SOBRE LOS SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS CON GEOGEBRA, UNA MANERA DE TRASCENDER LAS REGLAS NEMOTÉCNICAS

Stephanie Chiquinquirá Díaz Urdaneta, Juan Luis Prieto González
Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática. (Venezuela)
Centro de Estudios Matemáticos y Físicos. (Venezuela)
Universidad del Zulia. (Venezuela)
stephanie.diaz@aprenderenred.com.ve, juan.prieto@aprenderenred.com.ve

Palabras clave: razones trigonométricas, reglas nemotécnicas, geogebra
Keywords: trigonometric ratios, mnemonic rules, geogebra

RESUMEN

Las prácticas rutinarias de enseñanza han hecho del estudio de la trigonometría un proceso memorístico y mecánico. Muestra de ello es el uso que los profesores hacen de las reglas “nemotécnicas" para tratar los signos de las razones trigonométricas, hecho que limita la comprensión de este contenido. Con el propósito de contribuir a superar esta problemática, en este trabajo se describe una secuencia de análisis geométrico del comportamiento de los signos de las razones seno, coseno y tangente de un ángulo, por medio del software GeoGebra. Con esto se busca dotar de sentido a los signos de estas razones en los distintos cuadrantes del plano cartesiano, considerando la noción de razón trigonométrica de un ángulo desde una perspectiva geométrica y vinculada a una circunferencia unitaria. En este contexto, centramos la atención en los cambios de sentido de los vectores representativos de las razones que se dibujan sobre la circunferencia, como consecuencia de la variación de un ángulo central asociado.

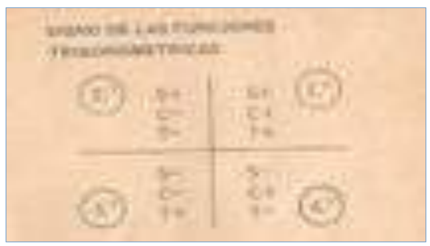
ABSTRACT

The routinary practices of teaching have made the trigonometry study a memoristic and mechanical process. A proof of this is the use that teachers make of “mnemonic” rules to treat the signs of trigonometric ratios, a fact that limits the comprehension of this content. With the aim of contribute to overcome this problematic, in this dissertation it’s described an analysis sequence of the geometric behavior of the ratios sine, cosine and tangent of an angle, by means of the GeoGebra software. With this is sought to make sense of the signs of these ratios in the different Cartesian plane quadrants, considering the notion of the trigonometric ratio of an angle from a geometric perspective and linked to the unitary circumference. In this context, we focus our attention in the sense changes of the representative vectors of the ratios that are drawn over the circumference, as a consequence of the variation of an associated central angle.

Introducción

El uso de la circunferencia unitaria en el estudio las razones trigonométricas Seno, Coseno y Tangente, responde a la necesidad de determinar los valores de estas razones para ángulos de cualquier amplitud. Entre los contenidos de trigonometría asociados a la circunferencia unitaria se encuentran los "signos" de estas razones, conocimiento que los profesores suelen tratar en aula mediante el uso de reglas "nemotécnicas" (Fiallo, 2010; Díaz & Prieto 2013) (ver Figura 1.). Como consecuencia de esta forma de enseñanza, los estudiantes se ven en la obligación de memorizar el signo de cada razón trigonométrica para los cuatro cuadrantes del plano cartesiano, sin comprender lo que éstos signos representan, haciendo de su estudio un proceso rutinario y mecánico (Fiallo & Gutiérrez, 2007). Tal vez esto se deba a que los profesores desconocen u omiten las posibles interpretaciones geométricas que se pueden hacer a los signos de una razón trigonométrica en la circunferencia unitaria (Díaz & Prieto, 2013).

Figura 1. Formulario de E. Navarro. "Reglas nemotécnicas"



En la actualidad, el uso de recursos tecnológicos para tratar contenidos matemáticos desde una perspectiva geométrica ha traído beneficios y mejoras en el aprendizaje de los estudiantes debido, especialmente, al tipo de actividades que se promueven en estos entornos y a la calidad de los recursos diseñados (Lu, 2008; Laborde, Kynigos, Hollebrands & Strässer, 2006). Si la calidad de un recurso se vincula al provecho que el profesor puede darle al mismo durante la lección para que sus estudiantes logren la comprensión deseada, es necesario garantizar que el recurso propuesto, en nuestro caso, ayude a los estudiantes a dar sentido a los signos de las razones trigonométricas, trascendiendo así el mero uso de reglas nemotécnicas.

