utilicen "fiable" de diferentes maneras: algunos pueden encontrar la marca D más fiable, ya que su rango es más pequeño, pero otros pueden encontrar la marca K más fiable, ya que tiene “más” del mismo valor. Esto refleja dos puntos de vista diferentes sobre la propagación de una distribución.

Esta actividad pretende que los estudiantes puedan construir una distribución de frecuencias con unas características específicas, las actividades 3 y 4 han contemplado una representación de la distribución, en esta actividad se invierte el proceso, pues son los estudiantes los que deben establecer la forma de una distribución como un conjunto de datos.

La construcción de esta representación puede ayudar a los estudiantes a comunicar la manera de entender la forma de una distribución, según Bakker (2004, pág.132) puede ser

que sea más fácil para profesores e investigadores para evaluar lo que los estudiantes realmente entienden.

5.3.5. Actividad 5. Puntos y barras.

Las actividades anteriores están centradas en una sola representación de una distribución de frecuencias, teniendo en cuenta las nociones que se pretenden desarrollar en las primeras actividades, en la actividad 6 se propone relacionar diferentes representaciones (gráfica de barras horizontales y puntos) a una distribución de frecuencias.

Al describir cómo se reparten los valores o puntos, se espera que los estudiantes describan la manera en la que están distribuidos los datos, cómo éstos se “extienden”, utilizando frases como por ejemplo, "la mayoría está más a la izquierda" o "al principio los puntos están menos extendidos". Para Bakker “los estudiantes desarrollan gradualmente un lenguaje en el que pueden expresar cómo se distribuyen los puntos de datos, posteriormente los estudiantes pueden ser capaces de explicar las características como las siguientes: si las líneas verticales de cuatro grupos de igual tamaño o grupo fijo están muy juntas, los puntos se agrupa para arriba. Esto se refiere a un grupo de datos con valores similares”.

5.3.6 Actividad 6. El problema de Granja Extrema.

Esta actividad pretende desarrollar en los estudiantes nociones asociadas al concepto de media partiendo de un total, al escoger la medida representativa de ambos conjuntos, tanto el de adultos como el de estudiantes de grado octavo. Es una variante del problema de estimación de personas (actividad 1), pero el tema de muestreo es más complejo pues en la tarea de las personas, la población son todos los asistentes visibles en la imagen, pero en el contexto de peso, se espera que los estudiantes puedan argumentar el valor asociado al peso de un estudiante de grado octavo, que resulte representativo dentro del conjunto, y teniendo en cuenta las discusiones generadas en la actividad anterior, esa medida debe estar localizada entre los estudiantes con menor y mayor peso, pues teniendo en cuenta el

conjunto de los estudiantes de grado octavo, el peso del curso presenta una variabilidad natural.

Con esta actividad se espera generar discusiones asociadas a las medidas que se tomen como el promedio del peso de un estudiante de grado octavo y de un adulto, esperando argumentos por parte de los estudiantes de esta decisión. La actividad anterior está enfocada a escoger una “rejilla promedio” (ni la más llena, ni la más vacía), teniendo en cuenta lo anterior, en esta segunda actividad, se espera que estimen un peso promedio, tanto de los adultos como de los estudiantes de grado octavo realizando un producto entre el peso de un adulto (peso que debe ser argumentado por los estudiantes) y multiplicarlo por la cantidad de adultos que pueden estar en el bote, para luego dividirlo entre el peso promedio de un estudiante de grado octavo.

5.3.7 Actividad 7. Una historia, tres distribuciones.

Los estudiantes tienen que representar diagramas que coincidan con una historia sobre un antes y un después. En esta actividad se espera que los estudiantes puedan describir cómo se distribuyen los datos de un conjunto, además, se espera que puedan describir las gráficas asociadas a un conjunto de datos, dando razón sobre los aspectos asociados al centro, la dispersión y la forma de una distribución. Si los estudiantes hacen varios gráficos de un conjunto de datos, es probable que puedan analizar que estos gráficos son representaciones diferentes de la misma estructura.

5. DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

En el apartado anterior se propuso la secuencia de tareas y el propósito de cada una de las actividades asociadas a éstas, además de lo esperado con respecto al trabajo realizado por los estudiantes. En este apartado se describe el trabajo realizado en cada una de las actividades desarrolladas, destacando algunos apartes de las intervenciones de los estudiantes y análisis preliminares de sus respuestas a preguntas explícitas realizadas por el profesor en relación con la tarea abordada.

Cada una de las actividades fue desarrollada en grupos de tres integrantes cada uno, conformados de manera autónoma por parte de los estudiantes, organizados así:

	Nombres estudiantes	Edades (años)
Grupo 1	Melody, Camilo, Loren.	14 – 15 – 13
Grupo 2	Samuel, Marly, Johan.	15 – 14 – 13
Grupo 3	Brayan, Lorena, Yimmy	19 – 17 – 14
Grupo 4	Nicole, Yessica – Fabian	14 – 15 – 15
Grupo 5	Laura, Ximena, Yuri	13 – 13 – 13
Grupo 6	Michael, Oscar, Farid	16 – 15 – 14
Grupo 7	Cristián, Andrés, Camilo	13 – 15 – 14

Tabla 9. Grupos de estudiantes.

6.1 Actividad 1. Estimando cantidades.

El Gobernador de Cundinamarca convoca a una caminata por los campesinos desplazados del conflicto armado, él le solicita que estime la cantidad de personas que asistieron a la marcha basados en la siguiente foto tomada el día del evento.



✚ *Describa detalladamente un método para estimar la cantidad de personas que asistieron a la convocatoria del Gobernador, teniendo en cuenta que el conteo uno a uno no es posible.*

✚ *¿Por qué considera que es un método efectivo para la estimación?*

Se esperaba que los estudiantes estimaran el número total de personas que aparecían en la imagen, utilizando diversas estrategias (diferentes al conteo uno a uno) para tal fin.

Dos grupos (1 y 4) estimaron una medida a la parte del puente que se visualiza en la foto, el grupo 1 estima la cantidad de largo y ancho y el grupo 4 estima sólo de largo y establecieron una división del área del mismo, en cada área se estableció una cantidad de personas que estaban ahí y luego se multiplicó este valor por la cantidad de divisiones del área del puente.

“el puente mide 2 km. dividimos el puente en 11 partes iguales en los dos carriles, sumamos cuantas personas cabían en cada división, llegamos a un aproximado, que en cada división de 11 hay 88 personas”.

En esta estrategia aparece un número que estima la cantidad que aparece en cada una de las divisiones realizadas por los estudiantes, lo que ellos llaman un “aproximado”, las divisiones que proponen tienen la misma área, pues ellos afirman que aunque se ven más personas en la parte alta de la imagen, debe haber la misma cantidad de personas en cada parte del puente.

El grupo 5, realizó una medición con regla del largo de la imagen, luego dividieron la medida obtenida por 7, obteniendo la misma cantidad de particiones y en las cuales, según el grupo, en cada partición se encontraba la misma cantidad de personas, por último se establecía una cantidad de personas por cada partición para así multiplicar esta cantidad por 7. Esta estrategia es similar a la descrita anteriormente, sin embargo la estimación realizada no estaba enfocada al puente, sino a la imagen, pues la medición realizada se hizo al largo de la imagen, cabe mencionar que este grupo al realizar dicho proceso utilizan la palabra promedio como una aproximación: “... al medir con la regla nos dio un promedio de 10.5 cm...”

Los otros tres grupos (3, 6 y 7) realizaron una partición de la imagen en regiones de diferente tamaño, el grupo 3 argumentó que “cada división se ve más pequeña por que en cada división la gente se va pegando más, es decir que al entrar la gente está más dispersa y a medida que van parando más y más se estrechan en cada división” este grupo identifica una dispersión de las personas y establece divisiones con área distinta, luego asigna una cantidad, por medio de un conteo de 10 en 10 de cada grupo para luego sumar los totales de cada división.

