REVISTA EMA
1999, VOL. 4, Nº 3, 232-247

LA INCITACIÓN DEL ESTUDIANTE HACIA EL USO DE SU CAPACIDAD NATURAL PARA EXPRESAR GENERALIDAD: LAS SECUENCIAS DE TUNJA[1]

JOHN MASON

La conjetura que se promueve en este artículo es que la detección de patrones y la expresión de generalidad están en el centro de las matemáticas; sin duda, el estudio de las matemáticas puede ayudar a desarrollar y a refinar las capacidades naturales para ello en la mayoría de los estudiantes. En el contexto de desarrollar expresiones con paréntesis y factorizar expresiones cuadráticas se presentan ejemplos de cómo incitar a los estudiantes para que lo hagan usando sus capacidades en lugar de atenerse al maestro o al libro. En el corazón de este enfoque está la conjetura de que los estudiantes que tienen una historia en detectar y expresar generalidad explícitamente en la clase de matemáticas llegarán al álgebra con una mente completamente diferente porque las expresiones que se espera que ellos manipulen, desarrollen y factoricen son vistas por los estudiantes como la expresión de una generalidad hecha por alguien y no sólo como cálculos carentes de significado con letras que no tienen sentido.

INTRODUCCIÓN

Durante mi reciente visita a Colombia promoví las conjeturas siguientes:

- la generalización reside en el corazón de las matemáticas,
- la capacidad para detectar patrones y expresar generalidad está presente en el niño desde su nacimiento y, ciertamente, desde su ingreso a la escuela.

De hecho, sugerí incluso que una lección sin la oportunidad de generalizar ¡no es una lección de matemáticas!

Propuse para discusión varias otras capacidades tales como la capacidad de particularizar una generalidad, de examinar dicha generalidad en ejemplos que inspiran confianza, la capacidad de imaginar lo que aún no se ha

1. Traducción realizada por Patricia Inés Perry, investigadora de “una empresa docente”, y Hernando Alfonso, del original Mason, J. (1999). “Provoking students to use their natural power to express generality: Tunja sequences”.

visto, y de expresarlo con palabras, dibujos, diagramas, movimiento, símbolos, etc. Incluso fui más lejos y sugerí que dado que pocas personas necesitan resolver una ecuación cuadrática o un sistema de ecuaciones lineales mientras caminan por la calle, entonces la principal razón para enseñar álgebra no puede ser que las técnicas sean vitales para el ciudadano. Por supuesto son vitales para quien persiga una carrera técnica o matemáticamente orientada.

Las principales razones para enseñar estos tópicos a todos los estudiantes son que:

- dichos tópicos representan un éxito considerable de los matemáticos para resolver toda una clase de problemas (por tanto tendría sentido incitar a los estudiantes para que aprecien la generalidad que dichos tópicos representan);
- se pueden usar para exponer, ejercitar y desarrollar capacidades mentales importantes que permiten darle sentido al mundo en general, y a los mundos del número y del espacio, en particular.

Infortunadamente muchos tópicos están en el currículo más que todo porque representan una clase de problemas que se pueden resolver de manera completa por medio de un algoritmo que se puede enseñar a los estudiantes. Pero si ellos no ven el alcance y la gama de problemas que la técnica resuelve, si no entran en contacto con los problemas fundamentales que el tópico resuelve, ni los aprecian, si no tienen vivencias de conexiones con otros tópicos, con importantes imágenes mentales de apoyo, y con el lenguaje técnico que acompaña el manejo de las técnicas, entonces los estudiantes pueden a lo más tratar de entrenar su comportamiento haciendo una gran cantidad de ejemplos. Se puede conjeturar que estas otras componentes hacen posible disfrutar y tener éxito en las matemáticas previsto que sobre ellas actúen las capacidades naturales de los estudiantes para darles sentido.

El reto es tratar de asegurar que a los niños se les invite a usar aquellas capacidades en cambio de que el profesor o el libro de texto traten de hacer el trabajo por ellos, pues de esa manera, aprenderán rápidamente que alguien les puede hacer sus cosas y pronto dejarán de lado sus capacidades. Muy contentos, se harán dependientes del profesor y del texto, pero el resultado será que no podrán aprender muchas matemáticas.

