NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA DE MAESTROS EN FORMACIÓN: ANÁLISIS DE UNA TAREA ESTRUCTURAL

Lilia P. Aké, Walter F. Castro, Juan D. Godino
Universidad de Granada (España)
Universidad de Antioquia (Colombia)
lake86@gmail.com, wfcastro82@gmail.com, jgodino@ugr.es

Palabras clave: formación de profesores, razonamiento algebraico, tareas.
Key words: teacher's training, algebraic reasoning, tasks.

RESUMEN

La introducción de contenidos algebraicos desde los primeros niveles educativos presupone una visión ampliada de la naturaleza del álgebra escolar que reconoce una pluralidad de significados según los contextos de uso. En este sentido, desde el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática se ha propuesto una caracterización del razonamiento algebraico fundamentada en la articulación de las diferentes perspectivas sobre la naturaleza del álgebra. Este modelo proporciona una visión integrada del álgebra escolar basada en distintos niveles de algebrización. En este trabajo se desarrolla el análisis de las respuestas que los maestros en formación dieron a una tarea específica utilizando dicho modelo. A través de este análisis se ejemplifica cómo las diferentes soluciones conllevan prácticas matemáticas con diferentes niveles de algebrización.

ABSTRACT

The introduction of algebra contents early in the curriculum of primary school presupposes an enlarged view of the nature of algebra that recognizes a plurality of context-dependent meanings. We proposed a characterization of the algebraic reasoning based on the articulation of different perspectives on algebra, using the Onto-semiotic Approach of mathematical knowledge and instruction. This approach provides an integrated view of school algebra based on different levels of algebraization. In this paper, we develop the analysis of some preservice teacher´s responses to a task, which exemplifies how mathematical practices entail different solutions with different levels of algebraization.

Introducción

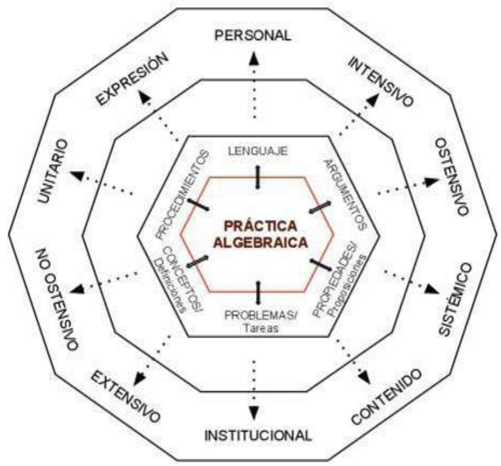
Diversas investigaciones (Carraher y Schliemann, 2007; Cai y Knuth, 2011) y propuestas curriculares (NCTM, 2000; NCTM, 2006) sugieren la introducción de formas de razonamiento algebraico en los primeros niveles escolares con la finalidad de hacer el razonamiento algebraico accesible a todos los estudiantes. Sin embargo, esta diversidad de investigaciones, tal como lo señalan Kaput y Blanton (2000) es una de las razones por la que dicha introducción ha tenido dificultades para su implantación. En consecuencia, se hace evidente la necesidad de articular un enfoque coherente e integrado que comience con el desarrollo del razonamiento algebraico en los grados elementales (Kaput y Blanton, 2001). Como respuesta, Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012) proponen una conceptualización del álgebra basada en la articulación entre las diferentes perspectivas sobre la naturaleza del razonamiento algebraico proporcionando una visión integrada del álgebra escolar. En dicha conceptualización se propone la distinción de niveles de algebrización de la matemática escolar, utilizando como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007). En el presente trabajo se aplica esta propuesta de niveles de algebrización para el análisis de las respuestas que maestros en formación dieron a una tarea. El análisis ejemplifica cómo las diferentes soluciones conllevan prácticas matemáticas (Godino y Batanero, 1994) con diferentes niveles de algebrización.

Este artículo se organiza en los siguientes apartados: en el segundo, se describe sucintamente la conceptualización de los niveles de algebrización; en el tercero, se describe la metodología; y en el cuarto se presentan las soluciones dadas por los futuros maestros a una tarea específica atendiendo a los niveles de algebrización. Finalmente en la última sección se incluyen el análisis y las conclusiones.

