ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD PARAMÉTRICA PARA SISTEMAS LINEALES SEMI-INFINITOS A TRAVÉS DEL MÉTODO DE RELAJACIÓN EXTENDIDO

Javier Barrera Ángeles, Enrique González Gutiérrez, Magda Muñoz Pérez
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. (México)
Universidad Politécnica de Tulancingo. (México)
jbarrera12@hotmail.co, enrique.gonzalez@upt.edu.mx, magda.munoz@upt.edu.mx

Palabras clave: hiperplano, parámetro, sensibilidad paramétrica, relajación, semi-infinito
Key words: hyperplano, feasible region, parametric sensitivity, relaxation, semi-infinite

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo principal el estudio paramétrico de sensibilidad a través del método de Relajación extendido (MRE) aplicable a Sistemas Semi-Infinitos Lineales (SLSI). Se parte de la idea de extender el Método de Relajación (MR), los cálculos numéricos en (MR) nos permitieron hallar el valor que mejor se aproxima a la región factible deseada, este análisis nos sirvió como preámbulo para la aplicación del MRE en el análisis paramétrico de sensibilidad, lo que consideramos nuestra mayor aportación en esta investigación. El desarrollo de este trabajo consideró las siguientes etapas: la primera consistió en seleccionar los problemas para su análisis, la segunda en desarrollar un algoritmo computacional para realizar el estudio de sensibilidad de los parámetros y la tercera en hacer todo el análisis de sensibilidad. Por ultimo se presentan los resultados de la implementación computacional.

ABSTRACT

This work has as main objective the parametric sensitivity study through the Extended Relaxation Method (MRE) applicable to Semi-Linear Infinites systems (SSIL). It starts from the idea of extending the method of relaxation (MR), numerical calculations allowed us to find the value that best approximates the desired feasible region; this analysis served us as a preamble for the implementation of MRE in the parametric sensitivity analysis, what we consider our greatest contribution in this research. The development of this document contemplated the following steps: the first was to select problems for analysis, the second to develop a computational algorithm for performing sensitivity study of the parameters and the third to do all the sensitivity analysis. Finally the results of the computer implementation are presented.

■ Introducción

Como un intento de dar continuidad a la investigación de operaciones (IO), el presente trabajo tiene como objetivo principal el estudio paramétrico de sensibilidad a través del método de Relajación extendido (MRE) aplicable a Sistemas Semi-Infinitos Lineales (SLSI). El trabajo presenta los antecedentes que dan pertinencia a dicho estudio. La programación lineal (PL) o programación matemática (PM) describe diferentes problemas que surgen de manera natural en diversos campos como: planeación, asignación, economía, etc., En este sentido la PL trata la planeación de actividades para obtener mejores resultados. Por otra parte, la programación semi-infinita (PSI) se aplica a problemas de optimización en los que bien el número de variables o bien el de restricciones pero no ambas, es infinito En este caso se pondrá mayor atención a los problemas de PSI lineales (PSIL). La programación semi-infinita es una extensión de la programación lineal ordinaria, a diferencia de esta última, en la programación semi-infinita se considera que la descripción del conjunto factible se permite un número infinito de restricciones o un número infinito de variables, pero no ambas, sin pérdida de generalidad en este trabajo nos enfocaremos en el primer caso.

Durante los años 60's ambos los SLSI y la PLSI se desarrollaron. Desde entonces muchos autores han contribuido para la maduración de la teoría, métodos y aplicación para PLSI, de cualquier manera el rol jugado por la teoría de SLSI en la fundación de PLSI ha sido sistemáticamente ignorado. También encontramos problemas de PSI en problemas de control, tales como la planeación de trayectorias de un robot (Hettich, 1991), la esterilización de comida (Kleis, 1997), en el control de contaminación de aire (Kortanek, 1972), y en el modelado de reducción cinética (Olowole, 2006). En la resolución de SLSI, se pretenden encontrar puntos factibles (llamado problema de factibilidad), se pueden tratar desde el punto de vista de generación de métodos analíticos (es decir exactos) y métodos computacionales, dentro de estos últimos, nuestro interés se ha centrado en analizar el método de Relajación extendido. El trabajo fue dividido en tres partes, la primera aporta los referentes teóricos, la segunda plantea las aplicaciones y por último se diseño un algoritmo computacional para hacer las pruebas y así obtener los resultados, dentro de los cuales destacan las variaciones en los resultados en cuanto al tiempo computacional.

■ Marco teórico

La programación lineal utiliza un modelo matemático para describir diferentes tipos de problemas prácticos que de manera natural surgen de campos muy diversos como planeación, asignación, economía, administración de recursos diversos, entre otras. Así, la programación lineal trata la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo; esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo matemático) entre todas las alternativas de solución. La programación lineal se creó como rama independiente de la teoría de optimización gracias al impulso que se le dio a la investigación y desarrollo de modelos para el uso eficiente de los recursos durante el período de la segunda guerra mundial. El estudio de la programación lineal recibió un gran impulso con el desarrollo del método simplex credo por George Dantzing en 1947. El incremento en la capacidad de crecimiento y disponibilidad de las computadoras desde esta época permitieron que el método simplex fuera capaz de resolver problemas involucrando gran cantidad de datos, con esto, la programación lineal (PL) atrajo la atención de quienes vieron en ésta una herramienta poderosa y eficiente. Posteriormente al inicio de la PL, el desarrollo de la teoría de optimización ha sido sobresaliente.

El término Programación semi-infinita (PSI) se aplica a problemas de optimización en los que bien el número de variables o bien el de restricciones pero no ambas, es infinito. Se insiste así en que este concepto abarca como caso particular a los problemas con *n* variables y *m* restricciones. En este caso se pondrá mayor atención a los problemas de PSI lineales (PSIL). El término "Programación semi-infinita", apareció, primeramente, en (Kortanek, 1972) donde Charnes, Cooper y Kortanek quienes introducen el problema dual de programa Haar (1972). La programación semi-infinita es una extensión de la programación lineal ordinaria, a diferencia de esta última, en la programación semi-infinita se considera que la descripción del conjunto factible se permite un número infinito de restricciones o un número infinito de variables, pero no ambas, sin perdida de generalidad en este trabajo nos enfocaremos en el primer caso.

El primer artículo sobre SLSI, fue escrito en 1924 por Haar (Kleis, 1997) en su intento por extender el famoso lema de Farkas. Desde entonces muchos autores han contribuido para la maduración de la teoría, métodos y aplicación para PLSI, de cualquier manera el rol jugado por la teoría de SLSI en la fundación de PLSI ha sido sistemáticamente ignorado. En la actualidad, muchas personas no especializadas en este campo en particular, consideran a la PLSI como un laboratorio interesante para ambas teorías y métodos véase O1owole (2006) específica de otros problemas de optimización.

Los sistemas lineales semi-infinitos (en adelante SLSI), son los sistemas de la forma $\sigma = \left\{ a_t' x \geq b_t, t \in T \right\}$ donde T representa un conjunto de índices arbitrario fijo; $a_t \in R^n$ (a_t vector columna), $b_t \in R$ son las imágenes de t , $t \in T$, por medio de las funciones $a : T \to R^n$ y $b : T \to R$, respectivamente (a_t' indica el vector transpuesto de a_t , $x \in R^n$ y $a_t' x$ es el producto interior de dichos vectores).

Una cantidad considerable de aplicaciones que se pueden reformular como problemas de programación matemática en donde aparecen de manera natural sistemas con una cantidad infinita de inecuaciones, por ejemplo cuando se estudian problemas de incertidumbre en el peor escenario, en la producción total de un costo farmacéutico, y cuando los parámetros que se involucran en la producción de los mismos sufren cambios de acuerdo a los precios de la materia prima. Dentro del contexto del peor escenario, una variedad interesante de aplicaciones en el área de construcción de viviendas se proporciona en Lin (1995). Los travesaños de las construcciones se esperan que resistan pequeños sismos sin daños y sin demasiados daños reparables tales que la supervivencia de los ocupantes se garantice todo el tiempo. Un simple problema de diseño es minimizar la masa de un construcción sujeta a que los desplazamientos de los techos no excedan un umbral establecido para soportar sismos consecutivos.

También encontramos problemas de PSI en problemas de control, tales como la planeación de trayectorias de un robot (Hettich, 1991), la esterilización de comida (Kleis, 1997), en el control de contaminación de aire (Kortanek, 1972), y en el modelado de reducción cinética (Olowole, 2006).

Hasta ahora han sido publicados pocos artículos sobre el tratamiento numérico de los SLSI en R^n, puesto que la equivalencia computacional del problema de optimización lineal y el problema lineal factible, válido en dimensiones finitas, no es válida para el concepto semi-infinita.

Es obvio que agregando una función objetivo arbitrario a un SLSI dado, digamos $x \mapsto c'x$, algún método de PLSI (que no requiera una solución inicial factible) aproxima una solución factible del SLSI, pero las iteraciones suelen ser infactibles. Con el fin de evitar este inconveniente, es preferible buscar la máxima bola Euclídea contenida en $F=\left\{x\in R^n \mid a_t' x\geq b_t, t\in T\right\}$. Supongamos que $b_t \leq 0$ para todo $t\in T$ tal que $a_t = 0_n$ (de otro modo el conjunto factible, F, es vacío). Sea $S=\left\{t\in T \mid a_t\neq 0_n\right\}$, $c_t=\frac{a_t}{\|a_t\|}$ y $d_t=\frac{b_t}{\|a_t\|}$ para todo $t\in S$, y considérese el problema de PLSI

$$\begin{array}{ll} \text{Sup} & x_{n+1} \\ \textbf{s.a} & c_t' x - x_{n+1} \geq d_t, t\in S, \end{array}$$

con variable de decisión $x\in R^n$ y $x_{n+1}\in R$, cuyo valor óptimo es no negativo (positivo, $+\infty$) si, y sólo si, el conjunto factible F, es no vacío. La ventaja de este modelo es que los métodos numéricos proveen un punto interior cuando el algoritmo se interrumpe en alguna iteración $\left(x^r, x_{n+1}^r\right)$ tal que $x_{n+1}^r > 0.$

Las principales clases de SLSI consistentes en R^n se pueden agrupar de acuerdo a las propiedades de sus coeficientes, un sistema σ es *continuo* cuando T está definido como una unión de intervalos cerrados de R y todos los coeficientes $a_1(\cdot),\ldots,a_n(\cdot), b(\cdot),$ son funciones continuas en T. El sistema σ es *polinómico* cuando T es un intervalo compacto y todos los coeficientes $a_1(\cdot),\ldots,a_n(\cdot),$ $b(\cdot),$ son polinomios cuyo dominio es T, dentro de los mismos sistemas se distinguen otros tres tipos de sistemas σ *localmente Farkas-Minkowsk y* (LFM), sistemas σ es *Farkas-Minkowsky* (FM) y sistemas σ *locamente poliédrico* (LOP).

Estas definiciones se han generado a partir del análisis de resultados de propiedades geométricas importantes en SLSI y PSIL, véase Goberna (1998).

La resolución de los SLSI, es decir, encontrar puntos factibles (llamado problema de factibilidad), se pueden tratar desde el punto de vista de generación de métodos analíticos (es decir exactos) y métodos computacionales, dentro de estos últimos, nuestro interés se ha centrado en analizar el método de Relajación extendido.

En el caso de sistemas ordinarios (sistemas con un número finito de restricciones), el problema de factibilidad es equivalente a resolver problemas de PL, pero esta equivalencia se pierde cuando el número de restricciones es infinito.

■ Metodología

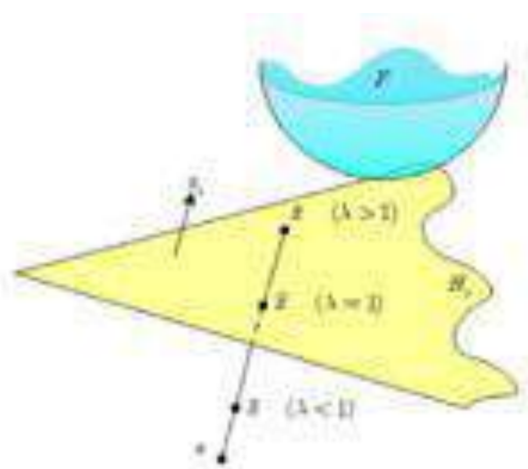
El presente trabajo se ha desarrollo de la siguiente manera, en primer lugar se hizo una revisión de la literatura existente con relación al tema, donde se preciso sobre la programación lineal ordinaria (PLO) como una extensión de investigación de operaciones, la programación lineal semi-infinita (PLSI) y las aplicaciones de la programación lineal semi-infinita. En segundo lugar se trabajo con el método de relajación como un preámbulo para abordar el método de relajación extendido, con el cual se realizó el análisis del problema. En tercer lugar, se diseño el programa computacional con el cual se hicieron todas las pruebas aplicando el Método de relajación extendido. Finalmente se muestran los resultados obtenidos.

Tratamiento del problema

Este método tiene sus antecedentes en trabajos como los de Agmon (1954), Jeroslow (1979) y Hu (1994), de manera general, dado un sistema σ continuo en el que supondremos que $a_t \in R^n/\{0_n\}$ para todo $t \in T$, de modo que cada inecuación representa un semiespacio, sea *F* su conjunto solución. La idea geométrica del método es simple, supongamos que la iteración actual $\bar{x}$ es un punto tal que $\bar{x} \notin F$, de entre los hiperplanos asociados con inecuaciones violadas por $\bar{x}$ se elige uno de los más alejados de $\bar{x}$, llamémosle *H*; el punto siguiente se obtiene desplazando $\bar{x}$ perpendicularmente hacia *H* una distancia igual a $\lambda d(\bar{x},H)$, donde $\lambda > 0$ es un parámetro prefijado y $d(\bar{x},H)$ es la distancia Euclídea desde $\bar{x}$ hasta el hiperplano $H=\left\{x \in R^n \mid a_t' x = b_t\right\}$, para algún $t \in T$ tal que $a'_t \bar{x} < b_t$ definida por $d(\bar{x},H)=\frac{a_t'\bar{x}-b_t}{\|a_t\|}$. Entonces el punto siguiente viene dado por $\bar{x}+\lambda\mu\frac{a_t}{\|a_t\|}$ véase González (2011).

En particular, si se toma $\lambda = 2$, ($\lambda = 1$), el punto siguiente es el punto simétrico a $\bar{x}$ respecto de *H* (la proyección ortogonal de $\bar{x}$ sobre *H*, respectivamente), véase la Figura 1.

Figura 1. Geometría del método de Relajación extendido. Algoritmo (Método de Relajación extendido MRE)



1 $\lambda \in (0,2]$, $M > 2$, $\beta > 2$, $r = 0$ y $x^0 \in R^n$.

2 Calcule $u_r = \inf_{t\in T} g(t,x^r)$ donde $g(t,x^r) := (a_t' x^r - b_t)$.

Si $u_r \geq 0$, fin $(x^r \in F)$. Si $u_r < 0$, sea $T_r = \{t_r < T / g(t_r, x^r) < 0\}$

3 Sea $\beta_r = \beta$ y considere el problema de optimización global

$$\sup\{\frac{b_t - a_t' x^r}{\|a_t\|}, t \in T_r\} = \mu_r.$$

4 Encuentre una β_r aproximación ε_r de la solución μ_r del problema $(\mu_r - \beta_r < \varepsilon_r \leq \mu_r)$.

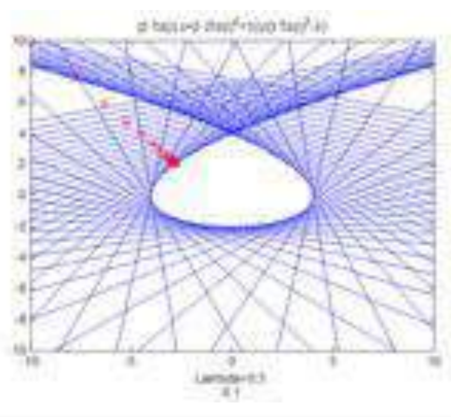
Si $\beta_r < \varepsilon_r (M-1)$, entonces para algún $t_r \in T_r$,

$\frac{\mu_r}{M} < \varepsilon_r := \frac{b_{t_r} - a_{t_r}' x^r}{\|a_{t_r}\|} \leq \mu_r$, y elija $x^{r+1} = x^r + \lambda \varepsilon_r \frac{a_{t_r}}{\|a_{t_r}\|}$. Reemplace r por $r+1$ y vuelva al paso 2.

Si no es así, $\beta_r = \beta_r/2$ y vaya al paso 4.

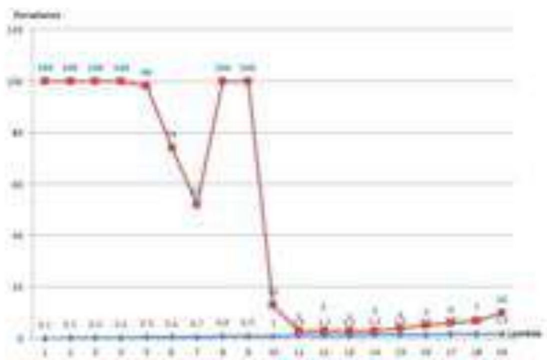
La primera parte de este estudio se centró en el análisis de sensibilidad de los parámetros λ, β y M considerando el punto inicial $x^0 = (34.368772, 82.06698)$ generado de manera aleatoria. El sistema considerado fue $\sigma = \{2tx_1 - (3t^2 - 2)x_2 \geq -2(t^4 + 3),\ t \in T\}$ donde $T = [0,1]$. El conjunto factible se muestra en la Figura 2, región en blanco, junto con algunos de los puntos que se generaron por el Algoritmo.

Figura 2. Algunas iteraciones que se aproximan al conjunto factible del sistema, región en blanco.



En este ejemplo consideramos valores de $\beta = 0.1$, $M = 1x10^6$ y $\lambda \in \{0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 1.9\}$. Como podemos observar en la Figura 3 el menor número de iteraciones se encuentra cuando el parámetro λ está en el rango $\lambda \in \{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$.

Figura 3. Comparación entre los valores de lambda y el número de iteraciones.



Además del ejemplo que se presenta realizamos el estudio con diversos sistemas y diversos valores para σ, obtenidos dentro de la literatura especializada, y x^0 generado de manera aleatoria y de forma determinística, pero, por problemas de espacio no fue posible incluirlos. Finalmente propusimos diferentes valores para λ, β y M, obteniendo resultados análogos a los que se muestran acerca del parámetro λ. De esta manera evidenciamos que los valores de β y M, no producen ningún efecto sobre el método bajo el que se realizó el estudio.

■ Conclusiones

Los resultados obtenidos sobre la evidencia computacional del análisis de sensibilidad de los parámetros λ; β y *M*; que aparecen en el método de Relajación extendido permiten precisar que λ desempeña el rol principal del Algoritmo, ya que en λ se centra el tamaño de paso que se va a dar en el desarrollo de cada iteración. Los resultados se obtuvieron considerando sistemas cuyo factible, *F*, fue un subconjunto en R^n, con diversos valores de $n \in \{2,3,..,100\}$. Considerando los valores de $\beta = 0.1$ y $M = 1x10^6$ y observamos que existen ligeras variaciones en el tiempo computacional del Algoritmo. Sin embargo, los valores de la función marginal, *gt,* se mantiene con variaciones pequeñas, por lo que el problema de optimización global tampoco produce cambios en los resultados del Algoritmo. Por último, de los resultados sobresalientes, tenemos que independientemente del el espacio en donde se considere el sistema $n \in \{2,3,..,100\}$, el mejor desempeño del algoritmo se mantiene para valores de $\lambda \in [1,2]$.

■ Referencias bibliográficas

Agmon S. (1954). The relaxation method for linear inequalities, *Canadian J. Math.,* 382-392.

González G. E., Hernández R. L. y Ivanov T. M. (2011). Under and over projection methods for solving inequality systems, *Comnt. Rend. Acad. Bulg. Sci*., 43-53.

Hettich R. y Still G. (1991). Semi-infinite programming models in Robotics, in: G. Guddat et al. (Eds.), *Parametric Optimization and Related Topics II*, Academie Verlag, Berlin.

Hu H. (1994). A projection method for solving infinite systems of linear inequalities, *Advances and approximation*, 186-194.

Jeroslow G. R. (1979). Some relaxation methods for linear inequalities, *Cahiers du Cero*, 43-53.

Kleis D. y Sachs E. W. (1997). *Optimal control of sterilization of prepackaged food*, Thecnical report, Universitat Trier.

Kortanek K. O. y Gorr W. L. (1972). Numerical aspects of pollution abatement problems: *Optimal control strategies for air quality standars*, in Preceedings in Operations Research.

Lin C. J., Yang E. K. y Fang S. C. (1995). Implementation of an inexact approach to solving linear semi-infinite programming problems*, J. Comp. Appl. Math*., 87-103.

López M. A. y Goberna M. A. (1998). *Linear semi-infinite optimzation*, Wiley.

Olowole O., Bhattacharjee, Tolsma P. I. y Green W. H. (2006) Obtaining accurate solutions using reduced chemical kinetic models, *Combustion theory and modelling*, 348-365.