UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

TÍTULO DEL TRABAJO:	Curvas, ecuaciones y series de potencias en el desarrollo histórico de la noción de función
Se trata de:	Proyecto [ ] Informe Final [X]
Director:	Luis Cornelio Recalde
1er Evaluador:	Maribel Anacona
2do Evaluador:	Martha Bobadilla
Fecha y Hora	Año: 2013 Mes: Día: Hora:

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
Jorge Enrique Mendoza Guzmán	0831034	3487

EVALUACIÓN

Aprobado	X	Meritorio		Laureado	X
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ________________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ________________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:		Mes:		Día:		Hora:	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

FIRMAS:

Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

OBSERVACIONES:	**RECOMENDACIONES:**	**RAZÓN DEL DESACUERDO – ALTERNATIVAS:**

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

RAZONES QUE SUSTENTAN LA MENCIÓN DE **LAUREADA**

i) Se destaca la manera original de abordar el problema, la coherencia teórica y la pertinencia de los resultados obtenidos. El concepto de función es sustancial en la formación matemática universitaria y conocer su desarrollo histórico es fundamental tanto para los futuros docentes de matemáticas como para los docentes en ejercicio.

ii) El trabajo constituye un aporte metodológico importante para los estudios históricos-epistemológicos en el marco de un programa de formación en Educación Matemática. Particularmente se destacan los dos caminos de análisis histórico escogidos: el estudio de la relación curva-ecuación y posteriormente el estudio de la relación ecuación-función. De igual manera se valora muy positivamente el estudio de fuentes primarias; y el análisis de fuentes secundarias muy reconocidas en el campo de la Historia de las Matemáticas.

iii) El estudiante publicó dos artículos relacionados con su trabajo de tesis. Ellos son:

a) Mendoza- Guzmán, J. E. (2013). A generalization of integrals by the formula of integration by parts. *Revista Digital 360°, 8* .

b) Mendoza Guzmán, J. E. (2013.). Los polinomios particulares: Una definición para exploraciones cartesianas. *Revista digital Matemática, educación e Internet, 14* (1), 1-5.

iv) Demuestra un excelente dominio del tema. Está muy bien escrito y es un tema de actualidad en Historia y Educación Matemática.

Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

Universidad del Valle

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que s integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cin (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimoni del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licenc solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) mese antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términ establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad d Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás norm generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requie (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tan renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la *Licenc Creative Commons* con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizar sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos q autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD D VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VAL actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en l índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE L UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CC LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO ACUERDO.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de s obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositor institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1) que forma parte integral del presen documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo [x] No autorizo [ ]

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términc autorizados por Usted en los literales a), y b), con la *Licencia Creative Commor Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia* cuyo texto completo s puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer

Si autorizo [x] No autorizo [ ]

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por ur opción legal diferente describala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Curvas, Ecuaciones y series de potencias en el desarrollo de la noción de función

Autores:

Nombre: Jorge Enrique Mendoza Guzman Firma: C.C. 1112958358.

Nombre: Firma: C.C.

Nombre: Firma: C.C.

Fecha: 25 de marzo/2014.

1 CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio histórico relacionado con la constitución del concepto de función. Principalmente el itinerario curva-ecuación- función y su relación con las series de potencias. Un primer momento de este trabajo es el movimiento evolutivo que se presenta en el paso de las curvas a las ecuaciones y la manera de generar curvas para los antiguos vistas como secciones de un cono. El otro momento importante de este trabajo es el paso de las ecuaciones a las funciones. Pero este desarrollo se encuentra permeado por la representación de funciones mediante series de potencias. Uno de los resultados encontrados se refiere a que las series de potencias representan un concepto transversal en el desarrollo del análisis matemático puesto que en estas se fundan nuevas representaciones.

Palabras claves: Curva, ecuación, función, series infinitas, convergencia.

CURVAS, ECUACIONES Y SERIES DE POTENCIAS EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

JORGE ENRIQUE MENDOZA GUZMÁN

Trabajo de grado presentado al Programa Académico Licenciatura en Matemáticas y Física como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

DIRECTOR

Dr. Luis Recalde Caicedo

Universidad del Valle

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA

PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2014

CURVAS, ECUACIONES Y SERIES DE POTENCIAS EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

ABRIL DE 2014

JORGE E. MENDOZA GUZMÁN.

Materias o temas: Historia de las Matemáticas, Educación Matemática

NOTA DE ACEPTACIÓN

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Santiago de Cali, abril de de 2014

AGRADECIMIENTOS

A mi familia Gloria, Jorge y Diana por su apoyo,

Al profesor Recalde por su infinita paciencia,

Al profesor Carlos Vasco…

Ingry por su compañía y colaboración.

A la memoria de Luis Pineda.

«He tenido muchas ideas y que quizás pueden ser útiles con el tiempo, si otros con más penetración que yo, calan profundamente en ellas algún día, y unen la belleza de sus mentes con el trabajo de la mía…

G Leibniz

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio histórico relacionado con la constitución del concepto de función. Principalmente el itinerario curva-ecuación- función y su relación con las series de potencias. Un primer momento de este trabajo es el movimiento evolutivo que se presenta en el paso de las curvas a las ecuaciones y la manera de generar curvas para los antiguos vistas como secciones de un cono. El otro momento importante de este trabajo es el paso de las ecuaciones a las funciones. Pero este desarrollo se encuentra permeado por la representación de funciones mediante series de potencias. Uno de los resultados encontrados se refiere a que las series de potencias representan un concepto transversal en el desarrollo del análisis matemático puesto que en estas se fundan nuevas representaciones.

Palabras claves: Curva, ecuación, función, series infinitas, convergencia.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se suscribe en la línea de investigación de Historia y Educación Matemática considerando un enfoque de corte epistemológico. Se abordarán algunos aspectos relacionados con la consolidación de la noción de función y su importancia como concepto central del análisis matemático. Para ello un elemento directriz inherente a la función está relacionado con las diferentes maneras de representar funciones, en nuestro caso nos centraremos en la representación mediante series de potencias. Justamente se hará referencia a "noción" y "objeto" refiriéndose a ellos de manera libre, es decir sin tener una completa caracterización e identificación de su desarrollo.

Indudablemente los conceptos en matemáticas se encuentran en evolución; una manera de precisar este enunciado es considerar la noción de función y la forma de incorporar elementos de causalidad que llevaron a la constitución de este concepto. Precisamente en la línea de evolución de dicho concepto es posible incorporar las relaciones que se presentan a lo largo de la historia de las matemáticas, entre ellas cabe destacar:1) curva- ecuación y 2) ecuación-función, como elementos claves a la hora de investigar su instauración como concepto central en el análisis matemático.

A partir de esto se muestra una indagación histórica que permita dar cuenta del proceso de transformación que sufrieron las matemáticas cuando surge la representación de funciones mediante series de potencias en el siglo XVII y los diferentes problemas y dificultades que se podían solucionar debido a los nuevos desarrollos en la matemática. Por ello es necesario introducir el concepto de función. Así, el segundo movimiento evolutivo corresponde al paso que lleva de las *ecuaciones a las funciones*. Estos cambios conceptuales nos plantean un problema histórico de gran importancia.

Históricamente los desarrollos de Descartes contribuyeron a la evolución de conceptos y nociones, que tiempo después sirvieron como base para el desarrollo de la noción de función, la cual es fundamental en la constitución del cálculo infinitesimal y el análisis.

En su *Geometría* (1637), Descartes toma como punto de partida las curvas que se presentan de manera geométrica, apuntando a la forma de asociarles una ecuación algebraica. Las que cumplan la propiedad anterior se consideraban objetos geométricos; las restantes corresponderían a nociones de otros campos del saber. De esta forma, la noción de ecuación, incorporada a finales del siglo XVII y comienzos del XVIII, especialmente con Descartes, juega un papel preponderante en la línea de evolución de la noción de función. Aquí se vislumbran algunos procesos primitivos referentes a la variación y al establecimiento del sistema referencial.

Existen elementos de causalidad que en un momento determinado llevaron, a establecer la representación algebraica de una curva, la cual se definía como lugar geométrico o de manera sintética. Ya constituida una teoría donde se relaciona la representación de curvas mediante ecuaciones, surge el problema de acoger un cierto tipo de curvas que si bien se podían definir retórica o dinámicamente no era posible hacerlo a través de ecuaciones, precisamente esta imposibilidad es lo que permitió plantearse a Descartes e inclusive Fermat y Jan de Witt, la creación de la geometría analítica.

En la línea de desarrollo de la curva comienzan a surgir curvas como las mecánicas las cuales no poseían una representación explicita de manera algebraica, pero sin duda aparecen unos objetos denominados series de potencias que se convirtieron, entonces en la herramienta idónea que permitió desarrollar una teoría analítica para algunas curvas de este tipo. Para ello fue necesario desarrollar una teoría de series, que incluía nuevas operaciones como el paso al límite, sin embargo a raíz de que en los inicios de dicha teoría esta operación no existía de manera formal implicó gran dificultad en el tratamiento de los procesos infinitos. Durante mucho tiempo se discutió, de manera informal, el problema de la convergencia, sin embargo sólo fue hasta los trabajos de Cauchy que se empezó a dar un tratamiento formal al definir una serie como una sucesión de sumas parciales y al establecer unos criterios que permitían dar una fundamentación rigurosa para las sumas.

Las curvas mencionadas anteriormente comienzan a sufrir un proceso de aislamiento en la *geometría* de Descartes en la cual se acogen las curvas geométricas y se relegan las mecánicas, debido a la inexistencia de un aparato teórico que permitiera asociarles una ecuación algebraica, es decir, se trabaja solamente con curvas geométricas aludiendo a la manera de visualizarlas como una ecuación. A raíz de esto se plantean diversos mecanismos de solución relacionados con problemas propuestos por Descartes tales como la construcción de la normal a la elipse, la parábola y la hipérbola. El trabajo de Descartes fomentó nuevos procesos y dinámicas que dieron lugar a nuevas teorías matemáticas.

En este sentido se abrió un cúmulo de discusiones con la manera de adaptar ecuaciones a cierto tipo de curvas trascendentes. Sin embargo, Descartes creyó que era imposible adoptar ecuaciones a este tipo de curvas, a las cuales denominó mecánicas. Justamente, la respuesta a esta problemática empieza a abrirle el camino a otro tipo de representaciones, como las series infinitas y de potencias, las cuales se revelan importantes para la constitución de la noción de función. Las representaciones en series infinitas comienzan a hacerse tangibles con los trabajos de Pietro Mengoli, Wallis, Mercator, Newton y Leibniz, a mediados del siglo XVII.

El paso de las curvas a las ecuaciones y, luego, de las ecuaciones a las funciones, es un proceso complejo debido a las difusas líneas de causalidad que llevaron a introducir nuevas propuestas teóricas en diferentes latitudes. Precisamente la identificación de los elementos de interdependencias entre variadas nociones, que desembocaron en la noción de función es el planteamiento central de este trabajo.

El objetivo general del trabajo de grado es realizar un análisis histórico-epistemológico en la línea de evolución que ha llevado de la representación de las curvas a las ecuaciones y de las ecuaciones a las funciones, tomando como elemento directriz la representación en series de potencias. Para ello se tomará como referencia principal *la geometría* de Descartes, *De análisis* de Newton y el curso de análisis de Cauchy[1]. Estas

[1] Como obras secundarias e intermedias a estos trabajos se vislumbran los trabajos de Jan de Witt, Leibniz, Euler.

obras indudablemente representan el parapeto teórico clave ligadas a la línea de evolución de la representación.

Para lograr el objetivo general la tesis se ha organizado en cuatro capítulos. En el capítulo I se presenta un recorrido histórico que involucra aspectos y concepciones iniciales, relacionadas con el concepto de curva en la antigüedad y la manera de trabajar con las mismas según: Menecmo, Euclides, Arquímedes, Apolonio y Pappus, siendo el último de éstos y su obra un elemento de gran importancia, puesto que el problema que lleva su nombre posibilitó obtener algunos de los elementos que permitieron a René Descartes obtener lugares geométricos a partir de los problemas lineales.

A partir de esto se visualiza el paso de la curva sintética a la ecuación algebraica; conduciéndonos a la creación de la geometría analítica. El periodo de tiempo para mirar la concepción anterior va desde el siglo V a.C hasta finales del siglo III a.C. Nos interesa identificar cuál era la concepción y tratamiento dado a las curvas en la antigüedad y cómo dicho tratamiento se convierte en un elemento que va delineando el desarrollo de la ecuación. El capítulo se compone de dos secciones.

En la primera sección, compuesta por cuatro subsecciones, se discute el tratamiento y la génesis de las curvas y las diferentes concepciones para los antiguos griegos, que según (Boyer, 2011) se realiza tomando como referencia una clasificación que tomaba las curvas en problemas *lineales, planos y sólidos.* Bajo esta concepción es que se evidencia el tránsito y la transformación del objeto curva hasta llegar a ser visto como una sección de un cono. También se muestra como algunos problemas como los propuestos por Apolonio y retomados por Pappus no fueron solucionados sino hasta Descartes.

Posteriormente el tratamiento para las curvas brindado por los antiguos se traslada a Descartes. En la sección 1.2 se muestra cómo Descartes crea una serie de herramientas teóricas basadas en supuestos geométricos provenientes de la teoría de razones y proporciones de Euclides, que permiten dar solución al problema de Pappus e introducir las ecuaciones algebraicas, como solución del mismo, donde la potencia de su técnica se ve reflejada en la obtención de las cónicas como relaciones funcionales de los segmentos x e y. Todo lo anterior permea la unión entre la geometría y el algebra constituyendo así las bases de la geometría analítica.

Finalmente la representación de ecuaciones adquiere un gran avance en los trabajos de Jan de Witt, el cual sistematiza y establece una serie de teoremas para hallar ecuaciones de cónicas. En su obra se evidencia simplicidad al realizar sus enunciados y al utilizar la notación que Descartes utiliza.

A lo largo del desarrollo curva-ecuación se acogen las curvas geométricas gracias al puente entre la geometría y el algebra, sin embargo, las curvas mecánicas siguen relegadas. Es a partir de esto que se hace necesario abordar los comienzos de la teoría de series, sus elementos iniciales y su proceso de instauración.

En el capítulo II se muestra el tratamiento dado a las series numéricas en el siglo XVII, para mostrar este desarrollo se analiza el tratamiento brindado a las series previo a la obra de Isaac Newton, de esta forma en la sección 2.1 se mira la importancia que ha tenido la representación de series infinitas como salida conceptual de las curvas mecánicas; aquí se evidencia el problema de la limitación referente a la operatividad de ciertas expresiones bien sean algebraicas o mecánicas. Igualmente se realiza un inventario relacionado con las curvas mecánicas conocidas desde los antiguos hasta Cauchy y cómo estas curvas abren nuevas perspectivas del conocimiento.