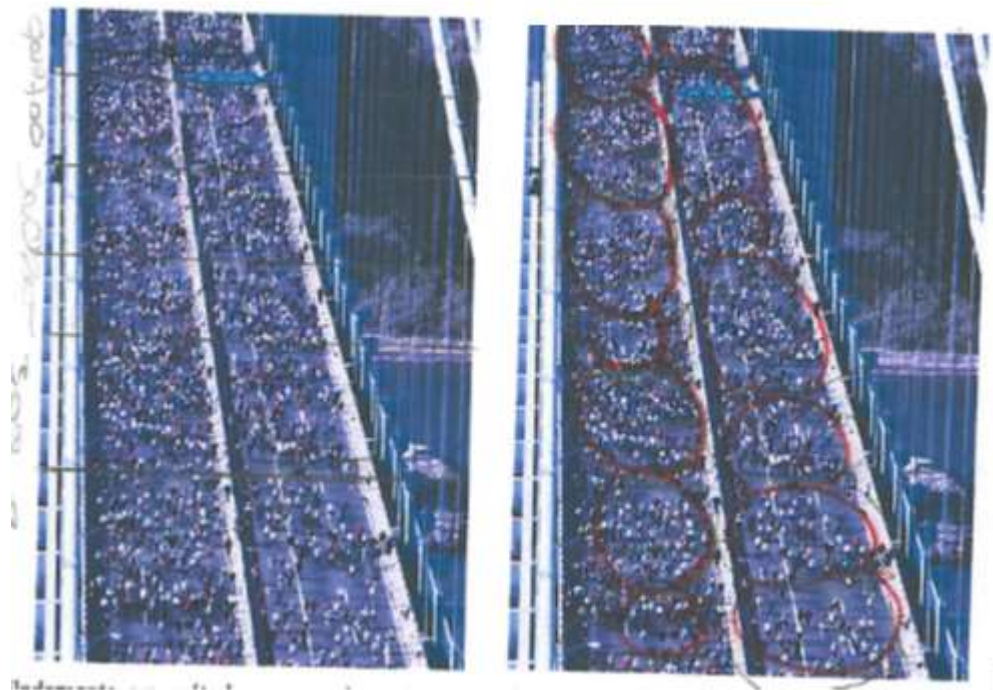


Ilustración 22. Estrategia para la estimación de personas en la foto.

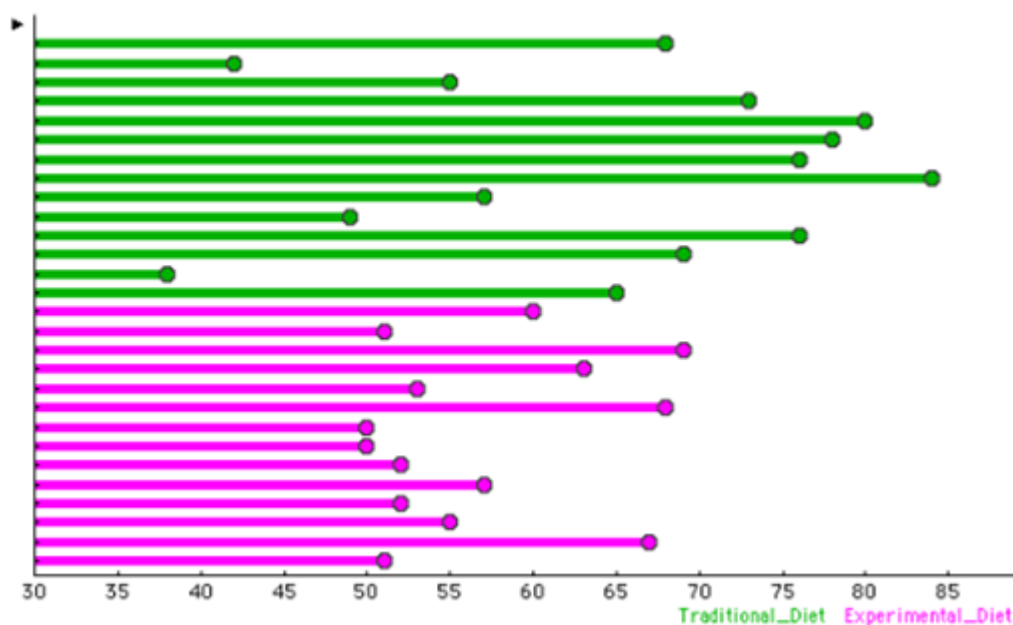
El grupo 6 por su parte encierra en círculos de diferentes áreas una cantidad similar de personas, argumentado que “entre más pequeño uno puede ir mirando cuántas pueden estar en el grupo, se puede ver mejor y contar más o menos bien”. Este grupo identifica una dispersión de los datos, pero no utiliza este aspecto como una argumentación para el conteo de las personas en la imagen.

El grupo 7 encierra una cantidad de personas calculando la misma cantidad por cada grupo, el área de cada grupo no es el mismo argumentando que “en algunos grupos están dispersos”, el grupo explica que tomó en cuenta la dispersión de las personas para la conformación de los grupos.

El grupo 2 realiza una división de la imagen haciendo una cuadrícula de 7cm x 11cm y establece una relación de cuadros en los que hay personas dividido en la cantidad de cuadros totales, sin embargo no estiman la cantidad total de personas pues su expresión es 56/77.

6.2 Actividad 2. La decisión de la granja

En una finca dedicada a la producción de huevos se ha decidido experimentar por un periodo de doce semanas, un nuevo alimento para las gallinas ponedoras. Durante ese periodo de tiempo 14 gallinas fueron alimentadas con la dieta tradicional y otras 14 con la nueva dieta. Se registró el número de huevos puestos por cada gallina durante el periodo de tiempo indicado.



Cada barra representa el número total de huevos puestos por cada gallina en el periodo de 12 semanas. Las 14 barras verdes representan a las gallinas que fueron alimentadas con la dieta tradicional y las 14 barras rojas representan a las gallinas que fueron alimentadas con la nueva dieta.

Se quiere decidir sobre la eficiencia de la nueva dieta.

Los dueños de la finca le solicitan analizar los datos que se registraron esperando una opinión que les permita decidir si debería aprobarse la nueva dieta para todas las gallinas de la finca o si por el contrario es mejor continuar con la dieta que tienen ahora.

Elabore un informe en el cual argumente su decisión de implementar la dieta experimental o continuar con la dieta tradicional.

Para esta actividad, los estudiantes debían tener en cuenta la distribución de los datos, pues a partir de ellos argumentaban las razones por las cuales escogían una de las dietas para las gallinas, cabe mencionar que no se evidencia dificultad en la lectura del gráfico por parte de los estudiantes, pues las inquietudes de ellos estaban más en términos de una aprobación de sus argumentos por parte del docente que una inquietud por parte de la lectura de la gráfica.

Cuatro grupos (1, 4,5 y 7), realizan un conteo de cada una de las producciones de las gallinas y su decisión se basa en la cantidad de huevos que ponen en total, el grupo 1 por ejemplo argumenta su decisión de la siguiente manera “porque si evaluamos, la dieta tradicional superaría la dieta experimental debido a que esta tiene en promedio 925 huevos en doce semanas y la otra 806 huevos” utilizando la frecuencia acumulada en cada una de las distribuciones, sin asociar la variabilidad de la misma en cada caso.

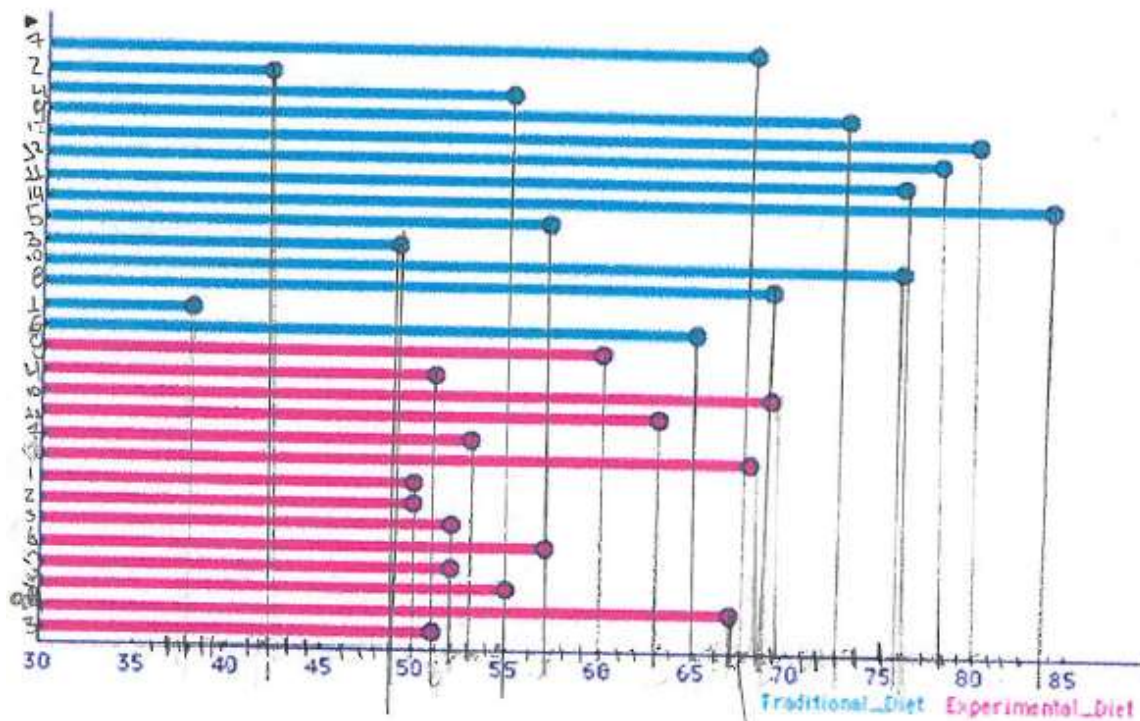


Ilustración 23. Se asigna un valor a cada barra.

