

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA NUMÉRICA: TECNOLOGÍA Y MODELACIÓN DE PROBLEMAS

Eugenio Carlos Rodríguez

Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría (Cuba)
ecarlos@tesla.cujae.edu.cu

Palabras clave: matemática numérica, tecnología, mediación, calculadora

Key words: numerical mathematics, technology, mediation, calculator

RESUMEN

El presente artículo muestra cómo el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de la Matemática Numérica hace posible dedicar los esfuerzos principales a trabajar en contextos de problemas interesantes, de manera que se facilite en los estudiantes el desarrollo de una variedad de categorías de aprendizaje de orden superior, tales como el pensamiento algorítmico, la reflexión, el razonamiento, el planteamiento de problemas y la solución de estos. Se muestran distintas experiencias didácticas en la enseñanza de esta materia, sin tecnología y con tecnología, así como ejemplos de algoritmos para métodos numéricos y problemas, que pueden ser usados en el salón de clases para trabajar por desarrollar habilidades de algoritmización, razonamiento y resolución de problemas en los estudiantes.

ABSTRACT

This article shows how the use of technological tools in the teaching of Numerical Mathematics enables devote the main efforts to work in contexts of interesting problems, so as to facilitate in the students the development of a variety of categories of superior order, such as algorithmic thinking, reflection, reasoning, problem posing and solving these. Different didactic experiences in teaching this material are shown, without technology and with technology, as well as examples of algorithms for numerical methods and problems, which can be used in the classroom to work for developing skills such as algorithmic thinking, reasoning and resolution problems in students.

■ Introducción

La Matemática está compuesta de diferentes ramas, cada una de las cuales se dedica al estudio de determinado objeto u objetos matemáticos, así, el Análisis Matemático se plantea, como objeto central, el estudio de las funciones; el Álgebra Lineal se interesa por el análisis de los espacios vectoriales y las funciones lineales definidas por ellos, etc.

La Matemática Numérica, sin embargo, es una rama de la Matemática en la cual el objetivo no es el estudio de un ente matemático en particular, ella tiene como propósito el desarrollo de métodos para la solución de los más diversos problemas matemáticos mediante una cantidad finita de operaciones numéricas. Es decir, lo que da la unidad a esta rama de la Matemática, no es el tipo de problema que se ha de resolver, sino el método que se aplicará: operaciones numéricas en cantidad finita (Álvarez, Guerra y Lau, 2007).

Por regla general, los problemas matemáticos no pueden ser resueltos exactamente de esta manera. Por eso, la Matemática Numérica no se plantea llegar a resultados exactos; ni siquiera a resultados tan exactos como sea posible. El propósito aquí será obtener resultados tan exactos como sean necesarios.

El prescindir de la exactitud absoluta, permite a la Matemática Numérica elaborar métodos mucho más generales que los métodos analíticos exactos, por ejemplo, con un solo método numérico se pueden calcular de manera aproximada todas las integrales definidas vistas en los cursos de Cálculo y otras que se escapan a todos los métodos exactos.

Aquí se muestra cómo el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de esta materia hace posible dedicar los esfuerzos principales a trabajar en contextos de problemas interesantes, de manera que se facilite en los estudiantes el desarrollo de una variedad de categorías de aprendizaje de orden superior, tales como el pensamiento algorítmico, la reflexión, el razonamiento, el planteamiento de problemas y la solución de estos.

Se mostrarán distintas experiencias didácticas en la enseñanza de la Matemática Numérica, sin tecnología y con tecnología, así como ejemplos de algoritmos para métodos numéricos y problemas, que pueden ser usados en el salón de clases para trabajar por desarrollar habilidades de algoritmización, razonamiento y resolución de problemas en los estudiantes.

■ Fundamentos teóricos

Dos conceptos teóricos básicos se encuentran en el fundamento de este trabajo: la Didáctica y los medios de enseñanza.

