

UM ESTUDO SOBRE OS CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS AO PROFESSOR PARA ENSINAR NOÇÕES CONCERNENTES À PROBABILIDADE NOS ANOS INICIAIS

Ruy César Pietropaolo, Angélica da Fontoura Garcia Silva, Tânia M. M. Campos

Universidade Anhanguera de São Paulo. (Brasil)

rpietropaolo@gmail.com, angelicafontoura@gmail.com e taniammcampos@hotmail.com

Palavras-chave: conhecimento matemático para o ensino; ensino de probabilidade

Keywords: mathematical knowledge for teaching; teaching probability

RESUMO

A finalidade deste trabalho, desenvolvido no âmbito do Observatório da Educação (Capes) com 27 professores, é discutir sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar probabilidade nos anos iniciais. Trata-se de uma pesquisa qualitativa organizada em duas fases: a primeira, denominada Diagnóstica, teve o objetivo de investigar a *imagem conceitual* dos professores sobre esse tema e seu ensino. Depois, desenvolveu-se uma *Formação*, segundo princípios do “Design Experiments” de Cobb *et al.*, com o propósito de ampliar a base de conhecimentos para o ensino de conceitos referentes a probabilidade segundo os domínios indicados por Ball *et al.* Os dados foram obtidos por meio de questionários, entrevistas e protocolos. A análise desses dados permitiu inferir a base dos conhecimentos para o ensino de probabilidade foi ampliada de forma significativa, apesar de os professores apresentarem certa descrença na viabilidade desse tema ser de fato introduzido nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This study aims to discuss the required knowledge for teachers to teach probability in the early years of school. It was developed within the scope of the Education Observatory (funded by Capes) and involved 27 teachers. It is a qualitative research organized in two stages: the first, named Diagnostic, aimed to study the conceptual image that teachers have about this theme and its teaching. After this stage, a Development Course was developed using the principles of Design Experiments as proposed by Cobb *et al.*, with the purpose of broadening the knowledge base for the teaching of concepts related to probability following Ball *et al.*'s proposal. Data was collected through questionnaires, interviews and protocols. Data analysis showed that the teachers' conceptual images regarding probability were solely restricted to one the meanings of fraction.

■ Introdução

O propósito deste estudo é a discussão dos conhecimentos necessários ao professor para ensinar probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Essa investigação foi desenvolvida no âmbito de um curso de formação continuada do Observatório da Educação – projeto de formação e pesquisa da UNIAN/CAPEs –, envolvendo 27 professores da rede pública de uma cidade do interior do Estado de São Paulo.

Julgamos que essa pesquisa seja relevante uma vez que diversos pesquisadores, dentre eles, Gal (2005) e Batanero (2013), têm indicado razões para o estudo da probabilidade nas escolas: sua utilidade para o cotidiano das pessoas, o seu papel instrumental em outras disciplinas, a necessidade para a leitura e interpretação de dados estatísticos em muitas profissões e, conseqüentemente, o importante papel do raciocínio probabilístico na tomada de decisões. Da mesma forma, documentos oficiais prescrevem já para os anos iniciais do Ensino Fundamental a introdução da probabilidade. As Orientações Curriculares do Estado de São Paulo para o Ciclo I (2008, p.28), por exemplo, em relação ao conteúdo Tratamento da Informação, apontam que os alunos devem ser capazes, ao final da 4ª série, de utilizar a ideia de probabilidade em situações-problema simples. Além disso, os PCN (Brasil, 1997, p.40) preveem que se considere como principal objetivo do ensino da probabilidade:

(...) o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis).

Assim como o de São Paulo, currículos prescritos de outros estados e cidades brasileiras apresentam indicações para o início do trabalho com essa temática nos primeiros anos da Educação Básica e justificam que aprender noções concernentes à probabilidade exige diversos aspectos cognitivos dos alunos e que estes podem ser desenvolvidos ao longo dos anos de estudo. No entanto, diversos autores consideram que os professores não têm uma formação adequada para ensinar nem estatística nem probabilidade (Ortiz, Batanero e Contreras, 2012). Em relação ao Brasil, muitos docentes não estão sequer convencidos de que a probabilidade seja importante para ser desenvolvida no Ensino Médio.