En la sección 2.2 se analizan las series numéricas antes de la creación del cálculo infinitesimal, donde una de las primeras series infinitas obtenidas tiene raíces en el método exhaustivo de Arquímedes. En la subsección 2.3 se referencia la obra de Wallis, aunque el interés por esta obra no corresponde a la forma de realizar cuadraturas, sino más bien a la manera de operar las razones de series numéricas infinitas y cómo este tratamiento se constituye en uno de los elementos primigenios para las series infinitas.

En la sección 2.4 se presentan los tratamientos brindados a las series por Mercator en *logarithmotechnia*, donde se muestra la manera como las series de potencias se relacionan con los logaritmos. Aquí evidenciamos una relación entre el proceso de calcular cuadraturas y la manera de hallar una expresión que relaciona una serie infinita;

precisamente dicha relación es la manera de expresar un logaritmo como una serie de potencias. Este paso, de una expresión numérica infinita a una ecuación[2] general infinita que denota cierta dependencia de la "variable" x, representa un gran cambio cualitativo respecto a la representación. Se estaba enmarcando una de las primeras representaciones mediante series de potencias vistas como una relación funcional.

En la sección 2.5 se muestra el tratamiento brindado por Newton y Leibniz, respecto al uso de las series, precisamente Newton, por su binomio es uno de los mayores precursores de la representación mediante series de potencias. Mientras tanto Leibniz instaura un método para resolver ecuaciones diferenciales usando series de potencias. Estos procesos permitieron ampliar y extender la utilización de las series para hallar cuadraturas y expresar curvas trascendentes (es el caso del logaritmo, la exponencial, la cicloide,..etc.). En la sección 2.6 se analiza como Newton trata las series y a partir de estas logra obtener importantes resultados, tanto algebraicos como geométricos, es decir, las series de potencias inicialmente aparecen para resolver el problema de las cuadraturas. Todos estos procesos sin duda permearon la ampliación de técnicas para obtener las series trigonométricas y los procesos de reversión de series.

En la sección 2.7 Leibniz trabaja con series y es el primero históricamente en aplicar estas a la resolución de ecuaciones diferenciales, con esto se estaba inaugurando un nuevo camino de aplicación para las series, que ya no estaban ligadas a resolver únicamente cuadraturas sino a encontrar una antiderivada.

En la sección 2.8 La serie de Taylor cambia el paradigma de la representación, puesto que a través de incrementos diferenciales era posible expresar una ecuación como una serie infinita, donde su valor estaría determinado por la derivada de la misma. Sin embargo este resultado se muestra un tanto avanzado para la concepción de la época.

En el capítulo III se aborda el tránsito de la ecuación algebraica a la función tomando como elemento directriz los trabajos de Wallis, Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler

---

[2] Tal como lo establece (Guicciardini, 2003, p. 77) "las series infinitas entendidas por Newton y sus contemporáneos como ecuaciones infinitas. En 1665 los matemáticos habían comenzado a apreciar el uso de las series infinitas como representaciones de curvas de gran "dificultad. Curvas trascendentes".

y Cauchy. En este capítulo se muestra cómo, en la línea de desarrollo que va de la curva a la ecuación y de la ecuación a la función, las series de potencias, se convierten en un elemento crucial que amplía la representación de curvas y la solución de problemas físicos como el de la cuerda vibrante y la conducción del calor. Para precisar este tránsito se hace necesario considerar el segundo movimiento evolutivo, de la ecuación a la función. En la sección 3.1 se toman algunos elementos primigenios que consideramos representativos ante este tránsito, entre ellos la noción de cantidad variable[3] y la representación mediante parejas (x, y) que permiten inferir una primitiva idea de la variación respecto a un sistema de referencia. En la sección 3.2 se muestra cómo estas ideas iniciales permearon unos atisbos relacionados con la noción de función proporcionados por Leibniz.

En la sección 3.3, posterior a los descubrimientos de Newton y Leibniz, se muestra como la introducción de las curvas algebraicas posibilitaron nuevas representaciones de expresiones, entre éstas las series de potencias. Se miran las diferentes definiciones dadas que relacionan el concepto de función comenzando por la primera definición dada por Bernoulli, la cual admite que una función es una cantidad compuesta de cualquier manera. Posteriormente se realiza un inventario de las definiciones de función dadas por Euler, Condorcet, Lagrange, Fourier, Dirichlet, Cauchy y Bourbaki. El desarrollo del análisis matemático estuvo permeado por la introducción, clasificación, formalización y objetivación de los conceptos dados a lo largo del itinerario curva-ecuación- función.

En la sección 3.4 nos centramos en el tratamiento dado a las series con respecto a la convergencia de Cauchy. La introducción de criterios de convergencia y la idea de límite permitió establecer un proceso formal y estructural que permitió esclarecer ciertos agujeros negros de la matemática respecto al rigor, así mismo abrió interrogantes con respecto a los primeros.

El capítulo IV corresponde a las conclusiones. Se muestra que las series de potencias se desarrollan de manera transversal en el desarrollo de las matemáticas,

[3] Compartimos la idea de (Youschkevitch, 1975, p. 52) , la cual sitúa a Descartes como el primero en introducir la dependencia en x e y como cantidades variables y que a partir de valores conocidos de uno es posible conocer los del otro.

específicamente en las líneas de desarrollo mencionadas anteriormente. Se discute acerca de la relación entre la historia de las matemáticas y la educación matemática.

Esperamos que los resultados de este trabajo sirvan como sustento teórico para otros trabajos relacionados en el campo de la educación matemática y la historia de las matemáticas; así mismo que contribuya en la línea de investigación de historia. Por otra parte alrededor de este trabajo gira la publicación de dos artículos en revistas internacionales. Principalmente estos trabajos están relacionados con la obtención de dos resultados matemáticos que involucran series de potencias y que permiten mostrar que las series de potencias permiten obtener nuevas comprensiones sobre conceptos conocidos.[4]

[4] Ver anexos

CAPITULO I

DE LA CURVAS A LA ECUACIONES: UN TRANSITO FUNDAMENTAL DE LO SINTÉTICO A LO ANALÍTICO

APOLONIO DE PERGA

«El que entienda a Arquímedes y Apolonio admirara menos lo que los esclarecidos hombres han inventado».

Leibniz

En este capítulo se aborda un primer movimiento evolutivo como elemento inicial que apunta a la constitución de la noción de función. Este movimiento corresponde al paso de la curva a la ecuación, tomando como punto de partida ciertas concepciones que se presentan a lo largo de la historia de las matemáticas. Se analizarán las diferentes concepciones de la noción de curva para los geómetras griegos, entre los que se destacan: Menecmo, Euclides, Arquímedes y Apolonio, siendo la obra de este último un elemento de gran importancia en la identificación de las curvas por ecuaciones en la geometría analítica de René Descartes. Este tránsito permea algunos de los elementos primigenios relacionados con el desarrollo del concepto de función que siglos más tarde desembocan en la creación del análisis matemático. Precisamente, el problema central que abordamos en esta tesis es realizar un análisis histórico- epistemológico de la evolución del concepto de función y la representación de funciones mediante series de potencias.

1.1 El concepto de curva en la antigüedad

Históricamente el desarrollo de las matemáticas se encuentra ligado con los procedimientos argumentativos que se establecen en torno a los conceptos y sus definiciones. A partir de esto es permisible hablar sobre las diferentes líneas de desarrollo que se han fundado a lo largo del desarrollo de las matemáticas. Particularmente se desea analizar el paso de la curva a la ecuación, como un paso fundamental que nos lleva de la representación geométrica a la representación analítica. Uno de los entes mediadores de este paso tiene su razón de ser en la geometría de Descartes. Para entender este proceso se hace necesario mirar cuál era la concepción de "curva" en los antiguos griegos, entre los que se destacan: Menecmo, Euclides, Arquímedes y Apolonio. Justamente los geómetras griegos realizaban la siguiente categorización de las curvas.

> La primera, conocida con el nombre de lugares planos, contenía a todas las líneas rectas y circunferencias; la segunda, conocida como la de los lugares sólidos, estaba constituida por todas las secciones cónicas; y la tercera categoría, conocida como la de los lugares lineales, agrupaba a todas las curvas restantes. El nombre dado a la segunda clase venia sugerido sin duda por el hecho de que las cónicas no se definían como lugares geométricos de puntos del plano que satisfacen una condición determinada, sino que se describían de una manera estereométrica como secciones de una figura tridimensional por un plano (Boyer, 2011, p. 133).

Sin duda, las anteriores categorías permiten darnos una idea, en términos generales, de las curvas que conocían los antiguos y de su tratamiento sintético. El uso de curvas se hace necesario en la antigüedad debido a que a partir de su tratamiento se abren nuevas maneras de abordar y solucionar problemas, entre estos los tres problemas clásicos de la geometría griega los cuales giran alrededor de las curvas conocidas en la antigüedad; la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.

1.1.1 LAS CURVAS PARA MENECMO

Precisamente en el rastreo de las curvas empleadas en la antigüedad nos encontramos con una de las primeras curvas construidas (diferentes de circunferencias y rectas) antes de las cónicas de Menecmo, que se conoce como la trisectriz de Hipias (siglo V a.C); dicha curva permitió posteriormente resolver el problema de la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

La manera como se define esta curva se da en términos mecánicos, puesto que es el resultado de dos movimientos independientes entre sí. De esta manera para efectuar su construcción se tienen en cuenta elementos como recta y giro. En este orden, Hipias considera una recta paralela al eje horizontal que efectúa un movimiento vertical a velocidad constante y otra recta paralela al eje vertical que realiza un giro a velocidad constante, (Fig 1.1) de modo que al iniciar el movimiento, las rectas realizan las fases $1,2,3,\dots$ etc. (Fig. 1.1). Inicialmente las rectas CB y FE se encuentran perpendiculares. En la medida que el movimiento se genera, se obtiene como resultado los pasos 2,3,… sucesivamente se nota que las rectas iniciales al final coinciden generando la curva trisectriz.

Cabe señalar que esta curva es generada punto a punto, pero en el instante en que las dos rectas iniciales se sobreponen en el eje horizontal ya no se genera curva alguna. La razón de esto se da por la manera como se define ya que en su base ya no actúan dos movimientos independientes que se intercepten y generen la curva.

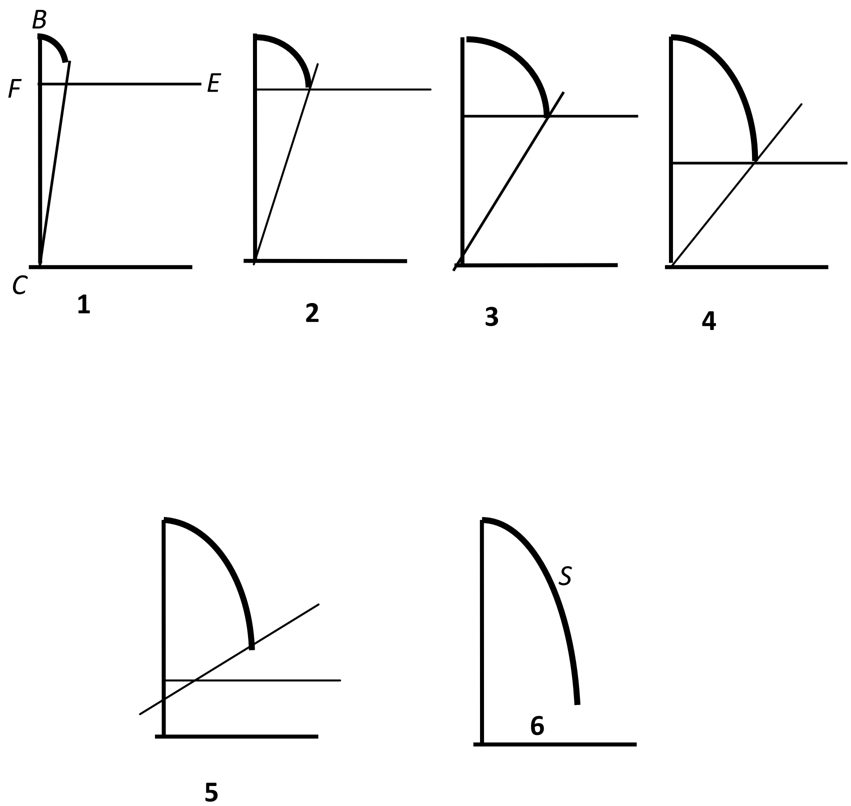


FIG1.1 FASES DE CONSTRUCCIÓN DE LA TRISECTRIZ DE HIPIAS DE ELIS

A partir de la trisectriz de Hipías se comienza a vislumbrar un primitivo proceso de generar curvas, las cuales eran distintas a círculos y rectas. En esta idea surgen maneras de aplicar estas curvas a problemas de uso práctico, tal como lo realiza, Menecmo (375-325 a.C), quien descubre las secciones cónicas como resultado de intentar dar solución a uno de los problemas clásicos de la geometría griega que era la duplicación del cubo.

Una de las consideraciones de partida de Menecmo es la manera de considerar el sólido "cono circular recto", el cual se clasifica en tres clases según el ángulo del vértice: acutángulo, rectángulo y obtuso. A partir de esto se caracteriza un objeto clave en la determinación de curvas, que es el plano que corta el cono, de esta manera se instaura una manera sintética de hallar curvas, a saber, el circulo, elipse, la hipérbola y la parábola. Así las secciones cónicas podían ser generadas utilizando tres conos distintos: la elipse se obtiene como el corte del cono acutángulo, la hipérbola como corte del cono obtusángulo y la parábola como el corte del cono rectángulo.

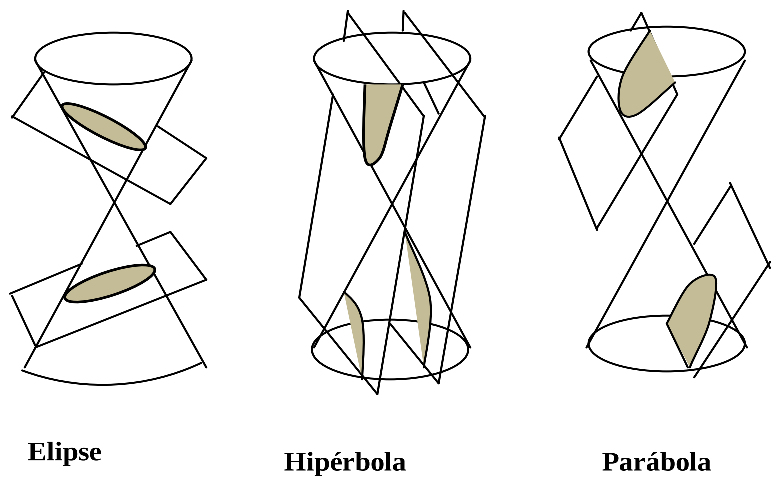


FIG. 1 2. SECCIONES CÓNICAS.

