

Una Propuesta para la Construcción de los Conceptos Desigualdad e Inecuación Mediante el Modelo de Situaciones Didácticas y a Partir del Desarrollo de la Solución de Problemas.

Julián Humberto Santos, guly16@hotmail.com.

Gustavo Adolfo Lozada, gustavio90@hotmail.com.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

1. Introducción

En la formación de estudiantes para docentes en matemáticas del proyecto curricular licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas (LEBEM), es importante para el desarrollo de nuestro quehacer profesional considerar aspectos relevantes que influyen en los procesos de enseñanza-aprendizaje, como lo son: las estructuras del pensamiento (en el sentido de los conocimientos previos de los estudiantes, sus dificultades, razonamientos y demás), el contexto y las situaciones de enseñanza que se proponen. Lo anterior nos llevó a reflexionar acerca de la manera en que tenemos en cuenta estos tres aspectos en el momento de diseñar un ambiente de aprendizaje, de manera que las construcciones realizadas por los estudiantes les sean significativas, lo cual implica que ellos puedan establecer conexiones con la utilidad que tiene el conocimiento en la resolución de problemas y la comprensión de fenómenos de la vida cotidiana.

El interés por cuestionarnos acerca de la manera en que planeamos los procesos de enseñanza-aprendizaje surge al evidenciar en que constantemente los docentes tienden a centrar su atención en el desarrollo de imágenes conceptuales y elementos demostrativos en el campo de la desigualdad y la inecuación, lo que se desarrolla frecuentemente en términos meramente teóricos y magistrales, sin embargo carece de situaciones fundamentales que desarrollen principios educativos innovadores en su construcción. Es por ello que surge la necesidad de elaborar una propuesta que pretenda a través del planteamiento de una situación fundamental y bajo el contexto de las fases expuestas por la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986) delimitar una ruta de enseñanza que permita al estudiante palpar, plasmar y manipular la construcción del objeto matemático en cuestión.

La intervención se implementó con estudiantes del grado 11 del colegio en un colegio distrital ubicado al sur de la ciudad de Bogotá, la intención era desarrollar una situación que permitiera la resolución de un problema haciendo uso de nociones, aplicaciones y definiciones de los objetos matemáticos como la desigualdad, intervalos e inecuaciones mediante la teoría de situaciones didácticas y a través del método de resolución de problemas en el aula desde algunas propuestas planteadas por Charnay(1994), Schoenfeld(1997) y Múnera(2003).

Una vez entendido el propósito de la propuesta fundamentaremos la manera en que planeamos la intervención de aula, considerando lo expuesto por Guerrero, Sánchez, Lurduy (2006) acerca de la teoría de situaciones didácticas, reconocemos que inicialmente es necesario plantear una situación fundamental, la cual debe generar problema al estudiante y despertar intereses claros de evolucionar en la búsqueda de la solución, de esta manera el proceso de resolución le permite a los estudiantes construir sus propios aprendizajes.

En la TSD se plantean unas fases para abordar dicha situación, de manera que organizamos el desarrollo de las sesiones a través de estas. En la *fase de acción*: los estudiantes deberán plasmar la situación, explorarla, encontrar elementos que le permitan conjeturar como podría establecer una solución, *fase de comunicación*: el estudiante debe establecer canales activos de comunicaciones que le permitan compartir sus experiencias, comparar sus resultados, caracterizar sus procesos, *fase de validación*: el estudiante deberá dotar de verdad sus argumentos, para ello debe haber realizado una consulta que le permita verificar la veracidad sobre sus conjeturas, *fase de institucionalización*: el docente deberá recoger los elementos establecidos y validados de sus estudiantes en función de dotar de generalidad el proceso.

2. Metodología de enseñanza:

Atendiendo a la teoría de situaciones didácticas se presenta como situación fundamental a los estudiantes la siguiente situación: *con motivo de contribuir a la recolección de dinero en grado 11, se propone crear un producto que sea rentable, de tal manera que las ganancias sean las mayores comparativamente entre los demás productos, es necesario argumentar y demostrar que el producto escogido si es más rentable que los demás. Los estudiantes demuestran un gran interés por la situación, planeando de inmediato en que invertirán su ganancia.*

El planteamiento de la situación fundamental no es un problema que se resuelva de inmediato, requiere de un proceso que responde a la planeación de la ruta propuesta, la cual se creó con

base en la teoría de las situaciones didácticas y además en las orientaciones realizadas por los estándares, los lineamientos y aspectos históricos, didácticos y matemáticos, en la forma en la que estos conciben el uso de la desigualdad e inecuación, pues resaltan que para que el estudiante logre en sus procesos de resolución implementar o trabajar con dichos conceptos hay que centrar la mirada en el pensamiento variacional, es decir que, el dominio de estos son una pequeña parte que le permite al estudiante realizar el estudio de patrones o estudio del cambio.