Assim, para promover a inclusão da probabilidade no Ensino Fundamental, primeiro seria necessário convencer os professores de que a aprendizagem das noções relativas à probabilidade não é apenas útil para aplicação no cotidiano das pessoas, mas também pelo desenvolvimento de importantes habilidades cognitivas e de formas de pensar. No entanto, a probabilidade, embora possa ter um significado intuitivo, envolve noções de difícil compreensão por não serem evidentes (Bryant e Nunes, 2012). Ou seja, intuitivamente não é fácil, sobretudo para um estudante do Ensino Fundamental, aceitar, por exemplo, que após ter jogado oito vezes uma moeda honesta e ter obtido cara em todas as jogadas, a probabilidade de se obter cara na 9ª jogada é exatamente a mesma de obter coroa.

Consideram também que outro conceito de difícil compreensão é o da não equiprobabilidade: alunos que tiveram muitas experiências envolvendo apenas espaços equiprováveis tendem a conjecturar como se todos os espaços tivessem essa característica. Por outro lado, se considerarmos a importância de o aluno adquirir a percepção de que a Matemática não trata apenas de fenômenos determinísticos, mas

também dos aleatórios, a abordagem do conceito de probabilidade não pode estar restrita apenas à proposição de problemas simples nos quais os alunos devem indicar a probabilidade de um evento em um espaço amostral equiprovável, como é o caso de situações padrão do tipo: qual é a probabilidade de sair o número 5 quando se lança um dado?

Assim, tomamos como ponto de partida a ideia de que a exploração de noções relacionadas à probabilidade requer do professor que ensina Matemática um repertório abrangente de conhecimentos, que permita fazer as adequações necessárias ao nível de compreensão dos alunos e favoreça algumas articulações dessas noções com outros conteúdos já estudados.

Justifica-se, assim, a escolha do tema probabilidade e do grupo de sujeitos de nossa pesquisa: tendo em vista que a construção/aquisição pelas crianças do EF I de noções relativas à probabilidade, propostas nos atuais currículos, requer uma atuação efetiva do professor, é imprescindível que esse profissional reflita e discuta com outros colegas inovações relativas a esse tema, ampliando, possivelmente, seu repertório de conhecimentos acumulados – específicos e pedagógicos.

■ Metodologia de pesquisa

Os dados discutidos neste trabalho foram referentes a duas fases: a primeira, denominada *Diagnóstica*, foi constituída pela aplicação de questionários e entrevistas, cujo objetivo era identificar os conhecimentos do professor sobre probabilidade e suas concepções a respeito de seu ensino. Foram propostas questões não apenas para identificar as imagens conceituais dos professores sobre o tema, mas também para identificar os respectivos conhecimentos do conteúdo – comum e especializado – e conhecimentos pedagógicos do conteúdo em questão, segundo Ball, Thames e Phelps (2008). Os dados obtidos na primeira fase constituíram ponto de partida para a seleção, elaboração e aplicação de atividades, cuja finalidade era a de nortear as reflexões do grupo sobre o ensino de probabilidade, no decorrer do processo formativo na segunda fase.

A segunda fase, nomeada *Formação*, foi realizada segundo princípios da metodologia “Design Experiments” de Cobb et al. (2003) e teve como pressuposto que a aplicação de uma sequência de atividades, explorando, inicialmente, de forma consistente a noção de aleatoriedade, seguida pela noção de espaço amostral e, depois, pela quantificação de probabilidades, ela poderá favorecer a ampliação e/ou reconstrução do conhecimento dos professores para ensinar noções referentes a esse tema. O desenho inicial da formação baseou-se fundamentalmente na vivência e discussão de sequência de atividades para aprendizagem de noções concernentes à probabilidade pelas crianças do Ensino Fundamental concebidas por Bryant e Nunes (2012) – professores da Universidade de Oxford – e desenvolvidas no âmbito do projeto de pesquisa “Teaching primary school children about probability”. Cabe ressaltar que essa sequência foi adaptada mediante as imagens conceituais dos professores, identificadas na primeira fase. A escolha dessa metodologia *Design Experiments* decorreu de nosso interesse por uma investigação cuja realização ocorresse no próprio contexto de (re) construção do conhecimento e, nesse sentido, fomos favorecidos pelo seu duplo propósito, que é uma metodologia de ensino e de pesquisa. Trata-se, segundo Cobb et al (2003), de metodologia de pesquisa formativa, caracterizada por um refinamento progressivo do projeto elaborado inicialmente. Ou seja, a avaliação contínua de resultados parciais determinou as reformulações necessárias ao projeto, no decorrer do

experimento, até que fossem trabalhados pontos que constituíram em entraves ou em concepções equivocadas das noções que estavam sendo exploradas.