La idea de Menecmo permite obtener nuevas representaciones de las curvas de su época vistas de manera sintética. Estas nuevas representaciones producen interés por el estudio de las secciones cónicas y motivan a otros a resolver los problemas clásicos como la cuadratura del círculo.

Precisamente Dinóstrato (390 a. C. 320 a.C), hermano de Menecmo, se propone realizar la cuadratura del círculo, para ello recurre a la curva *trisectriz de Hipias*, la cual le proporciona elementos que le permitieron hallar un cuadrado equivalente al círculo.

En términos generales, lo que realiza Dinóstrato es inaugurar una manera de cuadrar el círculo usando la curva definida por Hipias. Su procedimiento se resume en hallar la media proporcional entre los segmentos relacionados de la siguiente figura. Dinóstrato presenta un teorema el cual relaciona elementos geométricos de la geometría elemental.

Justamente establece que el lado a de un cuadrado $ABCD$ corresponde a la media proporcional entre el segmento DQ y el cuarto del arco del círculo AC, es decir $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{DQ}$. Para establecer esta proporción Dinóstrato realiza la demostración por reducción al absurdo, para ello considera varios casos. El primero corresponde cuando el segmento$DR > DQ$ (como se muestra en la figura) y establece una proporción como la anterior $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{DR}$.

Luego supóngase el circulo con centro en D y radio DR el cual se intercepta con la curva trisectriz en el punto S y también se intercepta con el punto T que se encuentra en el lado AD del cuadrado, de igual manera se traza la perpendicular SU al segmento CD que pasa por el punto S. Posteriormente Dinóstrato utiliza un resultado conocido el cual establece que los arcos de las circunferencias son entre sí como sus radios es decir que $\frac{AC}{AB} = \frac{TR}{DR}$, ya que por hipótesis se tenía que $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{DR}$ se puede establecer que $TR = AB$, debido a estas primitivas propiedades y relaciones entre los arcos y los radios de las circunferencias es que Dinóstrato adquiere elementos que le permiten hallar igualdades entre un segmento y un sector circular que permean de cierta manera la cuadratura del círculo. De manera análoga se demuestra que la proporción establecida inicialmente no puede ser menor que DQ, por tanto $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{DQ}$ se cumple.

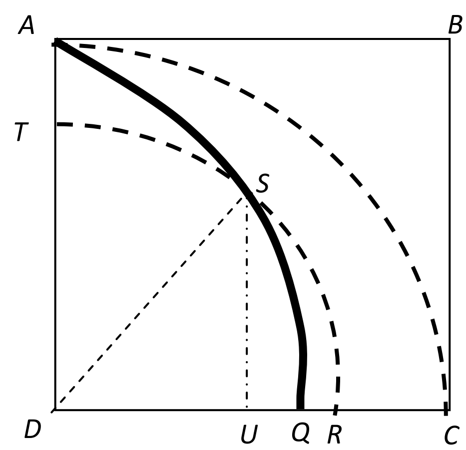


FIG. 1.3 TRISECTRIZ DE HIPIAS

En sus trabajos, Menecmo presenta las raíces primigenias de las cónicas, a partir de propiedades sustancialmente geométricas y de una manera muy particular e intuitiva de obtener curvas vistas como secciones de un cono. Todo esto da lugar al uso y representación de cónicas en una dimensión vistas como objetos generados a partir de sólidos.

1.1.2 LAS CURVAS PARA EUCLIDES

Indudablemente los *Elementos* de Euclides representan un punto de quiebre entre el quehacer matemático y la manera de analizar problemas en su época, representado como un compendio sistemático el cual proporciona una serie de elementos conceptuales que enriquecen la geometría y su manera de trabajarla, sin embargo, en su libro 11, se evidencia una manera peculiar de generar la esfera vista como la figura comprendida al girar un semicírculo. Aunque en la época de Euclides no existía un corpus teórico y numérico bien definido no fue un impedimento para producir conocimiento.

Es en esta producción de conocimiento donde Euclides aborda elementos que relacionan la obtención de curvas y su manera de verlas. Al igual que Menecmo, Euclides posee la idea de cono sin hacer muchas referencias a las secciones cónicas. Aunque es probable que en los cuatro libros perdidos de Euclides, titulados *las cónicas*, haya hecho referencia a las mismas e inclusive producido aportes mucho más significativos que los de Menecmo pero no hay indicio esto.

Sin lugar a dudas, el manejo de las curvas presentado por los antiguos es eminentemente geométrico, limitado a consideraciones tales como la manera de seccionar un cono a partir de un plano. En este sentido cabe preguntarse ¿Qué era una curva para Euclides? Como se mencionó, Euclides escribió cuatro libros sobre las secciones cónicas de los cuales, ninguno se conserva en la actualidad, pero para dar ideas acerca de este interrogante esta búsqueda nos conduce a los *Elementos.* Las definiciones dadas en el libro I, brindan algunos visos de esta concepción. Precisamente en este libro se presentan explícitamente distinciones entre superficie, superficie plana y figura.

Para Euclides el concepto de figura representa un papel fundamental en su obra. En su libro I de los *Elementos*[5], establece que:

> **Def. I.2**: Un línea es una longitud sin anchura
>
> **Def I.5:** Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura.
>
> **Def I.7:** Superficie plana es aquella superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.
>
> **Def. I.14:** Figura es aquello que esta contenido por cualquier límite o límites.

[5] Tomado de (Euclides, 1970)

Estas definiciones dan una idea general acerca de qué era una figura para Euclides y su manera de distinguirlas. Otra figura característica en Euclides es el círculo, el cual lo usa para realizar construcciones y demostrar proposiciones. De este distingue que el círculo es:

> **Def. I.15:** Una figura plana comprendida por una sola línea (llamada circunferencia) de tal modo que todas las rectas dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.

Esta definición resalta que para Euclides el círculo es una figura plana; implícitamente se encuentra amarrada la idea de figura limitada y superficie, es decir con la introducción del círculo, definido con base a figura plana que satisface cierta propiedad, se está dando entrada a nuevas figuras que posean propiedades similares, y que satisfagan a su vez la definición; pareciera ser que Euclides posee alguna idea de lugar geométrico, aunque no es muy claro; sin embargo en su libro 11, se evidencia una manera peculiar de generar la esfera vista como la figura comprendida al girar un semicírculo. De esta manera Euclides relaciona las figuras unidimensionales con las figuras sólidas en el sentido de que las primeras permiten generar sólidos, simplemente con hacer rotaciones respecto a un "eje" de referencia.

Al igual que Menecmo, es probable que Euclides distinguiera secciones generadas a partir de figuras que poseen volumen.

Sin embargo Euclides comparte la manera en que Menecmo define el cono en términos de figura plana; por esta razón, en la definición 18 de su libro XI de los *Elementos*, Euclides establece qué es un cono y da una manera de generarlo; así mismo, asigna las clases de cono que fueron usadas por Menecmo. De esta manera caracteriza y amplía el conocimiento de las cónicas en su tiempo. En el libro XI establece que:

> **Def.XI.18:** Cuando un lado del ángulo recto de un triangulo rectángulo permanece fijo y el triangulo gira a su alrededor hasta volver a la posición de la que empezó a girar, la figura formada es un cono. Si la recta que permanece fija es igual al lado del ángulo recto que gira, el cono es rectángulo; si es menor, obtusángulo; y si es mayor, acutángulo.

Esta definición es presentada de manera intuitiva describiendo las características de los conos. Aunque se puede establecer una conexión entre la manera como Euclides define el círculo y el cono, bajo el supuesto de que Euclides es consciente de que para obtener curvas bastaba seccionar el cono y para generar curvas como el círculo se limitaba a cumplir una determinada propiedad. Según lo anterior una curva para Euclides es referida al contenido, a lo limitado por limites sean líneas, círculos y que denote un entorno continuo, sin embargo cabe preguntarse ¿si un triángulo es una curva para Euclides o una línea recta? Notemos que los elementos que constituyen un triángulo son líneas y a su vez estas representan longitudes y son los límites del triángulo

1.1.3 LAS CURVAS PARA ARQUÍMEDES

Arquímedes de Siracusa (287 a.C- 212 a.C) realiza múltiples aportes. Entre sus obras se destacan: *la cuadratura de la parábola, sobre espirales, conoides y esferoides,* entre otros; Arquímedes trabaja con curvas en la misma línea de Menecmo, es decir como secciones resultantes de las tres clases de conos, entre estas curvas se destaca la espiral de Arquímedes, la cual se considera una curva mecánica debido a la imposibilidad de construirse mediante regla y compás.

En la obra de Arquímedes las curvas adquieren un gran estatus, puesto que las utiliza como una herramienta que le permite la solución de los problemas clásicos griegos. Es el caso de la curva espiral, la cual es utilizada para resolver la cuadratura del círculo, para calcular la longitud de un arco de circunferencia y la trisección del ángulo. La forma de definir esta curva se hace en términos de giros de líneas y la invariancia de un extremo de la línea.

Para entrar un poco en detalle la construcción de la espiral se muestra en la siguiente figura. En el paso 1, se traza una circunferencia y se divide por medio de radios en este caso en seis partes, luego en el paso 2, se divide el segmento OA en tantas partes como vueltas se quiera dar, después se divide el segmento OA en partes iguales, luego se hacen circunferencias concéntricas y se unen las intersecciones con los respectivos radios del círculo inicial con esto.

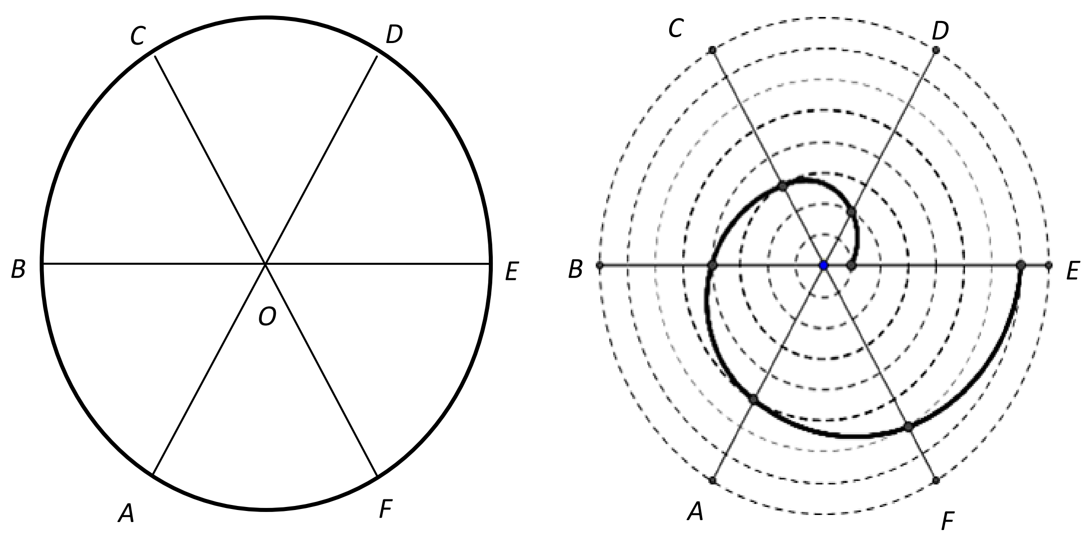


FIG.1.4 ESPIRAL DE ARQUÍMEDES

Arquímedes extiende el universo de las pocas curvas conocidas en su época y, al igual que Menecmo y Euclides, las utiliza como herramienta que le permite abordar los problemas griegos. En su caso para resolver el problema de la trisección del ángulo. Para ello Arquímedes toma un pequeño segmento de la espiral, luego supone que el ángulo que se quiere trisecar es POA, después se triseca el segmento OP, y se trazan circunferencias con radios OR y OS siendo V y U las intersecciones con la espiral de Arquímedes respectivamente, al trazar las semirrectas OV y OU se tiene de que el ángulo AOU es la tercera parte del POA.

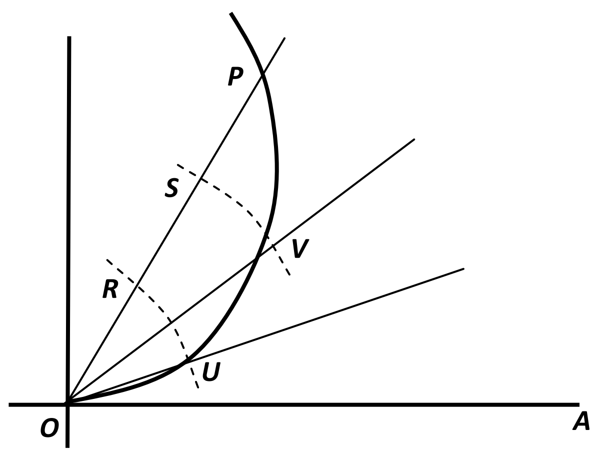


FIG. 1.5 TRISECCIÓN DEL ÁNGULO DE ARQUÍMEDES

El tratamiento dado por Arquímedes está sin duda amarrado a la idea de cuadratura; así, en *De la cuadratura de la parábola* realiza la cuadratura de un segmento parabólico para el cual utiliza el método exhaustivo[6] desarrollado por Eudoxo, que se soporta sobre la proposición X.1 de los *Elementos.*

[6] **Proposición X.1:** (*Elementos*) Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menos que las magnitudes dadas. (Euclides, 1970)

Indudablemente Arquímedes trabaja con curvas tales como la parábola, hipérbola y algunas huellas de esto se identifica en su obra *sobre las líneas espirales*. De esta manera, para construir curvas, Arquímedes utiliza el proceso denominado *neusis*;[7] así por ejemplo, la parábola la construye como se propone en el libro IV de Pappus,[8] proposición 43:
Para Arquímedes la construcción de la parábola se realiza en términos de las propiedades establecidas para los diámetros.