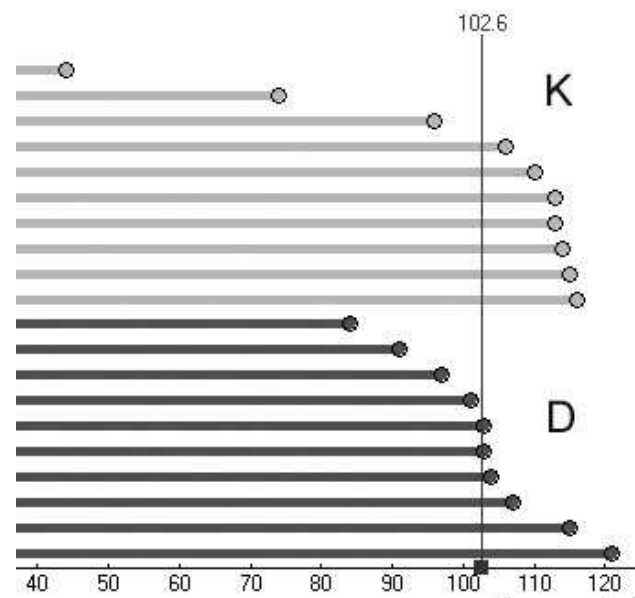
El grupo 7, realiza el mismo conteo y aunque su decisión es la misma, ellos asocian la forma de la distribución a la “estabilidad” de la producción “la dieta tradicional nos produjo 871 huevos, en la gráfica nos muestra que algunas gallinas bajó la producción de huevos, en cambio las gallinas con la nueva dieta su producción de huevos es más estable pero el resultado es menor” identificando que el rango de la distribución es menor en la dieta experimental que en la tradicional.

Dos de los grupos escogen como la mejor opción, cambiar a la dieta experimental, el grupo 4, por ejemplo argumenta que “llegamos a la conclusión de que la dieta experimental es más conveniente por las siguientes razones: la cantidad de huevos es más estable que en la tradicional y la producción sería más continua” asociando la forma de la distribución de la dieta experimental a “continuidad” y “eficiencia”.

Por su parte el grupo 5 argumenta que “hemos tomado la decisión de recomendarle la dieta experimental ya que ha tenido una producción de 799 huevos y las gallinas producen los huevos no tan dispares, es decir no bajan el producto de 50 huevos en 12 semanas” describiendo la distribución con “desniveles” asociado a la variabilidad de la misma, por otro lado también mencionan que en la dieta tradicional una gallina pone sólo 37 huevos.

6.3 Actividad 3. Encontrando la media.

Dentro de los resultados obtenidos en las marcas de baterías K y D, se trazó una línea vertical que muestra la media de los valores.



✚ ¿Es razonable la ubicación de la recta?

✚ ¿Qué puede decir de los datos que se encuentran antes, después y sobre la media?

Uno de los propósitos de la actividad tres, está asociada a las características de la media, como una medida ubicada entre el conjunto de datos y que no necesariamente es uno de los datos, además se espera que los estudiantes puedan interpretar la media a partir de la “compensación” de las barras horizontales.

El grupo 1, identifica la media como un límite de los mismos, asociando los datos que se encuentran antes o después como aquellos que no alcanzaron el límite o superaron el límite, acerca de los datos que se encuentran sobre la recta, el grupo argumenta lo siguiente: “se puede decir que aunque superaron la recta, aún tienen que subir más los valores”

El grupo 2, 3 y 5, realiza una estimación de la media, utilizando el algoritmo, sin embargo dentro de las respuestas dadas por el grupo sus argumentos están basados en la forma de la distribución, el grupo 2 afirma: “la K tienen una irregularidad y no tiene una medida estable, mientras la D no tiene irregularidades sino por el contrario hay estabilidad”, mientras que el grupo 3 afirma “que la recta K, está con más igualdad que la recta D”. El grupo 5, se basa en los valores de cada barra y las relaciona con respecto a la media “los resultados que están después de la recta son menores de 106 y los resultados que están antes de D son mayores que 103”.

El grupo 4 asocia la media como una medida que se encuentra dentro del conjunto de datos, sin embargo la lectura de la gráfica no es correcta pues según este grupo, la media no debería ubicarse al “finalizar” los datos.

Los grupos 6 y 7, identifican la media como un total de producción de huevos en sus argumentos, sin embargo coinciden en que la ubicación de la recta es razonable para ambos grupos, además identifican la forma de la distribución como cambios en la producción de huevos.

Se presentó dificultades en las tareas de la actividad, los estudiantes demostraban desconocimiento del concepto de media, sin embargo algunos grupos asociaron a algunas características de esta medida y un grupo realiza una comparación de las barras proponiendo lo siguiente: “estas cuatro barras (señalando los últimos cuatro registros de la marca D) las colocamos en estas cuatro (señalando las cuatro primeras de la marca D), y sacaríamos el promedio que nos marca la línea”, ellos afirman que al realizar este proceso el cálculo de la media en la primera distribución no corresponde con la recta marcada.

6.4 Actividad 4. Construyendo gráficas.

Construya un gráfico de otras marcas de baterías que corresponda a cada una de las características que se muestran a continuación:

✚ Marca A: Generalmente tiene buen rendimiento.

✚ Marca B: Pocas veces tiene buen rendimiento.

Los estudiantes deben proponer un gráfico a partir de unas características dadas en relación a la actividad de las gallinas ponedoras de huevos, los resultados de las construcciones de gráficas se presentan a continuación, realizando una clasificación de acuerdo a las características descritas:

Construcciones que no cumplen los criterios mínimos: En esta clasificación aparecen los grupos que no realizan una construcción de un gráfico estadístico que pueda ser interpretado.

Grupo 4. Los ejes representados en el histograma, no están asociando las variables requeridas, pues el grupo asocia al eje X: fiabilidad y al eje Y: producción de huevos.

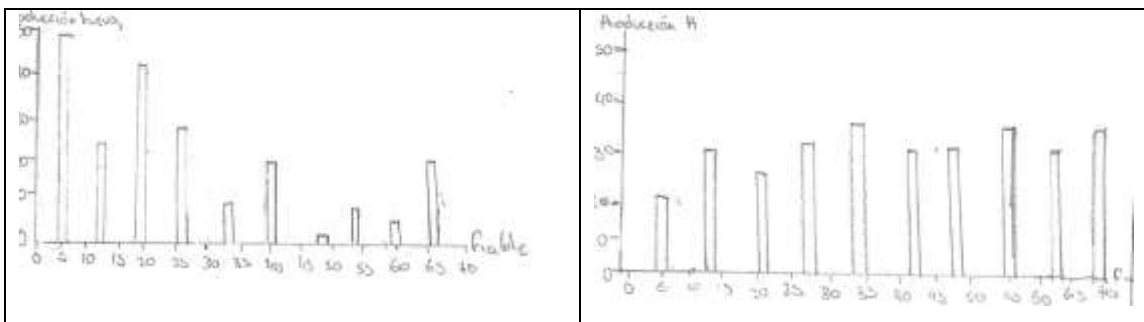


Ilustración 24. Construcciones que no cumplen los criterios mínimos.