Razonamiento algebraico elemental

"El razonamiento algebraico es una forma de pensar y actuar en matemáticas caracterizada esencialmente por la dialéctica entre los procesos de generalización-particularización, y, en consecuencia, por la intervención y emergencia de objetos intensivos de niveles progresivos de generalidad" (Godino et al., 2012, p. 507). A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para comunicar el razonamiento algebraico (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014). De este modo, puede ser desarrollado a través de tareas matemáticas específicas, sobre las cuales el proceso de modelización juega un papel importante (Aké, 2013) y cuyas soluciones conlleven prácticas matemáticas con diferentes niveles de algebrización. Estos niveles de algebrización están definidos en función de objetos, significados y procesos que se requieren y surgen durante la solución de una tarea matemática (Figura 1).

Figura1. Objetos y procesos algebraicos



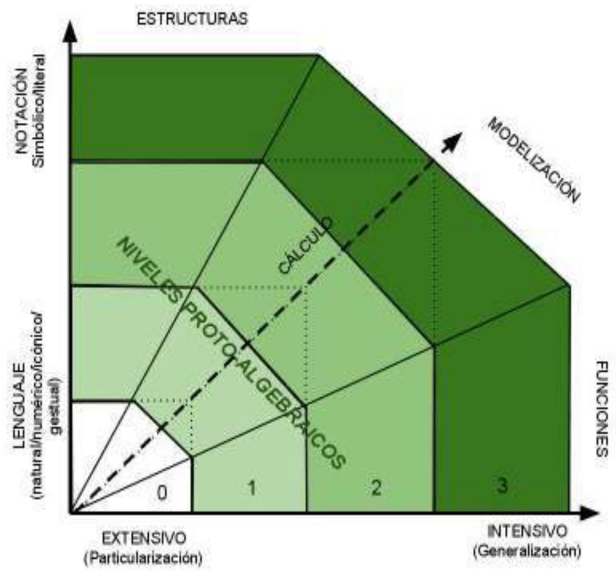
Se distinguen dos niveles de algebrización primarios (nivel 1 y 2 denominados proto-algebraicos). Dichos niveles están enmarcados entre un nivel 0 de algebrización, en el que la actividad matemática no incorpora ningún rasgo algebraico, y un tercer nivel en el que la actividad matemática se puede considerar como propiamente algebraica. El nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, en el mismo sentido que Van Ameron (2002) considera que no es la naturaleza de la tarea, sino el método de solución el que importa. Esto indica que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la práctica matemática puede ser clasificada en un nivel u otro.

Para la asignación de los niveles de algebrización se aplican tres criterios básicos (Godino et al., 2014):

1. La presencia de “objetos algebraicos” intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad, o de indeterminación).
2. Tipo de lenguajes usados para expresar dichos objetos.
3. El tratamiento que se aplica (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales).

La idea clave es “hacer explícita la generalidad” en el campo de las estructuras, el estudio de las funciones y la modelización de situaciones matemáticas al tiempo que se opera o calcula con dicha generalidad (Figura 2).

Figura 2. Niveles de algebrización



De la Figura 2 se puede colegir que el razonamiento algebraico puede ser adquirido a través del desarrollo progresivo de un lenguaje y de acciones de generalización a través de diversas tipologías de tareas que pueden ser de naturaleza estructural o funcional. En este trabajo nos centramos en el análisis de tareas estructurales. Al respecto, el conocimiento de la estructura es posible desarrollarlo en un primer nivel a través del análisis de "ecuaciones numéricas" enmarcadas en el pensamiento relacional (Stephens, 2006) y del uso de propiedades como la asociativa, conmutativa, etc. (Kieran, 1989; Morris, 1999; Warren, 2001). En los grados más avanzados se reconoce la equivalencia de las ecuaciones subsecuentes que se obtienen al resolver una ecuación como parte de conocimiento sobre la estructura, así como también la identificación de las "formas" matemáticas que componen a las expresiones algebraicas (Hoch y Dreyfus, 2004).

Metodología

El estudio que aquí se reporta es parte de una investigación más amplia. En este sentido, el presente trabajo se centra en la descripción de las características de las prácticas matemáticas realizadas para resolver una tarea específica. La tarea fue propuesta a una muestra de 52 maestros en formación de la Universidad de Granada, España, durante un proceso formativo que tenía como objetivo principal el desarrollo del sentido algebraico en los futuros maestros (Aké, Godino, Fernández, Gonzato, 2014). En particular, se analizan las respuestas dadas a la siguiente tarea de tipo estructural tomada de Bednarz y Guzmán (2003):

Los medios de locomoción
Enunciado de la tarea:

> Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que va en coche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela, ¿Cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?