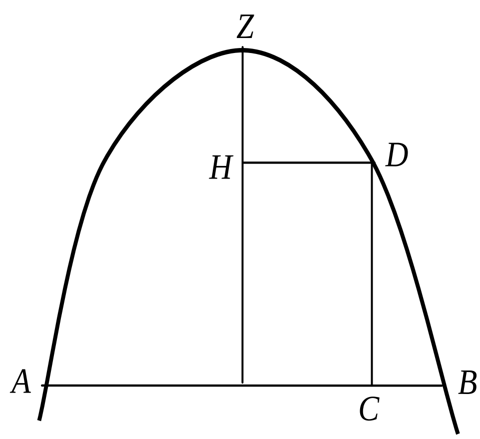


FIG. 1.6 PARÁBOLA PARA ARQUÍMEDES

Para Arquímedes no hay una directriz que permita establecer exactamente qué era una curva, aunque posee la idea de sección cónica y trabaja con parábolas, hipérbolas y círculos como se evidencia en su tratado *Sobre conoides y esferoides*; las aborda desde un punto de vista intuitivo obteniendo la manera de generarlas cónicas como secciones de un

[7]La construcción neusis (del griego νεῦσις de νεύειν neuein "dirección de inclinación"; plural: νεύσει euseis) consiste en colocar un segmento de recta de una longitud dada (a) entre dos curvas dadas (l y m), de manera que el elemento de el segmento de recta dado, o su extensión, pasa a través de un punto dado P. Uno de los extremos del segmento tiene que apoyarse sobre l, el otro extremo sobre m, mientras que el elemento línea se inclina en la dirección P de tal manera que el mismo segmento o su prolongación pase por P. Definición tomada de (Sefrin-Weis, 2010)

[8] Ver (Sefrin-Weis, 2010, p. 165)

cono. El trabajo de Arquímedes enmarca una de las primeras huellas del cálculo, en el momento en que utiliza métodos de aproximación para realizar ciertas cuadraturas. La curva es el aparato teórico de fondo que permite ampliar el conocimiento, resolver problemas y crear procedimientos geométricos, sin ellas su acometido estaría destinado a fracasar.

1.1.4 LAS CURVAS PARA APOLONIO

Posterior a Arquímedes, se encuentra Apolonio de Perga (262-190 A.C); en sus obras se vislumbra un amplio tratamiento relacionado con las secciones cónicas. Para ello Apolonio recurre a los trabajos de Menecmo y adquiere algunas ideas de sus secciones cónicas tales como el plano que secciona el cono y las clases de conos definidas.

Para Apolonio era crucial dar una definición geométrica a cada curva que era producida por intersecciones del cono con un plano, de esta manera distinguía las curvas, vistas como secciones cónicas. Esta distinción propicia un cambio conceptual en la manera de cómo se trataban las curvas en su época, vistas como algo netamente geométrico.

Precisamente en su obra titulada *las cónicas*[9] la cual representa un papel preponderante en la idea de que para Apolonio una curva podía representarse como un corte de un cono que no necesariamente debía ser recto a diferencia de la idea de Menecmo, más bien, Apolonio utiliza un único cono donde logra obtener las tres cónicas básicas (parábola, hipérbola, elipse),aparte de estas cónicas base, Apolonio realiza una construcción para el círculo, el cual puede verse como el conjunto de puntos que satisfacen cierta propiedad.

[9] El tratado titulado *las cónicas* (Roshdi, 2008) , se compone de 7 libros en los cuales proporciona una serie de definiciones y teoremas relacionados con la manera de hallar secciones cónicas y las propiedades de las mismas, como diámetros, cuerdas, etc.

Precisamente dicha propiedad se refiere a que dados dos puntos A y B se requiere encontrar el lugar geométrico[10] de los puntos del plano P de tal forma que se satisface que $\frac{PA}{PB} = k$.

Para Apolonio es claro que la manera para hallar un círculo es con base al establecimiento del término lugar geométrico, que no había sido usado por los geómetras griegos aunque él persiste en la idea de que para hallar las cónicas base se debe tener un único cono. De esta manera para derivar el círculo considera un cono de base circular oblicua y una sección triangular del cono ABC (fig. 1.7), luego un punto P situado sobre el sector circular DPEque se encuentra paralelo a BFC , con esto se puede mostrar que los triángulos AHK y ABC son congruentes y a partir de propiedades del círculo obtener la sección cónica deseada.

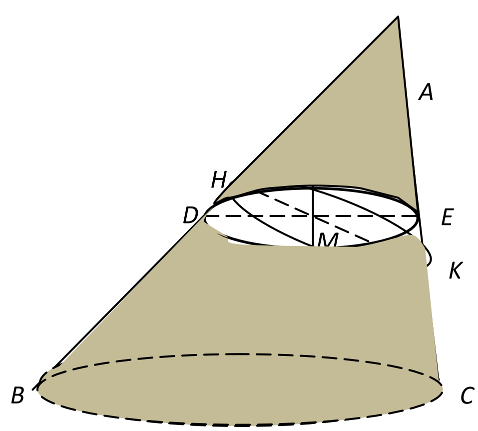


FIG1.7 CÍRCULO VISTO COMO UNA SECCIÓN DE UN CONO

---

[10] Apolonio en su primer libro usa ocho definiciones. En una de estas define implícitamente lo que es una sección cónica. **Def.I.1.** Si desde un punto no situado en el plano de un círculo se traza a la circunferencia de éste una recta, se prolonga en sus dos direcciones y, permaneciendo fijo el punto, se hace recorrer a la recta la circunferencia hasta que vuelva a su posición inicial, llamo superficie cónica a que, descrita por la recta, se compone de dos superficies opuestas por el vértice que se extienden al infinito, lo mismo que la recta generatriz; y llamo vértice de la superficie al punto fijo, y eje a la recta trazada por éste y el centro del círculo. (Roshdi, 2008, p. 7)

Es así, que para generar la elipse consideraba un sector circular de un cono oblicuoABC (Fig.1.8), luego un punto P que pertenezca a la sección HPK, de modo que prolongando HK se intercepte con BC en el punto G. Así al cortar el cono con el círculo DPE y con el plano HPK se obtiene el segmento PM, donde los triángulos HDM y HBG son semejantes, entonces tenemos que $\frac{DM}{HM} = \frac{BG}{HG}$. Análogamente los triángulos MEK y KCG son semejantes así $\frac{ME}{MK} = \frac{CG}{KG}$.

De las propiedades de la circunferencia y combinando lo anterior se obtiene que $PM^2 = (HM.BG/HG)(MK.CG/KG)\,(MK.CG)$, modernamente esta ecuación puede ser rescrita como $y^2 = kx(2a - x)$ siendo $PM = y, HM = x, HK = 2a$ que corresponde a la ecuación de la elipse con vértice H y eje mayor HK

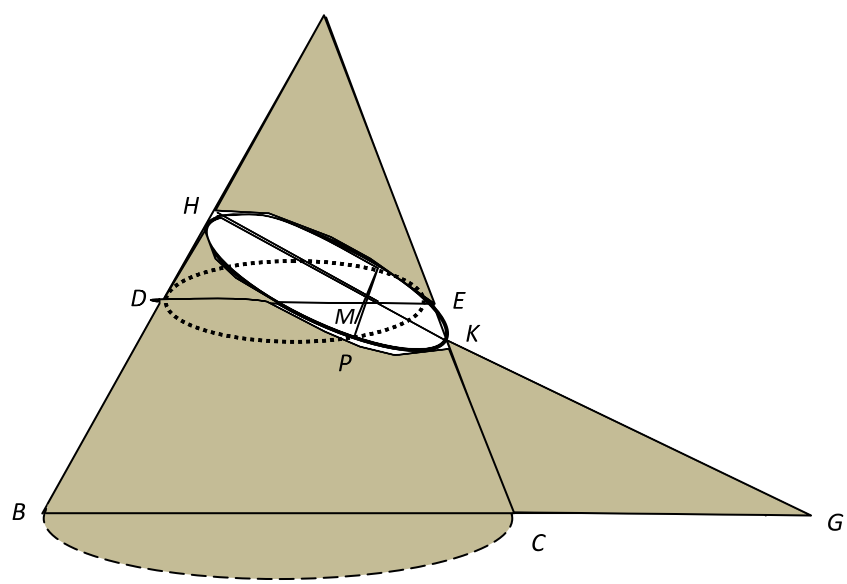


FIG1.8 LA ELIPSE VISTA COMO LA SECCIÓN DE UN CONO

En Apolonio se pueden destacar dos líneas de desarrollo presentes en su obra:

1. La manera de generar cónicas mediante un compendio sistemático cargado de supuestos geométricos y espaciales.

2. La manera de enriquecer unos objetos existentes denominados curvas que posibilitaron la ampliación y reducción de los métodos para hallarlas tales como la consideración de que a partir de un único cono podía encontrar las curvas:

- Una parábola cuando ella era llevada paralelamente por una generatriz.
- Una hipérbola cuando ella cortaba las dos capas del cono.
- Una elipse cuando ella cortaba todas las generatrices.

3. La manera de usar el objeto curva para proponer problemas que relacionen cónicas, puntos y rectas.

En este orden, como en el caso de las cónicas, Apolonio define y genera la herramienta y luego le encuentra aplicación. Es preciso señalar que según la concepción de los antiguos unos se vuelven subsidiarios de los trabajos de sus antecesores y varios de ellos poseen puntos de convergencia; en esto se muestra la conexión y la característica común en las obras de los griegos anteriormente mencionados.

Apolonio logra identificar las muchas propiedades de las curvas que son conocidas, entre ellas[11]: ejes, centros, diámetros, asíntotas, focos, tangentes y normales que sirven de sustento teórico para Fermat y Descartes.

Aunque los trabajos de Apolonio no solo son limitados al tratamiento de las secciones cónicas, también se ocupa del tratamiento a los problemas que según la clasificación de los geómetras griegos corresponden a los tipos de *problemas planos* en los cuales sucumben las rectas y los círculos. Uno de estos es cuando se propone un problema en el que se deba hallar una recta que estuviese generada a partir de dos condiciones iniciales dadas[12] . Otro ejemplo de esto es en su tratado de tangencias, el cual propone hallar un círculo ligado a ciertas condiciones iniciales[13], lo que crea problemas en su solución. Uno de los problemas propuestos por Apolonio es el referido a encontrar el lugar dadas tres o cuatro líneas.

> Dadas tres o cuatro líneas en un plano, encontrar el lugar de un punto *P* que se mueve de tal forma que el cuadrado de la distancia de *P* a uno de estos es proporcional al producto de las distancias de las otras dos.[14]

De esta manera, el problema abierto es acogido por Pappus el cual propone cómo hallar *el lugar relacionado con tres o cuatro líneas.*

Si miramos el tratamiento histórico del concepto de curva en la antigüedad encontramos varios puntos de convergencia en su tratamiento, uno de estos es la manera geométrica y sintética que se evidencia en las obras de Menecmo, Euclides, Arquímedes,

---

[11] Precisamente (Roshdi, 2008, p. 7) muestra que los trabajos de Apolonio permitieron introducir conceptos como longitudes de diámetros y diámetros conjugados.

[12] Uno de estos problemas aparece en *Secciones en una razón dada*. Dadas dos rectas y un punto sobre cada una de ellas, trazar por un tercer punto dado una recta que corta a las anteriores en segmentos que estén en una razón dada.

[13] Dadas tres cosas, cada una de las cuales puede ser bien un punto, una línea recta o un círculo, dibujar un círculo que pase a través de cada uno de los puntos dados o que toque las líneas rectas o círculos. (Posteriormente resuelto por Isaac Newton).

[14] Ver (Roshdi, 2008, p. 4)

Apolonio y Pappus. Si bien esta manera es abordada en sus trabajos, la idea de cono es fundamental y crucial a la hora de hallar curvas mediante secciones cónicas.

A partir de aquí se comienza a instaurar un tratamiento geométrico a las curvas que siglos más tarde servirán de sustento teórico para Descartes. Precisamente, Descartes soluciona el impase relacionado al momento de establecer proporciones como $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, permitiendo expresarlas como el producto de medios es igual al producto de extremos, es decir $AD = CB$. El lujo teórico de Descartes se justifica con la definición de multiplicación segmentos.

1.2 IMPORTANCIA DE LA REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA COMO PASO PREVIO A LA REPRESENTACIÓN DE LAS CURVAS MEDIANTE ECUACIONES

RENÉ DESCARTES (1596-1650)

«Las Matemáticas tienen invenciones muy sutiles y pueden utilizarse tanto para contentara los curiosos como para facilitar todas las Artes y disminuir el trabajo de los hombres.

Descartes

Frente al discurrir histórico presente a lo largo de los diferentes trabajos relacionados con las curvas, según la concepción de los antiguos, en el siglo XVII en los trabajos presentados por René Descartes (1596-1650) aparece una salida conceptual que permite acoger e introducir ecuaciones a los problemas planos. Justamente se presenta la manera de cómo amarrar una ecuación a una curva, a partir de aquí se empieza a observar una cierta dependencia entre el proceso de generar ecuaciones a partir de las curvas dadas, vistas como situaciones netamente geométricas.

Así, al tomar las curvas definidas por los antiguos como las secciones cónicas, se asigna una ecuación algebraica a partir de una serie de presupuestos geométricos y algebraicos propuestos en (Descartes R. , 1637). Es decir se estaba enmarcando la unión entre la geometría y el algebra, estableciendo la geometría analítica, donde dicha unión representa un gran catalizador conceptual que permitió resolver problemas que no fueron resueltos por los antiguos; como el problema de Pappus.

Aunque el álgebra, antes de Descartes, tiene raíces alrededor del año 1544 en los trabajos de Nicoles Oresme, Girolamo Cardano (1501-1576), Tartaglia con la manera de resolver ecuaciones como la cuadrática y cúbica, la manera retorica infundida por Diofanto sufre un cambio en su sintaxis. Descartes no es el único que resuelve ecuaciones los antiguos también lo hacían pero sólo resolvían ecuaciones de la forma $P(x) = 0$, mientras que Descartes resuelve ecuaciones de la forma $P(x, y) = 0$.

Para tener una representación de una curva como una ecuación, hubo necesidad de establecer un sistema numérico amarrado a la representación geométrica y la representación simbólica de las ecuaciones. Tal como lo establece (Recalde, 2013, p. 8)

> La unidad juega un papel referencial, diferente al carácter absolutista de la aritmética euclidiana. Para Descartes, ella no constituye el punto de partida sino que se define de manera convencional. Esto significa que el producto de dos líneas guarda íntima relación con la línea que se tome como unidad y no tiene un resultado único como en el caso de los números.

Esto permitió que Descartes, en la geometría, definiera el uso de la magnitud unitaria, que le permite definir la multiplicación de segmentos como un segmento; es decir obtiene la ley de cerradura para segmentos.