■ Marco teórico

Como base teórica para a elaboração dos instrumentos de coleta e respectivas análises das duas fases desse estudo – Diagnóstico e Formação –, optamos pelos estudos de Ball, Thames e Phelps (2008), que dedicaram atenção especificamente à forma pela qual os professores necessitam saber determinado conteúdo para ensiná-lo e, além disso, “o que mais os professores necessitam saber sobre Matemática e como e onde poderiam os professores usar o conhecimento, na prática” (Ball et al., 2008, p.4). Assim, tomamos como base algumas categorias de conhecimentos estabelecidas por esses pesquisadores: *Conhecimento do Conteúdo Comum*, *Conhecimento do Conteúdo Especializado*, *Conhecimento do Conteúdo e Ensino*, *conhecimento do Conteúdo e Currículo*.

Assim, o foco dos estudos desenvolvidos por Ball et al. (2008) está sobre o trabalho de ensinar, ou seja, sobre o que os professores fazem quando ensinam Matemática e sobre as percepções, a compreensão e o raciocínio matemático necessários para esse trabalho.

Além disso, consideramos também a noção de *Imagem Conceitual*, definida por Tall e Vinner (1981). Esses autores consideram essa noção como a estrutura cognitiva que se desenvolve na mente de uma pessoa, mediante experiências ricas e estudos sobre determinado conceito matemático. Essa imagem envolve impressões, representações visuais, exemplos, aplicações e descrições verbais relativas a propriedades e processos concernentes àquele conceito. Assim, segundo esses autores, possuir imagem conceitual a respeito de um tema não é apenas ter domínio das noções envolvidas: é preciso também “vê-las de cima” para enxergar as conexões entre elas. Nesse sentido, entendemos que uma imagem conceitual rica, relativa à probabilidade, resultante de experiências vivenciadas por um professor, seria condição necessária para proporcionar a oportunidade de construção de uma imagem conceitual igualmente rica em seus alunos sobre esse conteúdo. Para um professor ter uma imagem conceitual profícua a respeito da probabilidade e de seu ensino, seria necessário ter uma base de conhecimentos para ensinar esse tema. Cabe, no entanto, ressaltar que, embora Tall e Vinner se refiram a expressão imagem conceitual quase sempre no singular, convém chamar a atenção para o fato que em geral não se desenvolve uma única imagem conceitual a respeito de um dado objeto matemático. Assim, é possível que para diferentes situações sejam evocadas imagens distintas a respeito do mesmo conceito.

■ Análise e discussão dos resultados

Entrevistamos e aplicamos os questionários de entrada a um grupo de 27 professores que ensinam Matemática nos anos iniciais, sendo 24 mulheres e 3 homens. A média de idade desses professores era de 31,2 anos, variando de 23 a 52 anos.

Analisando os resultados da coleta de dados da fase diagnóstica, interpretou-se que a imagem conceitual construída pela maioria dos participantes de nosso estudo, relativa ao ensino de probabilidade nos anos iniciais, era prevalentemente constituída por um campo de problemas para aplicação de razão como um dos significados da fração.

Indícios sobre a predominância dessa imagem conceitual foi observada quando analisamos a questão “*como você definiria probabilidade? (Escreva com suas próprias palavras)*”, vinte professores escreveram uma definição que pode ser associada à clássica, conforme mostram as falas a seguir:

A probabilidade de dar um resultado de um jogo é uma fração: no numerador colocamos o número de casos que desejamos que saia e no denominador o total. Digo que a probabilidade de sair um número par quando jogo um dado é de três chances em seis e escrevo $3/6$. (Prof. U)

A probabilidade é a chance que a gente tem de ganhar um jogo. Quando jogo a moeda pode dar cara ou coroa, a probabilidade da cara é de 1 em 2 e a da coroa é também de 1 em 2. (Prof. I)

A probabilidade é escrita com dois números, o primeiro mostra o total de resultados possíveis e o segundo a quantidade dos resultados que a gente espera. (Prof. P)

Probabilidade são as possibilidades de você ganhar e o resultado é uma fração. Lembro que podemos dar a probabilidade por porcentagem (...). (Prof. K)