Esta tarea fue proporcionada a los futuros maestros con la finalidad de que pudieran resolverla tanto de manera aritmética como de manera algebraica. Dada la posibilidad de plantear formas de solución tanto de corte aritmético como algebraico, se espera que los maestros en formación puedan modelizar la situación planteada, al menos de manera aritmética.

Niveles de algebrización en las soluciones a una tarea estructural
Las soluciones proporcionadas por los maestros en formación pueden ser categorizadas de acuerdo con los niveles de algebrización expuestos en el apartado 2. A continuación se describen estás soluciones ejemplificando cómo la presencia de determinados objetos matemáticos, el tipo de lenguaje usado, así como el tratamiento utilizado conllevan la determinación de un nivel de algebrización.

Nivel 0. Ausencia de razonamiento algebraico
Este nivel está caracterizado por la intervención de objetos particulares expresados en un lenguaje natural, numérico, icónico, gestual; no se reconocen relaciones y propiedades de las operaciones. En la Figura 3 se muestra una solución prototípica de este nivel.

Figura 3. Transcripción de la resolución numérica

Si de cada 3 alumnos que van andando hay 1 que va en coche, de cada 4 alumnos en total (3+1) hay 1 que va andando (la cuarta parte); por lo tanto, de cada 200 alumnos, 50 irían en coche (la cuarta parte) y de cada 12 alumnos 3 irían en coche, por lo que 50 (la cuarta parte de 200) +3 (la cuarta parte de 12) = 53 alumnos. La solución sería 53 alumnos irían en coche mientras que el triple de 53, es decir, 159 irían andando.

En la resolución planteada en la Figura 4, se aprecia que se realizan únicamente cálculos con números particulares y no se pone en juego el uso de propiedades, por lo que no hay manifestación de algún objeto algebraico.

Nivel 1. Nivel incipiente de algebrización
Este nivel se caracteriza por el reconocimiento de relaciones y propiedades de las operaciones expresadas en un lenguaje natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que expresen cantidades desconocidas. En la Figura 4 se muestra un ejemplo de solución en la que se utiliza la regla de 3.

Figura 4. Transcripción de la resolución por la regla de 3

En esta situación, observamos que hay 2 medios de locomoción para ir a la escuela; andando y en coche. Se nos dice que por cada alumno que en coche, hay 3 que van andando. En este punto podemos llegar a la siguiente proporción:
4 (niños en total) → 3 van andando
212 (niños en la escuela) → x van andando
De donde $x = 159$ niños que van andando.
Una vez que obtenemos el número que andando a clase, solo queda restar al número total de alumnos, los que van andando, para que obtengamos los que acuden al colegio en coche.
$221 - 159 = 53$ niños van en coche.

De la solución planteada en la Figura 4 se aprecia la identificación del concepto de proporción y su asociación con la regla de tres. Se denota con una letra el valor que se desconoce, aunque su valor es hallado aplicando un procedimiento básicamente aritmético.

Nivel 2. Nivel intermedio de algebrización

Este nivel se caracteriza por el uso de un lenguaje alfanumérico a través del reconocimiento y planteamiento de ecuaciones de la forma $Ax \pm B = C$. La resolución planteada en la Figura 3 representa un ejemplo prototípico de este nivel.

Figura 5. Transcripción de la resolución por planteamiento de una ecuación.

$212 = x + 3x$
$212 = 4x$
$x = 212/4$
$x = 53$; entonces 53 alumnos van en coche y $212 - 53 = 159$ alumnos van andando

En la solución planteada en la Figura 5 se pone de manifiesto conceptos como ecuación e incógnita. Se trata de una ecuación de la forma $Ax + B = C$, en la que de acuerdo con Puig y Rojano (2004) no se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia, por lo tanto no se opera con el valor que se desconoce. En este caso el estudiante modeliza adecuadamente el problema traduciendo de un lenguaje verbal a un lenguaje alfanumérico.

Nivel 3. Nivel consolidado de algebrización

Este nivel se caracteriza por el empleo de un lenguaje alfanumérico; los símbolos se usan de manera analítica y se opera con las indeterminadas o variables planteando ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx + D$. La Figura 6 muestra una resolución categorizada en este nivel.