Para ello, Descartes define formalmente la multiplicación de segmentos mediante la noción de cuarta proporcional, establecida por Euclides en la proposición VI.12 de los *Elementos.* Descartes entiende que para multiplicar dos segmentos BD y BCse hace necesario definir un segmento unidad AB y encontrar un segmento EB, que sea la cuarta proporcional de los segmentos $BD, BC; AB$, esto es según la (fig. 1.9)

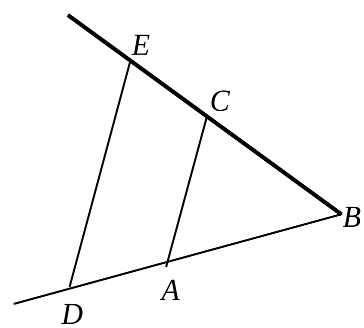


FIGURA 1.9 MULTIPLICACIÓN DE DOS SEGMENTOS BC Y BD.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{EB}$$

Por tanto EB es el producto de BC y BD.

Cabe señalar que Descartes abre un nuevo campo conceptual con el hecho de incorporar un segmento unitario, a partir de esto, extiende una propiedad numérica al campo de las magnitudes que puede escribirse como $1 \times EB = BC \times DB$. Para Descartes no es suficiente esta definición sino que además incorpora la división y la radicación.

Para la división entre segmentos se sigue el siguiente proceso. Supongamos que se quiere dividir BD entre BC,

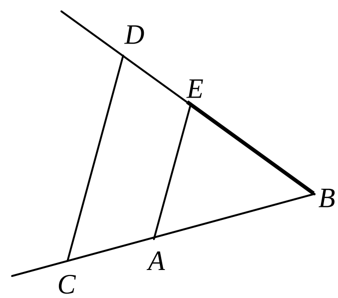


FIGURA 2.0 DIVISIÓN DE DOS SEGMENTOS BD Y BC.

Luego BE es el resultado de dividir BD entre BC.

Otra operación definida por Descartes es la radicación, para la cual considera el segmento AB. Construye el segmento AH, siendo este la suma de AB y la unidad BH. Después se traza la circunferencia AIH, donde el diámetro es AHy radio AF.

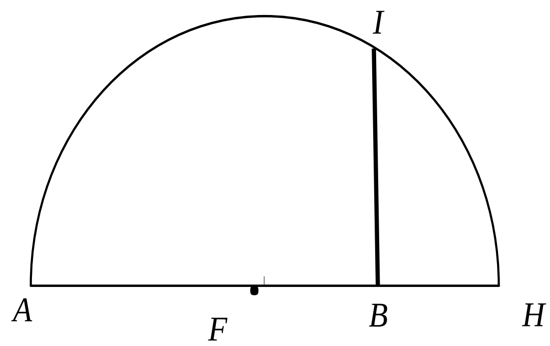


FIG. 2.1 EXTRACCIÓN DE RAÍZ

$$\frac{AB}{BI} = \frac{BI}{BH}$$

Por lo tanto,

$$BI = \sqrt{AB}$$

En el sentido de (Recalde, 2013, p. 8) la unidad cartesiana representa un cambio significativo en lo referente a la noción de número, ya que le permite a Descartes dotar a los segmentos de las operaciones aritméticas brindando un estatus más general, posibilitando la operatividad entre segmentos como una operación bien definida. Toda esta maquinaria teórica, de las proporciones de Euclides y la representación segmentista, se convierte en una poderosa técnica para introducir ecuaciones algebraicas. Para realizar esto, Descartes establece una notación particular que simplifica la notación dada por los antiguos para los segmentos, para multiplicar dos segmentos BD y CH, los designa como a y b

respectivamente, su producto se escribe como ab, igualmente para la suma y radicación. A partir de esto se comienza a establecer un nuevo lineamiento referente a la escritura y la introducción de nuevas operaciones.

Al introducir una operatividad entre segmentos surge una nueva concepción relacionada con la manera de abordar problemas. Un vivo ejemplo se presenta cuando Descartes resuelve la ecuación de segundo, tercer y cuarto grado, donde con base a una situación geométrica determinada logra hallar una conexión entre su método de solución de problemas y la manera de producir ecuaciones. Para ello, supone que el problema como resuelto y considera una línea z que es la que desea hallar en el caso de la ecuación de la forma $zz = az + bb$.

Pero Descartes va un poco más allá del tratamiento brindado en el caso de la ecuación cuadrática y se pregunta por la solución del problema de Pappus que ni Apolonio y Pappus lograron solución alguna, presentando una brillante solución, mediada por la geometría y el álgebra.

1.3 La noción de curva en Descartes

En términos generales Descartes en su primer libro establece un procedimiento que relaciona los problemas que pueden construirse usando únicamente líneas, rectas y círculos, Descartes entiende y caracteriza ¿Qué es una ecuación? Tal como se establece en la geometría:

> Si, pues deseamos resolver un problema, inicialmente debe suponerse efectuada la solución, dando nombre a todas las líneas que se estimen necesarias para su construcción, tanto a las que son desconocidas como a las que son conocidas. A continuación, sin establecer distinción entre las líneas conocidas y las desconocidas, debemos descifrar el problema siguiendo el orden que muestre, de modo más natural, las relaciones entre estas líneas, hasta que se identifique un medio de expresar una misma cantidad de dos formas: esto es lo que se entiende por una ecuación pues los

> términos de una de estas expresiones son iguales a los de la otra (Descartes R. , 1637, pág. 392).

La noción de curva en Descartes adquiere un sentido geométrico-algebraico, a partir de esto se permea la distinción de curvas como el resultado de una construcción geométrica particular, donde dicha construcción permite adquirir propiedades y características de la curva en mención. La forma de interrelacionar líneas-segmentos con expresiones simbólicas (ecuaciones) es lo que permite, a Descartes, ir más allá del carácter geométrico y realizar un tránsito hacia lo analítico, es decir, amarrar una ecuación a una curva.

1.3.1 DESCARTES Y EL PROBLEMA DE PAPPUS

Pappus de Alejandría (290 a.C-350a.C) realiza una gran compilación, organización, clasificación y generalización del conocimiento proveniente de las obras de sus antecesores, en su obra *la colección matemática*[15]. Al igual que Menecmo, Arquímedes, Euclides y Apolonio hace distinción entre la clasificación de los problemas, planos, sólidos y lineales. Los primeros se limitan a las construcciones mediante círculos y líneas rectas. Los problemas sólidos pueden ser solucionados mediante el uso de las secciones cónicas y los lineales involucran los dos anteriores, es decir pueden resolverse utilizando círculos, líneas y secciones cónicas.

[15] Compartimos la tesis de (Sefrin-Weis, 2010, p. XIV) quién establece que: la colección IV de Apolonio puede leerse y fue entendida, como un unificado, coherente y esencialmente un exhaustivo reconocimiento de la tradición geométrica clásica desde el punto de vista de los métodos.

Al igual que sus predecesores, Pappus se interesa por los tres problemas de la antigüedad griega considerando la duplicación del cubo y la trisección del ángulo como problemas que pertenecen a los sólidos y considera la cuadratura del círculo como un problema lineal.

Pappus brinda un tratamiento a las curvas y utiliza las secciones cónicas para resolver problemas tales como la manera de generar alguna de las secciones cónicas (curvas) dadas tres o cuatro líneas (rectas). Aunque Apolonio y Euclides se plantean estos tipos de problemas preguntándose por el lugar generado dadas cierta cantidad de líneas y ángulos conocidos. Sin embargo el problema en general queda sin resolver hasta Descartes quien reconoce la manera de encontrar una curva o lugar geométrico, donde el elemento principal es la introducción de las ecuaciones algebraicas y una notación especial para los segmentos.

De tal forma, como lo establece (Arboleda, 2012, pág. 3), el problema de Pappus pertenece a la clase que hoy conocemos como problemas *de lugar geométrico* en cuanto a su solución comporta la construcción de una curva algebraica. Pero cabe preguntarse si ¿Pappus era consciente de que su planteamiento en realidad correspondía a la generación de curvas? La respuesta a este interrogante es sí, y se presenta en el hecho de que Pappus soluciona el problema para dos y tres líneas.

En la solución del problema de Pappus se evidencia un uso implícito de un sistema coordenado, aunque no necesariamente este sistema se encuentra constituido por dos rectas perpendiculares como se usa modernamente, sin embargo en el tratamiento dado por Descartes se vislumbra la dependencia entre los términos conocidos y desconocidos. Para precisar un poco veamos cómo se constituye el problema y cómo su solución se convierte en un fuerte indicador de la manera de producir curvas y asociarles una ecuación algebraica.

Por ejemplo, Pappus se pregunta por el lugar generado dadas dos líneas rectas, dos ángulos y una razón dada. Justamente el caso de dos líneas rectas dadas corresponde a un lugar plano. La siguiente construcción detalla un poco esto. De acuerdo con (Arboleda, 2012) consideremos dos rectas, L y M, dos ángulos $\alpha\ y\ \beta$ y una razón θ conocidos. Luego se asignan p_1, p_2 como las distancias desde la recta L al punto P y la distancia de la recta M al punto P respectivamente. El problema consiste en encontrar los puntos P de tal forma que la proporción $\frac{p_1}{p_2} = \theta$ se mantenga constante.

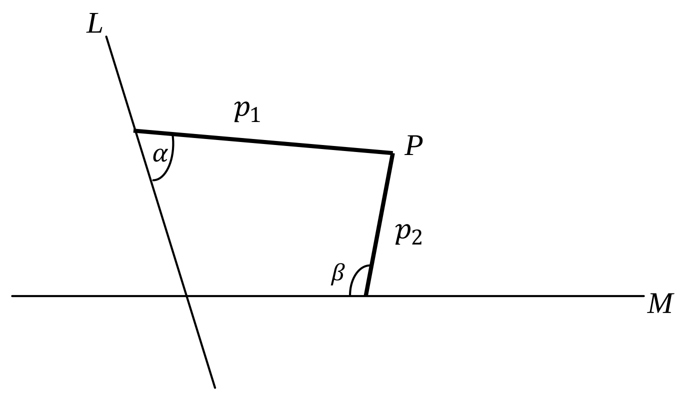


FIGURA 2.2. PROBLEMA DE PAPPUS PARA DOS LÍNEAS RECTAS DADAS.

Ante todo Pappus no resuelve el problema para una mayor cantidad de líneas rectas, el que se encarga de desentrañar este problema geométrico y dar cuenta del lugar geométrico generado es Descartes, en su segundo libro de la geometría *Sobre la naturaleza de las líneas curvas*.

De esta forma Descartes visualiza la posibilidad de aplicar su nuevo método a los problemas que estuvieran asociados a una situación geométrica en particular. Es así como problema de Pappus adquiere una gran estatus en la manera de ver los problemas de orden lineal.

En la Geometría, Descartes referencia a Pappus en el sentido de que se evidencia la lectura previa de Descartes a la obra de Pappus llamada la *colección,* exactamente en el libro VII de Pappus se expone el problema para n líneas sin una solución evidente.

Pappus establece:

> Si son dadas tres líneas rectas en posición, y si son trazadas otras tres líneas rectas desde un mismo punto formándose ángulos conocidos con las tres líneas dadas, y si, a su vez, es conocida la proporción del rectángulo formado por dos de las líneas trazadas con el cuadrado de la otra, entonces el punto se encuentra en un lugar sólido, dado en posición, es decir, sobre una de las tres secciones cónicas. Y si, de nuevo, se trazan líneas sobre cuatro rectas dadas en una determinada posición, en ángulos dados, y se da la proporción del rectángulo formado por dos de las trazadas con el formado por las otras dos, entonces y de modo semejante el punto se encuentra en una sección cónica Por otra parte, se ha demostrado que únicamente a dos líneas, el lugar del punto no es de los que son conocidos; es de los llamados simplemente líneas, sin conocerse nada más sobre su naturaleza o propiedades. Una de ellas, no la primera, pero sí la más clara, ha sido examinada, siendo de utilidad. Las proposiciones relacionadas con las mismas son éstas[16].

De acuerdo con Descartes, Pappus es consciente de que el lugar generado corresponde a una sección cónica, más aún, que existe una manera de producir cónicas donde la situación geométrica es un elemento que particulariza el problema. Por esta razón aparece una concepción que relaciona los sólidos y un conjunto de premisas que anteceden la curva generada. En otras palabras, se está reivindicando una unión entre los entes lineales (líneas, rectas) y los entes sólidos, que constituyen el trasfondo conceptual de base para producir y conocer las propiedades de una curva. Sin embargo Pappus presupone un problema para el caso de que el número de líneas sea mayor que cuatro, ¿Qué lugar es generado para cinco líneas o más? Indudablemente Pappus no logra caracterizar la naturaleza, ni las curvas para este tipo de consideraciones, pero sí establece la directriz del problema:

[16] Tomado en (Descartes R. , 1637, pág. 399)

> Para cinco líneas rectas, dadas en posición, sobre otras rectas bajo ángulos dados, y se da la proporción entre el paralelepípedo rectángulo comprendido bajo tres de las trazadas y el paralelepípedo rectángulo comprendido bajo las otras dos y otra línea dada, el punto se encontrará sobre una cierta línea[17],…

Esta manera de plantear el problema presupone que el problema propuesto, podría ser solucionado, sin embargo, Pappus presenta señales referentes a una posible solución, mas no lo resuelve debido a la carencia de aparato teórico al identificar que la solución caería sobre una línea.

Aunque Pappus plantea el problema, es Descartes quien da respuesta al mismo, realizando una caracterización y generalización del problema para una mayor cantidad de líneas rectas dadas, tal como se introduce en (Álvarez, 2000, p. 43)

> Descartes en ningún momento señala explícitamente la naturaleza de la línea o lugar geométrico de los puntos que dan solución al problema para n líneas… Destaca de inmediato la clasificación de curvas en grados.

[17]Tomado de (Descartes R. , 1637, pág. 400)

Casos	Cantidad de líneas rectas	Se hallan los puntos con:
1	3,4,5	Regla y compás
2	6,7,8,9	Geometría de sólidos (secciones cónicas)
3	10,11,12,13	Línea curva de un grado mayor que las secciones cónicas
4	14, 15, 16,17,…	Línea curva de un grado mayor que la precedente.

TABLA 1 CARACTERIZACIÓN Y GENERALIZACIÓN PARA EL PROBLEMA DE PAPPUS.

En este sentido el problema de Pappus comienza a sufrir un proceso de organización provista por Descartes y cabe duda que este problema representa en Descartes un punto clave al escribir la geometría, en el sentido de que permite la aplicabilidad de un aparato teórico constituido fundamentalmente por elementos de la teoría de proporciones de Euclides, los aportes y las propiedades de las curvas descubiertas por Apolonio y el simbolismo algebraico procedente de la notación utilizada por Vieta.

El problema de Pappus consiste en encontrar el lugar generado dado cuatro rectas y cuatro ángulos. Como primer paso Descartes da cuatro líneas AB, AD, EF, GH como se muestra en la figura.