Construcciones que no representan los criterios mínimos: Uno de los criterios establecidos para la construcción de las gráficas es el buen rendimiento de cada dieta, los grupos que se

encuentran en esta categoría asocian un buen rendimiento a la cantidad de huevos totales obtenidos:

Grupo 1: “nosotros asumimos que la primera era menos eficiente, entonces la de arriba iba a tener menos cantidad”

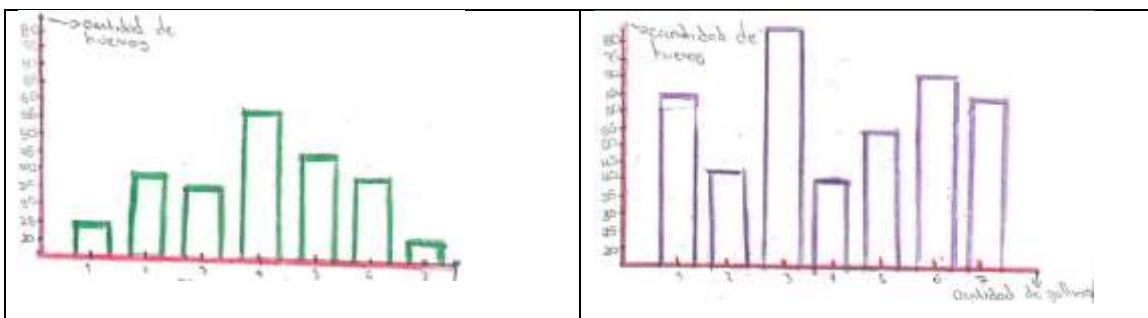


Ilustración 25. Construcciones que no representan los criterios mínimos.

Grupo 6: “la gráfica de abajo tiene más cantidad, por que entre más cantidad es más confiable”

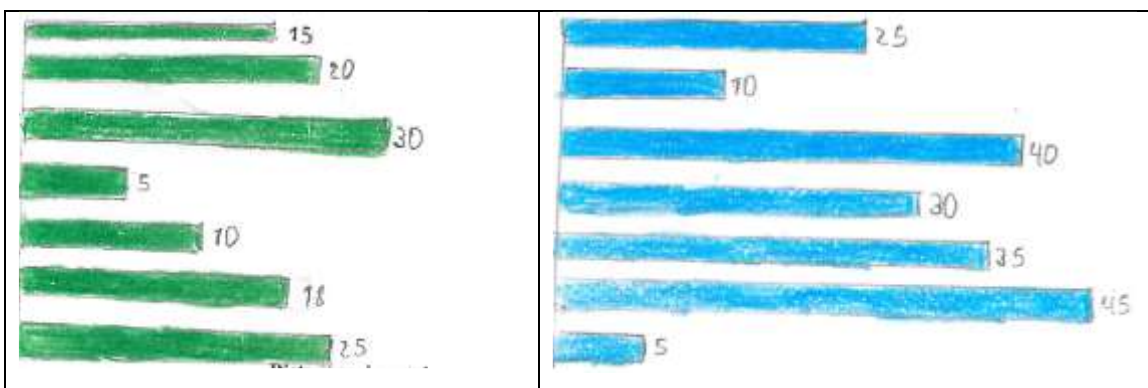


Ilustración 26. Otra construcción que no representan los criterios mínimos.

Construcciones que cumplen las condiciones: Los grupos de esta categoría realizan gráficos asociados a las características descritas en la tarea, los cuales asocian confiabilidad a la variabilidad década una de las gráficas.

Grupo 2: “la de arriba aunque produzca muchos huevos, algunos, poquitos producen menos huevos, mientras que la gráfica b, produce menos huevos es constante”

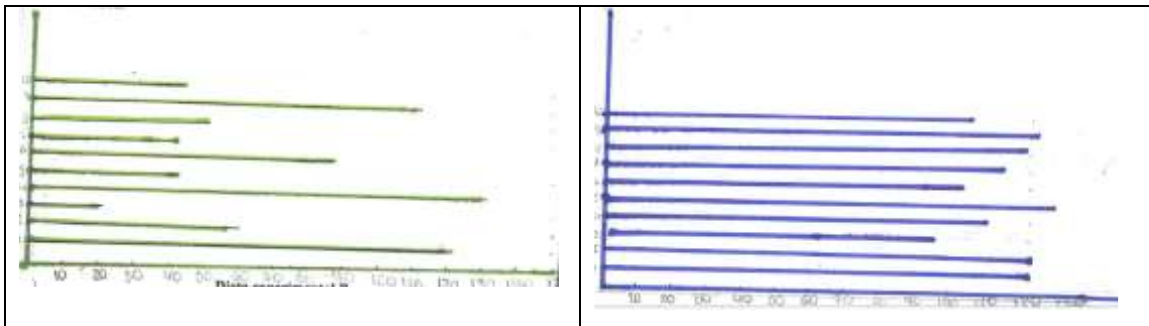


Ilustración 27. Construcción Grupo 4.

Grupo 3: “la de arriba se puso casi la misma cantidad, o sea algunas líneas unas más largas y otras más corticas, la de abajo se hizo casi todas iguales, porque es confiable, o sea todas las gallinas ponen la misma cantidad de huevos”

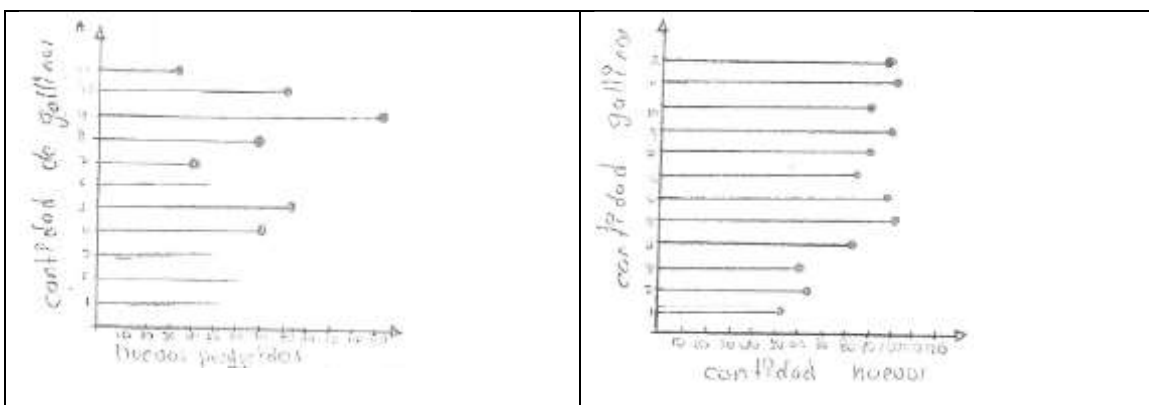


Ilustración 28. Construcción Grupo 3.

Grupo 5: “la de arriba tiene menos cantidad para uno confiarse de ella”

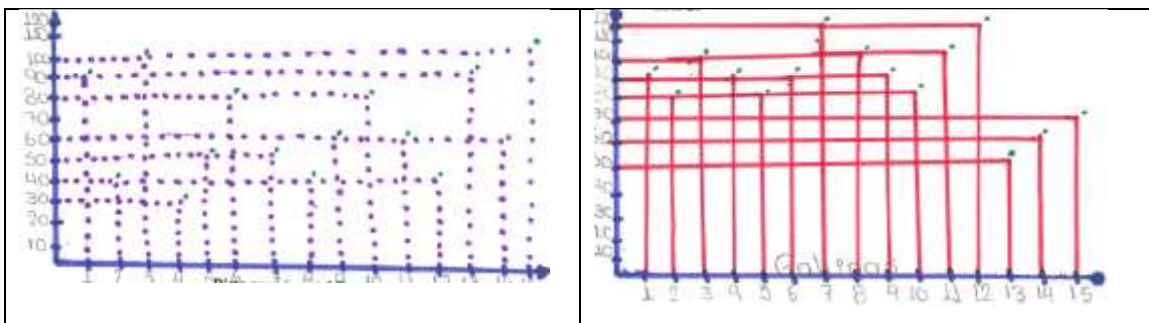


Ilustración 29. Construcción Grupo 5.