En esta breve nota quiero elaborar varias secuencias numéricas que son similares a las que utilizo en mis sesiones y que tienen como propósito incitar a los estudiantes para que vean y expresen generalidad en el contexto de desarrollar y factorizar expresiones cuadráticas. Las llamo “secuencias de Tunja” porque se desarrollaron por primera vez para una sesión[2] realizada en la ciudad de Tunja, Colombia, y fueron luego ligeramente reelaboradas. Pero no hubo oportunidad de trabajar en detalle sobre la riqueza que proporcionan tales secuencias. Cuando se me preguntó cómo exponer a los estudiantes la factorización de expresiones cuadráticas, de manera inmediata reconocí la factorización como un proceso de deshacer la multiplicación (como lo elaboraré), pero cuando propuse hacer que los estudiantes multiplicaran expresiones como $(x+2)\ (x+3)$ y $(x-4)\ (x-2)$, se me dijo que había problemas con la multiplicación de números negativos. Por tanto, aquí propongo ejemplos de una clase de secuencias a partir de las cuales los niños pueden:

- usar sus capacidades de detectar patrones y generalizar para aprender a multiplicar expresiones con paréntesis y números negativos; lo mismo que a factorizar expresiones cuadráticas simples;
- tener vivencias de expresiones cuadráticas como sus propias expresiones de generalidad en los números y no simplemente como expresiones 'aritméticas con letras' propuestas por otros.

LA PRIMERA SECUENCIA DE TUNJA

La siguiente fue la primera secuencia de Tunja, presentada línea por línea, en silencio, con una pausa al comienzo de cada línea (haciendo evidente que yo estaba pensando acerca de lo que vendría a continuación), una pausa después del signo igual (para señalar que estaba pensando qué vendría después) y una pausa al final de cada línea (para indicar que estaba revisando los cálculos aritméticos).

1 x 6 + 6 = 3 x 4

2 x 7 + 6 = 4 x 5

3 x 8 + 6 = 5 x 6

4

Empleé una estructura similar en muchas sesiones. En este punto me dirigía al auditorio y decía "Sé que ustedes saben lo que viene ahora; ¿estoy en lo cierto?" y la gente indicaba que efectivamente sabía lo que iba a continuación. Cuando yo preguntaba qué era lo siguiente, al principio la mayoría decía que "9" pero si alguien indicaba "por", yo le agradecía y escribía el signo

2. Se refiere a una sesión de trabajo con profesores en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. [N.T.]

de multiplicación (x). De otra manera yo sugería no estar de acuerdo, escribía el signo de multiplicación y lo expresaba en voz alta. Esta precisión de nombrar cada uno de los símbolos y no sólo los números, con frecuencia, se convierte en una pequeña 'broma' entre el profesor y los estudiantes, que se agrega a la informalidad de la sesión, pero que refuerza la virtud de la precisión en la notación matemática. Más aun, enfatiza que algunas características de las expresiones son invariantes mientras que otras cambian.

Después los asistentes dictaban la siguiente línea signo por signo:

$$4 \times 9 + 6 = 6 \times 7.$$

En este punto yo sugería que ellos acababan de tener una vivencia de la capacidad básica de detectar un patrón y expresarlo, y que probablemente habían tenido una sensación de generalidad, de cómo debía continuar el patrón.

La capacidad de generalizar está en relación de dependencia y de conexión con la capacidad de agrupar y de ordenar, es decir, de enfatizar o de pasar por alto, de enfocar la atención de diferentes maneras. La mayoría de las personas habrán detectado la invariancia del $+ 6$, tanto como la de los dos signos de multiplicación y el de igualdad, pero probablemente esto no les habrá sido explícito. Más bien, simplemente habrán visto las invariancias como algo presente en cada línea. Algunos estudiantes habrán visto las "secuencias verticales" de números que van creciendo:

1	6	3	4
2	7	4	5
3	8	5	6
4	9	6	7
5	10	7	8

mientras que otros habrán visto las relaciones entre los números de una línea horizontal. En las relaciones existentes en cada línea horizontal es donde queremos centrar la atención, pero las secuencias verticales pueden ser muy útiles para ver tales relaciones.