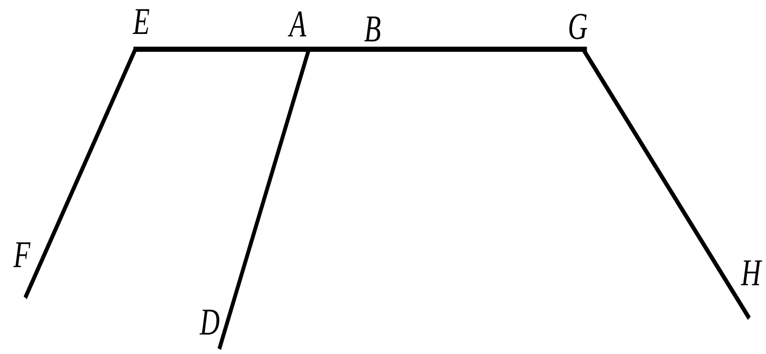


FIGURA 2.3 RECTAS DADAS PARA EL PROBLEMA DE PAPPUS

Luego de ello supone un punto C como la solución del problema, de tal forma que al realizar ciertas prolongaciones sea posible encontrar una ecuación que me permita hallar las líneas rectas que pasan por el punto C en términos de cantidades conocidas y desconocidas, de esta manera se interrelacionan segmentos.

Como punto de partida Descartes supone que el problema está resuelto; siendo el punto C la solución, luego asigna las cuatro rectas dadas en posición mas no se da su longitud de las mismas, siendo estas AB, AD, EF, GH los ángulos se dan en términos de trazar las líneas desde el punto C; $CB, CD, CF\ y\ CH.$ y sus respectivos ángulos dados $\angle CBA, \angle CDA, \angle CFE, \angle CHG.$ A continuación realiza asignaciones para las líneas dadas, siendo $AB = x, BC = y$ la asignación dada para estas dos líneas radica en el hecho de que se utilizan como sistema referencial que más tarde servirá como parte de la solución del problema que se traduce en una "ecuación" en términos de dos variables. En este momento Descartes utiliza el sistema referencial que modernamente se puede traducir como las coordenadas (x, y) .

Aunque el sistema dado por Descartes es oblicuo, no se separa mucho de la idea moderna debido a que para cada segmento y ó x que suponga conocido, puedo encontrar uno en términos del otro. Es decir posee la idea de tabular (Fig. 2.4). Descartes logra establecer la siguiente cadena de igualdades.

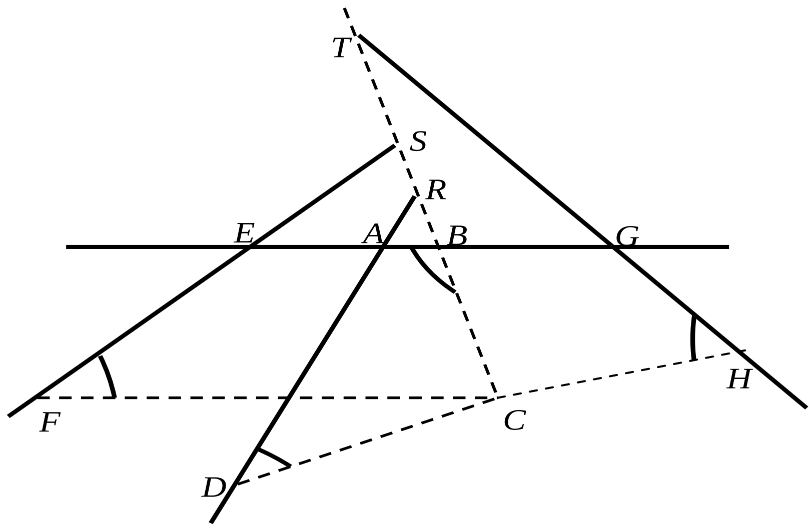


FIGURA 2.4 EL PROBLEMA DE PAPPUS

$$\frac{AB}{BR}=\frac{z}{b};\quad \frac{CR}{CD}=\frac{z}{c};\quad \frac{BE}{BS}=\frac{z}{d};\quad \frac{CS}{CF}=\frac{z}{e};\quad \frac{BG}{BT}=\frac{z}{f};\quad \frac{TC}{CH}=\frac{z}{g}$$ [18]

Al establecer la siguiente proporción pareciera ser que se obtuviera un error[19]

---

[18] Para mostrar que los "ángulos del triángulo ARBson dados" observemos que el ángulo $\angle BAR$ es dado, porque subyace de dos rectas dadas que son DA y AB. También el ángulo $\angle ABR$ porque es el suplemento de $\angle CBA$, y $\angle BRA$ es el suplemento de $\angle BAR$ y $\angle ABR$. A continuación la proporción AB y BR es conocida surge del hecho que como los ángulos ARB y BAR son conocidos entonces $\sin ARB : \sin BAR = AB : BR$. El procedimiento anterior se puede aplicar para los otros triángulos presentes en la (Fig.2.4.) donde la magnitud z representa una magnitud- parámetro que sirve para medir y establecer las proporciones dadas.

[19] Pareciera ser que al aplicar la ley de los senos para los demás triángulos que se muestran en la figura apareciera un error en la geometríe (Descartes R. , 1637, p. 28), precisamente en la parte donde se establece la siguiente proporción $\frac{CR}{CD}=\frac{z}{c}$ **(1)**. El error radica en que al realizar el proceso minuciosamente determinado

$$\frac{CR}{CD} = \frac{\sin DRC}{\sin CDR} = \frac{\sin ARB}{\sin CDR} = \frac{z}{c}$$

Después de encontrar la manera de relacionar segmentos y ángulos conocidos con desconocidos, de establecer proporciones y de valerse de las propiedades de la semejanza de triángulos, Descartes aplica el procedimiento mencionado en su libro I.

> En primer lugar supongo la cosa ya hecha, y para aclarar la confusión entre todas estas rectas, considero una de las dadas y una de las que se deben encontrar, por ejemplo AB y CB, como las principales y a las cuales trato de referir todas las demás. Sea x el segmento de recta AB, entre los puntos A y B; y sea y el segmento BC… (Descartes R. , 1637, p. 28)

De esta forma, Descartes sintetiza la representación de los segmentos a una escritura un poco más simple, así la respectiva asignación para los segmentos inicialmente dados adquiere la forma $EA = k, AG = l, AB = x\ , BC = y$, con lo que la figura dada para el problema de cuatro líneas se transforma en

las proporciones dadas, nos lleva al resultado de que $\frac{CR}{CD} = \frac{c}{z}$ **(2)** lo cual contradice lo supuesto por Descartes. Y si se tomara la proporción (2) los resultados esperados para segmentos como CD tendrían otra forma algebraica. Para subsanar este problema creo que Descartes debió haber considerado la proporción $CD: CR$, sin embargo como z representa un parámetro que se supone constante para el resto de proporciones establecidas con cierto artificio se puede subsanar dicho error.

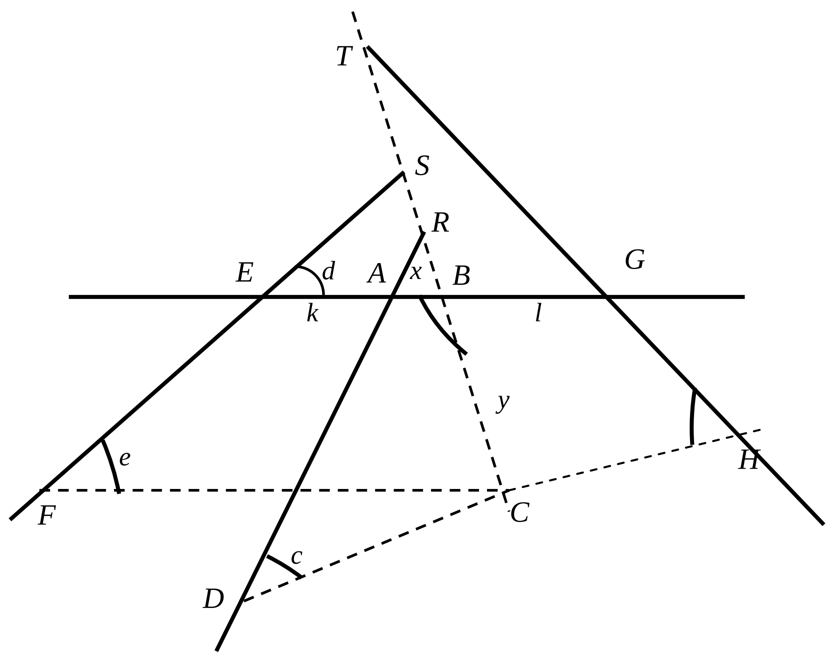


FIGURA 2.5 ASIGNACIONES DE LAS RECTAS Y ÁNGULOS EN POSICIÓN

Se tienen en cuenta la cadena de igualdades dada al inicio y con base a la asignación y conocimiento de los segmentos y ángulos conocidos y desconocidos, se obtienen las siguientes igualdades:

$RB = \frac{bx}{z}$ **(**Puesto que se establece la razón $\frac{AB}{RB} = \frac{z}{b} = \frac{x}{RB}$)

Puesto que $BC = y$ la línea CR se expresa como:

$$CR = BC + RB = y + \frac{bx}{z}$$

$CD = CR \times \frac{CR}{CD} = \left(y + \frac{bx}{z}\right)\frac{c}{z} = \frac{yc}{z} + \frac{bcx}{z^2}$ (Utiliza la proporción $\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$ donde $CD = \frac{c}{z} \times CR$)

La línea EB se puede expresar como: Siendo $EA = k, AB = x$

$$EB = EA + AB = k + x$$

$BS = EB \times \frac{d}{z} = \frac{(k+x)}{z}d = \frac{dk+dx}{z}$ (Utiliza la proporción $\frac{EB}{BS} = \frac{z}{d}$ donde $BS = \frac{c}{z} \times EB$)

La línea CS se expresa en términos de los segmentos anteriormente hallados:

$$CS = CB + BS = y + \frac{dk + dx}{z} = \frac{zy + dk + dx}{z}$$

$CF = CS \times \frac{e}{z} = \left(\frac{zy+dk+dx}{z}\right)\frac{e}{z} = \frac{ezy+dek+dex}{z^2}$ (Utiliza la proporción $\frac{CS}{CF} = \frac{z}{d}$ donde $CF = \frac{d}{z} \times CS$)

$G = AG - AB = l - x$

$$BT = BG \times \frac{f}{z} = (l - x)\frac{f}{z} = \frac{fl - fx}{z}$$

$$CT = BC + BT = y + \frac{fl - fx}{z} = \frac{zy + fl - fx}{z}$$

$$CH = CT \times \frac{g}{z} = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}$$

A partir de la introducción de una nueva representación y expresión de ecuaciones algebraicas en función de segmentos, comienza a verse un cambio cualitativo en la manera de ver las curvas no solamente como una situación geométrica particular, sino como una expresión analítica, que permite conocer propiedades de la curva tomando como referencia un sistema de coordenadas determinado. Es en este momento que el objeto "curva" comienza a trascender hacia los elementos algebraicos denominados "ecuaciones".

Precisamente las líneas de causalidad teórica presentes en Descartes que permitieron abordar el problema de Pappus y dar solución al mismo, se engendran en la manera de solucionarlo y con más fuerza en la manera de tomar curvas (secciones cónicas) y amarrarles una ecuación algebraica que denotara su representación, más aún, cuando no solamente la manera de hallar ecuaciones se limita a resolver el problema de Pappus sino a la creación de un "instrumento" generalizado que da cuenta de muchas otras curvas diferentes a las secciones cónicas , es decir que posean un grado mayor que una ecuación de segundo grado.

Indudablemente con las diferentes relaciones que se presentan en la cadena de igualdades presentadas por Descartes y los nuevos segmentos que aparecen en términos de x e y, se muestra una dependencia entre las magnitudes inicialmente dadas, sin embargo, con la eminente solución del problema de Pappus y el evidente proceso de algebrización de las magnitudes cabe preguntarse, si ¿Descartes es consciente de que la solución del problema implica la generación de las secciones cónicas?

La solución del problema se hace tangible en el sentido de que Descartes encuentra las longitudes CH, CT, CF, CS, como las líneas que pasan por C.

Estas líneas cumplen la condición de Pappus, que se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CH}{CF}$$

Con la propiedad de cerradura definida anteriormente para la multiplicación y división de segmentos tenemos la condición del problema de Pappus

$$CB \times CF = CH \times CD$$

Sustituyendo los valores encontrados para cada segmento con la notación dada por Descartes obtenemos la siguiente expresión,

$$y \times \frac{ezy + dek + dex}{z^2} = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2} \times \left(\frac{yc}{z} + \frac{bcx}{z^2}\right)$$

Organizando términos y agrupando los semejantes se obtiene la siguiente expresión:

$$(-cgz^2 + ez^3)y^2 + (bcfg)x^2 + (bcgz - cfgz - dez^2 - dez^2)xy \\ + (-cfglz + dekz^2)y + (-bcfgl)x = 0$$

> Descartes sabe que todos los puntos de una cónica se pueden construir por regla y compás. Cuando la curva geométrica es una cúbica o tiene grado cuatro se construyen punto a punto por la intersección de dos cónicas. Las de quinto o sexto grado son construibles mediante la intersección de su "parábola de segundo grado" con el círculo, y así sucesivamente. Esto le permite a Descartes generar una jerarquía de curvas reagrupando los grados por pares o géneros : las curvas geométricas de grado $2n - 1 \; y \; 2n$ se construyen por la intersección de un círculo y una curva de grado n. (Arboleda, 2013)

Si tomamos

$A = -cgz^2 + ez^3$,

$B = bcfg$,

$C = bcgz - cfgz - dez^2 - dez^2$,

$D = -cfglz + dekz^2$,

$E = -bcfgl$

La ecuación anterior adquiere la forma $Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dy + Ex + F = 0$ a partir de esta ecuación se presentan tres consideraciones para los posibles valores que toma las cantidades constantes:

- Es una parábola si A ó $C es\ cero$.
- Es una elipse si A y C tienen el mismo signo (si$A = C$ corresponde a un círculo).
- Es una hipérbola si A y C tienen signos opuestos.

Sin duda los valores desconocidos corresponderían a x e y. Una de las pretensiones de Descartes es conocer la forma de la cónica generada por la ecuación anterior, para ello realiza ciertas consideraciones sistemáticas a la hora de identificar la cónica. Entre estas consideraciones se encuentra la de mantener fijo un valor de y, a partir de este conocer los de x modernamente esto correspondería al proceso de tabular.

Para ver mejor este proceso tomemos un caso particular[20] suponiendo que $EA = 3; AG = 5; AB = BR;\ BS = \frac{BE}{2}; GB = BT; CD = CR; CF = 2CS;\ CH = \frac{2CT}{3};\ \angle ABR = 60°$ operando bajo las condiciones dadas obtenemos la siguiente ecuación $y^2 = 2y - xy + 5x - x^2$ que corresponde a un círculo.