Es por ello que este trabajo describe el diseño y formas de utilizar un recurso elaborado con el GeoGebra para dar sentido a los signos de las razones Seno, Coseno y Tangente de un ángulo. Hemos seleccionado al GeoGebra por ser éste un tipo especial de Software de Geometría Dinámica de acceso libre y de código abierto, que combina en tiempo real las representaciones gráficas y expresiones simbólicas de diversos objetos matemáticos (Diković, 2009; Hohenwarter, 2006); lo que nos ha permitido observar el comportamiento del signo de cada razón en la circunferencia unitaria y con ello comprender y confirmar, de forma "visual", los resultados establecidos en las reglas nemotécnica.

Consideraciones en el diseño del recurso

El recurso se ha elaborado teniendo en cuenta la naturaleza del conocimiento profesional puesto en juego por parte del profesor de Matemática al realizar este tipo de tareas. Un modelo que permite explicar este conocimiento es el conocido TPACK (Mishra & Koehler, 2006), el cual involucra un saber matemático, técnico y didáctico que se utiliza de forma integrada al actuar y pensar profesionalmente. En este trabajo, tal conocimiento se pone de manifiesto en forma de consideraciones teóricas, técnicas y didácticas:

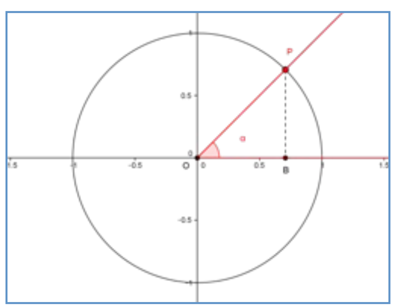
Consideraciones teóricas

Con respecto a las consideraciones teóricas, fue necesario definir los siguientes contenidos involucrados en el análisis:

Circunferencia Unitaria: También conocida como circunferencia trigonométrica, tiene como centro el origen del sistema de coordenadas cartesianas y su radio es igual a la unidad ($r = 1$). En la secuencia, esta circunferencia es considerada el medio para la interpretación geométrica del signo de las razones Seno, Coseno y Tangente.

Ángulo Central: Sobre la circunferencia unitaria se dibuja un ángulo central cuyo vértice coincide con el centro de la misma. Uno de sus lados se fija en la parte positiva del *eje x* y el otro lado ocupa cualquier posición en el plano, según la amplitud del ángulo que corresponda. Este último lado del ángulo corta a la circunferencia unitaria en un punto que se ha llamado P a partir del cual se traza un segmento perpendicular al eje *x* cuyo extremo se posa sobre dicho eje. El triángulo rectángulo que se forma a partir de esta construcción también es parte del análisis (ver Figura 2).

Figura 2. Circunferencia Unitaria o Trigonométrica

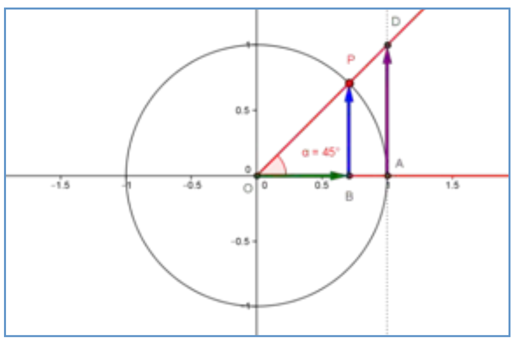


Razones trigonométricas: A partir de los triángulos rectángulos formados en la circunferencia unitaria es posible definir estas razones de la siguiente manera:

- El **Seno** del ángulo α (se abrevia $Sen\ \alpha$) está determinado por la razón $\frac{\overline{PB}}{\overline{OP}}$ entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa del triángulo OPB (ver Figura 2). Desde un punto de vista geométrico, dado que OP es constante e igual a 1, entonces el $Sen\ \alpha$ queda representado por el segmento $\overline{BP}$. En nuestro análisis, $\overline{BP}$ se considera como un segmento dirigido, es decir, como el vector $\overrightarrow{BP}$ o cualquier equipolente a este (ver Figura 3).

- El **Coseno** del ángulo α (se abrevia $Cos\ \alpha$) está determinado por la razón $\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}}$ entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa del triángulo OPB (ver Figura 2). Dado que $OP = 1$, el $Cos\ \alpha$ queda representado por el segmento $\overline{OB}$. Al igual que para el Seno, esta razón se considera como un segmento dirigido, el vector $\overrightarrow{OB}$ (ver Figura 3).
- La **Tangente** del ángulo α (se abrevia $Tan\ \alpha$) está dada por la razón $\frac{\overline{PB}}{\overline{OB}}$ entre los catetos opuesto y adyacente del triángulo OPB (ver Figura 2). A diferencia de los casos anteriores, ninguno de los segmentos tiene una medida constante e igual a uno, lo que lleva a una construcción auxiliar que facilite el análisis. En este sentido, trazando una recta tangente a la circunferencia que pase por $(1{,}0)$, ésta intersecta a los lados del ángulo en los puntos A y D (ver Figura 3), formándose así el triángulo rectángulo ODA. Como este triángulo es semejante al triángulo OPB, el estudio realizado sobre el triángulo anterior será el mismo que puede hacerse sobre el triángulo ODA. Tomando en cuenta este último triángulo se tiene que la $Tan\ \alpha$ está definida por la razón $\frac{\overline{AD}}{\overline{OA}}$, para la cual $OA = 1$, lo que significa que la $Tan\ \alpha = \overline{AD}$. Por lo tanto, la $Tan\ \alpha$ queda representada por el vector $\overrightarrow{AD}$ (ver Figura 3).

Figura 3. Razones Seno, Coseno y Tangente en la Circunferencia Unitaria



Signos de las Razones Trigonométricas: En el caso de este estudio, dado que los vectores representativos de las razones trigonométricas estudiadas tienen dos direcciones posibles (vertical, en el caso del Seno y la Tangente, y horizontal para el Coseno), consideramos que una razón es "positiva" si y solo si el vector referido está en sentido hacia arriba o hacia la derecha, y "negativa" en el caso que dicho vector lo esté hacia abajo o hacia la izquierda. Por su parte, el módulo del vector coincide con el valor absoluto de la razón que represente (Fiallo, 2010). Por ejemplo, en el caso de Seno, cuando $\alpha = 45°$ el módulo del vector es $0{,}71$ y el sentido del vector es hacia arriba, por tanto se dice que $Sen\ 45°$ es aproximadamente $+0{,}71$ o simplemente $0{,}71$. En cambio, si $\alpha = 225°$, entonces el módulo del vector que representa al $Sen\ 225°$ es $0{,}71$ pero su signo es negativo, ya que dicho vector está en sentido hacia abajo. Por lo tanto, decimos que $Sen\ 225° = -0{,}71$.

Consideraciones técnicas

En cuanto a las consideraciones técnicas (asociadas al GeoGebra), se consideró el uso de un deslizador y de tres casillas de control. El deslizador es una herramienta del GeoGebra que permite representar un conjunto de valores, incluyendo medidas angulares, y que hace posible la variación de la amplitud de un ángulo α en tiempo real. A dicho deslizador se le pueden realizar ajustes para que el ángulo varíe en un intervalo de medidas angulares convenientes para el estudio de los signos de las razones trigonométricas. En algunos casos convendrá el uso de la opción "Animación automática" sobre el deslizador para la visualización de los cambios del valor del ángulo α y aquellos relacionados con el vector que represente a cada razón. Con respecto a las casillas de control, estas herramientas del GeoGebra permiten ocultar o mostrar algunos de los objetos representados en la interfaz gráfica del programa, según se considere pertinente. En el caso del recurso, se usan tres casillas principales para mostrar u ocultar los vectores representativos de las razones trigonométricas estudiadas, y dos casillas auxiliares para mostrar ciertas construcciones realizadas sobre la circunferencia trigonométrica. Cabe destacar que se optó por la modificación del grosor y color de los vectores para una mejor apreciación de los efectos vinculados al sentido de los mismos.

■ Consideraciones didácticas

Con relación a la forma de manipular el recurso para realizar el análisis del comportamiento geométricos de los signos de las razones Seno, Coseno y Tangente por medio de los vectores que les representan, se sugiere el ajuste conveniente del deslizador en intervalos de amplitudes angulares asociados a cada uno de los cuadrantes del sistema cartesiano, así como también el uso de las casillas en momentos clave para visualizar a cada uno de los vectores por separado. Por ejemplo, el ajuste del deslizador para $90° \leq \alpha \leq 180°$ y marcando la casilla "Coseno", determina al conjunto de ángulos en el segundo cuadrante y permite observar el comportamiento del vector referido al Coseno en este cuadrante. Con esto se busca realizar un estudio más detallado de las razones trigonométricas por separado, para el caso de cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano.

■ Formas de manipular el recurso

Tomando en cuenta las consideraciones didácticas para el diseño de este recurso, se plantean cuatro casos:

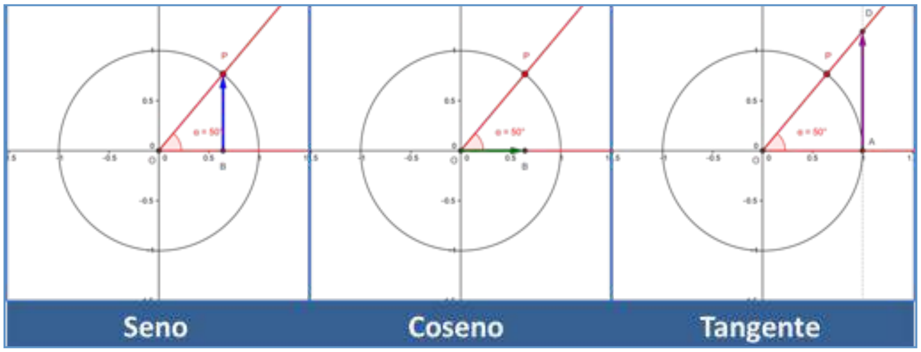
Caso 1: primer cuadrante

Se considera al ángulo α con medidas entre 0º y 90º. El análisis del comportamiento de las razones para ángulos en el primer cuadrante requiere del ajuste conveniente de los valores mínimo y máximo del deslizador en 0° y 90°, respectivamente. Luego de esto, se puede activar la opción "Animación Automática" al deslizador para observar los vectores representativos del $Sen\ \alpha$ y la $Tan\ \alpha$ en sentido **hacia arriba** y el vector que representa al $Cos\ \alpha$ en sentido **hacia la derecha**, concluyéndose que estas razones son todas positivas para valores de α entre 0° y 90° (ver Figura 4).

Al manipular el deslizador se concluye lo siguiente:

- Cuando $\alpha = 0°$, el $Sen\ \alpha = 0$, $Cos\ \alpha = 1$ y $Tan\ \alpha = 0$.
- Cuando $\alpha = 90°$, el $Sen\ \alpha = 1$, $Cos\ \alpha = 0$ y $Tan\ \alpha = +\infty$ (indeterminado). Con respecto a la Tangente es importante observar que el punto *D* en la gráfica queda indefinido pues el lado del ángulo en movimiento es paralelo a la recta tangente a la circunferencia en $(0,1)$.

Figura 4. Análisis en el Primer Cuadrante con GeoGebra.



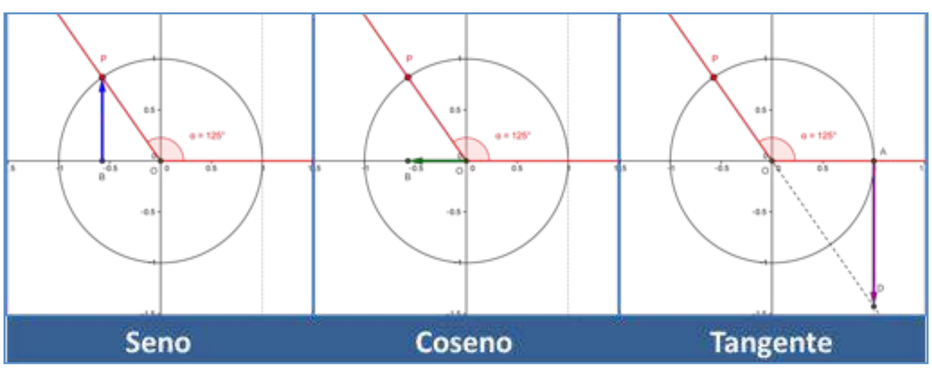
Caso 2: segundo cuadrante

Este cuadrante se considera los valores de α entre 90° y 180°. Para analizar el comportamiento de las razones en este intervalo es conveniente ajustar los valores mínimo y máximo del deslizador en 90° y 180°. Por medio de la "Animación Automática" se puede observar que el vector referido al Seno sigue en sentido **hacia arriba**, al igual que en el primer cuadrante. Por su parte, el vector representativo de la Tangente está en sentido **hacia abajo** y el del Coseno está en sentido **hacia la izquierda**, por tanto se concluye que el Seno de α es positivo y, que el Coseno y la Tangente de α son negativos para $90° \leq \alpha \leq 180°$ (ver Figura 5).

Estos valores para $\alpha = 90°$ ya fueron determinados para el caso anterior, en consecuencia, con el ajuste del deslizador en $\alpha = 180°$, se concluye que:

- $Sen\ \alpha = 0$, $Cos\ \alpha = -1$ y $Tan\ \alpha = 0$.

Figura 5. Análisis en el Segundo Cuadrante con GeoGebra



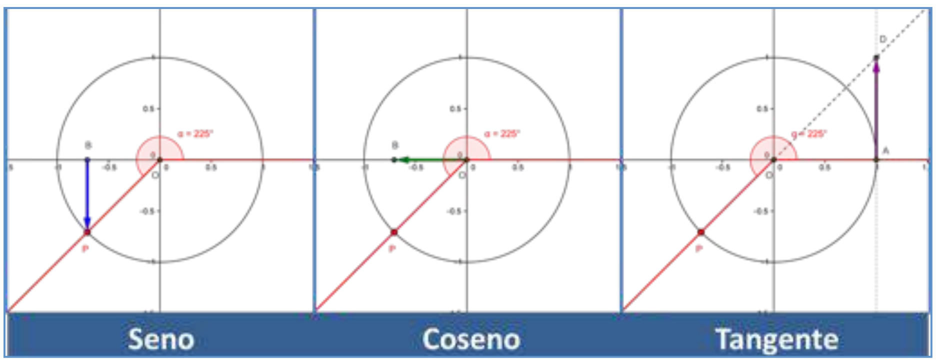
Caso 3: tercer cuadrante

Para el análisis en este cuadrante los valores de α han de oscilar entre 180º y 270º, por tanto los valores mínimo y máximo del deslizador deben ajustarse en estos valores. Al activar la "Animación Automática" en el deslizador es posible observar que el sentido del vector representativo del Seno tiene sentido **hacia abajo**, el que representa a la Tangente está **hacia arriba** y el del Coseno apunta en sentido **hacia la izquierda**, por ello se concluye que, en el tercer cuadrante, el Seno y Coseno de α son negativos y la Tangente de α es positiva. Lo anterior se muestra gráficamente en la Figura 6.

Ajustando el deslizador en el valor máximo de este intervalo se obtiene que:

- $Sen\ \alpha = -1, Cos\ \alpha = 0\ y\, Tan\ \alpha = +\infty$ *(indeterminado, igual que para* $\alpha = 90$*).*

Figura 6. Análisis en el Tercer Cuadrante con GeoGebra.