Se pueden proponer más líneas en secuencia hasta que todos los estudiantes tengan seguridad acerca de lo que viene en la siguiente línea. Hasta ahora los estudiantes están respondiendo a la simple secuencia creciente. Pero se les puede sacudir un poco introduciendo un número más grande, quizás 12, como número inicial para una línea:

1	x	6	+	6	=	3	x	4
2	x	7	+	6	=	4	x	5
3	x	8	+	6	=	5	x	6
4	x	9	+	6	=	6	x	7
12								

Si se muestran confundidos, entonces puedo pedir a diferentes estudiantes que lean en voz alta las líneas que ya tenemos. Les pido hacer énfasis en el primer número de la línea y en otro, digamos el segundo, o el cuarto, o el quinto, o incluso el tercero. Quizás alguno haga una conjetura; si ello ocurre entonces puedo retar a otros para que digan si están de acuerdo con la conjetura y expliquen por qué sí o por qué no. Aun si la conjetura es incorrecta puedo elogiar al estudiante por hacer una conjetura y si un estudiante cambia su conjetura puedo elogiarlo por un pensamiento realmente matemático. Los matemáticos hacen cantidades de falsas conjeturas; pero cuando hacen una conjetura no creen en ella; tratan de ponerla a prueba para ver si requiere modificación. El propósito de hacer una conjetura es ponerla fuera de uno mismo de manera que se pueda examinar desapasionadamente y modificarla si es necesario.

Si no se presenta conjetura alguna entonces se puede invitar a los estudiantes a continuar la secuencia de líneas hasta que lleguen cerca a la línea que comienza con 12 para tratar de ver cuál es la línea que se busca. Dependiendo de la experiencia que tengan en este tipo de pensamiento matemático (detectar patrones, conjeturar, justificar las conjeturas, expresar generalidad), podría ofrecer un número inicial más difícil (digamos 37 o incluso 137), o podría saltar a lo siguiente: estoy pensando en un número para comenzar la línea; no puedo decirles cuál es pero voy a denotarlo por , una pequeña nube o una burbuja de las que indican pensamiento en las tiras cómicas. Entonces agrego una nueva línea al trabajo que se está desarrollando:

1	x	6	+	6	=	3	x	4
2	x	7	+	6	=	4	x	5
3	x	8	+	6	=	5	x	6
4	x	9	+	6	=	6	x	7
12	x	17	+	6	=	14	x	15
37	x	42	+	6	=	39	x	40
	x							

y les pido que adivinen lo que sigue. Es sorprendente cómo muchos estudiantes, aun los de cursos superiores del nivel primario, son capaces de proponer o por lo menos de intentar expresar los otros términos de la línea. Una forma útil de preguntar con la cual los estudiantes se familiarizan pronto es "¿qué es invariante línea por línea, y, qué es lo que cambia?" y luego "¿qué relaciones entre los diferentes números de una línea son invariantes en cada línea y cuáles cambian (si es que hay alguna)?"

Es un paso sorprendentemente fácil hacia:

$$\bigcirc \text{ x } (\bigcirc + 5) + 6 = (\bigcirc + 2)(\bigcirc + 3).$$

Esta es una expresión de generalidad, del patrón de relaciones de cada línea. Expresar generalidad es una capacidad con la que todo niño llega a la escuela, pero que por alguna razón no siempre se conoce o se usa. Es una capacidad que necesita refinarse y agudizarse, extenderse y desarrollarse; las secuencias de Tunja son apropiadas para apoyar esto.

La primera vez que los estudiantes participaron en tal actividad me contenté con dejarlos trabajar a su modo hasta la línea 7 o 12. Cada vez que usé tal secuencia los empujé un poquito más hasta que estuvieron seguros para expresar la generalidad mediante una pequeña nube. Tan pronto obtuvimos una expresión de generalidad les pedí a los estudiantes confrontarla con los ejemplos anteriores, fuera o no correcta la expresión conjeturada. A ser posible yo quiero que los estudiantes sean responsables de decidir si una conjetura es correcta o no. No quiero que ellos esperen a que yo confirme o niegue. En cada etapa trato de hacer por los estudiantes aquello que ellos todavía no pueden hacer por ellos mismos; si hago todo por ellos, ¡pronto aprenderán a esperar que yo les haga todo el trabajo!

Nota: Obsérvese que la expresión 'tal secuencia' sugiere que soy consciente de una generalidad, de esta secuencia particular como caso particular de una forma más general. Cuando digo 'cada vez que usé tal secuencia' quiero implicar que cada día por algún tiempo comencé la lección con una secuencia similar basada en el desarrollo parcial de $(x + a)\ (x + b)$ para valores positivos pequeños de a y b. (En una sección posterior se da un resumen de 'todas' las secuencias de Tunja.)