Grupo 7: “porque algunas están bajo 30, algunas como también hay muy altas, si yo compro una gallina me puede salir bajo 30 en cambio en la otra, si yo compro una gallina nos puede salir en el intermedio de 70 o 50”

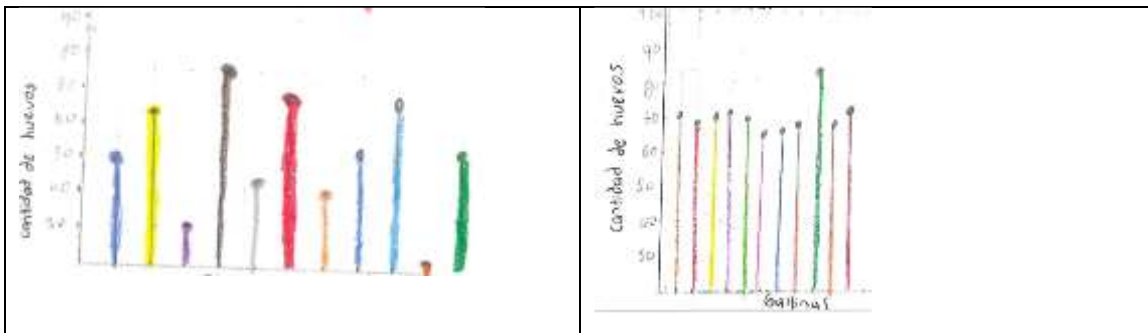


Ilustración 30. Construcción Grupo 7.

En general los estudiantes no presentan dificultades en las construcciones de los gráficos, tres de los cuatro grupos realizan un gráfico de barras horizontales y cuatro realizan un gráfico de barras verticales, dentro de las propuestas no se identifica otro tipo de gráfico.

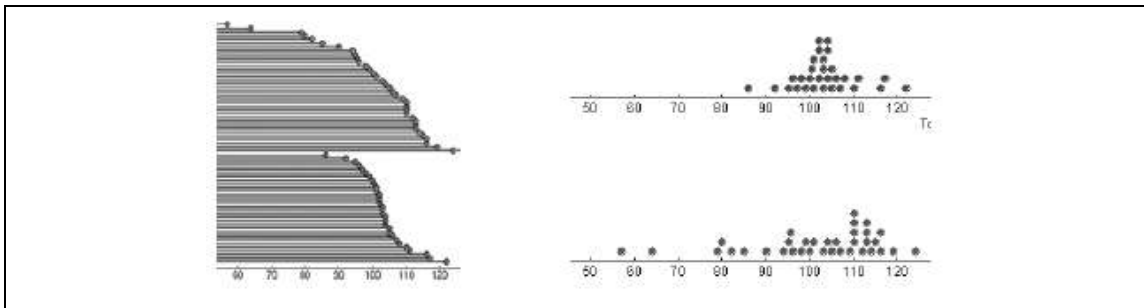
Aunque la tarea no especificaba la cantidad de gallinas experimentadas en cada dieta los grupos asumieron la misma cantidad de gallinas para la dieta A que para la dieta B, excepto el grupo 4 que argumenta “un gráfico tiene más gallinas que la otra porque el granjero decidió tener un avance de la receta B por ser más confiable y tener buen efecto”.

6.5 Actividad 5. Puntos y barras.

El dueño del almacén desea colaborar con la escogencia de una de las marcas de baterías y para ello utiliza un software que genera una representación diferente de las barras horizontales.

Puede identificar ¿qué gráfica de puntos corresponde a qué gráfica de barras?.

¿Cómo están distribuidos los datos?



Para la primera pregunta de esta actividad, los estudiantes asociaron correctamente la gráfica de puntos con la gráfica de barras, en general, no presentaron dificultades para resolver esta primera pregunta.

Sin embargo, a la pregunta de ¿cómo están distribuidos los datos? El grupo 1 argumenta la relación que hizo con cada una de las distribuciones, pero no argumenta la forma de las distribuciones y el grupo 7 realiza una descripción de la gráfica en la que menciona como están ubicados los puntos y como están ubicadas las barras, como se muestran a continuación:

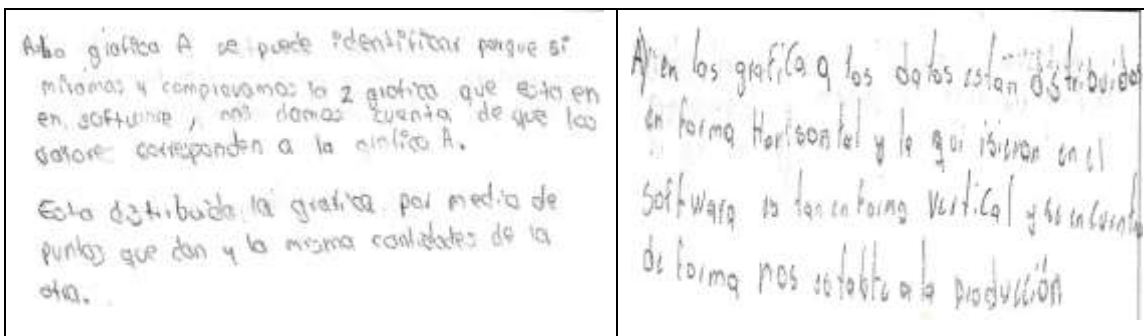


Ilustración 31. Argumentos Grupo 1 y 7.

Cuatro de los grupos (2, 3, 5 y 6), realizan la relación de las gráficas a partir de los valores mínimos y máximos de la distribución, identificando éstos en ambas representaciones, lo que puede indicar un acercamiento al concepto de rango, así como una lectura de esos datos en la gráfica.

los datos de la grafica A estan distribuidos de la menor cantidad hasta su mayor cantidad y es menor regulada ya que estan mas dispersos y la que menor pone es de menor de 60. y la que mas pone es de 86. en cambio la grafica B no estan tan dispersos es decir estan mas en monton por lo que las gallinas ponen casi la misma cantidad unos llegan a poner 58 y otros 120.

Ilustración 32. Argumentos Grupo 2.

En cuanto a la forma de la distribución, los estudiantes utilizan palabras para describir la misma como: “los puntos están más juntos”, “están más dispersos”

6.6 Actividad 6. El problema de Granja Extrema.

En Granja Extrema se ofrece una actividad para recorrer la quebrada Cune, por seguridad de las personas, se permite el ingreso de ocho adultos por bote, si se desea realizar una salida pedagógica con los estudiantes de grado octavo a Granja Extrema y conocer la quebrada Cune, ¿cuántos alumnos de octavo grado se les permitirá estar en el bote, si sólo se considera el peso?

Describe el proceso que utilizaría para saber la cantidad de estudiantes que pueden estar en el bote.

Las estrategias de los grupos para identificar la cantidad de estudiantes de grado octavo permitidos como máximo en el bote son los siguientes

Como se puede evidenciar, los grupos utilizan un lenguaje para expresar las cantidades representativas de una distribución de frecuencias, en este caso la media, además se evidencia un acercamiento al concepto de rango, pues el grupo 6 establece la menor y máxima medida esperada de un conjunto de datos

Por que calculamos el peso de cada estudiante, por que un joven obeso va a pesar ^{60k} mas que uno delgado ^{10k} pero algunos estudiantes pueden ser mas grandes y obviamente va a pesar un poco mas ^{de 50k} que las demas estudiantes.

Ilustración 35. Lenguaje utilizado por los estudiantes.

El segundo momento de la actividad estaba dirigido a establecer la cantidad de estudiantes de grado octavo que cabían en el bote, para ello los grupos realizaron sumas sucesivas hasta llegar a un total muy cercano de los adultos, al igual que en el primer momento, los grupos establecían medidas cercanas entre los datos o establecían una medida “promedio”:

<p>alumnas</p> $\begin{array}{r} 50 \\ 52 \\ 58 \\ 61 \\ + 63 \\ 63 \\ 66 \\ 66 \\ \hline 431 \\ + 50 \\ 50 \\ 50 \\ \hline 632 \end{array}$	<p>50 Alumnas 12 y el peso es 50k</p> $\begin{array}{r} 50 \\ \times 12 \\ \hline 100 \\ 50 \\ \hline 600 \end{array}$
--	--

Ilustración 36. Otras operaciones utilizadas.

Todos los grupos llegaron a establecer una cantidad de estudiantes de grado octavo similar siguiendo este proceso, además que la actividad propuesta fue de gran motivación para los estudiantes.

6.7 Actividad 7. Una historia, tres distribuciones.

Los estudiantes de grado 802 se inscriben para una competencia de atletismo de 5 km. y proponen realizar una cierta cantidad de sesiones de entrenamiento para prepararse y ganar la competencia.