Aconsejan los lineamientos antes de empezar el trabajo una revisión del desarrollo de algunas nociones inmersas en las estructuras de pensamiento, como lo son: las magnitudes y su utilización en la comparación de cantidades, además la necesidad de seleccionar una unidad de medida apropiada para el rango determinado, que en este caso sería los naturales que se supone ya está previamente construido; la noción, el uso comprensivo y los diferentes significados de la variable, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas.

Dichas orientaciones se tomaron en cuenta para todo el proceso, es decir que se logró el desarrollo del pensamiento variacional, sin embargo en la situación también se dieron múltiples oportunidades para la formulación de conjeturas, la puesta a prueba de las mismas, su generalización y la argumentación para sustentar o refutar una conjetura o una propuesta de generalización, todo lo cual se relaciona con el pensamiento lógico y el pensamiento científico. Ya centrados en esta perspectiva se presenta el diseño de un diagrama que muestra las fases conceptuales inmersas en la construcción, que atienden a cada aspecto conceptual mencionado previamente y además a las necesidades de nuestros estudiantes.



Se pretendía en la resolución del problema como primera medida generar un análisis de costos, valor y ganancia de los diferentes productos de tal manera que se establecieran desigualdades al momento de comparar cada uno de los términos, luego se buscaba que el estudiante presentara y defendiera sus argumentos frente a la clase atendiendo a establecer el margen en que su producto es rentable frente a los otros, allí él debió empezar a preguntarse como asociar términos dentro de un conjunto que le permitiera generalizar la situación, luego el estudiante debería identificar la afectación que tiene sobre el costo del producto la suma de otro, su producto tomado ciertas veces o incluso como afectaría la fecha de vencimiento el valor y la ganancia, con el fin de observar el papel de las propiedades en la situación.

El siguiente proceso sugirió el establecimiento de relaciones que permitieran generalizar el problema en determinados intervalos, de esta manera comprobar los datos establecidos por los estudiantes, este momento dotaría de validez sus hipótesis y permitiría adecuar la situación con el uso y construcción de la inecuación. Por último se buscaba que una vez establecida la fase de institucionalización se certificara y aprobara la construcción, de manera que el estudiante fuese capaz de establecer cualquier tipo de desigualdad en su situación, reconociendo sus propiedades y su afectación sobre costos del producto, reconociendo y desarrollando inecuaciones en el modelo, a partir de variaciones en la producción.

Una vez denotada la ruta de enseñanza se hace importante considerar el tipo de preguntas que realizara el profesor y la manera en que estas le permitirán al estudiante representar y construir nociones, para lo cual el profesor propone una serie de modificaciones llamadas por Brousseau (1986) variables didácticas, entendidas estas como los elementos de las situación que pueden ser modificados por el maestro, y que afecta las estrategias de solución del alumno. Planteamos las siguientes preguntas como forma de gestionar el proceso de de resolución de problemas y asegurar la construcción de los objetos matemáticos pretendidos:

Establecimiento de relaciones de orden. estas preguntas estaban orientadas a que el estudiante reconociera que no existe un único punto de comparación, es decir como lo sugiere Vergnaud(1993) debe establecer diversos tipos de relación a través de la comparación de cantidades, de tal manera que lograra establecer relaciones de orden entre la diferencia de las cantidades resultante del establecimiento de una comparación de la magnitud numerosidad

¿Encuentra algún tipo de conexión entre el valor de los materiales y el precio final del producto?, ¿Podría establecer una conexión entre la ganancia y el valor total del producto? ¿Qué relación guarda los valores de cada producto con respecto a los otros? ¿Qué implicación tiene esto en la escogencia del producto más rentable?

Valoración del intervalo en la situación. Se buscaba que el estudiante analizara conjuntos de valores en los que se verificara una ganancia de cada uno de los productos. ¿Qué ocurre cuando se compra más cantidad de materiales para elaborar más productos, disminuye o aumenta la ganancia? ¿Qué cantidad de material deberíamos comprar para no arriesgar nuestro dinero y para obtener una ganancia significativa? establece un margen entre ganancia y gastos.