Figura 6. Transcripción de la resolución por planteamiento de dos ecuaciones

$$x = \text{alumnos en coche}$$
$$y = \text{alumnos andando}$$

$$\begin{array}{ll} x + y = 212 & x + 3x = 212 \\ y = 3x & 4x = 212 \\ & x = 53 \\ & \\ & y = 159 \end{array}$$

En la solución prototípica planteada en la Figura 6 se reconocen dos incógnitas (x , y), una expresada en términos de otra; esta acción sugiere el reconocimiento de cierta dependencia entre las incógnitas. Aunque una posterior sustitución en la expresión principal ($x + y = 212$) reduce las 2 ecuaciones a una expresión de la forma $Ax + B = C$ el planteamiento inicial supone un nivel 3 de algebrización.

Análisis y conclusiones

En el análisis realizado se advierte que la resolución de esta tarea resultó accesible para los maestros en formación (índice de dificultad es 93,33 %), en su mayoría determinaron el número de alumnos que van a pie y en coche. Sin embargo, la mayoría de las soluciones tiene asociada una resolución numérica lo que indica que los estudiantes abordan el problema utilizando la aritmética. El planteamiento de una ecuación de la forma $Ax + B = C$ (nivel 2 de algebrización) resultó difícil.

De acuerdo con estos resultados, se puede colegir que se requiere brindar oportunidades a los maestros en formación no solo para construir una visión más ampliada del pensamiento algebraico sino también para que sean capaces de conectar éste con el currículo de la primaria en sus distintos bloques de contenido. Esto se justifica dado que el profesor juega un papel importante en el desarrollo de los conocimientos de los estudiantes. En este sentido, es necesario que los maestros participen de la visión ampliada del álgebra que proponen diversas investigaciones y experiencias didácticas (Carpenter, Frankle y Levi, 2003; Cai y Knuth, 2011; Aké, Godino, Gonzato y Wilhelmi, 2013; Godino et al., 2014) a fin de que puedan transformar tareas matemáticas escolares hacia el logro de niveles progresivos de algebrización. Un punto crucial es la elección de las tareas que los profesores proponen a sus estudiantes con la finalidad de fomentar en ellos la reflexión sobre los objetos matemáticos. Los maestros requieren desarrollar habilidades para "algebrizar" ejercicios que se encuentran en los libros de texto, e identificar aspectos de la red de conceptos y significados algebraicos que podrían ser puestos en juego durante la actividad matemática.

Agradecimiento: Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España).

Referencias bibliográficas

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación.* Granada: Universidad de Granada.

Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T. y Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 5, 25-48.

Aké, L., Godino, J. D., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* Vol. 2, (pp. 1-8). Kiel, Germany: PME.

Bednarz, N. y Guzmán, J. (2003). ¿Cómo abordan los estudiantes de secundaria la resolución de problemas antes de ser introducidos al álgebra? Un estudio exploratorio. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa, Aspectos de la investigación actual, Fondo de Cultura Económica* (pp. 11-40). México: FCE.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

Carpenter, T., Franky, M. y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: NCTM.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias,* 32.1, 199-219.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1), 127-135.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática- BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra. The effect of brackets. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, 3, 49-56. Bergen, Normay: Bergen University College.

Kaput, J., y Blanton, M. L. (2000). Algebraic reasoning in the context of elementary mathematics: Making it implementable on a massive scale. *Annual Meeting of the North American Educational Research Association,* Montreal,Canada.

Kaput, J., y Blanton, M. L. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming task structure. En H. Chick, K. Stacey, y J. Vicent (Eds). Paper presented at the Future of the Teaching and Learning of Algebra. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, 1, 344-350. Melbourne: University of Melbourne.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. *Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME*), 2, 163-171. París.

Morris, A. (1999). Developing concepts of mathematical structure: pre-arithmetic reasoning versus extended arithmetic reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 21 (1), 44-72.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: Author.

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.). *The teaching and learning of algebra*. *Proceedings of the 12th ICMI study Conference*, 189-224. Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(3), 249-278.

Van Ameron, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Utrech: CD-B Press.

Warren, E. (2001). Algebraic understanding and the importance of operation sense. En M. Heuvel-Penhuizen (Ed.), *Procedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, 4, 399-406. Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Institute.