CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES PARA IMPLEMENTAR Y DESARROLLAR EL CONCEPTO DE LOS VECTORES EN TRES DIMENSIONES (3D) MEDIANTE EL APOYO DE LA HERRAMIENTA CABRI PARA EL CÁLCULO DE VOLUMENES

Luís Albeiro Zabala Jaramillo, Marcela Parraguez González
Universidad de Medellín. (Colombia)
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
lzabala@udem.edu.co, marcela.parraguez@ucv.cl

Palabras clave: construcciones mentales, vectores, cabri, dinámico
Key words: mental constructions, vectors, cabri, dynamic

RESUMEN

La propuesta que se encuentra en el proceso de investigación, pretende abordar las construcciones y mecanismos mentales para implementar y desarrollar el concepto de los vectores en tres dimensiones (3D) mediante el apoyo de la herramienta Cabri para el cálculo de volúmenes. Inicialmente se hace una breve indagación de corte Histórico-Epistemológico (Martínez y Benoit, 2008) la cual sustenta la construcción del conocimiento matemático del producto vectorial. Como resultado de la indagación, se puede decir que dicho concepto matemático puede ser pensado como un concepto geométrico de volumen (Ricardo, 2015), a partir de las diferentes figuras geométricas que se encuentran al interior del paralelepípedo. Estas dos interpretaciones sustentarán construcciones y mecanismos mentales provistas en la Teoría APOE (Arnon et al, 2014) para implementar y desarrollar el concepto de los vectores en tres dimensiones, en aprendices del álgebra lineal, mediados con software Cabri (Artigue, 2011).

ABSTRACT

The proposal, which is in the state of developing research, aims to address mental constructs and mechanisms to implement and develop the concept of vectors in three dimensions (3D) with the support of the Cabri tool in calculating volumes. Initially a brief Historic and Epistemologic inquiry is carried out a (Martinez and Benoit, 2008), which supports the construction of mathematical knowledge of the vector product. As a result of the research, it can be said that this mathematical concept can be thought of as a geometric concept of volume (Ricardo, 2015), based on the different geometric figures inside the parallelepiped. These two interpretations will support mental constructs and mechanisms provided in the APOE theory (Arnon et al, 2014) in order to implement and develop the concept of vectors in three dimensions for linear algebra learners with the aid of the Cabri software (Artigue, 2011).

Introducción

En Latinoamérica y el Caribe, generalmente en un curso inicial de álgebra lineal, se estudian las magnitudes vectoriales, que aparecen cuando se trata de dar interpretación geométrica a los distintos productos (escalar, vectorial, mixto) que se pueden definir entre los vectores de un espacio vectorial. Esto permite medir ángulos, áreas y volúmenes orientados; en particular, el volumen orientado del paralelepípedo que se puede formar a partir de tres vectores linealmente independientes. Sin embargo con el software Cabri 3D Vs 2 (Díaz-Barriga, 2006), se identifican las diferentes figuras conexas que se forman al interior de un paralelepípedo, usando diferentes posiciones –pinceles oculares– que el programa le permite al usuario: mediante cortes transversales, pirámides y troncos de pirámides -2D-, esferas tangentes a las paredes del paralelepípedo si su base es cuadrada, o sólo tangentes a dos caras si las bases no son cuadradas o rómbicas -3D-, entre otras figuras que se forman al interior de éstas.

Marco teórico

Se ha decidido hacer uso de la teoría APOE como sustento teórico para determinar las construcciones mentales de los estudiantes, necesarias para construir el esquema del concepto geométrico de volumen como una de las aplicaciones del producto mixto de vectores en 3D en sus tres interpretaciones geométricas, longitud, áreas y volúmenes asociadas a los distintos productos –escalar, vectorial, mixto–. El apoyo de la tecnología al marco teórico lo viene realizando (Dubinsky 1984) a partir de una charla, como ponente invitado en Finlandia, en está sustentó el uso de la programación en computadores para ayudar a los estudiantes a comprender la distinción entre pensar una función como un proceso y como objeto. Un año, más adelante Dubinsky (en marzo 1985) publica el documento "Experiencias con la computadora como ayuda para el aprendizaje de los conceptos matemáticos". Basándonos en esto se decdió incluir el Software Cabri en nuestro estudio; que aunque no es parte del marco teórico propiamente tal, dará el soporte para sustentar las actividades que son parte de una aproximación pedagógica particular en el llamado ciclo de enseñanza ACE –(A: Activities) *actividades con la computadora en un laboratorio*, (C: Classroom discusions) *discusión en la sala de clases sobre problemas relacionados con las actividades con la computadora y* (E: Exercises) *ejercicios que se hacen fuera de la sala de clases*–. A continuación se describen las componentes generales de la teoría.

La Teoría APOE

La Teoría APOE (Acción–Proceso–Objeto–Esquema), creada por Ed Dubinsky (1991) y el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community); actualmente reportada en Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014), en el cual se presentan los elementos de la teoría y su uso para las investigaciones en Educación Matemática. Dubinsky a partir de APOE fundamenta la problemática en el interés por la descripción de las construcciones de esquemas mentales que los estudiantes deben realizar para aprender conceptos, desde la propia matemática; partiendo del supuesto que un estudiante no logra aprender los conceptos matemáticos directamente, sino que necesita estructuras mentales adecuadas, que en caso de no poseerlas será casi imposible aprenderlos. Las estructuras para cada concepto necesitan conectarse con otras previas.

Las construcciones mentales

Dubinsky (1991) propone desde la teoría APOE, que las estructuras mentales necesarias para construir un concepto son:

Acción

De acuerdo con Piaget y adoptado por la Teoría APOE, un concepto es concebido como una acción, es decir, como un objeto exterior transformación de un objeto previamente concebido, o de objetos. Una acción es externa en el sentido de que cada paso de la transformación se debe realizar de forma explícita y guiado por instrucciones de origen externo; además, cada paso debe introducir el siguiente, es decir, los pasos de la acción no pueden ser imaginados y ninguno pueden omitirse. (Arnon et al. 2014, p. 19)

Se puede afirmar que las acciones se realizan al interior del alumno y; se hacen paso a paso; obedecen a estímulos que son y se perciben como externos, es por ello que si el alumno o un individuo sólo realiza transformaciones externas en las actividades hacia una tarea específica, decimos que está en un estado de construcción acción. Por ejemplo, decir que un alumno está evidenciando una construcción acción del producto de vectores, si para ello precisa de dos acciones que motivan nuestra investigación, una desde el concepto matemático y la otra desde el software Cabri del concepto geométrico, así:

Del concepto matemático del producto de vectores: Dadas las fórmulas para las operaciones entre vectores, el estudiante puede determinar las operaciones de estos, en particular con sus respectivas componentes y direcciones.

Del Software Cabri bajo el concepto geométrico del producto de vectores: Dados los vectores, el estudiante puede encontrar las formas de representación de estos en un espacio en 2D o 3D, en forma geométrica, en particular con sus respectivas componentes y direcciones.

Proceso

Los procesos se construyen usando uno de los dos mecanismos mentales: interiorización o coordinación. Cada uno de estos mecanismos da lugar a nuevos procesos. Interiorización se explica aquí y la coordinación se considera en la Sección –De encapsulación, coordinación, y la reversión de los procesos–.

Como las acciones se repiten y se reflejan en los movimientos individuales de depender de las señales externas para tener el control interno sobre ellos. Éste se caracteriza por la capacidad de imaginar la realización de los pasos sin necesariamente tener que realizar cada uno de forma explícita y por ser capaz de saltarse los pasos, así como la marcha atrás. La interiorización es el mecanismo que hace posible este cambio de mentalidad. ((Arnon et al. 2014, p. 20)

Podemos entonces decir que en el estado de construcción proceso el sujeto puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso puede invertirlos, es decir, tiene más control de la transformación, por lo que afirmamos que un alumno puede mostrar una concepción de proceso del concepto del producto de vectores, precisando para ellos dos procesos que motivan nuestra investigación, uno desde el concepto matemático y el otro desde el software Cabri del concepto geométrico así:

Del concepto matemático del producto de vectores: Capacidad de describir algunos aspectos de la gráfica de la operación de tres vectores –operándolos indistintamente–, <u>sin obtener directamente valores</u>

específicos. Además es capaz de hacer transformaciones al objeto matemático de manera interna, incluso de pensar en los posibles poliedros al interior de la gráfica.