Convém ressaltar que muitos professores do grupo (como o Prof.P) pareciam não compreender que a probabilidade de um evento é um número, mas, sim, apenas como um código composto por dois algarismos: um que informa a quantidade de casos desejáveis e o outro a quantidade total de resultados possíveis. Esse fato, traz à tona concepções inconsistentes relativas não apenas à probabilidade, mas também às representações dos números racionais e os significados da fração. O estudo da probabilidade não ofereceria para esses professores conexões com outros conteúdos matemáticos e seria um contexto pouco rico para desenvolver habilidades cognitivas importantes. Assim, o estudo da probabilidade ofereceria para esses professores poucas conexões com outros conteúdos matemáticos e seria um contexto pouco rico para desenvolver habilidades cognitivas importantes. Os extratos a seguir podem exemplificar as posições de todo o grupo:

A probabilidade é um assunto que acho que interessa meus alunos, por causa do jogo, mas eu não sei porque devemos ensinar esse assunto. Ele não tem a mesma importância das operações e problemas. Não tenho certeza que ele ajuda o raciocínio das crianças. Na verdade, não sei bem para que a probabilidade serve, além de jogos. (Prof. Y)

Acho que a probabilidade não é pré-requisito para ensinar nenhum assunto importante. Eu falo um pouquinho de probabilidade quando ensino frações, no jogo de dado ou de moeda. (Prof. A)

Será que a probabilidade é ensinada para o avanço do raciocínio lógico das crianças? (Prof. R).

Outro resultado importante observado nos dados coletados na primeira fase foi relativo à noção de espaço amostral, conceito cuja discussão pode favorecer a compreensão do cálculo de probabilidades. Quando questionamos os professores sobre o que seria espaço amostral, identificamos que apenas seis professores associaram o espaço amostral ao conjunto de todos os resultados possíveis de um evento. Quinze professores responderam que não sabiam ou que tinham se esquecido. Outros, embora não tivessem respondido corretamente, associaram esse conceito à probabilidade: “sei que espaço amostral a gente estuda quando estuda probabilidade” (Prof. G). Nesse sentido, observamos que a noção de espaço amostral não constava do repertório de conhecimentos do conteúdo específico acumulado pelos professores, indicando lacunas também nos conhecimentos pedagógicos necessários à apresentação desse conteúdo aos alunos. Alguns dos docentes sequer tinham domínio do princípio multiplicativo. Assim, grande parte dos professores não incluem o espaço amostral como parte integrante do conjunto de imagens conceituais relativas ao conceito de probabilidade.

Observamos ainda a não utilização pela grande maioria dos professores de procedimentos sistematizados, como o diagrama de árvore, para a nomeação e contagem dos agrupamentos de um espaço amostral. Diversos pesquisadores, como Borba (2013), observaram que o uso de diagramas de árvore possibilita melhor compreensão de problemas combinatórios.

■ Processo formativo

O desenho inicial de nossa formação baseou-se fundamentalmente na sequência de atividades concebidas por Bryant e Nunes (2012) – professores da Universidade de Oxford – e desenvolvidas no âmbito do projeto de pesquisa “Teaching primary school children about probability”, sob os auspícios de Nuffield Foundation. Essas atividades foram adaptadas segundo o conjunto de imagens conceituais dos professores e das necessidades e demandas do grupo. Nesse processo formativo, discutimos, inicialmente, a noção de aleatoriedade por meio da vivência e análise das atividades de Bryant e Nunes (2012). Depois, foram propostas atividades sugeridas no Caderno do Professor referente ao Currículo de São Paulo (2009). Posteriormente a essa discussão, foram desenvolvidas as atividades referentes ao espaço amostral e propostas situações-problema envolvendo o cálculo de probabilidades.