Para realizar un seguimiento del progreso de su entrenamiento quieren hacer tres gráficos. Uno antes de empezar el entrenamiento, otro al transcurrir la mitad de las sesiones de entrenamiento y uno al final del entrenamiento. Represente cada gráfico de acuerdo a los siguientes resultados:

1. Antes de empezar el entrenamiento:

- ✓ Algunos estudiantes eran lentos y algunos estudiantes eran rápidos.*
- ✓ La mayoría de los estudiantes eran lentos.*
- ✓ El más rápido recorrió los 5 kilómetros en 28 minutos.*
- ✓ La diferencia de rendimiento del más rápido con los demás estudiantes es bastante amplio.*

2. A mitad de las sesiones del entrenamiento:

- ✓ La mayoría de los estudiantes corrió más rápido, pero el más rápido bajó su rendimiento un poco, al igual que el más lento.*

3. Al finalizar el entrenamiento:

- ✓ La diferencia de rendimiento del más rápido con el más lento es mucho menor que al principio del entrenamiento.*
- ✓ La mayoría de los estudiantes han mejorado sus tiempos por unos 5 minutos.*

Todavía había unos pocos los lentos, pero la mayoría de los estudiantes tenían un tiempo que estaba más cerca del corredor más rápido que en el comienzo.

Para esta última actividad no se plantearon restricciones en el gráfico, aunque todos los grupos utilizaron gráfica de barras horizontales y verticales, los grupos asumieron la cantidad de estudiantes del grupo (20 en total). Un grupo (grupo 6) presenta una gráfica de barras verticales con alturas muy parecidas, las cuales no muestra una variabilidad de los datos, por su parte el grupo 7 representa con barras horizontales la situación, sin embargo la longitud de las barras no corresponde con los datos que ellos proponen. La siguientes gráficas son las propuestas por los grupos descritos anteriormente.

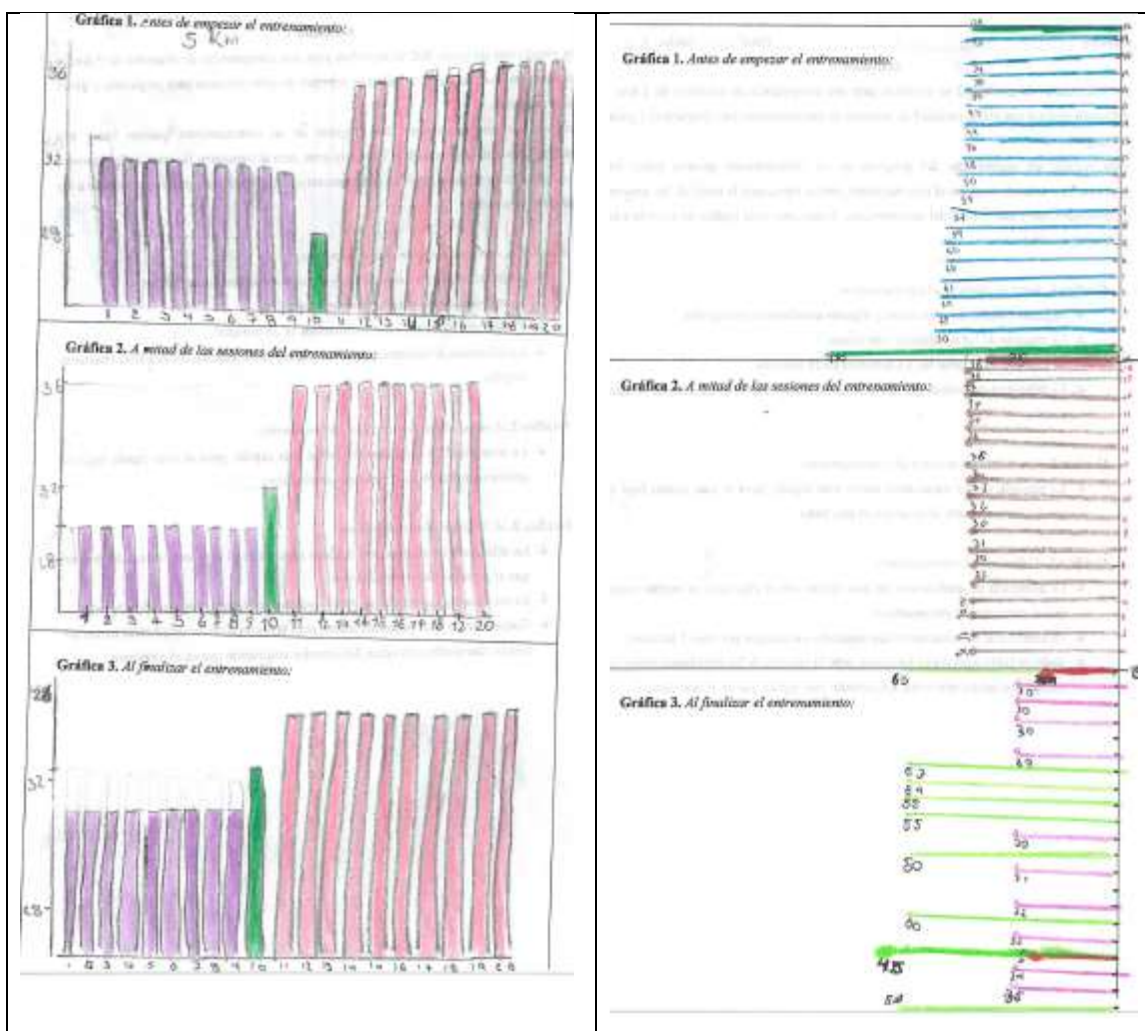


Ilustración 37. Propuestas grupo 6 y 7.

Cinco de los grupos (1, 2, 3, 4 y 5) construyen gráficas asociadas a la situación, para estas gráficas se tendrá en cuenta la propuesta de Arteaga, Batanero, Díaz y Contreras (2009) los cuales proponen los siguientes elementos como una primera competencia en la lectura de gráficos estadísticos:

Competencia 1 (C1): Las palabras que aparecen en el gráfico, como su título, las etiquetas de los ejes y de las escalas, que proporcionan las claves necesarias para comprender las relaciones representadas.

Competencia 2 (C2): El contenido matemático subyacente, por ejemplo los conjuntos numéricos empleados y otros conceptos matemáticos como los de área en un diagrama de sectores, o longitud en un gráfico de líneas, implícitos en el gráfico, y que el estudiante ha de dominar para interpretarlo.

Competencia 3 (C3): Los convenios específicos que se usan en cada tipo de gráfico y que se deben conocer para poder realizar una lectura o construcción correcta.

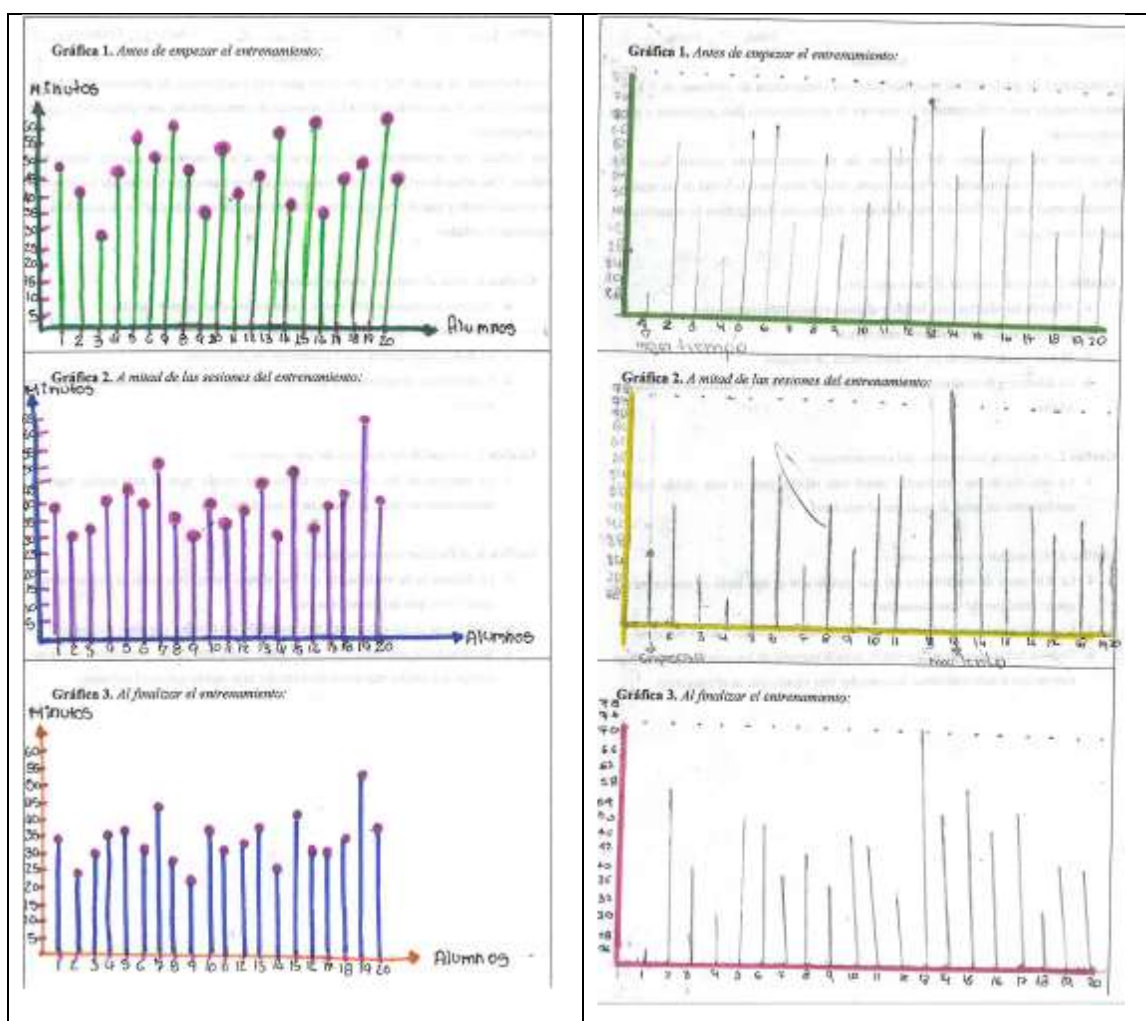
Para cada grupo se especifica las competencias que se pueden identificar en los gráficos construidos:

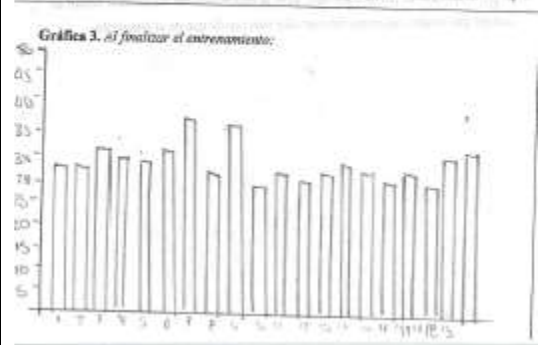
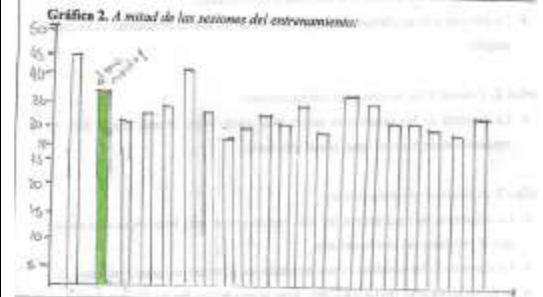
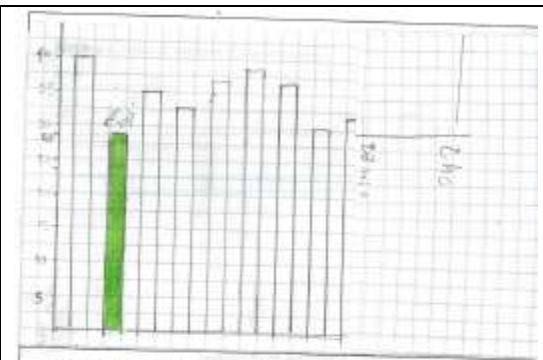
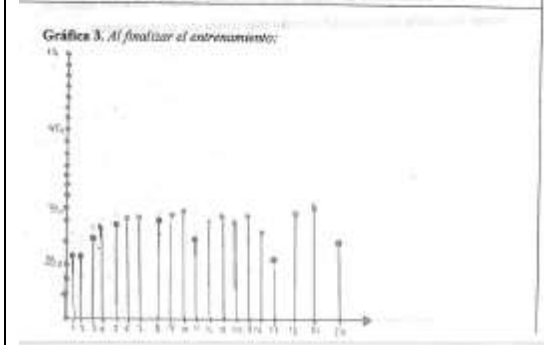
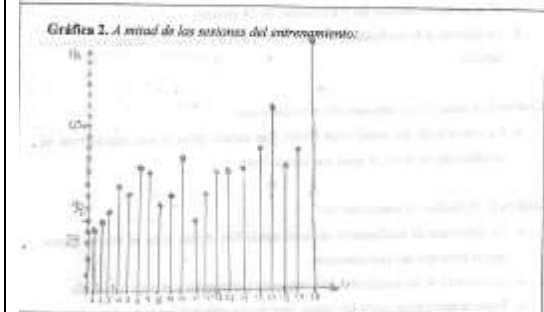
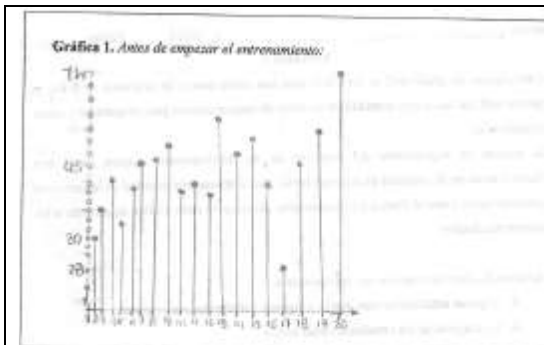
Grupo/ competencia	C1	C2	C3
1	Aparece la escala y los ejes, pero no el título del gráfico.	Establecen una relación entre los datos y la gráfica.	La representación del gráfico está asociada a la situación planteada.
2	Aparece la escala, pero no los ejes ni el título.	Establecen una relación entre los datos y la gráfica.	La representación del gráfico está asociada a la situación planteada.
3	Aparece la escala, pero no los ejes ni el título.	Establecen una relación entre los datos y la gráfica.	La representación del gráfico está asociada a la situación planteada.

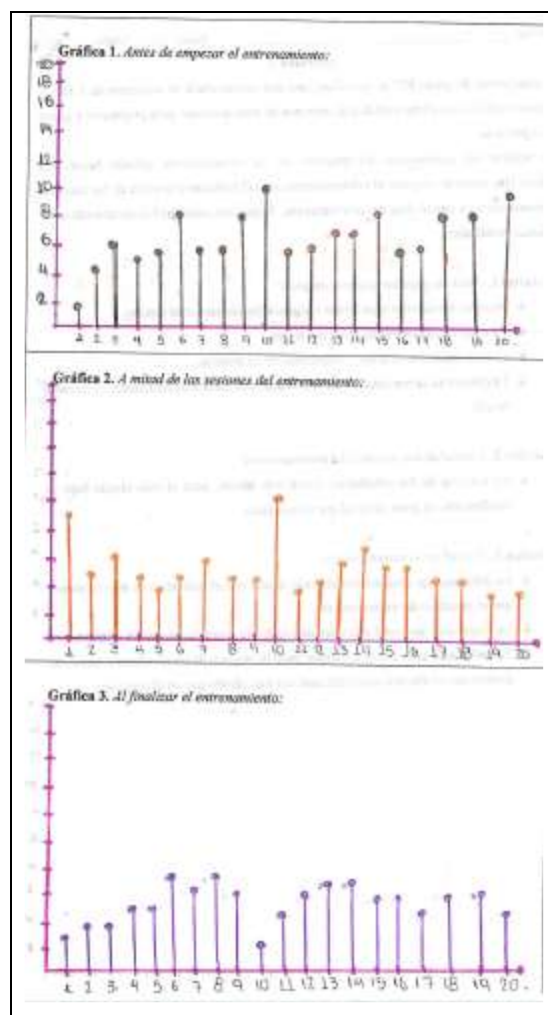
4	Aparece la escala, pero no los ejes ni el título.	Las áreas que ocupa el rectángulo de cada dato son del mismo ancho.	La representación del gráfico está asociada a la situación planteada.
5	Aparece la escala, pero no los ejes ni el título.	No presenta una relación de los datos presentados con los de la situación.	La representación del gráfico está asociada a la situación planteada, aunque no toman en cuenta los datos específicos.

Tabla 10. Competencias asociadas a la construcción del gráfico.

A continuación se muestran las gráficas presentadas por cada grupo:







6. CONCLUSIONES

En este capítulo, se presentan las conclusiones a partir del análisis de la secuencia propuesta, y se caracteriza la constitución del objeto mental distribución, que constituyen estudiantes del grado 8° de la Institución Educativa Departamental Rural Cune, además de algunas recomendaciones para próximas aplicaciones del trabajo, teniendo en cuenta los resultados obtenidos.