Aparición de variables. Se pretendía que el estudiante lograra observar que existen ciertas regularidades en los valores de cada uno de los productos, y además como estas regularidades se comportan en relación a los demás productos ¿Qué pasaría si la elaboración del producto A tomara la misma cantidad de días que la fabricación del producto B? ¿Qué pasa con las ganancias de un solo producto, como se comporta ese crecimiento? ¿Qué relación guardan en términos de desigualdad las variables tiempo y ganancia unitaria del producto?

Tener en cuenta cada una de las intervenciones de los estudiantes hizo que se reconocieran conocimientos existentes en su pensamiento, además de permitir reelaborar las futuras intervenciones de aula.

3. Implementación de la propuesta y estudio de casos.

La propuesta comienza con la elaboración de un producto por grupo que responde al cumplimiento de ciertas características establecidas en la sesión de trabajo: Costos de producción del producto, posible precio del producto, descripción de los materiales a utilizar y el costo de cada material. Los estudiantes rápidamente se introducen en la situación, como primera medida se establecen los valores reales de cada producto y se establecen dos tablas, en una calcula el valor sumado de los costos del producto, en la otra establece un valor a partir del costo para su producto, generalmente atendiendo a incrementar el costo en un 50 %, el estudiante no es capaz de identificar la ganancia como una diferencia menor que el valor total del producto. Establece dos relaciones: Relación costo - ganancia. Relación costo – valor de producto. Sin embargo no considera el hecho de relacionar ganancia – valor del producto. El estudiante es capaz sin

reconocer la desigualdad de identificar la diferencia entre los elementos que rodean al costo de los productos frente a las ganancias que podría obtener, recurre a utilizar términos como ser más que algo o menos que algo.

En el desarrollo de la fase de formulación, se tuvo como fin comunicar, valorar y establecer las diversas propuestas presentadas y desarrolladas en el transcurso de las sesiones de la fase de acción con las que se pretendía interactuar y reconocer el objeto matemático, se desarrollo en aula un tipo de actividad que pretendía dar a conocer las discusiones que existían en los grupos de trabajo acerca de que producto una vez valoradas sus variables (costos, precio, ganancia y condiciones de realización), sería el más rentable. Desde la perspectiva de Gómez (2010), la fase de comunicación debe permitir al estudiante: *“intercambiar con una o varias personas informaciones, debe conllevar asimilaciones y también contradicciones, debe lograr que las interacciones entre emisor y receptor pueden producirse a través de acciones sin codificación, o bien a través de un lenguaje”*. A través de la confrontación de ideas surgieron discusiones interesantes que empezaban a enfrentar las relaciones existentes entre la ganancia y el costo del producto, preguntas como por ejemplo *“¿pero si vende solo 20 unidades del producto, que gana?”*, hacen notar que empezaba a aparecer la necesidad de establecer intervalos que encerraran las cantidades de inversión reflejadas luego en la ganancia del producto. Otra cuestión surgida que recogería luego una serie de elementos importantes fue ¿Qué pasa si en el grupo del producto A invierten la misma cantidad de dinero que está invirtiendo el grupo B?, ¿Pero la elaboración del producto A, solo dura cuatro días, es decir haríamos casi el triple de productos en una semana con la misma inversión? Estas series de intervenciones dan cuenta de que los estudiantes implícitamente están comparando cantidades a través de la comparación de magnitudes.

Con el inicio de la fase de validación los estudiantes empiezan a considerar de manera más concreta los elementos matemáticos antes no tan visibles en el proceso de elección del producto más rentable, surge esto de la revisión realizada por los estudiantes y el trabajo con un tipo de material propuesto por el maestro que contenía una serie de elementos significativos, entre ellos nociones de desigualdades, ejemplos de intervalos y propuestas de ecuaciones, solo mediante la proposición de ejemplos. En esta etapa Gómez (2010) nos aclara: *el alumno debe poder validar la situación, es decir, la propia situación tiene que informar al alumno sobre si lo ha hecho bien o no. El alumno debe hacer declaraciones que se someterán a juicio de su interlocutor, la discusión no debe desligarse de la situación, para evitar que el discurso se aleje de la lógica y la eficacia de las pruebas.*