Para ampliar a imagem conceitual do grupo a respeito da aleatoriedade e seu ensino, foram discutidas e vivenciadas atividades elaboradas por Bryant e Nunes. Algumas delas são compostas por games jogados no computador. Em cada sequência de figuras ou palavras de um game, os docentes deveriam ordená-las segundo suas hipóteses e o computador indicava erro ou acerto. Essas conjecturas iam sendo confirmadas ou reformuladas pelos docentes à medida que outras sequências eram apresentadas. Depois de analisadas todas as sequências de um dado game, os professores deveriam dizer se a ordenação indicada pelo computador para cada sequência era previsível ou não. Assim, eles tiveram de decidir, para cada game, se havia uma “chave” para prever as respostas de modo a obter sucesso em todas as sequências ou se o game era semelhante a jogos de cassino. É importante destacar que alguns professores utilizaram as expressões “mais ou menos previsível” ou “não é 100% aleatório” para situações nas quais encontraram um mesmo padrão para a maioria das sequências, mas não válido para todas. Tal fato permitiu uma discussão sobre o significado de aleatoriedade e probabilidade. É importante ressaltar que 15 professores resolveram aplicar essas atividades em sala de aula, apresentando justificativas como “esse tipo de exercício de encontrar regularidade desenvolve o raciocínio” (Prof. A). A respeito da aleatoriedade, dentre outras propostas os professores analisaram um texto de Bryant e Nunes que discute a dificuldade que as crianças têm em reconhecer quando o arranjo de uma sequência é aleatório. Além da aleatoriedade nos questionários que aplicamos aos professores na Fase 1, vimos que alguns professores não dominavam o princípio multiplicativo e poucos fizeram uso de representações, como o diagrama de árvore, para contar e/ou descrever os agrupamentos possíveis. Nesse sentido, foi retomado durante a formação um problema que havíamos proposto no instrumento diagnóstico: *“Em uma caixa tem três bolas; duas azuis e uma vermelha. Se você tirar duas bolas ao acaso, qual será a probabilidade maior: de sair duas azuis, ou de sair uma azul e a outra vermelha?”*.

A discussão desse problema favoreceu a compreensão da importância da construção do diagrama de árvore para descrever os agrupamentos de problemas combinatórios por quase todos os professores do grupo. Inicialmente 21 professores responderam que a probabilidade maior era de sair duas azuis, pois havia mais bolinhas azuis. Três docentes afirmaram que as probabilidades eram iguais, mas não

justificaram e três responderam que a probabilidade de sair uma azul e uma vermelha era maior. Na construção do diagrama puderam compreender que a probabilidade de tirar uma bolinha de cada cor era o dobro de tirar duas azuis. Pudemos verificar, no entanto, que nem todos os docentes utilizaram esse diagrama quando propusemos outra nova situação. Considerando esse fato, propusemos a discussão de outros tipos de problemas sobre o espaço amostral. Nesse sentido, compartilhamos a ideia de Borba (2013) sobre a necessidade de o professor trabalhar diferentes situações, representações simbólicas que favoreçam “o adequado levantamento de possibilidades” a fim dar “significado à combinatória” (Borba, 2013, p.2)

Depois dessa discussão, retomamos os problemas sobre cálculos de probabilidades propostos no instrumento diagnóstico. Essa discussão, acrescida às anteriores sobre aleatoriedade e espaço amostral, possibilitou um grande avanço de boa parte dos participantes de nossa pesquisa em relação a esses cálculos. Além disso, foram discutidas diferentes definições de probabilidade e suas limitações: clássica, geométrica, frequentista. Esses avanços puderam ser identificados pelas soluções apresentadas pelos professores aos problemas propostos e em seus depoimentos:

Achei genial esse problema das bolinhas. Vejo que a probabilidade desenvolve sim o raciocínio matemático de nossas crianças (Prof. R).

O espaço amostral é tudo. Com ele podemos ajudar nossos alunos a resolver problemas. Ele exige raciocínio. Será que a probabilidade é ensinada para o avanço do raciocínio lógico? Eu tenho dúvida. Dizer que a possibilidade de tirar cara ou coroa na moeda é de 50%? Espero que o curso nos diga os objetivos da probabilidade para os anos iniciais. (Prof. T).

Em seguida, passou-se à análise de atividades de Bryant e Nunes, concebidas de modo que os alunos utilizem correspondências de “um-para-muitos” e diferentes representações para comparar as probabilidades proporcionalmente. Uma das ênfases nessas atividades está no fato de uma probabilidade ser a mesma em amostras de diferentes tamanhos, pois as probabilidades baseiam-se em razões: é tão provável a retirada de uma bola preta de uma caixa com 6 bolas vermelhas e 2 pretas como em uma caixa com 9 bolas vermelhas e 3 pretas. Discutimos com o grupo que muitos dos erros que as crianças cometem nas tarefas de probabilidade estão no cálculo ou na comparação de razões. Os professores mostraram-se surpresos com a potencialidade do ensino da probabilidade:

Podemos trabalhar proporções com a probabilidade. Acho isso um bom motivo para se ensinar probabilidade. (...) Eu posso dar a resposta de um problema de probabilidade de maneiras diferentes e não apenas por fração. (Prof. H).