Los estudiantes, quienes no contaban una formación en Estadística, pudieron razonar acerca de la distribución de frecuencias y su representación gráfica, a partir de la secuencia planteada, cuyo diseño se basó en la fenomenología histórica para prever algunas estrategias de razonamiento y un contexto social acorde a la población con la cual se desarrolló esta propuesta. De esta manera los estudiantes pudieron razonar en términos de algunos aspectos de la distribución asumiendo ésta como un conjunto de datos y no como datos aislados.

Resulta de interés que los estudiantes empezaron a desarrollar la comprensión de la Distribución de frecuencias a partir de una situación que permitió constituir los conceptos asociados a la misma, a través de una matematización cada vez más formal y elaborada. La evidencia obtenida hace plausible afirmar que esta secuencia puede servir como punto de partida para que los estudiantes puedan realizar una matematización vertical, para llegar a una comprensión de las distribuciones de probabilidad y los modelos que la organizan. Para describir el proceso de matematización horizontal de cada actividad se realizó un análisis de la misma teniendo en cuenta su objetivo.

Cada una de las actividades estuvo enfocada al desarrollo de algunos aspectos de la distribución, por ejemplo, en “Estimando cantidades” los estudiantes pudieron utilizar una rejilla para establecer la cantidad de personas que había en la foto e identificar la distribución de las personas en la imagen para determinar la rejilla que tenía “no muchos o

no tan poquitos”, aunque la discusión generada en el aula fue en torno a la perspectiva de la imagen para establecer el tamaño de las rejillas.

Para las actividades “La decisión de la granja”, “Encontrando la media”, “Construyendo gráficas” y “Puntos y barras” se partió de la comparación de dos distribuciones, los estudiantes debían escoger entre una distribución normal y una sesgada, teniendo en cuenta el conjunto de datos y no datos atípicos, luego debían establecer la media en una distribución representada en un diagrama de barras horizontal, para ello debían realizar una lectura del gráfico y posteriormente, algunos grupos, realizaron una compensación de las barras en la gráfica. Posteriormente los estudiantes construyeron gráficas asociadas a características específicas, encontrando representaciones de barras verticales y horizontales, y asociando vocabulario como “están dispersas” a la descripción de la distribución, que se evidenció en la actividad y en sus exposiciones. Al cambiar de gráfico, los estudiantes asociaron correctamente la distribución de frecuencias representada con barras horizontales a una gráfica de puntos, aunque se dificultó la descripción a la pregunta sobre ¿cómo están distribuidos los datos?

Para “El problema de granja extrema” los estudiantes estimaron el peso de un adulto y el peso de un niño, la estimación es más compleja que en la actividad inicial “Estimando cantidades”, pues en dicha actividad no se daba el peso, los estudiantes partieron de una medida representativa y construyeron datos muy cercanos a esta, al sumar unos kilos “extra” y al tomar como dato representativo, “no un niño gordo, ni un niño que pese menos”, acercándose al concepto de muestreo y media.

En la última actividad propuesta, “Una historia, tres distribuciones” los estudiantes construyeron tres gráficas teniendo en cuenta un comportamiento inicial, un comportamiento al cabo de unas sesiones de entrenamiento y un comportamiento final, los grupos construyeron gráficas que presentaban variabilidad y tomaron en cuenta los datos del menor tiempo y el mayor tiempo, sin embargo, en algunos casos este dato, que era muy sencillo de identificar en la primera gráfica (antes del entrenamiento) ya no se podían

identificar en las siguientes construcciones (durante y después del entrenamiento), lo que puede indicar que se requiere un trabajo adicional, que puede ser abordado en futuras investigaciones.

El trabajo desarrollado aportó para que los estudiantes pudieran caracterizar de una manera informal una distribución y explicar con un vocabulario no formal algunos conceptos asociados a la misma, desde un enfoque diferente al aplicar un algoritmo en una serie de datos para encontrar las medidas de tendencia central o, en pocos casos, las medidas de dispersión, reflexionando sobre la importancia de los datos en un contexto y la toma de decisiones en nuestra vida diaria.

BIBLIOGRAFIA

- Arteaga, P., Batanero, C. y Ruiz, B. (2009). Comparación de distribuciones por futuros profesores. En M. González, M. González y J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 129-138). Santander (España): SEIEM.
- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education on symbolizing and computer tools*. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. En J. Garfield y D. Ben Zvi (Eds.). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp.147-168). Dordrecht: Kluwer.
- Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2006). An historical phenomenology of mean and median, *Educational Studies in Mathematics*, 62, 149-168.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Revista Números*, 83, 7-18.
- Batanero, C. y Godino, J. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf
- Batanero, C., Godino, J., Green, D., Holmes, P. y Vallecillos, A. (2011). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales (pp. 1-18). En Juárez, C. (Ed.). *Memorias 2º Encuentro Iberoamericano de Biometría*. Veracruz (México): Boca del Río. Disponible en http://www.uv.mx/eib/curso_pre/videoconferencia/53ErroresEstadis.pdf.
- Bressan, A. (2005). *Los principios de la Educación Matemática Realista*. Buenos Aires: del Zorzal.
- Bressan, A. y Bressan O. (2008). *Probabilidad y Estadística: Como trabajar con niños y jóvenes*. Madrid: Novedades educativas.
- Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Dordrecht: Springer.
- Chan, C. (2009). *Una propuesta didáctica sobre la media aritmética, la mediana y su representatividad*. Trabajo de Maestría (no publicado). Universidad Autónoma de Yucatán, México. Disponible en http://intranet.matematicas.uady.mx/portal/dme/docs/tesis/Tesis_CarlosChan.pdf
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España. Disponible en <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/tesiscobo.pdf>
- Cournot, A. (1843). *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* París: Librairie philosophique J. Vrin.

- Estepa, A., del Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Revista Números*, 83, 46-63.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht. London.
- Gómez, P. y Cañadas, M. (2010). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y silencios*, 2 (número especial), 78-89.
- Heuvel-Panhuizen, M. (2009). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. *Correo del maestro*, 161, 20-38.
- Levin, R. (2004). *Estadística para Administración y Economía*. Monterrey: Pearson.
- Linares, E. y Tinoco, E. (2014). *Plan de estudios, área de Matemáticas Cune* (no publicado). Villeta: Cundinamarca.
- Ministerio de Educación Nacional (2003). *Estándares básicos de Matemáticas y Lenguaje Educación Básica y Media*. Bogotá: MEN
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos Curriculares*. Bogotá: MEN
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. En *enseñanza de las ciencias*. Vol. 29 (pp 75-88).
- Orellana, L. (2001). *Estadística descriptiva*. Recuperado de http://www.dm.uba.ar/materias/estadistica_Q/2011/1/modulo%20descriptiva.pdf
- Orta, J. y Fernández, G. (2013). Descripción de la variabilidad estadística de datos en el contexto de una situación de tratamientos médicos. En J. Contreras, G. Cañadas, M. Gea y P. Arteaga (Eds.). *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 189-195). Granada: Universidad de Granada.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En Rico, L. (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (p. 61-94). Barcelona: Horsori.
- Reid, J. y Reading, C. (2008). Measuring the development of students' consideration of variation. *Statistics Education Research Journal*, 7(1), 40-59.
- Reading, C., y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Dordrecht: Kluwer.
- Rico, L. (1997). *Apuntes sobre fenomenología*. Documento no publicado (Informe). Granada: Universidad de Granada.

- Rocha, P. y Gil, D. (2010). Contexto escolar y la Educación Estadística. El proyecto de aula como dispositivo didáctico. En G. García (Comp.). *11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (pp. 98-106). Bogotá: Asocolme. Disponible en: <http://www.asocolme.org/publicaciones-asocolme/memorias-ecme>
- Ruiz, B., Arteaga, P., Batanero, C. y Contreras, M. (2011) Uso de gráficos estadísticos en la comparación de distribuciones por parte de futuros profesores. *I Encuentro Internacional de la Enseñanza en la Probabilidad y la Estadística*. Puebla, México.
- Sánchez, E. y Orta, J. (2013). Problemas de mediciones repetidas y de riesgo para desarrollar el razonamiento de estudiantes de secundaria en los temas de media y dispersión. *Revista Números*, 83, 65-77.
- Spiegel, M. (1998). *Estadística*. Madrid: Mc Graw Hill.
- Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 10-26.