El hacer que los estudiantes construyan sus propias líneas y especialmente hacer que usen un número 'peculiar' (uno que de alguna manera sea inusual o que ellos crean que nadie en el salón lo ha pensado) tiende a incitar en ellos una consciencia de la gama de elecciones posibles, del alcance de la variación que la secuencia encierra. Algunos estudiantes prefieren ensayar números muy grandes o muy pequeños o con muchas cifras decimales y pueden usar una calculadora para realizar o verificar los cálculos. De esta manera se apropian de los ejemplos que generan mientras tienen la vivencia del alcance de la generalidad que están expresando. Tales experiencias son las raíces psicológicas del sentido que tienen las variables.

DESARROLLO DE LA SECUENCIA

Una vez que los estudiantes se han familiarizado con expresiones de generalidad de un tipo particular, es posible presentar varias de tales secuencias, una al lado de otra, y preguntar "¿qué es invariante y qué cambia en estos ejemplos?" es decir, "¿qué es lo mismo y que es distinto en ellas?" Por ejemplo:

$1 \times 6 + 6 = 3 \times 4$	$1 \times 7 + 8 = 3 \times 5$	$1 \times 8 + 12 = 4 \times 5$
$2 \times 7 + 6 = 4 \times 5$	$2 \times 8 + 8 = 4 \times 6$	$2 \times 9 + 12 = 5 \times 6$
$3 \times 8 + 6 = 5 \times 6$	$3 \times 9 + 8 = 5 \times 7$	$3 \times 10 + 12 = 6 \times 7$
$4 \times 9 + 6 = 6 \times 7$	$4 \times 10 + 8 = 6 \times 8$	$4 \times 11 + 12 = 7 \times 8$
$5 \times 10 + 6 = 7 \times 8$	$5 \times 11 + 8 = 7 \times 9$	$5 \times 12 + 12 = 8 \times 9$
$37 \times 42 + 6 = 39 \times 40$	$37 \times 43 + 8 = 39 \times 41$	$37 \times 44 + 12 = 40 \times 41$
☁ × (☁ + 5) + 6 = (☁ + 2) (☁ + 3)	☁ × (☁ + 6) + 8= (☁ + 2) (☁ + 4)	☁ × (☁ + 7) + 12= (☁ + 3) (☁ + 4)

Los estudiantes detectarán fácilmente que el producto de los dos números que están entre paréntesis a la derecha es el término de adición invariante, y que su suma es el número que está en el paréntesis del primer término de cada línea. En este punto ellos están listos para discutir si podría haber reglas para trabajar con estas 'nubes' como si fueran números (después de todo, ellas representan algún número aunque no especificado). Los estudiantes desarrollarán rápidamente por lo menos algunas reglas. Si tienen problema porque hay dos conjuntos de paréntesis entonces se puede construir una colección de secuencias que emplee una regla a la vez. Las secuencias basadas en cambiar uno de los valores de a, b, o c dejando los otros fijos en expresiones de la forma $a(b+c) = ab + ac$ sirven al propósito de 'ver' la ley distributiva, que es la regla más significativa para el desarrollo de expresiones con paréntesis. Alternativamente se pueden generar secuencias en forma inversa como las siguientes:

$$3 \text{ x } 4 = 1 \text{ x } 1 + 5 + 6$$
$$4 \text{ x } 5 = 2 \text{ x } 2 + 10 + 6$$
$$5 \text{ x } 6 = 3 \text{ x } 3 + 15 + 6$$
$$6 \text{ x } 7 = 4 \text{ x } 4 + 20 + 6$$

basadas en

(☁ + 2)(☁ + 3) = ☁ x ☁ + 5☁ + 6

Los estudiantes se darán cuenta pronto de los patrones y podrán incluso sugerir la simplificación de  x  reemplazándola por ^{2}.

LAS SECUENCIAS DE TUNJA

Una secuencia de Tunja es una secuencia de casos particulares de una expresión algebraica. Las secuencias de Tunja invitan e incitan a los estudiantes a detectar y expresar una generalidad que consiste en enunciar que dos expresiones diferentes son iguales *para todos los valores de* , porque una expresión se puede manipular hasta obtener la forma de otra. La idea es que los estudiantes descubran las reglas de manipulación, de modo que las expresiones sobre las que trabajan y las reglas que usen sean sus propias expresiones de generalidad y no simplemente reglas dadas por el profesor o el texto. Por ejemplo:

1) $x(x+a+b)+ab = (x+a)(x+b)$ para valores específicos de *a* y *b*, primero ambos positivos, luego uno negativo, y luego ambos negativos;
2) $(x+a)(x+b) = x(x+a+b)+ab$. Lo mismo para este orden de la igualdad. La anterior es apta para apoyar la factorización, mientras que ésta lo es para apoyar el desarrollo de expresiones con paréntesis;
3) $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$. Nótese que el término $(a+b)x$ se puede calcular como un solo número sin bloquear las capacidades de los estudiantes para discernir el patrón, o se puede presentar como la suma de dos términos distintos *ax* y *bx;*
4) $x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b)$. Lo mismo para este orden de la igualdad; este orden es más apto para apoyar la factorización;
5) $a(b+c) = ab+ac$ para valores cambiantes de *a*, *b*, *c*, uno a la vez, dejando los otros dos fijos;
6) $(ax+b)(cx+d)$ para varios valores fijos de *a*, *b*, *c*, *d*, como antes, desarrollada como una expresión cuadrática completa con un término al cuadrado o como un producto más una constante como en el primer caso. También la igualdad se puede dar en cualquier orden;
7) yuxtaponer la expresión de generalidad para varios ejemplos con valores diferentes de las constantes para tratar de detectar reglas para desarrollar paréntesis, trabajar con negativos, etc.;
8) tratar de insertar un valor fraccionario, un decimal, π, $\sqrt{2}$, o también cualquier símbolo extraño en lugar de la nube; incluso pueden ser las iniciales o el nombre de un estudiante. La cuestión es que los estudiantes tengan la vivencia de  o del nombre del número simplemente

como un nombre que puede manipularse como cualquier número entero ordinario. Incluso los símbolos 1, 2, 3,... son sólo numerales o sea nombres para los números, no los 'números mismos'.

Obsérvese que hay elecciones que hacer con respecto al orden que se use para dos expresiones generales equivalentes, ya que el orden dirigirá la atención de manera diferente al desarrollo o a la factorización. También hay elecciones que hacer con respecto a los términos que se van a desarrollar (por ejemplo, $x \times x$ particularizado como digamos 3 x 3, como 3^2 o como 9, y $ax + bx$ particularizado como dos términos o como uno).

El 'desarrollo' ejemplificado en la sección anterior se puede usar también, desde luego, con cualquier otro formato. Se puede extender a expresiones cúbicas si se quiere.

No es necesario para el profesor diseñar las expresiones cada vez. Se puede pedir a algunos estudiantes que estén trabajando en el asunto, que lo hagan; en realidad, en algún momento cada estudiante puede construir su propia expresión comenzando con una generalidad que incluya paréntesis y algún desarrollo y luego particularizando para formar una porción de secuencia.

Una variante de esta actividad consiste en que bien sea el profesor o un estudiante, presente un caso particular de una expresión y luego se invite a otros estudiantes (en silencio) a escribir y conjeturar sobre algún otro caso particular de la misma secuencia. El 'propietario' de la secuencia dibuja entonces una carita feliz o una triste al lado de la conjetura. Al principio todos quieren tener una carita feliz. Pero también se necesitan caras tristes para llegar a estar seguros de saber lo que el 'propietario' está pensando.

Y... DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS, ¿QUÉ?

En algún momento, dependiendo de los intereses y preocupaciones de los estudiantes, las secuencias pueden ir hacia atrás.

$$5 \times 10 + 6 = 7 \times 8$$
$$4 \times 9 + 6 = 6 \times 7$$
$$3 \times 8 + 6 = 5 \times 6$$
$$2 \times 7 + 6 = 4 \times 5$$
$$1 \times 6 + 6 = 3 \times 4$$

y seguir con:

$$0 \times 5 + 6 = 2 \times 3$$
$$(-1) \times 4 + 6 = 1 \times 2$$

¿Qué nos dice esto acerca del significado de (–1) x 4? Debe significar ‘sustraer 4’ o ‘negativo 4’; de otra manera el patrón no funciona.
Continuando:

$$(-2) \times 3 + 6 = 0 \times 1$$
$$(-3) \times 2 + 6 = (-1) \times 0$$
$$(-4) \times 1 + 6 = (-2) \times (-1)$$
$$(-5) \times 0 + 6 = (-3) \times (-2)$$

Y finalmente, el terrorífico producto de negativos:

$$(-6) \times (-1) + 6 = (-4) \times (-3)$$

Una manera adecuada para ayudar a la mayor parte de los estudiantes a internalizar las reglas para manipular números negativos es dejar que discutan sobre ellas acerca de la preservación del patrón que está generando la secuencia, para que vean por qué son necesarias y disfruten la construcción de las expresiones más complicadas posibles usando números negativos.

FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES CUADRÁTICAS

Todo el trabajo realizado sobre secuencias puede haber incitado fácilmente a los estudiantes a observar cómo funciona la factorización; pero en caso de que no sea así, comencemos por suponer que los estudiantes pueden ahora desarrollar paréntesis. Factorizar es la operación inversa de multiplicar. La manera como yo lo expresé en mis sesiones es que cualquier cosa que se pueda ‘hacer’, una técnica o una acción, se puede deshacer y preguntar “si esta es la respuesta a una pregunta de cierto tipo, ¿cuál era la pregunta?”. Por ejemplo, $3 \times 4 = 12$, es un ‘hacer’; el correspondiente ‘deshacer’ es $12 = ? \times ?$. Obsérvese que hay más de una respuesta, obsérvese también que hay libertad considerable, si no completa, en la elección del primer número; pero una vez que se ha escogido el primer número, la libertad se restringe a una posibilidad exactamente; por ejemplo, $12 = 6 \times ?$, lo que fuerza al valor 2, mientras que $12 = 17 \times ?$ también fuerza a una respuesta única aun cuando ésta sea un poco complicada.

De manera similar la factorización de una expresión cuadrática consiste en deshacer la multiplicación de términos lineales. Así que yo propongo a los estudiantes el siguiente tipo de tareas:

> Díganme cómo desarrollar $(x + 2)\ (x + 3)$
>
> Muy bien. ¿Qué tal si alguien me llega con una expresión tal como $x^2 + 7x + 12$ y me dice que le resultó de desarrollar paréntesis? ¿Cómo podríamos verificarlo? ¿Cómo podríamos estar seguros de que es cierto? (Podría elegir dos o tres expresiones cuadráticas desarrolladas incluyendo una que no se factorice).
>
> Quiero que construyan ejemplos de parejas de términos, los multipliquen y traten de ver un patrón en las respuestas. Construyan suficientes ejemplos de manera que puedan decirme cómo funcionan y cómo deshacer estos desarrollos.

Después de un rato les recuerdo a los estudiantes que intenten usar números negativos en lugar del 2 y el 3. La mayoría de los estudiantes verán rápidamente la propiedad de la suma y el producto. Muchos serán capaces de expresar una aproximación a la técnica de buscar dos números cuya suma y producto sean los dos coeficientes. Pero la factorización sigue siendo un acto creativo (a menos que se use la fórmula cuadrática, que es otro tópico, pero al que uno se puede acercar de manera similar a las secuencias de Tunja si es necesario).

Se puede estimular a los estudiantes que ven rápidamente lo que está pasando para que traten de darle a x un coeficiente en uno o en los dos paréntesis.

La virtud de permitirle a los estudiantes tomar la responsabilidad de los ejemplos particulares que ellos escojan es que están ejercitando su capacidad de particularizar con un propósito (detectar un patrón) mientras que al mismo tiempo entrenan sus habilidades para desarrollar paréntesis. Quienes tienen facilidad para desarrollar expresiones con paréntesis no necesitan darle a esto mucha atención. Se deduce que si uno quiere incrementar una destreza debe tratar de reducir la cantidad de atención que le presta (Hewitt, 1994). Hacer solamente un conjunto de ejercicios construidos por otra persona compromete toda la atención en la ejecución del ejercicio de turno y no en intentar ver cómo funciona todo, es decir, en generalizar la técnica a partir de los ejemplos. Tener una gran meta atrae la atención hacia ella, hacia el propósito de particularizar que es detectar un patrón en el camino hacia la generalización y por tanto fuera de la práctica de la destreza. Por tanto, tiende más a favorecer la rutina que si se dirige la atención a una secuencia de ejercicios dados.

Por otra parte, el hacer los ejercicios propuestos por otras personas es una etapa peor que hacer el álgebra de otras personas. Es mucho más interesante que el estudiante fabrique sus propios ejemplos pues a medida que lo hace comienza a desarrollar estrategias para el tipo de ejemplos que son más ilustrativos, más informativos. Usar $(x + 37)$ y $(x - 19)$ puede ser divertido para algunos, pero no es particularmente informativo y simplemente actúa en contra de la tarea total de darse cuenta de lo que está pasando.