Tabulemos algunos valores para la ecuación anterior e identifiquemos que la ecuación anterior efectivamente corresponde a un círculo, suponiendo que la cantidad conocida es y, y la que se desea hallar (la desconocida) es x.

[20] Los cantidades numéricas de este ejemplo son tomadas de la Geometría (Descartes R. , 1637, p. 76)

y	X
0	$x_1=0$, $x_2=5$
1	
-1	
2	

Para el primer valor $y = 0$, se obtiene $0 = 5x - x^2$, con lo que la nueva expresión corresponde a una ecuación de segundo grado, la solución de esta ecuación y en general las ecuaciones de la forma $x^2 = \pm ax \pm b^2$ Descartes las resuelve mediante un proceso que describe en la (Descartes R. , 1637, pág. 394), de esta forma es posible reducir la ecuación $y^2 = 2y - xy + 5x - x^2$ para valores de y dados, a una ecuación de segundo grado. Finalmente al realizar el mismo procedimiento para el resto de valores de y, se obtiene la siguiente tabla.

Y	X
0	$x_1 = 0$ $x_2 = 5$
1	$x_3 = 2 - \sqrt{5}$ $x_4 = 2 + \sqrt{5}$
-1	$x_5 = 3 - \sqrt{6}$ $x_6 = 3 - \sqrt{6}$
2	$x_7 = 0$ $x_8 = 3$

Al graficar los puntos en el sistema referencial $Y - X$ oblicuo se obtiene la siguiente figura.

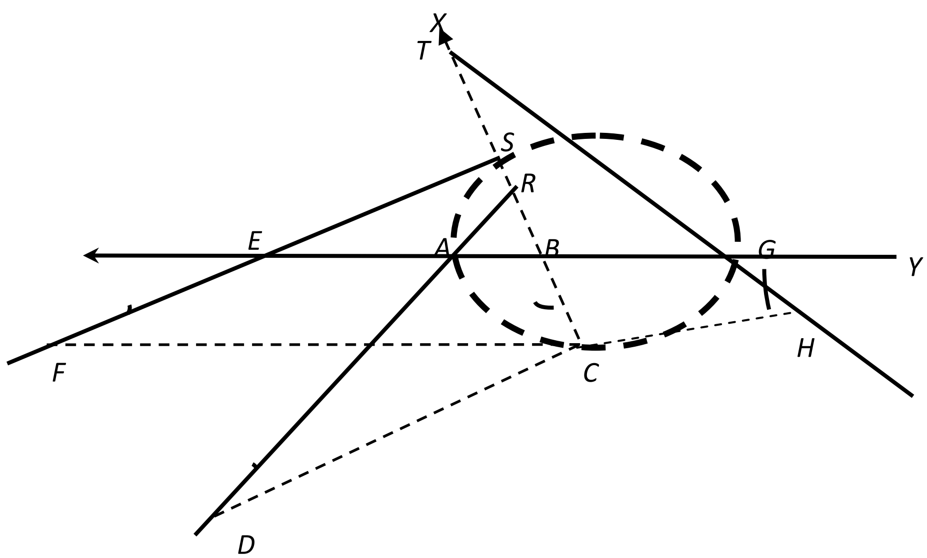


FIG. 2.6 EL CÍRCULO

Las parejas obtenidas de la forma (y, x) generan punto a punto el círculo, donde el origen $(0,0)$ corresponde al punto A, el punto $(0,5)$ coincide aproximadamente en el punto S, hasta generar el círculo.

Hasta este momento lo novedoso del procedimiento implementado por Descartes es la introducción de una notación para los segmentos y la manera de generar ecuaciones para la situación geométrica de las cuatro líneas, pero la potencia de su técnica se fundamenta en la manera como Descartes interrelaciona segmentos conocidos, con desconocidos.

Claro está que Descartes ha encontrado que las cuatro líneas $CH, CD, CF\ y$ CB se pueden reescribir de la siguiente manera:

$$y^2 = \frac{(cfglz - dekz^2)y - (dez^2 + cfgz - bcgz)xy + (bcfgl)x - (bcfg)x^2}{(-cgz^2 + ez^3)}$$

$$y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$$

Lo interesante del problema de Pappus es preguntarse por el lugar geométrico generado cuando las cuatro rectas ó más de estas son paralelas ó son dos perpendiculares a las otras dos ó tres paralelas y una perpendicular a estas, etc.

1.3.2 OTRAS MANERAS DE GENERAR CURVAS: "EL COMPÁS GENERALIZADO".

Uno de los supuestos más importantes dados por Descartes es la clasificación de las curvas por géneros y la introducción de la herramienta "compás generalizado", que sin duda permite conocer la ecuación algebraica asociada a una gran cantidad de curvas.

Descartes acoge con su método a cierto tipo de curvas, llamadas geométricas y excluye las denominadas curvas mecánicas puesto que, como él menciona, son concebidas como el resultado de dos movimientos independientes cuya relación no admite una determinación exacta[21]. En esta exclusión de curvas se encuentra la cuadratriz, la espiral de Arquímedes, las curvas logarítmicas y catenarias, que años más tarde se llamarán *curvas transcendentes*.

---

[21] Ver (Descartes R. , 1637, p. 44)

Las curvas geométricas consideradas por Descartes representan la esencia de la geometría, en ellas reposa la base de su método. Entre estas se destacan la concoide y la cisoide.

Cabe preguntarse ¿cómo Descartes encuentra la ecuación de la hipérbola, elipse y parábola? Para ello define las curvas de primera clase entre ellas el círculo, la parábola, la hipérbola y la elipse, a partir de esta definición extiende la de segunda clase, que corresponderán a las curvas que posean tercera o cuarta dimensión como la concoide, y el tercer tipo las de cuarto y quinto grado[22]. Algo que enmarca esta idea es que Descartes encuentra la ecuación de la hipérbola aplicando su método para una situación geométrica en particular, para ello considera un instrumento donde supone una línea desconocida y que quiere saber a qué clase pertenece. Descartes supone un instrumento como se muestra en la (Figura 2.7), a partir de esto identifica los segmentos desconocidos y conocidos y trata de relacionarlos entre sí.

Supongamos que la línea EC es la buscada; pero en este momento nos hemos encontrado con una conexión que es la forma de construirla la línea EC; se realiza en términos mecánicos, en el sentido de la cuadratriz de Hipias, la razón de esto se sustenta ya que la línea EC es el resultado de la intersección de la recta GL y del plano rectilíneo $CNKL$.

[22] Tomado de (Descartes R. , 1637). Como de primer orden, si representaban una ecuación cuyo grado no era mayor al de un rectángulo formado por dos líneas o el cuadrado de una línea (curva de primer orden o clase) o de mayor orden según el grado de la ecuación asociada. hace alusión al grado de la ecuación que obtendrá de esta manera por definición la clasificación inicial que plantea, tiene las cónicas básicas.

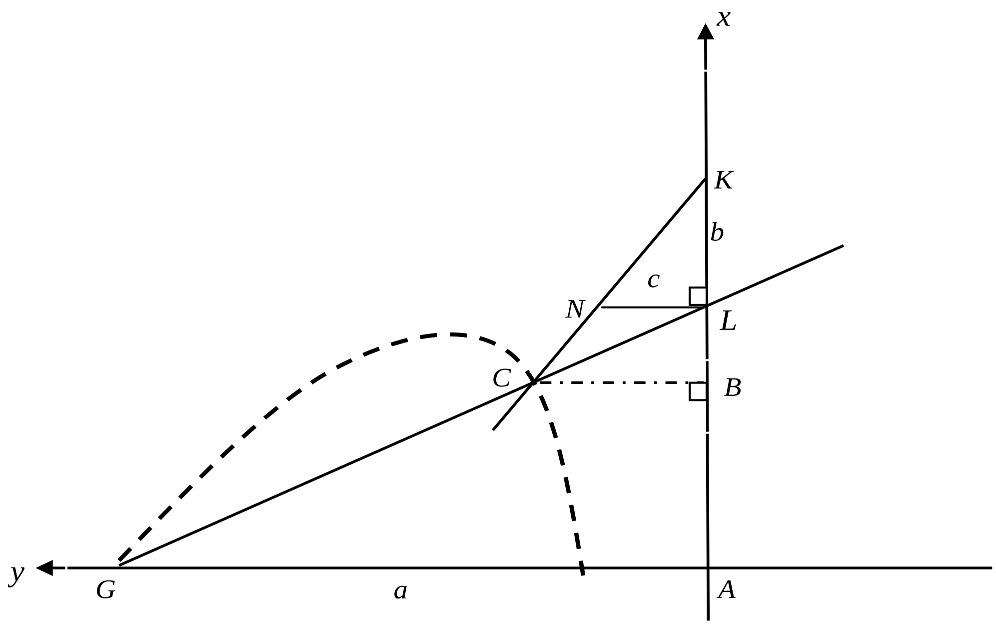


FIG.2 7. COMPÁS GENERALIZADO PARA HALLAR LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA.

Descartes conoce que una curva, como, la elipse, cumple determinada condición geométrica proporcionada por Apolonio (es el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la suma de las distancias que separan a un punto del conjunto de dos puntos dados, llamados focos, es una constante dada, mayor que la distancia entre los focos)[23] para el caso de la elipse considera unos supuestos similares a los usados para dar respuesta al problema de Pappus, entre estos considera las razones y proporciones dadas según la geometría del problema y la asignación de segmentos mediante una cantidad literal.

La manera como Descartes encuentra la ecuación de una hipérbola se colige el uso de un sistema de coordenadas, donde precisamente relaciona las cantidades desconocidas y conocidas x, y, vistas como segmentos que varían y generan la curva deseada.

Para encontrar a qué género pertenece la curva buscada, asigna los segmentos conocidos y desconocidos mediante una expresión literal tales como a, b, c, x, y. Esto se

[23] Ver (Roshdi, 2008, p. 6)

realiza con el objetivo de encontrar una expresión que me relacione los segmentos y sus respectivas magnitudes. En nuestro caso tenemos:

$$GA = a, KL = b, \text{y } NL = c, BA = x, CB = y,$$

Respectivamente, luego por la geometría de la construcción, los triángulos KLN y KBCson semejantes, tenemos que:

$$\frac{c}{b} = \frac{y}{BK}$$

Luego $BK = \frac{b}{c}y$.

El segmento $BL = BK - KL = \frac{b}{c}y - b$.

Luego el segmento $AL = x + BL = x + \frac{b}{c}y - b$.

Por otra parte los triángulos LBC y LAG son semejantes, permitiendo establecer la siguiente proporción:

$$\frac{BC}{BL} = \frac{AG}{AL},$$

que bajo la operación de la multiplicación de segmentos definida se traduce en

$$BC \times AL = BL \times AG.$$

De esta manera sustituyendo las expresiones encontradas se obtiene que

$$y\left(x + \frac{b}{c}y - b\right) = \left(\frac{b}{c}y - b\right)a.$$

Trasponiendo y agrupando términos,

$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ya - ac.$

Descartes conoce la ecuación de la elipse, mas no describe la manera de encontrarla, mediante su método. Más bien referencia la proposición 13 del libro I de Apolonio[24].

Las curvas mecánicas para Descartes, como la espiral, la cuadratriz, las curvas logarítmicas y catenarias, las toma fuera de la geometría ya que representaron un problema puesto que él no tenía una herramienta que permitiera asociarles una ecuación algebraica. Sin embargo en el siglo XVII-XVIII este problema comienza a esclarecerse con la aparición de unos objetos denominados series de potencias. La salida a este problema es visualizada en Newton y Leibniz quienes logran establecer una serie de reglas y lineamientos. En este sentido compartimos la idea de (Guicciardini, 2003, p. 76) "antes de

[24]ABΓ es un plano que pasa por el eje del cono y un plano P que corta el plano del círculo de base siguiente ZH⊥ BΓ. Este corta AB en AΓ en E yΔ respectivamente; por hipótesis, P no es paralela ni antiparalela a su base. .. La sección será llamada elipse. (Roshdi, 2008, pág. 94) (la expresión que relaciona esta propiedad está determinada por $\Lambda M^2 = EM.E\Theta - EM^2 \frac{E\Theta}{E\Delta}$ realizando un cambio de variables como lo considera Descartes se establece la ecuación $y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ya - ac$

la aparición de las series infinitas la curvas transcendentes no tenían una representación analítica, se presentaban en términos geométricos".

En conclusión, Descartes aborda el paso de la curva sintética de los antiguos a una representación analítica en su libro II de la geometría, *sobre la naturaleza de las curvas.* Para ello utiliza de forma implícita el uso de un sistema de coordenadas, donde supone dos cantidades x e y (líneas desconocidas) que intervienen en una ecuación; dichas cantidades se interpretan como segmentos variables que dan coordenadas de todo punto en un plano respecto de un eje, de un origen fijado en tal eje, y de un ángulo cualquiera que, por hipótesis, tales segmentos forman entre sí; entonces estas relaciones vinculan entre sí a dichas coordenadas, definiendo un lugar geométrico o una curva.[25].

1.3.3 La representación de curvas de Jan de Witt

La representación de las ecuaciones como se conocen modernamente tiene su génesis en la obra de Jan de Witt (1625-1672), quien en su obra *Elementa Curvarum Linearum secundas liber* (fundamentos de las líneas curvas: segundo libro) realiza una compilación que caracteriza las líneas rectas según las diferentes combinaciones lineales expresadas mediante constantes, sean suma, restas o productos. En su caso considera la parábola, la hipérbola y la elipse. Jan de Witt demuestra una serie de teoremas relacionados con la manera de asociar una ecuación a una curva. La amplia caracterización de Witt permitió establecer la notación actual usada en la geométrica analítica e incorporar elementos que relacionan teoremas referentes a las ecuaciones asociadas a una cónica.

En la obra de Jan de Witt encontramos un reconocimiento a las ecuaciones y su curva generada, por ejemplo los primeros teoremas establecidos en fundamentos de las líneas curvas, libro segundo (Grootendorst, Aarts, Bakker, & Erné, 2010) permiten la distinción explícitamente entre líneas rectas y parábolas, parábolas y elipses, elipses y círculos, etc.

[25] Descartes la reconoce como curva geométrica en la geometría.

Tomemos los dos primeros teoremas establecidos por De Witt y veamos como encuentra la ecuación para una línea recta.

Teorema 1. Si la ecuación es $y = \frac{bx}{a}$ entonces el lugar requerido será una línea recta (Grootendorst, Aarts, Bakker, & Erné, 2010, p. 62).