Atendiendo al modelo de sistema comparativo que estaban estableciendo los estudiantes de manera intuitiva se planea como modelo de comparación dos productos escogidos en la etapa de comunicación por los propios estudiantes a través de criterios de favorabilidad entre la desigualdad de costos, valor y ganancias, se le pedía al estudiante identificar como se comportaba el producto en determinadas cantidades de inversión, además que cambios tenía la ganancia de un producto cuando se variaba la cantidad de tiempo que se implementaba en su creación, si era posible establecer pequeños conjuntos con comportamientos similares, también se le pedía al estudiante suponer la manera de generalizar los datos a favor de la ganancia, una vez entraran en juego las variables tiempo, costo y valor del producto, nuevamente el estudiantes establece relaciones a partir de la comparación, Vergnaud(1993) en su libro, el niño las matemáticas y la realidad precisa que la comparación de cantidades es el primer proceso para establecer relaciones de orden, en primera instancia el estudiante realizaba comparaciones a través de planteamientos como ser más que otro o ser menos grande que el anterior, sin embargo el proceso ha permitido que el estudiante precise el hecho de ser mayor o menor o igual a través de la observación del cardinal, de esta manera el estudiante ha reconocido la intención de haber comparado cantidades con el fin de establecer diferencias. Los estudiantes son capaces de identificar a través del cardinal del producto la relación de orden y desigualdad entre las cantidades, sin embargo el no reconocimiento del papel que juegan las variables sobre los productos no les permiten hacer aun consideraciones claras y formales sobre que producto es más rentable.

Los estudiantes argumentan que el producto A debería ser el mas rentable debido a que su ganancia es mayor, bajo el manejo de esta hipótesis se le pide al grupo de trabajo valorar frente a un solo producto cual es su ganancia, es decir apoyándonos en los postulados de Vergnaud, *comparar* como primera medida la ganancia unitaria del producto, para ello se le pide establecer una tabla que compare la ganancia unidad por unidad de ambos productos.

Los estudiantes retoman sus hipótesis de comparación, pero ahora logran desarrollar el establecimiento de tablas que les permite comparar y fortalecer sus conjeturas: *"si la cantidad fuera igual tal vez la ganancia también lo sería"*, además hacen uso de las propiedades ya observadas para dotar de significado sus argumentos. El estudiante reconoce la desigualdad y además que su propiedad de agregar a ambos lados cantidades iguales la mantendrá, sin embargo recurre a la elaboración del caso término a término olvidando contemplar la utilización de los intervalos.

Valor por unidad producto A	Valor por unidad producto B
750	210
1500	420
...	...
60.000	16.800
...	...

Velos Chocolate

1 176,5 > 128
 2 293. > 246
 3 439,5 > 369
 4 586 > 492
 5 732,5 > 615
 6 879 > 738
 7 1025,5 > 861
 8 1172 > 984
 9 1318,5 > 1107
 10 1465 > 1230.

Jovany Carra,
 Diego Zamora,
 Kimberly Andrade

Un siguiente proceso conduce a los estudiantes a valorar el tiempo de elaboración. Atendiendo a esto se les pide apoyándonos en los postulados de Vergnaud, *comparar* la ganancia frente a la cantidad de días en este caso 4, del producto a través de una tabla. Es en este momento es donde se empieza a visualizar la aparición del concepto intervalo, ya no como una intención, sino como un elemento de recolección de datos en un determinado conjunto.

Ganancia producto A.	Ganancia Producto B.
[0 - 4] 80 - 60.000 * 1 = 60.000	[0 - 4] 400 - 21.100 * 4 = 84.000
[4 - 8] 160 - 60.000 * 2 = 120.000	[4 - 8] 800 - 21100 * 8 = 168.000
[8 - 12] 240 - 60.000 * 3 = 180.000	[8 - 12] 1200 - 21100 * 12 = 253.200

Pedro Antonio Suárez Gaitan
 Uriel Alexander Castro Torres
 Johan Daniel Valdes Moreno 21/09/10.

Productos,
 Chocolates "el buen pastor" (a)

costo producción: 7700

Unidades producidas: 1000 tiempo: 1 día

valor unidad: 300 X 100 = 30.000
 - 7.700

Ganancia total: 22.300 en 100 unidades

ganancia

[1.000] = 22.300 [1.400] = 89.200
 [1.200] = 44.600 [1.500] = 111.500
 [1.300] = 66.900

Producción:

1000 = a = 22.300 < b = 132.200
 2000 = a = 44.600 < b = 265.900
 3000 = a = 66.900 < b = 398.970
 4000 = a = 89.200 < b = 532.040
 5000 = a = 111.500 < b = 664.950

Lo interesante aquí es observar como el estudiante ha optado por establecer un intervalo que le permita simplificar las cantidades día por día, agrupándolas en conjuntos de cuatro días. El estudiante reconoce la desigualdad siendo capaz también de establecer un intervalo que le permite agrupar datos con lo que simplifica su proceso. Sin embargo no tiene en cuenta la caracterización de abierto o cerrado.