Reflexiones

Sintaxis o semántica: ¿patrones superficiales o significado y comprensión?

Se me preguntó en una sesión si estas secuencias no son simplemente sintácticas, con lo que los niños estarían siguiendo un patrón en las secuencias pero sin saber por qué funcionan. Considero que esta pregunta tiene dos aspectos. Por un lado, los niños aprenden a contar sin saber el porqué de los nombres de los números y aprenden los hechos relacionados con la adición, los complementos a la decena, las tablas de multiplicar, sin saber por qué. Después de todo, la pregunta del por qué realmente sólo se puede responder como una combinación de "es convencional (nombrar y denotar los números como se hace)" y recurriendo a un sistema formal como el de los axiomas de Peano (basados en la noción de formar el sucesor de un número como 'adicionar uno'). Pero este tipo de formalización no agrega nada a la apreciación que los niños tienen de los números ni a la facilidad para su manejo en la escuela primaria y puede contribuir poco en el nivel secundario. Esa formalización comienza a tener algún sentido cuando la persona se encuentra con una variedad de números como sistemas. Por tanto, la aritmética elemental se puede describir como enculturación en las prácticas pero no como el ejercicio de las matemáticas visto como justificación (prueba) de cosas.

Por otra parte, un enfoque que apele a las capacidades de los estudiantes para detectar patrones y expresar generalidad no es solamente buena matemática, sino que contiene las semillas de la demostración, pues la naturaleza inductiva de los patrones es la base para una demostración inductiva de las relaciones. En otras palabras, se expone a los estudiantes a la parte central de cualquier demostración formalizada que ellos pudieran encontrar posteriormente. De modo que a medida que ellos expresan generalidad están comprometidos con la semántica, con el significado matemático.

Números negativos

La aritmética de los números negativos es una construcción enteramente humana. En efecto, los números negativos en sí mismos son una construcción y el uso de la palabra 'número' es altamente metafórico. Queremos extender los números naturales a los negativos (y a las fracciones y a los decimales), de manera que los nuevos objetos sigan exactamente las mismas reglas de la aritmética de los naturales. Podemos hacerlo extrayendo y abstrayendo las reglas de la aritmética sobre los números naturales y luego aplicándolas a los negativos, o podemos, si fuera posible, hacer ambas cosas a la vez: extender secuencias de cálculos con números naturales a números negativos y decidir cómo debe funcionar la aritmética de los negativos. Es decir, veo este seguimiento de patrones como una versión extendida de la razón central de que las reglas para manipular negativos son como son.

Una de las preguntas que con más frecuencia me hacen en las sesiones tanto profesores de primaria como de secundaria es por qué (-1)(-1) = 1. En mi concepto, la respuesta es simple: es una cuestión estructural. No tiene nada que ver con temperaturas negativas, deudas o cualquier otro empleo de los números en el mundo material. Se debe enteramente a que deseamos que las reglas de la aritmética 'funcionen'. Si podemos estar de acuerdo en que $1 \times a$ debe ser *a*, sin importar qué sea *a*, entonces estamos forzados a aceptar que $1 \times (-1) = -1$. De manera similar, $(-1) \times 1 = -1$. Pero ahora consideramos $(1 + (-1)) \times (1 + (-1))$ que debe ser 0 puesto que ambos paréntesis son 0. El desarrollo de los paréntesis da:

$$0 = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 + (-1) \times (-1) \;;$$

hay una sola conclusión: $(-1) \times (-1) = 1$.

La dificultad pedagógica radica en la rápida y efectiva enculturación del campo de trabajo: los estudiantes llegan a clase sabiendo que "menos y menos da más" o alguna versión similar. Puesto que hay una ambigüedad en la notación, $-1 = 0 - 1 = 0 + (-1)$, existe una confusión potencial entre $-(-1)$ y $(-1) \times (-1)$. Desde luego que son lo mismo en algún sentido, pero también son expresiones de operaciones diferentes. La primera es una sustracción y la segunda es una multiplicación. En consecuencia, los estudiantes no tienen claro cuándo pueden aplicar la regla del "menos y menos". Al trabajar con las reglas por sí mismos y verificarlas en muchos casos diferentes, mediante las secuencias de Tunja u otras, muchos estudiantes pueden deducir cómo calcular con números negativos.

