CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA, CON APOYO DE LA COMPUTADORA

Marisol Radillo Enríquez, Lucía González Rendón, Maricruz Martínez Ruiz
Universidad de Guadalajara. (México)
marisol.radillo@red.cucei.udg.mx, lgrendon2@yahoo.com.mx

Palabras clave: visualización, representaciones semióticas, derivada
Key words: visualization, semiotic representations, derivative

RESUMEN

Se presenta una propuesta didáctica que consta de una serie de actividades diseñadas desde una apoyada en la visualización, para la construcción del concepto de la derivada de una función. La propuesta se basa en la manipulación de imágenes y la traducción de la representación geométrica de una función a las notaciones numérica y algebraica, para lo cual se utiliza el programa *geogebra*. Las actividades de visualización se centran en el significado geométrico de la derivada, los casos en que una función carece de derivada en un punto dado, y finalmente la relación entre la gráfica de la función y la gráfica de su derivada.

ABSTRACT

In this paper we present a sequence of activities designed from a constructivist perspective supported in visualization that allows to college student to construct the concept of derivative of a real variable. The proposal is based on student's activities to handle different registers of semiotic representation and to make conversions between them in the software environment (geogebra). The focus of visualization activities is on the geometric concept of derivative of a function, the cases in which there is no derivative at a given point of the function and the relationship between the graph of the function and the graph of the derivative.

Introducción

La comprensión del concepto de la derivada de una función en un punto dado conlleva un proceso complejo que involucra diversas representaciones semióticas, según el enfoque desde el cual se analice. Si se aborda el significado geométrico, se recurre a la representación gráfica de la función y la recta tangente a ella en un punto dado; la representación analítica o algebraica es más adecuada si se desea construir el significado de la derivada como el límite de un cociente. No obstante, si las actividades mencionadas no se vinculan adecuadamente entre sí mediante actividades que propicien la reflexión del estudiante sobre los objetos matemáticos involucrados, es común que se asocie la derivada a un proceso algorítmico y descontextualizado (Sánchez, García y Llinares, 2008).

Para la construcción de este concepto se propone una serie de actividades diseñadas desde una perspectiva constructivista, apoyada en la visualización. Una parte importante en esta propuesta es la manipulación de imágenes y la traducción de la representación geométrica de una función a las notaciones numérica y algebraica, de acuerdo al enfoque constructivista individual, los para lo cual se utiliza el programa *geogebra*.

Soporte teórico-metodológico

El aprendizaje de los objetos matemáticos opera a nivel conceptual, pero la actividad del estudiante sobre dichos objetos solo es posible a través de sus representaciones semióticas (Hitt, 2003). Si se considera que la comprensión de un objeto matemático involucra el desarrollo de una variedad de representaciones, ya sea internas (mentales) o externas (semióticas), entonces la enseñanza debe propiciar el uso de diversas representaciones de un mismo objeto y las relaciones funcionales entre ellas (Font, 2007).

A su vez, cada una de los formas de representación, junto con las normas que las rigen, propone una caracterización distinta del correspondiente concepto, por lo que se recomienda diferenciar varias representaciones en cada concepto. Por ejemplo, la comprensión de la derivada como razón de cambio se expresa en forma analítica o algebraica, mientras que el significado geométrico se aprecia mejor de manera gráfica.

Por otra parte la visualización matemática de un problema implica una traducción de las condiciones planteadas, usualmente expresadas en forma verbal o analítica, a otros sistemas de representación como el gráfico y/o el numérico o tabular, con lo cual es posible analizar la situación y encontrar las posibles estrategias de solución. El proceso de visualización es abordado desde la teoría constructivista individual o psicológica, ya que nos interesamos en la manera en que los individuos construyen representaciones internas, (proposiciones, imágenes, conceptos, esquemas) que se pueden recordar y evocar (Woolfolk, 2010). Para guiar al estudiante en la construcción de conceptos, proponemos que él mismo manipule las diversas representaciones de una función y su derivada, con el propósito de que analice y observe, no solo la correspondencia entre ellas, sino que también tenga oportunidad de "transformarlas" y que averigüe el efecto que cada "modificación" produce en ellas.

Por ejemplo, con las actividades mediadas por la computadora es más sencillo percibir si la función *f(x)* = $x^{2/3}$ es derivable en $\boldsymbol{x} = 0$, a partir de su representación gráfica, que mediante el procedimiento algorítmico de su expresión analítica, ya que en la primera se aprecia el "pico" de la curva y se asocia al teorema correspondiente sin necesidad de efectuar cálculo alguno. En este caso el estudiante inserta en *geogebra* la expresión algebraica de la función y enseguida obtiene la gráfica correspondiente; se añaden un punto sobre la curva, que el alumno puede "recorrer" sobre la misma, y la recta tangente a ella que pasa por ese mismo punto. Así el estudiante puede analizar el "comportamiento" numérico y gráfico de la derivada de la función en las cercanías de $x = 0$ para corroborar la ausencia de derivada de la función para este valor mediante diversas representaciones semióticas.

■ Actividades de la propuesta

Nuestra propuesta solo incluye algunas partes del curso de cálculo diferencial que involucran el concepto de la derivada, en las cuales el tradicional manejo algorítmico limita la comprensión de este concepto. A manera de introducción al significado de la derivada, durante la primera sesión se exponen algunas situaciones concretas de contenido extra-matemático, tales como el crecimiento poblacional en México, la eliminación de un medicamento en el organismo, la desintegración del carbono catorce e incluso del fenómeno de propagación de un rumor. En cada uno de estos casos se muestran las gráficas correspondientes y alguna pregunta clave cuya respuesta conduzca necesariamente al concepto de la derivada. No se pretende solucionar estas situaciones, sino que el estudiante se dé cuenta de que el cálculo diferencial proporciona respuestas a diversos fenómenos y que se abordará un concepto "nuevo": la derivada de una función.

El primer tema que se aborda es el significado geométrico de la derivada, con el ya clásico planteamiento de determinar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. Si bien es posible realizar esta tarea solamente a lápiz y papel, se propone que el estudiante utilice el programa *geogebra* para construir concepto geométrico de la derivada de una manera más dinámica.

El objetivo de la actividad consiste en determinar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado, mediante el límite de las pendientes de las rectas secantes próximas a ese punto (figuras 1 y 2). Se pide al estudiante que trabaje sobre las representaciones algebraica y gráfica de la función $f(x) = x^2$, sobre la cual se determina un punto fijo P y otro punto A sobre la misma curva que será "desplazado" sobre ella, mientras se observa la variación de sus coordenadas en la "vista algebraica". La recta que pasa por estos dos puntos es secante a $f(x) = x^2$, pero al coincidir las coordenadas de los puntos A y P, se tiene la recta tangente a la función (figura 2). El complemento de la práctica consiste en comparar las pendientes de las rectas tangentes y secante a la curva.

Figura 1. Fragmento del instructivo para la práctica 1: Significado geométrico de la derivada.

Práctica 1: Significado geométrico de la derivada

Objetivo

Determinar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado, mediante el límite de las pendientes de las rectas secantes próximas a ese punto.

Prerrequisitos

Geometría: secante a una curva, tangente a una curva, pendiente de una recta

Instrucciones

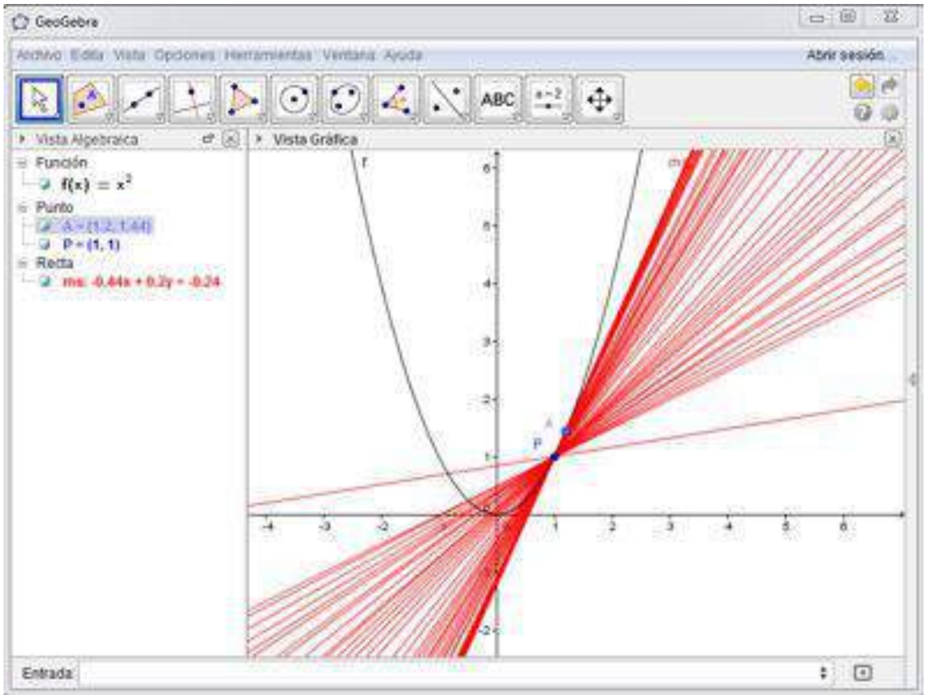
Iniciar sesión en Geogebra y seguir las siguientes indicaciones:

Comando o lugar	Acciones	Comentarios
Entrada (parte baja de la pantalla)	Capturar la función: f(x)=x^2	Oprimir ENTER. Aparecerá la función correspondiente.
Entrada (parte baja de la pantalla)	Capturar: T=(1,1)	Oprimir ENTER. Aparece el punto T (1,1) sobre la función f(x)=x^2. Este punto deberá permanecer fijo.
Punto en objeto (Barra de Herramientas)	Señalar un punto sobre la función f(x)=x^2	Por default se llamará "A". Este punto podrá deslizarse solamente sobre la curva f(x)=x^2.
Recta que pasa por dos puntos (Barra de Herramientas)	Un clic en el punto T y otro clic en el punto A.	Por default se llamará "a". Ésta es una recta secante a la función f(x)=x^2.
Vista algebraica	Oprimir el botón derecho del ratón, elegir "renombra" y cambiar nombre a "s". Ahí mismo, elegir "propiedades" y cambiar color, estilo y grosor, al punto.	Cambie de nombre a la recta secante, que ahora se llama "s".
Entrada	Capturar: pendiente(s)	Oprimir ENTER. Por default se llamará "[illegible]" y su valor aparece en la columna vista algebraica.
Vista Algebraica	Sobre "a", oprimir el botón derecho del ratón, elegir "renombra" y cambiar nombre a "ms".	La pendiente de la recta secante ahora se llama ms. Al desplazar el punto A sobre la curva f(x)=x^2 cambia el valor de ms. ¿Qué sucede con el valor de ms cuando el punto A está cerca del punto T?
Tangentes (Barra de Herramientas)	Un clic en la curva f(x)=x^2 y otro clic en el punto T.	Oprimir ENTER. Aparecerá la recta tangente a la función f(x)=x^2 en el punto T(1, 1). Por default se llamará "b".
Vista Algebraica	Sobre "b", oprimir el botón derecho del ratón, elegir "renombra" y cambiar nombre a "t".	La pendiente de la recta tangente ahora se llama t.
Entrada	Capturar: pendiente(t)	Oprimir ENTER. Por default se llamará "[illegible]" y su valor aparece en la columna vista algebraica.
Vista Algebraica	Sobre "a", oprimir el botón derecho del ratón, elegir "renombra" y cambiar nombre a "m".	La pendiente de la recta secante ahora se llama m.

Observaciones para el profesor:

- El alumno podrá comparar los valores de la pendiente de las rectas secantes a la función $y = x^2$ próximas al

Figura 2. Imagen de la práctica 1, con la función $y = x^2$ y el cálculo de la derivada como el límite de las rectas secantes que se aproximan al punto de tangencia.



La actividad incluye una serie de preguntas que el estudiante debe responder como resultado de la práctica y su propia reflexión. El estudiante tendrá libertad para continuar el mismo procedimiento con otra función o elegir otro punto sobre la curva.

Se espera que el estudiante identifique que el valor de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado se ha calculado como el límite de la pendiente de la recta secante (m_{PA}) a la curva $f(x)$, cuando la diferencia (h) entre x_A y x_P es tan pequeña que tiende a cero, es decir $m = \lim_{h\to 0} \frac{y_{P+h} - y_P}{x_{P+h} - x_P}$. Este cambio en la nomenclatura y simbología de la pendiente de una recta nos conduce a la definición de derivada. Nosotras proponemos que el estudiante descubra la definición, con la guía del profesor, en lugar de limitarse a atender una exposición acerca de este concepto.

El curso continúa con las normas (institucionales) para la representación algebraica de la derivada y su vinculación con las representaciones gráfica y numérica (tabular). Después se abordan los procedimientos de derivación por límites, por incrementos y se deducen las fórmulas básicas. Justo ahora que el estudiante domina el manejo algorítmico en procedimientos y fórmulas, es momento de recordar que la derivada es una función, lo cual se aborda una vez más mediante la manipulación de las funciones y sus representaciones semióticas, con ayuda del programa *geogebra*.

La segunda práctica se denomina "La función derivada" y su objetivo es determinar la gráfica de la derivada de una función dada. El procedimiento a seguir con el geogebra es el siguiente (1) Se captura la función $\boldsymbol{f(x) = x^3}$, (2) Se define un punto A sobre el eje X y se traza la tangente a ***f*** en ***x = A,*** (3) Se pide la **pendiente** de la recta tangente a ***f*** y se renombra como ***f ’,*** (4) Se define un punto B cuya abscisa es la del punto A y su ordenada es la pendiente de la tangente ***f*** ’, (5) Se activa la traza sobre “B” y se modifica la posición del punto A.

De esta manera se obtiene la gráfica de la función derivada (figura 3).

A manera de cierre de la actividad, y punto de partida para la reflexión, se incluye el siguiente texto: “En esta práctica se aprecia que la derivada de una función polinomial de grado 3, es una función cuadrática ¿Qué pasará si derivo una función polinomial de grado 4 o 5? ¿Por qué no derivar una función trigonométrica o una logarítmica? Solo es cuestión de cambiar la función y repetir los pasos del primer procedimiento (figura 4).

Figura 3. La derivada de una función cúbica en la Práctica 2.

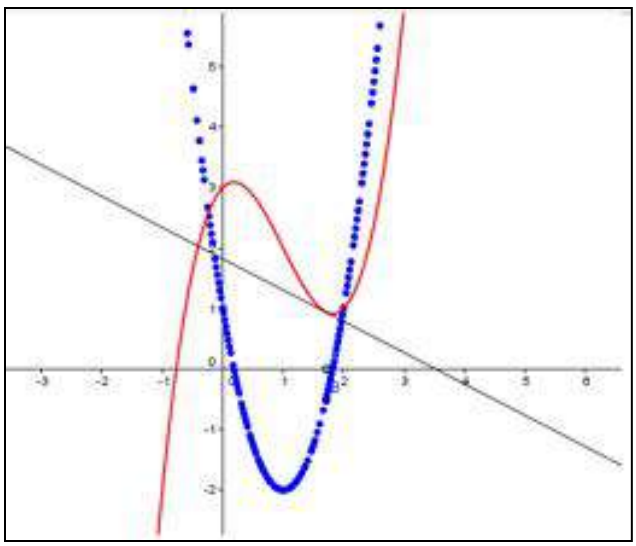
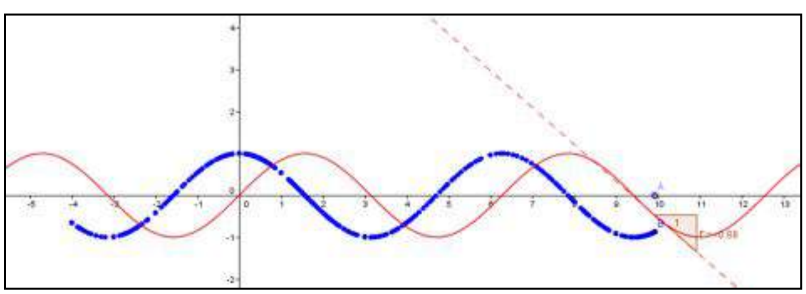


Figura 4. La derivada de la función $y=sen\ x$ en la Práctica 2.



El curso continúa en el salón de clases (no en el laboratorio de cómputo) y llega el momento de analizar en cuáles casos una función carece de derivada en un punto dado. Para tal fin se plantea una actividad inicial: "Calcule la pendiente de la recta tangente a la función $y = \sqrt{x}$ $y = \sqrt{x}$, en (a) *x = 4,* (b) *x = 0*"

Una vez que los alumnos han trabajado en la actividad, el profesor dirige la discusión grupal mediante preguntas ¿Por qué no es posible obtener la pendiente para el inciso (b)? ¿En qué casos la pendiente de una recta es indeterminada? ¿Por qué no es posible determinar el límite de cuando $x \rightarrow 0$?

En este punto se realiza una tercera práctica en la computadora, para graficar dicha función y analizar lo que pasa en *x = 0*. Para esta práctica no se proporciona instructivo, ya que el alumno ha realizado dos prácticas previas y debe tomar la iniciativa para explorar la función y su derivada. En las figura 5 y 6 se muestra lo que se pretende que el estudiante haga para comprobar que la función $y = \sqrt{x}$ carece de derivada en *x = 0*.

Figura 5. Derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en valores cercanos a $x = 0$.

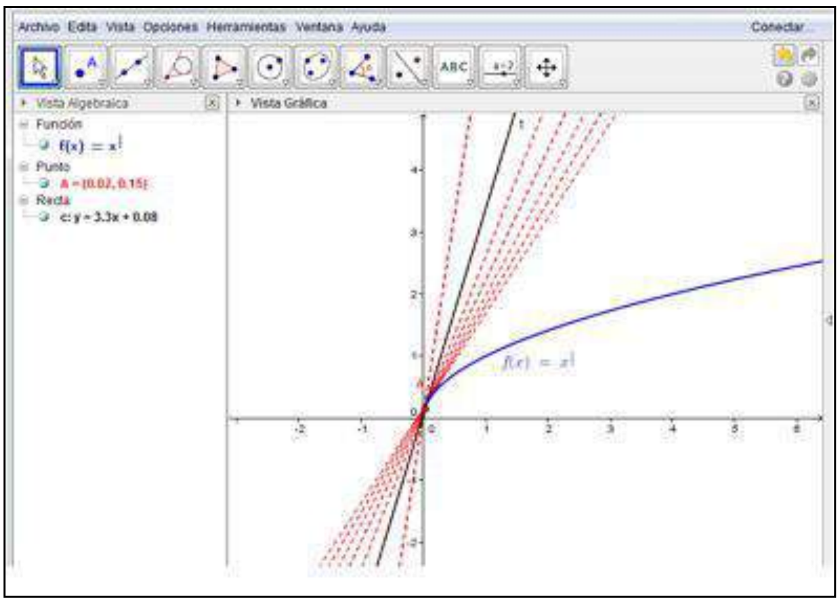
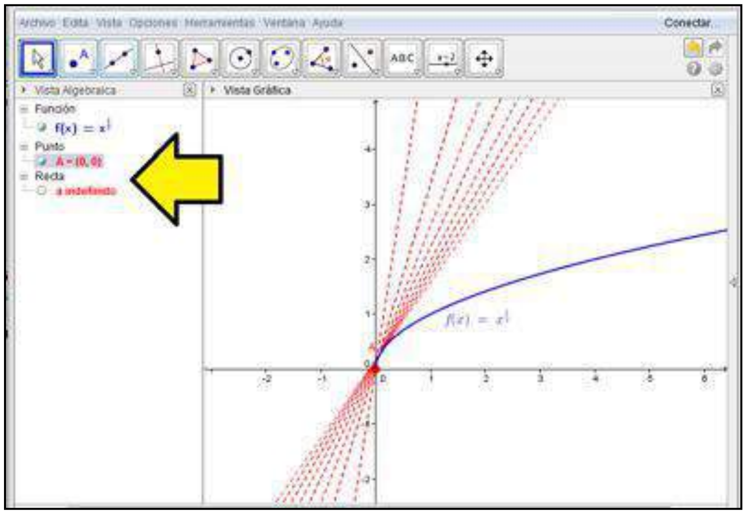


Figura 6. Derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 0$.



■ Consideraciones finales

Este trabajo es el resultado de nuestra experiencia docente y constituye la base para un proyecto de investigación que deseamos realizar próximamente. Nosotras consideramos que la enseñanza de la derivada de una función se enriquece con la participación activa del estudiante en la manipulación de las representaciones semióticas para lo cual es deseable utilizar el apoyo de programas computacionales en algunas situaciones como el significado geométrico de la derivada, la derivada como una función y los casos en que una función carece de derivada en un punto dado.

Las actividades han sido propuestas como un medio auxiliar para propiciar los procesos de visualización en la construcción del significado de la derivada de una función, que difícilmente se logran con actividades a lápiz y papel en el salón de clases. No obstante, la enseñanza de este tema es mucho más amplia y requiere de una planeación didáctica meticulosa.

Aún estamos definiendo y discutiendo la pertinencia de más actividades mediadas por la computadora que permitan al estudiante vincular el manejo algebraico de las funciones y sus derivadas con los significados físico y geométrico. Consideramos que es necesario trabajar más sobre la representación numérica o tabular para que el alumno comprenda a la derivada como una razón de cambio, aunque estas actividades no se apoyen en el programa *geogebra*.

El interés que muestran los estudiantes por las actividades mediadas por computadora, así como los problemas relacionados con sus respectivas carreras, hace de esta propuesta una mejor alternativa para la enseñanza del Cálculo Diferencial en las carreras de Ingeniería. Aún sí, no se pretende evitar la parte tradicionalmente algebraica del curso de cálculo, sino complementar las actividades del alumno para propiciar una comprensión más profunda que les permita realizar la transferencia de conocimientos a sus respectivas áreas de especialización.

Referencias bibiográficas

Font, V. (2007). Comprensión y contexto. Una mirada desde la Didáctica de las Matemáticas. *La Gaceta de la RSME 10(2),* 419-434.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos con ambiente de tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana 10(2),* 213-223

Sánchez, G., García, M., Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en la Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 11(2)*, 267-296

Woolfolk, A. (2010). *Psicología Educativa*. (11a. Ed.). México: Pearson Educación.