Eu acho legal dar a resposta da probabilidade em porcentagem. A fração também. Mas acho difícil a criança entender a resposta de um problema com decimal (...). (Prof. J).

■ Conclusões e considerações finais

Para sintetizar resultados desta pesquisa, observamos que em relação ao *Conhecimento Comum do Conteúdo* de Ball et al. (2008), os professores passaram, por exemplo, a considerar que a probabilidade de um evento é um número racional, que pode representado na forma fracionária, decimal ou percentual, e não um índice composto por dois números (um que indica os casos desejáveis e o outro o total de casos) – conforme identificamos na fase diagnóstica. No que diz respeito ao *Conhecimento Especializado do Conteúdo* os professores ampliaram seu conhecimento ao discutirem situações-

problema envolvendo diferentes definições de probabilidade – clássica, geométrica e frequentista – e a importância de organizar e descrever o espaço amostral, utilizando diferentes representações. Essa discussão favoreceu, evidentemente, a reflexão a respeito dos conhecimentos pedagógicos do conteúdo. No que diz respeito ao *Conhecimento do Conteúdo e Ensino* os professores puderam discutir uma sequência para o ensino que utiliza inicialmente a noção de aleatoriedade, em seguida a de espaço amostral para depois passar a quantificação de probabilidades favorecendo o reconhecimento dos participantes sobre a necessidade de discutir aleatoriedade e do espaço amostral. Puderam ainda analisar diferentes estratégias metodológicas e diferentes representações e perceber a conexão das noções envolvendo a probabilidade com outros assuntos, ampliando seu conhecimento no que diz respeito do *Conhecimento do Currículo e do Conteúdo*. No entanto, convém destacar que, embora o grupo tenha avaliado como importantes as atividades e discussões desenvolvidas, e a maioria dos participantes, mostrou-se mais propositiva em relação a esse tema e seu ensino, percebe-se, ao mesmo tempo, em depoimentos de alguns professores, certo ceticismo quanto à possibilidade de incluir uma proposta de trabalho que tenha em vista o ensino da probabilidade em suas aulas. Tal fato, certamente revela a presença de uma “tensão” entre a dúvida – quase uma descrença – quanto à viabilidade de aplicação de determinados tópicos discutidos na sequência e, ao mesmo tempo, a incumbência de colocar em prática as inovações propostas no currículo, inclusive a probabilidade: “*nossa tarefa é tão grande para ensinar as operações, como vamos agora incluir mais esse assunto?*” Assim, essa tensão se deve ao fato de ainda considerarem a probabilidade como tema menor, mediante da tarefa que têm de ensinar Números e Operações.

É importante destacar que as discussões no interior de cada grupo e em conjunto foram substanciais para o avanço da imagem conceitual dos docentes em relação à probabilidade e seu ensino. O caminho proposto para ampliar a base de conhecimentos para ensinar probabilidade pôde incentivar uma reflexão não apenas individual, mas se estendeu e envolveu o grupo inteiro, pois foi partilhada e ponderada coletivamente. Essa prática de reflexão coletiva foi se estabelecendo de modo natural, possivelmente por perceberem os próprios questionamentos nas palavras dos outros.

■ Referências bibliográficas

- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education* 59(5), 389-407.
- Bryant, P. y Nunes, T. (2012). *Children's Understanding of Probability: a literature review*. Recuperado el 10 de julio de 2013 de www.nuffieldfoundation.org.
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños. ¿Qué podemos aprender de la investigación? En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho y F. Viseu (Eds.), *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, 9-21. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Brasil. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais (1ª a 4ª série): matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.
- Borba, R. E. S. R. (2013). Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática*. Curitiba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

- Cobb, P., Confrey, J., Lehrer, R., Schauble, L. et al. (2003). *Design experiments in education research*. Educational Researcher, Washington, v.32, n.1, p. 9-13.
- Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. En G. A. Jones (Ed), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). New York: Springer.
- Ortiz, J., Batanero, C. y Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latino Americana de Matemática Educativa* 15(1), 63-91.
- São Paulo. (2008). *Orientações curriculares do Estado de São Paulo: língua portuguesa e matemática – ciclo I*. São Paulo: Secretaria de Educação.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.