Desde el punto de vista genérico, lo didáctico se refiere a acciones de trasmisión de ideas con un determinado criterio. Comúnmente este término se asocia con actividades propias para enseñar. El objeto de estudio de la Didáctica no es solamente el conocimiento de la estructura y funcionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje, sino además, lo que se quiere lograr en él, por lo tanto, se va construyendo de lo existente. Este proceso es intencional, planificado y creado, no espontáneo, lo que otorga a la didáctica su compromiso con la práctica educativa (Herrero y Valdés, 2009).

Asumiremos la definición que plantea: “La didáctica es la ciencia que estudia como objeto el proceso docente-educativo dirigido a resolver la problemática que se le presenta a la escuela: la preparación del hombre para la vida, pero de un modo eficiente y sistémico” (Álvarez, 1999, p. 24).

Por supuesto, teniendo en cuenta la diferencia entre la Didáctica General y las didácticas de enseñanza de determinadas disciplinas. Mientras que la Didáctica como teoría de la enseñanza aborda las leyes y categorías más generales del proceso docente-educativo (por eso el término de Didáctica General), las Didácticas Especiales concretan su campo de acción a una disciplina determinada (Herrero y Valdés, 2009). En nuestro caso nos referimos a la Didáctica de la Matemática Numérica.

Como se conoce, se consideran como categorías de la Didáctica los objetivos, el contenido, los métodos, los medios y la evaluación. Es casi imposible pensar en la realización de este proceso sin la existencia de los medios de enseñanza y aprendizaje.

En este trabajo nos suscribimos a lo planteado por (Collazo, 2009, p. 74): “Los medios de enseñanza constituyen, cuando son bien utilizados, elementos fundamentales que conducen al desarrollo de los estudiantes”.

Por la importancia y el impacto de las tecnologías en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática nos referiremos a ellas como medios de enseñanza. Para el profesor la integración de las tecnologías al proceso de enseñanza-aprendizaje debe significar transformaciones importantes en su actividad docente.

■ **Reseña histórica de la matemática numérica.**

Sus orígenes datan de miles de años atrás (Ríbnikov, 1984; Turnbull, 1984), desde que los babilonios, 2000 años a.n.e, construyeran tablas matemáticas y elaboraron efemérides astronómicas. Arquímedes, en el año 200 a.n.e., usó los polígonos regulares como aproximaciones del círculo.

En 1614 Neper publicó la primera tabla de logaritmos, y en 1620 los logaritmos de las funciones seno y tangente fueron tabulados con siete cifras decimales. Alrededor de 1628 ya se habían calculado tablas de logaritmos con catorce cifras decimales.

A fines del siglo XVII comenzó a desarrollarse el cálculo con series, siendo fundamentales las contribuciones de Newton (1642-1727), llegando a su punto culminante con los trabajos de Euler, sus algoritmos infinitos aparecen con frecuencia en la forma de desarrollos en series.

A principios del siglo XVIII, James Stirling (1692-1770) y Brook Taylor (1685-1731) sentaron los fundamentos del cálculo de diferencias finitas.

Posteriormente están los importantes aportes de Gauss (1777-1855): solución de sistemas de ecuaciones lineales, cuadratura numérica, aproximación de funciones. También Lagrange aportó un método para la aproximación de funciones.

En el siglo XIX se destacan los trabajos de Jacobi (1804-1851): método para la determinación de valores propios; Seidel (1821-1851): método para la solución de sistemas de ecuaciones lineales; Lobachevski (1793-1856): aproximación de todas las raíces de una ecuación polinomial; Runge (1895): solución de ecuaciones diferenciales, y otros.

En el siglo XX, gracias al impetuoso desarrollo de las computadoras, la Matemática Numérica alcanzó tal desarrollo, que resulta interminable la enumeración de los Matemáticos que se dedicaron y que actualmente en el siglo XXI se dedican a ella.

No obstante sus profundas raíces históricas, la Matemática Numérica, como disciplina independiente, surgió, según algunos autores, entre los años 1945 y 1950.

El desarrollo sin precedentes de las computadoras imprimió su ritmo al desarrollo de la Matemática Numérica moderna, baste con señalar que en sólo treinta años la velocidad de cálculo aumentó de una operación por segundo, utilizando la regla de cálculo, hasta

3 000 000 de operaciones por segundo, o sea 3×10^6 veces.

■ El impacto de las tecnologías

La Matemática Numérica constituye la rama de la Matemática donde más ha impactado el desarrollo impetuoso de la tecnología en los últimos años. Obviando experiencias anteriores (Carlos y Ansola, 2003; Ansola y Carlos, 2006), sólo el análisis de las experiencias en los métodos de enseñanza de la Matemática Numérica, desde el uso de las calculadoras electrónicas más elementales, hasta el uso actual de modernas computadoras y potentes softwares profesionales, nos muestra cómo el docente que enseña esta materia ha sido también impactado y cómo ha tenido que asimilar las nuevas tecnologías, evolucionando él mismo y sus métodos de enseñanza.

■ Las tecnologías como medios de enseñanza-aprendizaje.

En todos los casos que se presentan, un elemento común se muestra como imprescindible, los medios de enseñanza-aprendizaje.

■ El concepto de mediación.

La palabra mediación significa la acción y el efecto de mediar, que es interceder, interponer, estar en medio de algo. Desde una óptica filosófica expresa la existencia de un objeto o concepto a través de sus relaciones con otros objetos o conceptos. En Psicología es el proceso de ubicación y utilización de un elemento material o una estructura psicológica de carácter simbólico entre el individuo y la realidad sobre la que opera para transformarla o conocerla.

Fue L. S. Vigotsky (1979) quien introdujo en la teoría psicológica el concepto de mediación para designar la función de los instrumentos, tanto materiales como psicológicos, que constituyen herramientas de interposición en las relaciones de las personas con otras personas y con el mundo de los objetos sociales. Este concepto en el proceso educativo adquiere una dimensión especial por su papel en la socialización de la personalidad de una manera sistematizada, por tanto se habla de una mediación pedagógica.

■ La mediación pedagógica.

Su esencia radica en el proceso interactivo del profesor y de los medios de enseñanza-aprendizaje con los alumnos, que es capaz de promover y acompañar el aprendizaje. Presupone una atención y un tratamiento especial a todos los elementos personales y no personales del proceso pedagógico con la intención de viabilizar un proceso educativo participativo, creativo, interactivo y expresivo.

Todos estos elementos se convierten en mediadores de dicho proceso para facilitar y elevar su calidad, por tanto, el acto de mediar pedagógicamente es ofrecer recursos para promover un aprendizaje acorde a los tiempos que corren y el profesor tiene obligatoriamente que convertirse en un mediador de excelencia entre los resultados de la Cultura (conocimientos teóricos y práctica profesional) y los alumnos. La mediación pedagógica debe concebirse como un fenómeno integral que afecta a todos los participantes en el proceso educativo, así como a los objetivos, los contenidos, los medios, las formas y la evaluación de la enseñanza.

Según la propuesta de Vigotsky (1985), en el proceso de enseñanza aprendizaje, se resaltan dos tipos de mediación: mediación social y mediación instrumental: los adultos y los instrumentos, actúan como mediadores del proceso de conocimiento.

■ Las etapas

La calculadora y el “esquema de cálculo”.

Con cualquier herramienta de cálculo, la enseñanza de la Matemática Numérica ha partido del análisis del conjunto completo de procedimientos que conducen a la solución del problema matemático que es objeto de estudio, o sea el algoritmo.

Uno de los recursos que se utilizó para el estudio de los algoritmos fue el esquema de cálculo, con el cual se podía mostrar al estudiante, mediante la realización de varios pasos, la convergencia de un método.

Un ejemplo típico se muestra con la solución de una ecuación por el método de Newton-Raphson.

Dada la ecuación $x^3 + 5x^2 - 15x - 7 = 0$ se puede calcular la raíz $x^* \in [2,4 ; 2,5]$ mediante la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0, 1, 2, K$$

después de probar que para $x_0 = 2,5$ esta fórmula converge a dicha raíz.

Se utiliza entonces el siguiente esquema de cálculo, el cual, además de organizar los cálculos manuales, ayuda al profesor a mostrar el proceso de convergencia del método:

Tabla 1

n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$	x_{n+1}
0	2,375	28,75	0,0826089	2.4173931
1	0,0843686	27,3043304	0,0031035	2,4142878
2	0,0019769	26,6292347	0,000742	2,4142136
3	0,000010	26,6274179	0.000000	2,4142136

Se observa como $f(x_n)$ converge a cero, lo que implica que el término corrector se haga también prácticamente cero.

Las formas más rápidas de cálculo se lograron con la introducción de las calculadoras electrónicas, desde las más elementales que realizaban solamente las cuatro operaciones aritméticas básicas, hasta calculadoras científicas más modernas.

Las computadoras y los paquetes profesionales.

El surgimiento de las computadoras ha revolucionado el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, introduciendo nuevos paradigmas que han transformado al docente, al estudiante y a las instituciones. Una de las ramas de las Matemáticas que primero recibió este impacto fue la Matemática Numérica.

El surgimiento de los llamados Asistentes Matemáticos, paquetes profesionales para la solución de problemas de la ciencia y la ingeniería con herramientas matemáticas, ha sido la solución para la mayoría de los que enseñan Matemática Numérica.

Los Asistentes Matemáticos, como DERIVE, MATLAB, etc, no son paquetes didácticos, ni están hechos para enseñar Matemática, luego, su uso en cualquier rama de la Matemática debe estar acompañado de un diseño metodológico que garantice su uso racional y el aprendizaje de los estudiantes.

Algunos Asistentes Matemáticos, como el MATLAB, traen cajas de herramientas con los algoritmos numéricos ya programados para distintos métodos y además dan facilidades de programación al usuario.

En esta experiencia con el uso de un Asistente Matemático, el estudiante puede programar algunos métodos, resolver problemas y ejercicios orientados por el profesor como tareas y en las clases prácticas, que se realizan en un laboratorio de computadoras.

Softwares didácticos

Una gran variedad de softwares, elaborados especialmente para ser utilizados en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática Numérica, se conocen como softwares didácticos. Tienen la particularidad de ser diseñados por docentes para satisfacer los requerimientos de su asignatura en su aula, pudiendo, en muchos casos, ser generalizados para su uso extendido en otros contextos.

La experiencia con la calculadora y la utilización de las e-activities

Otra experiencia importante es el uso de calculadoras graficadoras, por las potencialidades que estas brindan en la programación de los métodos numéricos y en el caso de las CASIO ClassPad 300 y 330, el uso de e-activities. La calculadora es el soporte tecnológico fundamental para el desarrollo del curso. Una de las herramientas novedosas en la calculadora ClassPad 300 es la creación de e-activities, las cuales consiste en un conjunto de instrucciones en forma de texto, cálculos numéricos, gráficos, definiciones, construcciones geométricas, tablas, etc., en forma ordenada para presentar cierta información que nos permita solucionar un problema, o dar una explicación sobre un tema determinado. Por esto es de esperar que puedan ser muy útiles como herramientas en la organización y distribución del material didáctico de una clase.

Las e-activities que pueden ser utilizadas tienen la siguiente estructura: objetivos, bibliografía y ejercicios propuestos del texto, desarrollo del tema, programación de métodos, ejemplos, tareas y conclusiones.

■ Desarrollo de habilidades de orden superior

El uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de esta materia hace posible dedicar los esfuerzos principales a trabajar en contextos de problemas interesantes, de manera que se facilite en los estudiantes el desarrollo de una variedad de categorías de aprendizaje de orden superior, tales como el pensamiento algorítmico, la reflexión, el razonamiento, el planteamiento de problemas y la solución de estos.

Las calculadoras, los Asistentes Matemáticos y otras tecnologías, ayudan en la recolección, grabación, organización y análisis de datos. Aumentan además la capacidad de hacer cálculos y ofrecen herramientas convenientes, precisas y dinámicas que dibujan, grafican y calculan. Con estas ayudas, los estudiantes pueden extender el rango y la calidad de sus investigaciones matemáticas y enfrentarse a ideas matemáticas en ambientes más realistas.

Veamos algunos ejemplos problemas y de algoritmos para métodos numéricos, que pueden ser usados en el salón de clases para trabajar por desarrollar habilidades de algoritmización, razonamiento y resolución de problemas en los estudiantes.

■ Solución de problemas

A continuación se muestran algunos ejemplos de problemas resueltos en clases de Matemática Numérica con estudiantes de segundo año de ingeniería, el uso de la tecnología permite dedicar el tiempo necesario a la modelación del problemas, mientras que la solución numérica del modelo se realiza utilizando la computadoras.

El siguiente es un ejemplo de problema para utilizar métodos numéricos para resolver ecuaciones:

Se desea construir un silo para guardar granos, compuesto de un cilindro circular recto coronado por un hemisferio esférico, como indica la figura. Si la altura del cilindro es un metro mayor que el radio y el volumen total del silo es de $3\pi \text{ m}^3$. Determine con 4 cifras decimales exactas las dimensiones del silo.

Datos:

$$v_c = \pi r^2 h \quad v_e = \frac{4}{3} \pi r^3$$

**Ejemplos de algoritmos**

También el uso de la tecnología permite dedicar más tiempo a otras habilidades, por ejemplo, el desarrollo del pensamiento algorítmico. Como cada método numérico tiene su propio algoritmo, el estudio de estos en pseudo código, contribuye al desarrollo de esta habilidad. A continuación se muestra un ejemplo de estos algoritmos, utilizados en clases y en evaluaciones.

Algoritmo del Método de Bisección para resolver una ecuación del tipo $f(x) = 0$:

Entrar $f(x)$, x_{izq} , x_{der} , e (tolerancia)

repeat

$$x_{med} = (x_{izq} + x_{der})/2$$

$$E_{AM} = (x_{der} - x_{izq})/2$$

$$\text{if } f(x_{izq}) * f(x_{med}) < 0$$

$$\text{then } x_{der} = x_{med}$$

$$\text{until } E_{AM} \leq e$$

■ La evaluación

Un elemento importante en este proceso es la evaluación, algunas aplicaciones de las tecnologías en la enseñanza no van acompañadas de un adecuado diseño de la evaluación.

La evaluación debe estar diseñada para el uso de la tecnología. El alumno debe tener disponible la tecnología para evaluarse y la evaluación contiene preguntas teóricas, modelación de problemas, cálculos numéricos y elaboración de algoritmos.

■ Referencias bibliográficas

Álvarez de Zayas, C. (1999). *La Escuela en la Vida*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Álvarez, M., Guerra, A. y Lau, R. (2007). *Matemática Numérica*. La Habana: Editorial Félix Varela.

Ansola, E. y Carlos, E. (2006). Experiencias en el uso de la calculadora graficadora en un curso semipresencial de Matemática Numérica. En G. Martínez (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 930-935. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Carlos, E. y Ansola, E. (2003). Las nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática Numérica. Experiencias didácticas. En G. Martínez (Ed). *Resúmenes de la Séptima Escuela de invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, (pp.147). Chilpancingo: EXPOS Editores.

- Collazo, R. (2009). Los Medios en el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje. En R. Collazo y E. Herrero (Eds), *Preparación Pedagógica para Profesores de la Nueva Universidad Cubana*, (pp. 73-84), La Habana: Editorial Félix Varela.
- Herrero E. y Valdés N. (2009). Problemas actuales de la Pedagogía y la formación del profesional universitario. *La Didáctica en el contexto de las Ciencias Pedagógicas*. En R. Collazo y E. Herrero (Eds), *Preparación Pedagógica para Profesores de la Nueva Universidad Cubana* (pp. 3-19), La Habana: Editorial Félix Varela.
- Ríbnikov, K. (1984). *Historia de las Matemática*. Moscú: Editorial MIR.
- Turnbull, H. W. (1984). *Grandes Matemáticos*. La Habana: Editorial Científico Técnica.
- Vigotsky, L. S. (1979) *El desarrollo de los procesos psíquicos superiores*. Barcelona. España: Edición crítica.
- Vigotsky, L. S. (1985). *Interacción entre enseñanza y desarrollo*. La Habana: Pueblo y Educación.