Desarrollo de expresiones con paréntesis

El desarrollo de expresiones con paréntesis que contienen variables es en sí mismo una expresión de las reglas de la aritmética. Tener la atención enfocada y estructurada por secuencias de patrones numéricos para detectar y expresar aquellas reglas es buena matemática: probar casos especiales para ver qué debe pasar y reconocer que las letras no son números, sino letras que representan alguna generalidad (todos los números, algunos números de un cierto tipo, algunos números aunque desconocidos). No hay regla divina que diga cómo se puede o se debe hacer aritmética con letras. En cambio, es una construcción humana precisamente como ocurre con los números negativos. Queremos manipular las letras lo mismo que los números, por tanto nos devolvemos a secuencias de números para ver cómo manipular las letras. De modo que las secuencias de Tunja pueden conducir a los estudiantes a ver por sí mismos por qué tiene sentido disponer de ciertas reglas para el desarrollo de expresiones con paréntesis y el profesor puede ayudarles a conectar esta regla con la propiedad distributiva de la aritmética ordinaria (ver Mason et al., 1985, 1999).

El poder de la ambigüedad

Vale la pena mencionar que con frecuencia en las matemáticas la ambigüedad es signo de poder y efectividad. Llamar 'números' a los naturales, a los enteros, a las fracciones, a los decimales, a los reales y a otras cosas, es potencialmente ambiguo porque 'número' se usa en varios contextos aparentemente diferentes. Sin embargo, es un uso poderoso de una metáfora (Pimm, 1987, 1988, 1995) que nos recuerda la especificación estructural de los varios tipos de número. De igual manera, usar el signo ' –' para la sustracción y como signo de un número negativo es ambiguo pero nos posibilita evitar el uso de números signados como $^{+}3$ y $^{-}3$ junto con las operaciones de adición y de sustracción. Nos permite deslizarnos entre la sustracción y la multiplicación por -1 que queremos usar al manipular símbolos aritméticos y algebraicos. Trabajar en una recta numérica asociando la sustracción con el deshacer de una suma (¿hacia dónde y qué tan lejos necesito ir para llegar al segundo número desde el primero?) puede proporcionar imágenes que también apoyan la consciencia de los números negativos y de su aritmética. Similarmente, asociar la multiplicación, como un escalamiento, y la multiplicación por -1, como rotación de la recta numérica 180^{o} con respecto a 0^{o}, puede ayudar a vincular la sustracción y la multiplicación lo mismo que confirmar la consciencia que surge de las secuencias de Tunja.

Uso de letras apropiadas para el álgebra

Finalmente, ¿cuándo puede uno moverse de  a letras como *x*, *y*, *a*, *b*? Mi preferencia es dejar que los estudiantes lo decidan. Ellos pronto se cansarán de dibujar la nube. Pero la nube es útil para denotar números no conocidos, quizá cuando otra persona los conozca o esté pensando en ellos en otros contextos (ver Mason et al., 1985, 1999). Así que yo trato de usar la nube hasta que los estudiantes lo objeten y quieran hacer uso de algo más compacto. Quizás en cada lección deba encargarse a un estudiante diferente de decidir qué símbolo usar durante ella para denotar un número no especificado, una generalidad.

RECONOCIMIENTOS

Este artículo está dedicado a dos profesoras, Gloria y Margarita, quienes enseñan en Tunja y me pidieron ayuda. Espero que esto les proporcione algo de lo que estaban buscando. Quiero también expresar mi gratitud a Cecilia Agudelo de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, quien vio en nuestro libro *Routes to and roots of Algebra* algún potencial para su trabajo en Colombia, lo tradujo al español, inició los trámites para mi visita a Colombia y se encargó de mi viaje a Tunja. Agradezco también a “una empresa docente” de la Universidad de los Andes por invitarme a trabajar con profesores en Bogotá.

REFERENCIAS

Hewitt, D. (1994). The Principle of Economy in the Learning and Teaching of Mathematics. Disertación para PhD (no publicada). Milton Keynes: Open University.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gower, N. (1985). *Routes to & Roots of Algebra*. Milton Keynes: Open University.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gower, N. (1999). (Traducción C. Agudelo), *Rutas hacia el y Raíces del Álgebra*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically.* London: Hodder & Stoughton.

Pimm, D. (1988). Mathematical Metaphor. *For the Learning of Mathematics, 8* (1), 30-34.

Pimm, D. (1995). *Symbols and Meanings in School Mathematics*. London: Routledge.

John Mason
Centre for Mathematics Education
Open University
Milton Keynes, UK
E-mail: