CONCEPCIONES DE PROFESORES DE CÁLCULO SOBRE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Eric Hernández Sastoque
Universidad del Magdalena. (Colombia)
Universidad de Antioquia. (Colombia)
ehernandezs@unimagdalena.edu.co

Palabras clave: demostración, concepciones, cálculo para ingenieros
Key Words: proof, conceptions, calculus for engineers

RESUMEN

En esta comunicación presento algunas concepciones de profesores de cálculo sobre la demostración en el contexto de programas de ingeniería. Estas concepciones hacen parte de los resultados parciales de una investigación en curso sobre la negociación de significados de la demostración entre profesores de cálculo. La metodología es cualitativa bajo un enfoque fenomenológico-hermenéutico. El escenario de investigación es un programa de formación continua dirigida a profesores de cálculo. Algunas concepciones de los profesores sobre la demostración están relacionadas con el formalismo de las matemáticas, y con aspectos de su enseñanza.

ABSTRACT

In this paper I present some calculus professors' conceptions about the proof in the context of engineering careers. These conceptions are part of the partial results of an ongoing research on the negotiation of meaning of proof in calculus professors. The methodology is qualitative and it is framed in a phenomenological-hermeneutic approach. The research setting is a program of continuous education for calculus professors. Some professors' conceptions about the proof are related to the formalism of mathematics and aspects of their teaching.

■ Introducción

Durante las últimas tres décadas las comunidades de educadores matemáticos han mantenido un interés creciente sobre la demostración, identificando varias problemáticas que la han considerado como un componente de las matemáticas difícil de enseñar y de aprender (Bell, 1976; Hanna y De Villiers, 2012). Un aspecto importante para el estudio de la demostración en la educación matemática está relacionado con las concepciones de la demostración de profesores (Arzarello, 2007; Balacheff, 2008; Crespo Crespo, Farfán, y Lezama, 2010; Crespo Crespo y Ponteville, 2004; Knuth, 2002). Parte de la importancia de los estudios sobre las concepciones de los profesores sobre conocimientos matemáticos es por la influencia que estas concepciones tienen sobre la enseñanza de las matemáticas. Como lo plantea Putnam y Borko (1997), las concepciones del profesor sobre la demostración influyen en la enseñanza que desarrolla en los diferentes cursos. Para Balacheff (2008), las diferentes concepciones sobre la demostración deben ser explicadas de tal manera que permita una comprensión global sobre la naturaleza de la demostración. Es así, como en la presente comunicación se describen algunas aproximaciones sobre las concepciones de la demostración que tienen profesores que enseñan cálculo para ingeniería.

■ Noción sobre Concepción y Demostración

En el presente estudio se consideran las 'concepciones' como organizadores de naturaleza cognitiva. Cuando se habla de organizadores se refiere a: proposiciones, imágenes mentales, creencias, conceptos, pautas, y preferencias, los cuales afectan los procesos de razonamiento y la toma de decisiones del individuo (García, Azcárate, y Moreno, 2006; Llinares, 1991; Moreno y Azcárate, 2003; Thompson, 1992). Las concepciones poseen un carácter más conceptual que afectivo, tomando distancia del término creencias. Las creencias se asocian con las ideas que los individuos tengan de algo, y están fundamentadas en los sentimientos, las experiencias, y un bajo rigor en el conocimiento particular del asunto.

En este estudio la 'demostración matemática' se entiende como una práctica social cuya validez depende de comunidades sociales y de los referentes teóricos determinados por contextos históricos, sociales, culturales y epistemológicos (Crespo Crespo, Farfán, y Lezama, 2010; Moreno, 1992; Radforf, 1994). En este sentido, el término 'demostración' incluye demostraciones formales y no formales, como parte de la producción colectiva de grupos sociales. El hecho de relacionar la demostración con demostraciones formales y no formales es compartido con autores como Gutiérrez (2001), quien manifiesta:

> […] creo que deberíamos hablar de "demostraciones formales", "demostraciones no formales" y "demostraciones" (para aludir a ambos tipos a la vez), pues es necesario transmitir al mundo de la enseñanza la idea de que no hablamos de dos cosas diferentes sino de dos aspectos de una misma cosa, la demostración en matemáticas y ayudar de esta forma a desmitificarla y a que estudiantes y profesores le pierdan el miedo. (p. 87)

■ Metodología

El estudio sigue un paradigma cualitativo y se gesta bajo el enfoque fenomenológico-hermenéutico. El escenario de investigación es un programa de formación continua, cuyos participantes son profesores de una facultad de ingeniería de una universidad colombiana. El programa de formación continua trata sobre la demostración en cursos de cálculo diferencial, y está diseñado como un espacio para la interacción social entre profesores bajo los principios de la teoría de la práctica social (Wenger, 2001). Los registros producidos fueron: autobiografías, transcripciones de encuentros, escritos, observaciones de clase y entrevistas. Como parte del estudio se tienen algunos resultados relacionados con las concepciones de los profesores sobre la demostración en cursos de cálculo para ingenieros. Los nombres de los profesores usados en esta investigación son seudónimos.

Resultados Parciales

A continuación se presentan algunas concepciones de profesores de cálculo sobre la demostración, identificadas hasta ahora en la investigación. Para ello, se discuten concepciones sobre la demostración matemática y su relación con la enseñanza de la demostración matemática en ingeniería. Se parte de una actividad del programa de formación continua, y se sigue con un breve análisis del discurso de los profesores que dé cuenta de sus concepciones sobre la demostración.

Una de las actividades implementadas en el programa de formación continua consistió en debatir sobre tres presentaciones diferentes para demostrar el teorema del cálculo diferencial: la derivada de la función seno es la función coseno. Para la primera presentación se recurrió al uso de software como Winplot y Geogebra, apoyada en la interpretación geométrica del teorema. La segunda presentación fue una demostración fundamentada en argumentos geométricos sin considerar la definición de límite de una función (Almeida, s.f.). La tercera presentación fue una demostración dada en un libro de texto de cálculo, que utiliza definiciones y teoremas relacionados con el concepto de límite (Larson y Edwards, 2010).

La mayoría de los profesores coincidió en señalar que la primera presentación no era una demostración, sino más bien una comprobación, y que las presentaciones dos y tres sí correspondían a una demostración. Algunas expresiones de los profesores fueron:

> Yo sostengo que la primera no llena los requisitos para ser una demostración, más bien es una prueba gráfica de lo que se quiere demostrar. Para mí la demostración está basada en un método, cualquiera que sea directo o indirecto, en el cual usamos axiomas, definiciones a partir de una hipótesis y llegamos a una conclusión. […] [La demostración] es como si fuera un formato, un formato en el cual hay que llegar de la hipótesis a la conclusión. (Nicolás, Encuentro, marzo 8 de 2014)

> Para mí la demostración es la tres porque yo estoy acostumbrado a la matemática abstracta y ahí es de donde veo; la [presentación] dos, también [es una demostración] porque es muy abstracta. (Carlos, Encuentro, marzo 8 de 2014)

> […] en esa parte de las gráficas [refiriéndose a la primera presentación] hay que dar unos argumentos aptos, porque así, por sí sola, yo no la considero una demostración. Tiene que tener otro tipo de argumentos. (María, Encuentro, marzo 8 de 2014)

Nicolás asoció la demostración con un 'formato' bajo la utilización de métodos de demostración. Esta mirada de Nicolás se puede asumir, en términos de Radford (1994), como "un instrumento esencialmente lógico" (p. 22) donde priman elementos de la lógica y la estructura formal subyacente como son las demostraciones por reducción al absurdo, directas, etc. De manera similar, para Carlos, quien escogió las presentaciones dos y tres como demostración, advierten el criterio del carácter formal de la demostración inmersa en una matemática abstracta. Para María, el hecho de descartar la primera presentación como demostración por carecer de argumentos 'aptos', insinúa que una demostración debe poseer un tipo de argumentos diferentes a las construcciones geométricas dadas empíricamente.

Siguiendo algunas categorías para la demostración, dadas por autores como Bell (1976), Balacheff (1988), Harel y Sowder (1998) y Gutiérrez (2001), pero respetando los alcances de cada categoría para cada una de los autores, se puede interpretar que los profesores diferenciaron entre argumentos empíricos para un caso gráfico (primera presentación) y argumentos lógico-deductivos (segunda y tercera presentación). Es así, como los profesores asumieron una concepción de la 'demostración' desde una perspectiva formal asociada a demostraciones deductivas. La concepción de demostración que los profesores presentaron se aproxima a una demostración como un producto acabado, relacionado con "un polo formal en el cual la prueba matemática se caracteriza por su forma, como un texto que respeta algunas reglas precisas" (Arsac, 2007, p. 27).

En este sentido, según Recio (2001), la concepción formalista de la demostración acentúa los aspectos sintácticos, evitando el recurso de la intuición y prefiriendo el uso de reglas de inferencias formales. Según este autor, al exagerar el aspecto sintáctico de los sistemas axiomáticos, mediante posiciones formalistas extremas, se corre el riesgo de reducir la demostración a un procedimiento exclusivamente algorítmico. Recio (2001) considera que la demostración matemática dentro de las instituciones educativas tiene un significado más amplio y que "junto al pensamiento estrictamente deductivo, se resalta también la necesidad de potenciar otros modos validativos de tipo empírico-inductivo, la formulación de conjeturas, los ejemplos y contraejemplos, los procesos de generalización, etc." (p. 31).

Bajo este enfoque formalista de la demostración, se presentaron divergencias en las concepciones de los profesores con relación a la enseñanza de la demostración en cursos de cálculo para ingenieros. Algunos profesores como Nicolás afirmaron omitir las demostraciones en cursos de cálculo; él manifestó los siguiente: "por razones de tiempo no demuestro los teoremas, lo que hago es aplicar los teoremas, y no todos, sólo los que realmente necesitamos" (Nicolás, Entrevista, junio 13 de 2014). Esta posición de Nicolás coincide con las ideas de Van Asch (1993), quien señala que un planteamiento para omitir la demostración en cursos de programas de ingeniería es porque "dar una demostración toma mucho tiempo" (p. 307). Este último comentario de Nicolás, puede estar relacionado con identificar la demostración como un contenido, el cual puede ser omitido dependiendo de los tiempos asignados para el desarrollo de un curso. Un resultado similar fue obtenido por Knuth (2002), en su estudio sobre las concepciones de los profesores sobre la demostración. Knuth, manifiesta que los profesores consideran la demostración más como un tema de estudio que un medio para aprender y comunicar matemáticas.

Nicolás, también expresó que: "deberíamos buscar la forma de introducir las demostraciones en los cursos de cálculo. Buscar la forma que esas demostraciones se hagan un poquito más asequibles a los estudiantes de ingeniería" (Nicolás, Entrevista, junio 13 de 2014). Lo dicho por Nicolás puede sugerir que las demostraciones no son tan asequibles para los estudiantes de ingeniería, lo cual podría ser otra de las razones para no enseñar demostraciones en los cursos cálculo. Como lo plantea Crespo Crespo y

Ponteville (2004), la falta de interés y de conocimientos previos de los alumnos son tomados como justificación por algunos docentes para no hacer demostraciones en clase.

Para los profesores que manifestaron enseñar demostraciones en cursos de cálculo para ingenieros, se encontraron otras concepciones de la demostración. Una de estas concepciones estuvo relacionada con la intención de enseñar la demostración para un uso posterior, ya sea durante la misma carrera o para la vida profesional. Esta noción de demostración, la cual podemos describir como: enseñar la demostración 'por si acaso' los estudiantes la necesitan más adelante, le asigna a la demostración un carácter aislado tanto de las temáticas del cálculo como de la formación del ingeniero. En este sentido, Carlos y Juan expresaron lo siguiente:

> Cuando uno realiza una demostración en una facultad de ingeniería es para darle soporte a las aplicaciones que posteriormente se pueden dar en esa facultad. (Juan, Encuentro, marzo 15 de 2014)

> […] es posible que en algún momento [los estudiantes de ingeniería] necesiten matemática para hacer cosas más allá de lo que está hecho. Entonces, esa posibilidad la tienen si conocen las matemáticas muy bien estructurada desde el punto de vista formal, o sea, no vamos a bajar la guardia, el objetivo es que las demostraciones ellos las deben comprender formal. (Carlos, Encuentro, abril 12 de 2014)

Tanto Juan como Carlos dieron una idea de la demostración como algo útil, pero no en el momento en que se enseña, sino en un escenario futuro bajo la participación de otros actores que intervendrían en la formación del ingeniero. Esa forma de concebir la demostración en cursos de cálculo, puede estar inmersa en una concepción de los profesores sobre el cálculo mismo. Como lo plantea Cordero (2005), los profesores "por lo general conciben al *Calculus* como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales, a posteriori, se les busca alguna aplicación" (p. 269).

La suposición de Carlos, de que los estudiantes conozcan la demostración desde una perspectiva formal (en particular en un curso de cálculo que se orienta en el primer año de la carrera), con la esperanza de que los estudiantes la necesiten en su quehacer como ingeniero, representa una postura controversial. Pues, en principio supone un aprendizaje que se daría en un escenario futuro, lo cual está en contradicción con la idea de un aprendizaje con un carácter temporal, y como participación social en una práctica (Wenger, 2001). Como lo plantea Vásquez (2011) en diálogo con Lave y Wenger (1991) y Brown y Duguid (1991):

> Ante un problema concreto, un individuo no se limita a pensar en una solución, diseñar un plan y luego ejecutarlo. Al contrario, es en la situación concreta que encuentra los recursos necesarios: actúa, manipula la máquina o el programa, o sea, trabaja con la situación misma, la que a su vez le da un *feedback*. Y se progresa así, razonando en interacción con la situación. En otras palabras, se aprende una práctica a través del involucrarse en dicha práctica y en el contexto en la cual ésta se realiza. (p. 57)

Por tanto, una demostración pensada para los estudiantes 'por si acaso' la llegasen a utilizar en su desempeño como ingeniero, sería una justificación que podría ser considerada como simple. Más bien, se deberá seguir indagando sobre estas concepciones de los profesores acerca de la demostración en cursos de cálculo, explorando diversas perspectivas epistemológicas para buscar otras aproximaciones de la demostración en esta área de las matemáticas para la ingeniería.

Conclusiones

Los profesores de cálculo para ingeniería, participantes en este estudio, tuvieron una concepción de la demostración arraigada a un carácter formalista, y reconocida como un producto acabado. La perspectiva formalista de la demostración generó posturas sobre la enseñanza o no de la demostración en cursos de cálculo diferencial para ingeniería. Algunos de los profesores asumieron la demostración como un contenido, dejando por fuera la posibilidad de tratar la demostración como un medio para aprender y comunicar matemáticas. Por otra parte, una de las concepciones de los profesores ubicó la enseñanza de la demostración 'por si acaso' los estudiantes la necesitaran más adelante. Esta última mirada sobre la demostración, le asignó un carácter aislado tanto de las temáticas del cálculo como de la formación del ingeniero.

Referencias Bibliográficas

Almeida, D. (s.f.). *Teaching Calculus to Student Teachers: Lessons from the Chalk-face*. Recuperado de http://exeter.academia.edu/DennisAlmeida/Talks

Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof. History and epistemology. In P. Boero

(Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 27–42). Rotterdam: Sense Publishers.

Arzarello, F. (2007). The proof in the 20th century: From Hilbert to automatic theorem proving. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 43–64). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve em mathématique chez des élèves de collège.* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher`s epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM Mathematics Education, 40*, 501–512.

Bell, A. W. (1976). Study of pupil´s proof - explanation in mathematical situation. *Educational Studies in Mathematics, 7(1)*, 23–40.

Brown, J. S., & Duguid, P. (1991). Organizational learning and communities of practice: toward a unified view of working, learning and innovation. *Organization Science, 2 (1)*, 40–57.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8 (3)*, 265–286.

Crespo Crespo, C., Farfán, R., y Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educactiva, 13*, 283–306.

Crespo Crespo, C., y Ponteville, C. (2004). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17, 560–564. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

García, L., Azcárate, C., y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 9 (1)*, 85–116.

Gutiérrez, Á. (2001). Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles. *Actas del 5º Simposio de la SEIEM,* 85–94.

Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study* (pp. 1–10). London, New York: Springer Science+Business Media.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. III, pp. 234–283). Providence, EE.UU: American Mathematical Society.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers´ conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33(5)*, 379–405.

Larson, R., y Edwards, B. H. (2010). *Cálculo 1 de una variable* (Novena ed.): McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge: University Press.

Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID, Universidad de Sevilla.

Moreno, L. (1996). Una perspectiva sobre la demostración. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 1 (1),* 123–136.

Moreno M. y Azcárate C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias, 21(2)*, 265–280.

Putnam, R., & Borko, H. (1997). Teacher learning: Implications of new views of cognition. In B. J. Biddle, T. L. Good & I. F. Goodson (Eds.), *International Handbook of Teachers and Teaching* (pp. 1223–1296). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (1994). La enseñanza de la demostración: Aspectos teóricos y prácticos. *Educación Matemática, 6(3)*, 21–36.

Recio, A. M. (2001). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. Godino (Eds.), *Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Almeira: Universidad de Almeira.

Thompson, A. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In D. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics Teaching and Learning* (pp. 127–146). New York: Macmillan.

Van Asch, A. G. (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24*(2), 301–313. doi: 10.1080/0020739930240214

Vásquez, S. (2011). Comunidades de práctica. *Educar, 47 (1)*, 51–68.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica: Aprendizaje, significado e identidad* (G. Sánchez, Trans.). Barcelona: Paidós.