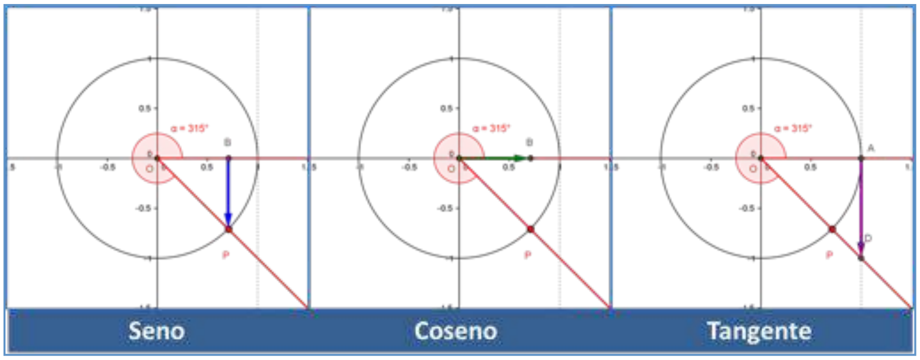
Caso 4: cuarto cuadrante

En este último caso α toma valores entre 270º y 360º. Análogamente a los casos anteriores, deben ajustarse los valores mínimo y máximo del deslizador en 270° y 360°, respectivamente. Tras la variación de α con la ayuda de la "Animación Automática" se puede ver que los vectores representativos de las razones Seno y Tangente están en sentido **hacia abajo** y el referido al Coseno está en sentido **hacia la derecha**, por lo tanto se concluye que, para valores de α entre 270° y 360°, el Seno y Tangente son negativos y el Coseno es positivo. En la Figura 7 se representa gráficamente lo planteado.

Manipulando el deslizador, de manera que $\alpha = 360°$, se concluye que:

- $Sen\ \alpha = 0$, $Cos\ \alpha = 1$ y $Tan\ \alpha = 0$.

Figura 7. Análisis en el Cuarto Cuadrante con GeoGebra.



Conclusiones y recomendaciones

A lo largo de este trabajo se ha presentado un recurso que permite dotar de sentido a los signos de las razones Seno, Coseno y Tangente desde una circunferencia unitaria construida con GeoGebra. El análisis presentado tuvo la intensión de ayudar al lector a comprender y confirmar de forma visual los resultados que presentan las reglas nemotécnicas. Entre estos resultados se pudo establecer la relación entre los signos de las razones trigonométricas y el sentido de los vectores representativos de éstas en la circunferencia. Además, este análisis permitió determinar ciertas características de las razones Seno, Coseno y Tangente. Por ejemplo, se logró identificar los valores del ángulo α para los cuales la Tangente de dicho ángulo es una indeterminación y justificar la razón por la cual esto ocurre, hecho que no puede ser explicado con el uso de las reglas nemotécnicas. Éste y otros resultados que se han extraído en este trabajo se deben a las herramientas del GeoGebra utilizadas en el diseño del recurso y la secuencia propuesta para utilizarlo.

Creemos que a través de su manipulación el usuario puede comprender, analizar y realizar sus propias conjeturas con respecto a lo que está observando en la pantalla del ordenador, que no es más que el comportamiento de los vectores que refieren a las razones antes mencionadas (Fiallo, 2010). Con lo explicado, se pretende mostrar formas de interactuar con un dispositivo tecnológico útil para dotar de sentido a los contenidos matemáticos que requieren de interpretación geométrica, los cuales suelen presentar cierta complejidad al momento de realizar su estudio desde un entorno estático y, de esta manera, poder cumplir con las expectativas de aprendizaje que se plantean para el área de Matemática en la Educación Media.

Referencias bibliográficas

Díaz, S. & Pietro, J. (2013) *El análisis de los signos de las razones trigonométricas con tecnologías. Una manera de trascender las reglas prácticas*. Comunicación presentada en el VIII Congreso Venezolano de Educación Matemática. Coro.

Diković, L. (2009). Applications geogebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6 (2), 191-203.

Fiallo, J. (diciembre 2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Universitat de València, Valencia. España.

Fiallo Leal, J.E. y Gutiérrez Rodríguez, A. (julio 2007) Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración. En P. Bolea; M. Camacho; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; M.T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación,* (pp. 41-62). SEIEM: Huesca.

Hohenwarter, M. (2006). *Dynamic investigation of functions using geogebra*. Proceedings of Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education. Dresden.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense.

Lu, Y. W. A. (2008). Linking geometry and algebra: a multiple-case study of uppersecondary mathematics teachers' conceptions and practices of GeoGebra in England and Taiwan. *Unpublished Master's thesis, Cambridge: University of Cambridge, UK*.

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *The Teachers College Record*, *108* (6), 1017-1054.