Del Software Cabri bajo el concepto geométrico del producto de vectores: Capacidad del estudiante de describir algunos aspectos de la gráfica en la representación de los tres vectores –operándolos indistintamente, con proyecciones–. Además es capaz de hacer transformaciones al objeto matemático de manera interna, incluso de pensar en los posibles poliedros al interior de la gráfica.

Objeto
El encapsulamiento de un proceso a un objeto ocurre ocurre cuando un individuo aplica una acción a un proceso, es decir, ve una estructura dinámica (Proceso) como una estructura estática, llamada objeto, a la que se le pueden aplicar acciones. (Arnon et al. 2014, p. 21)

Más aun, Dubinsky et al. (2005a) precisa que cuando un individuo se vuelve consciente del proceso como una totalidad, es consciente de que las transformaciones y puede actuar sobre esa totalidad, y así construir esas transformaciones. Cuando un alumno considera que ha realizado una transformación y puede actuar sobre el objeto es porque es capaz de construir la transformación, por ende podemos decir que el alumno ha reconstruido este proceso en un objeto cognitivo, es decir lo ha encapsulado en un objeto. Sin embargo para afirmar que un alumno muestra una concepción del objeto matemático del producto de vectores, precisa de las dos definiciones siguientes:

Del concepto matemático sobre el producto de vectores: El estudiante puede hacer acciones en el objeto de la gráfica resultante del producto de vectores a partir de la proyección de estos en el espacio 3D.

Del Software Cabri bajo el concepto geométrico del producto de vectores: El estudiante puede discernir sobre la gráfica resultante del producto vectores a partir de la proyección de estos en el espacio 3D y verificar las diferentes figuras que se forman al interior de ésta.

Esquema
Según Dubinsky (1991), un esquema se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción continua según lo determinado por la actividad matemática del sujeto en situaciones matemáticas específicas. La coherencia de un esquema está determinado por la capacidad del individuo para determinar si éste se puede utilizar para hacer frente a una situación matemática en particular. Una vez que el esquema se construye como una colección coherente de estructuras (acciones, procesos, objetos, y otros esquemas) y conexiones establecidas entre esas estructuras, que pueden transformarse en una estructura estática (objeto) o se utilizan como una estructura dinámica que asimila otros objetos relacionados o esquemas. (Arnon et al. 2014, p. 25)

En suma, un esquema es una colección de acciones, procesos y objetos que están coherentemente dispuestos en la mente del estudiante, de tal forma que la coherencia es la herramienta mental con la cual el estudiante se apoya como un recurso para resolver la situación matemática que se le está presentando. En este caso podríamos sostener que un estudiante muestra una concepción de esquema del concepto del producto de vectores, cuando precisa de una relación lógica capaz de establecer entre los elementos matemáticos:

Del concepto matemático sobre el producto de vectores: Un estudiante puede ordenar, clasificar, categorizar y aplicar las propiedades resultantes del producto de vectores en el espacio 3D y las representaciones geométricas de los vectores en este espacio.

Del Software Cabri bajo el concepto geométrico del producto de vectores: Un estudiante puede graficar y clasificar en forma de categorías y aplicar las propiedades resultantes del producto de vectores en el espacio 3D y proyectar las representaciones geométricas de los vectores en este espacio.

■ Diseño metodológico

En esta investigación se vienen analizando los procesos mentales que muestran los alumnos en relación al concepto geométrico de volúmenes con vectores en tres dimensiones. Nos enfocamos en detallar los mecanismos y las construcciones que los estudiantes realizan con la asistencia de la tecnología (Cabri) y de qué forma estos se apropiaron de los conceptos del Álgebra Lineal; por lo que usamos la teoría APOE.