El estudiante reconoce la desigualdad y además que su propiedad de agregar a ambos lados cantidades iguales la mantendrá, siendo capaz también de establecer un intervalo que le permite agrupar datos con lo que simplifica su proceso. Reconoce la intención de utilizar un intervalo abierto o cerrado a través de su definición y es capaz de reconocer la afectación sobre la situación de todas las variables puestas en juego.

4. Conclusiones

Al ver la implementación de la propuesta se hizo evidente que cuando el profesor considera las estructuras de pensamiento y el contexto en el que se encuentra inmerso el estudiante logra propiciar un nuevo ambiente de enseñanza y aprendizaje que permite la construcción de aprendizajes significativos. Al concluir el proceso creemos que la situación fundamental, respondió satisfactoriamente a los objetivos planteados en cada una de las fases, los estudiantes intercambiaron y expusieron sus estrategias, logrando la construcciones de las nociones nombradas durante la anterior descripción y que además permitió que fueran críticos frente a los aportes hechos por sus compañeros. De tal manera que se lograra a través de la mediación de las variables didácticas por el docente llegar a validar algunos constructos a nivel institucional.

De gran importancia es que los estudiantes tuvieron el espacio diferente, con cuestiones que llamaba la atención de la gran mayoría, interés que se logro gracias a la reflexión hecha por nosotros acerca de su contexto, y que por lo mismo género que dejaran la tendencia de querer que los docentes le dijeran todo lo que tenían que hacer, a diferencia de cuando se inicio el proceso los estudiantes al final poseían una iniciativa mayor, quizá porque tenían mayores herramientas o porque estas fueron construidos por ellos mismos. Todos los avances que se hicieron evidentes durante el trascurso de la situación creemos que fueron fruto del trabajo del docente, la forma en la que propuso a los estudiantes la situación, el campo de problemas que genero por medio de las preguntas realizadas, que desembocaron en seguir complementando la noción de desigualdad pero que dejaron el camino abierto para fundamentar nuevos objetos matemáticos.

Se hace evidente el objetivo de lograr que los estudiantes aprendan, pero aun y de gran importancia es la manera cómo el docente actúa en clase. Es decir que para el correcto desarrollo de cualquier actividad matemática el maestro debe estar presto a recibir preguntas y dudas en el transcurrir del desarrollo de la misma, evidenciando estrategias con las cuales los estudiantes lograran avanzar e ingeniar caminos a seguir para continuar con su desarrollo, por medio del establecimiento de metas que le ayuden a efectuar su análisis.

¿A qué se debe el cambio progresivo en el nivel del estudiante? Es posible que el trabajo en grupo en ocasiones lo que se haga sea brindar un canal directo y legalizado para que el estudiante trate temas que no son de carácter académico, sin embargo entre esta disposición de argumentos se cola por momentos el tema relacionado a la actividad que deben generar, allí cobra vital importancia el trabajo en equipo, es importante generar para el crecimiento de la actividad matemática situaciones que permitan al estudiante interactuar con sus pares académicos y contrastar sus ideas.

Bibliografía

- Brousseau, G (1998), *Teoría de las situaciones didáctica*. Obra publicada en francés, éditions La Pensée Sauvage, Francia.
- Charnay, Roland (1994), “Aprender (por medio de) la resolución de problemas”, en *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Cecilia Parra e Irma Saiz (Comp.), Paidós Educador, pp. 51-63.
- Godino J. (2004) *Didáctica para maestros*, Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada
- Ministerio de Educación Nacional (2003) *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*, Bogotá
- Múnera, J y Obando, G (2003). *Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática*. En revista nacional de pedagogía Vol. XV, No. 35. Medellín; Universidad de Antioquia.
- Sanchez, N., Guerreo, F., Lurduy, O., (2006) *La practica docente a partir de los modelos DECA y la Teoría de Situaciones Didácticas*. Bogotá. Colombia.
- Schoenfeld, Alan (1997), “La enseñanza del pensamiento matemáticos y la resolución de problemas”, en *Currículum y Cognición*. Comp. Lauren Resnick y Leopold E. Klopfer. Ed. Aique. Colección Psicología cognitiva y educación. Argentina, pp. 141-170
- Vergnaud,G.(1993). *El niño, las matemáticas y la realidad*. Madrid. Editorial Trillas, México.