■ Estudio de Casos Múltiples.

Se está usando un diseño metodológico de estudio de casos múltiples, con estudiantes de ingeniería colombianos, del segundo año de universidad

■ Ciclo de investigación de APOE

A los casos, de estudio se les está aplicando el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como Descomposición Genética, (DG); un diseño, basado en la DG teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Asiala *et al*., 1996); y a partir del análisis de los datos obtenidos, se le puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos.

■ Análisis Histórico – Epistemológico

En la parte inicial de la investigación se hizo un estudio tanto histórico como epistemológico, pretendiendo mantener en la conceptualización o distinción que hace Bachelard (1972) entre el trabajo del historiador de la ciencia y el del epistemólogo: “El historiador de la ciencia debe tomar las ideas como hechos. El epistemólogo debe tomar los hechos como ideas, insertándolas en un sistema de pensamientos”. (Bachelard, 1972, p. 20). Razón por la cual se hizo una indagación en los informantes sobre el estado de construcción del Producto Exterior de Grassmann y su representación geométrica, que según los mismos escritos realizados por los estudiantes dispuestos en los casos de estudio, se evidencia en la forma cómo ellos calculan el volumen de un paralelepípedo.

■ Del Producto Vectorial

La primera parte del análisis Histórico – Epistemológico (Martínez y Benoit, 2008) permitió dar cuenta de tres etapas que históricamente corresponden a una epistemología del ***producto vectorial***: a) Nacimiento de los Cuaterniones, b) Desarrollo y Maduración del Cálculo de Cuaterniones, c) Evolución del Cuaternión al Cálculo Vectorial Moderno

Del Concepto de Volumen

La segunda parte del análisis Histórico – Epistemológico del concepto de medida se remonta a más de 5000 años, que emerge del manejo de longitudes, áreas y volúmenes fundamentalmente y de la necesidad de su cálculo. Estos tres aspectos particulares de medidas son los que han servido como guía para esaltar el concepto matemático de medida que de por sí están unidos.

Del Producto Exterior

Grassmann fue el primero en concebir la geometría de varias dimensiones, una de sus obras más importantes fue *"Enseñanza de la Dilatación"* (1862), donde desarrolló un cálculo operativo para las diversas magnitudes geométricas, posteriormente definió también el "Producto Exterior", operación clave en el álgebra conocida como "Álgebra Externa".

Su Representación Algebraica

El aporte esencial de Grassmann al producto vectorial fue una generalización, guiándose por su intuición geométrica:

Él concibió el área barrida por un segmento que se desliza sobre otro y sobre una línea quebrada dotada de una orientación, y por lo tanto, de un signo, según se recorriera el perímetro del área en un sentido u otro. Con esto, definió un nuevo producto, el producto que en la actualidad se llama producto exterior, $[ab] = ab = a \wedge b$ él llamaba *producto escalón*, íntimamente relacionado con el producto vectorial, y que, empero, a diferencia de éste, no está restringido a una dimensionalidad fija como en el caso del producto vectorial. (González, sf, p. 10)

Definición del Producto Exterior

En matemáticas la definición del *producto exterior –o como se conocía anteriormente producto cuña o escalón–,* es una anti-simetrización del producto tensorial, o como mejor definición que es de cualquier número de vectores como su producto antisimétrico, es decir, el único producto distributivo respecto a la suma de vectores que cambia de signo bajo cualquier permutación de un par de ellos:

$$v_1 \wedge \cdots v_i \wedge \cdots v_j \wedge \cdots v_n \wedge = -v_1 \wedge \cdots v_j \wedge \cdots v_i \wedge \cdots v_n \qquad \forall i \neq j$$

Esta definición del producto exterior – $[ab] = ab = a \wedge b$ – es única, salvo un factor constante. Para ello se identifica el producto exterior de vectores perpendiculares con el producto de sus módulos para una constante igual a 1.

Su Representación Geométrica en 3D

Para la representación geométrica en 3D "cada producto exterior por un nuevo vector es una multiplicación por su componente perpendicular al espacio generado por los vectores", (González, 2012, p. 44). Dados tres vectores $\{u, v, w\}$ cualesquiera independientes en el espacio euclídeo –de la forma como fue concebida por Grassmann para analizar la forma del cómo los aprendices realizan la construcción del paralelepípedo– se observa el producto exterior y la forma geométrica:

El producto exterior del primero por el segundo es igual a la longitud del primero por la componente perpendicular del segundo respecto al primero (figura 1), es decir, el área del paralelogramo que forman: $u \wedge u = uv_{\perp u}$

Ahora multipliquémoslo exteriormente por el tercero y obtendremos el producto del área del paralelogramo que forman los dos primeros por la componente perpendicular del tercero respecto al plano formado por los dos primeros. Eso es igual al área de la base por la altura, es decir, el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores (figura 2):

Figura 1.

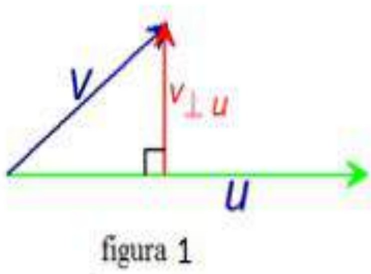
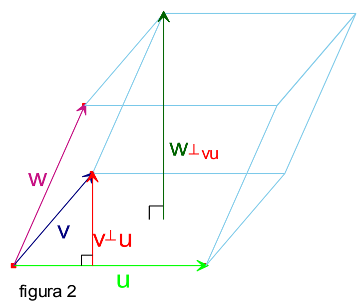


Figura 2.



De ahí el nombre que le dio Grassmann: producto *exterior* ya que siempre da como resultado un aumento de dimensión geométrica respecto a la dimensión geométrica del recinto anterior. El título de su obra *Die Ausdehnungslehre* fue traducido muy acertadamente al español como *Teoría de la extensión.* (González, 2012, p. 44)

Conclusiones

En este artículo, se han presentado los resultados del estudio realizado para indagar sobre los aspectos históricos – epistemológicos del producto vectorial, del concepto de volumen y del producto exterior, analizando –este último– del Producto Exterior: a) Su Representación Algebraica, b) Definición del Producto Exterior, c) Su Representación Geométrica en 3D. Con esta indagación se pretende desglosar y observar cómo va surgiendo no sólo el concepto de producto vectorial, sino, de la forma cómo se construye el concepto de volumen y en especial en la tercera parte –la representación geométrica en 3D– que es donde se observará del cómo los estudiantes “ven” o mejor se imaginan los pasos para la construcción geométrica del paralelepípedo que estos tres vectores forman, y en el producto exterior se encuentra las explicaciones a los estados de construcciones que éstos muestran.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*, (pp 13-33). Costa Rica: Revista Universidad de Costa Rica.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2,* 1 – 32**.**

Bachelard, G. (1972). *La formación del espíritu científico.* Buenos Aires: Siglo XI. *(Original en francés de 1938).*

Díaz-Barriga, E. (2006). *Geometría dinámica con Cabri-Géomètre.* México: Editorial Kali.

Dubinsky, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts. *Korkeakoulujen Atk-Uutiset, 2*, 41–47.

Dubinsky, E. (1985, March). *Computer experiences as an aid in learning mathematics concepts*. Working paper for the Conference on the Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching, Strasbourg.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en D. Tall (Ed.): *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer A. P.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 335–359.

González, J. (sf). *El producto vectorial.* Recuperado el 02 de julio de 2014 de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/realquiler/fich/jfgh.pdf

González, R. (2012). *Producto exterior y sus aplicaciones.* Recuperado el 02 de julio de 2014 de http://www.xtec.cat/~rgonzal1/espacio04.pdf

Martínez, G. y Benoit, P. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. *Latin American Journal of Physics Education*, *2*(2), 122-129.

Ricardo, F. (2015). *Apuntes de la Teoría de la Medida.* Recuperado el 28 de marzo de 2015 de http://matematicas.unex.es/~ricarfr/Tmedida/librotmed.pdf