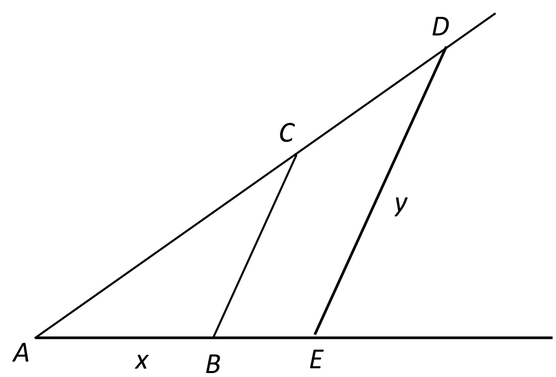


FIG. 2.8 LÍNEA RECTA, JAN DE WITT

Para la determinación de la ecuación de la línea recta, De Witt, supone al igual que Descartes, un sistema de referencia en este caso corresponde el punto Acomo el inicial y asigna el segmento $AB = x$; luego se busca un punto al azar, sobre el segmento $AB,$ (en este caso B es el punto y se traza la línea BC en el ángulo ABC); luego se establece la proporción,

$$\frac{x}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{b}$$ [26]

A partir de esto se logra establecer $\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{BC}$, de aquí se concluye sustituyendo y despejando que $y = bx/a$.

> **Teorema 2. .** Si la ecuación es $y = \frac{bx}{a} + c$ entonces el lugar requerido será una línea recta (Grootendorst, Aarts, Bakker, & Erné, 2010, p. 64).

Estos dos teoremas poseen el estilo cartesiano, en el sentido de la notación heredada y la igualdad como el símbolo $\propto$. El **Teorema 1,** se caracteriza por la utilización de las proporciones y los parámetros en el sentido de Pappus, mientras que el segundo admite un parámetro c, bien sea suma o resta. Todo reafirma el de la curva a la ecuación como un paso fundamental en la constitución de la representación y el eminente uso de un sistema de coordenadas.

Otros de los teoremas, establecidos por De Witt, y los cuales permiten distanciar un poco la idea de Descartes y sus antecesores relacionada con obtener curvas mediante secciones de un cono es el que permite encontrar la parábola.

> **Teorema 7.** Si la ecuación $y^2 = ax$ o a la inversa $x^2 = ay$, entonces el lugar requerido será una parábola (Grootendorst, Aarts, Bakker, & Erné, 2010, p. 72).

> **Teorema 14.** Si la ecuación es $\frac{ly^2}{g} = f^2 - x^2$, entonces el lugar requerido es una elipse (Grootendorst, Aarts, Bakker, & Erné, 2010, p. 132).

[26] Las cantidades a, b representan parámetros, se toman en el sentido de Pappus. Ver sección 1.2.1 Descartes y el problema de Pappus.

Observemos la simplicidad de la enunciación respecto a los lugares geométricos que son el resultado de las ecuaciones. El trasfondo de estas ecuaciones está ligado a consideraciones geométricas en el sentido de Descartes, sin embargo se evidencia un poco más de formalismo por parte de Witt al establecer los teoremas. Por otra parte, el tránsito que se presenta en el movimiento curva-ecuación, respecto al tratamiento dado por los antiguos, posee una diferencia fundamental en relación al dado por Descartes. Dicha diferencia radica en que los antiguos y algebristas resolvían ecuaciones de la forma $P(x) = 0$, Descartes resuelve ecuaciones de la forma $P(x, y) = 0$, permitiendo así la introducción de una nueva variable y estableciendo un sistema referencial coordenado.

CAPÍTULO II

2 LOS PRIMEROS TRATAMIENTOS DE LAS SERIES NUMÉRICAS: UNPASO FUNDAMENTALPARA LA REPRESENTACIÓN DE CURVAS MECÁNICAS

Jacob Bernoulli (1654-1705)

Por las garras se conoce al león.

Jacob Bernoulli

En este capítulo se aborda como era el tratamiento de las series numéricas en la antigüedad. Precisamente en este recorrido encontramos que uno de los primeros tratamientos que relaciona series se encuentra en el método exhaustivo. Posteriormente la noción de serie sufre un proceso de transformación respecto a su tratamiento pasando por los métodos de Mengoli hasta los brindados por Newton, Leibniz y Cauchy. Justamente estos tres representan un punto de quiebre en cuanto a la representación y la manera de tratar y representar curvas geométricas y mecánicas. Este capítulo brinda algunos elementos fundamentales que dieron origen a la creación de la teoría de series y la noción de función.

2.1 IMPORTANCIA DE LAS SERIES EN LA REPRESENTACIÓN DE LAS CURVAS MECÁNICAS

Con Descartes hay una discriminación, entre las curvas geométricas y curvas mecánicas. Recordemos que las curvas mecánicas según Descartes son las que no son precisas y exactas. Posteriormente Leibniz llama a las curvas geométricas como algebraicas y trascendentes a las mecánicas. La razón de esto como argumenta él mismo Leibniz en su artículo de 1686 "*De geometría recóndita et Analysi indivisibilium at que infinitorum*" [27]radica en que existen algunos problemas que no son planos, ni sólidos, ni supersólidos o de grado alguno definido, sino que trascienden cualquier ecuación algebraica.

Con esto Leibniz precisa cierto reconocimiento para estas curvas que requerían, de cierta manera, algún tipo de formalismo matemático para dar un reconocimiento mayor, es decir hallar una ecuación que permitiría describirlas como tal; en este sentido una de estas curvas que aparecen como desafío en el siglo XVII es la catenaria propuesta por Bernoulli; "Descubrir la ecuación de la curva que se forma al suspender de dos puntos una cuerda de peso uniforme".

Aunque hay ciertas curvas que pueden representarse mediante ecuaciones, existen representaciones que en cuanto a operatividad son muy limitadas, como el caso del círculo. Aquí es donde la teoría de series representa un papel de gran importancia en cuanto a la representación y la incorporación de una herramienta algebraica que permita conocer cuadraturas y anticuadraturas. El problema de encontrar ecuaciones y asociarles una curva, se empieza a trasladar a las curvas mecánicas. Modernamente estas curvas corresponden a las ecuaciones paramétricas de la forma $(x(t), y(t))$.

Alrededor de 1665, Newton introduce el concepto de fluxión, a partir de este concepto una curva se genera por el movimiento de un punto, esta interpretación cinemática le permite calcular la tangente y realizar la descomposición en sus componentes con respecto a unos ejes coordenadas determinados.

En el siglo XVII, con la publicación de las obras de Newton, las matemáticas comienzan a tener un cambio relacionado con la algebrización y la serie de técnicas que hicieron que prosperar los resultados de Newton. Las diferentes interpretaciones y aportes dados por Newton estaban relacionados con: el cálculo de tangentes, la introducción de los fluentes y fluxiones para generar curvas, la relación entre las ecuaciones infinitas y las curvas mecánicas y el recurrente uso de estas últimas para obtener cuadraturas.

Las curvas mecánicas fueron conocidas por los matemáticos y trabajadas ampliamente y en su mayoría su construcción se basaba en problemas físicos y en hallar la respectiva curva. Al realizar un recorrido a lo largo de las curvas mecánicas existentes y conocidas en la historia de las matemáticas aparecen las siguientes curvas:

1. *La espiral de Arquímedes* (287 a.C.- 212 a.C.) [Su construcción se mencionó en el capítulo I]
2. *La cuadratriz de Dinóstrato* (390 a. C. - 320 a.C) [Su construcción se mencionó en el capítulo I]
3. *La concoide de Nicomedes* (280 – 210 a. de C) La correspondiente ecuación de la concoide corresponde a $(x-a^2)(x^2+y^2)=b^2x^2$
4. *El cardioide,* estudiada por Leonardo Da Vinci (1452-1519) se puede obtener al hacer girar un círculo sobre otro del mismo radio con velocidad uniforme.
5. *La cicloide,* cuya ecuación corresponde a

$$x = r(t - \sin t)$$
$$y = r(1 - \cos t).$$

Una cicloide es una curva generada por un punto perteneciente a una circunferencia generatriz al rodar sobre una línea recta directriz, sin deslizarse

6. *La catenaria,* Jacob Bernoulli (1654-1705).Descubrir la ecuación de la curva que se forma al suspender de dos puntos una cuerda de peso uniforme: la catenaria.
7. *Tautócrona y Braquistócrona,* Christiaan Huygens (1629-1695).Es la curva entre dos puntos que es recorrida en menor tiempo, por un cuerpo que comienza en el punto inicial con velocidad cero, y que debe desplazarse a lo largo de la curva hasta llegar al segundo punto, bajo acción de una fuerza de gravedad constante y suponiendo que no existe fricción.
8. *La espiral logarítmica de Bernoulli*. Fue conocida por Descartes y Torricelli como una curva mecánica: sin embargo quien la estudia en extenso es Jacob Bernoulli (1654-1705)

Todas estas curvas de tratamiento distinto a las algebraicas permitieron ampliar las técnicas para hallar sus respectivas ecuaciones, sin embargo para definir las ecuaciones de las curvas trigonométricas, exponenciales y logarítmicas fue necesario incorporar una herramienta que permitiera expresarlas en términos de expresiones algebraicas simples; esta herramienta corresponde a la representación en "series de potencias". Las series de potencias no solo permitían expresar curvas mecánicas sino acoger a ciertas curvas algebraicas, cuyo estudio era complejo.

2.2 LAS SERIES NUMERICAS EN EL SIGLO XVII

Modernamente, el tratamiento relacionado con la convergencia de las series infinitas se ha solucionado a través de la representación de una serie como una sucesión de sumas parciales. Sin embargo, el desarrollo histórico de esta noción nos muestra un proceso complejo, el cual se enmarca en la búsqueda de un formalismo apropiado para abordar el infinito. Sin duda, las series infinitas representan un punto clave en la consolidación del tratamiento del infinito; precisamente en el siglo XVII-XVIII, fueron utilizadas para el problema de las cuadraturas, la rectificación de curvas y representaciones analíticas de expresiones como las curvas mecánicas. Precisamente en la geometría griega aparecen atisbos relacionados con el uso de series, particularmente en el método exhaustivo, utilizado por Arquímedes, el cual consistía en acotar el área de un segmento de parábola *P* para obtener su cuadratura. Arquímedes encontró que para cuadrar la parábola se hace necesario inscribir polígonos, de manera que el enésimo polígono inscrito pueda expresarse como una serie de la forma:

$$\mathbb{A}(p_n) = \mathbb{A}(p_0) + \frac{1}{4}\mathbb{A}(p_0) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \mathbb{A}(P_0) + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \mathbb{A}(P_0) = \mathbb{A}(P_0);$$

dicho procedimiento, aplicado por Arquímedes, permite sumar estos elementos y obtener una progresión geométrica la cual converge; sin embargo, como se establece en (Ferraro, 2008), en el artículo *Variaran derebus mathematicis responsorum* (*La variedad de la respuesta matemática*) *Liber VIII* de Vieta (1593), se encuentran tratamientos relacionados con las series infinitas, especialmente con las series geométricas; estas series fueron conocidas por Nicolás Oresme en su obra *De configurationibus*, donde establece "la convergencia" de algunas series, como $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}$, con base en consideraciones geométricas. Sin ahondar mucho en la obra de Oresme, el tratamiento de las series es utilizado para relacionarlas con eventos físicos y como sustento teórico se recurre a los *Elementos* de Euclides, concretamente al libro V, proposición 12:

> **Proposición V. 12**. Si un número cualquiera de magnitudes fueran proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así lo serán todas las antecedentes a las consecuentes.

En la línea de desarrollo de la teoría de series, considerada antes de la creación del cálculo infinitesimal por parte de Newton y Leibniz, se encuentran algunos aportes que de alguna manera resultan ser significativos relacionados con la operatividad de las series infinitas, por ejemplo para, Pietro Mengoli (1625-1686), las series infinitas se constituían principalmente por magnitudes, a partir de esto deriva varias propiedades de las series de magnitudes.

Entre estas propiedades, derivadas a partir de estas series, se destacan la de serie creciente que satisface que $S_n < A < S_{n+1}$ donde A representa una cantidad menor que S siendo S una serie numérica con extensión finita.

Observemos como el tratamiento brindado por Mengoli, permitió obtener el resultado de la divergencia de la serie armónica; para ello utiliza una especie de criterio de "comparación"[28] para cada tres términos consecutivos de la serie.

Supongamos que

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \dots$$

Agrupando triplas de términos

$$S = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right)$$
$$> 1 + \left(\frac{3}{3}\right) + \left(\frac{3}{6}\right) + \left(\frac{3}{9}\right) + \left(\frac{3}{12}\right) + \cdots$$

[28] Ver (Ferraro, 2008) en términos modernos se puede mostrar que $\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{3}{n}$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$$S > 1 + S$$

Lo cual representa una contradicción, por lo tanto S no es finito.

El tratamiento brindado por Mengoli a las series infinitas es mediado por lo intuitivo, pero no se evidencia un formalismo que permita decidir sobre la convergencia de las mismas. En esta misma línea se desarrolla el tratamiento efectuado por John Wallis (1656) a las series el cual permite aumentar el universo de las series y logra relacionarlas con el cálculo de cuadraturas.

2.3 TRATAMIENTO DE SERIES NUMÉRICAS POR WALLIS

En *Arithmetica Infinitorum*, John Wallis (1616-1703) realiza un tratado correspondiente a la cuadratura de la parábola, hipérbola y la cuadratura del círculo. En su obra proporciona un gran aparato teórico conformado por una serie de proposiciones, donde uno de los elementos conceptuales claves para encontrar dichas cuadraturas son las razones entre sumas finitas e infinitas.[29] La obra de Wallis apunta a la introducción de los infinitesimales como una potente herramienta a la hora de calcular cuadraturas.

Sin embargo el interés principal en la obra de Wallis va direccionado al tratamiento de las series numéricas, concretamente en la proposición I, se presenta el uso recurrente de sumas infinitas expresadas mediante razones, todo esto con el objetivo de encontrar cuadraturas

[29] Wallis hace referencia a “series”. Utiliza el término en dos sentidos (1) Para denotar una lista de términos definidos según una regla; su significado ha sido traducido como secuencia, y (2) para denotar una colección finita o infinita de términos semejantes, usualmente bajo la suma. (Wallis, 1656, p. 13)

para diversas curvas entre ellas las de la forma $y = x^n$ y en el caso más general las que corresponden a un exponente fraccionario racional. Justamente entre sus resultados se destaca la siguiente proposición de su libro.

PROPOSICIÓN I

Si a_n es una sucesión natural finita con término mayor l, y b_n, donde $n = 0, \dots, l$. es una sucesión constante, entonces la razón entre la suma de los términos de a_n y b_n es $\frac{1}{2}$.[30]

$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6} = \frac{1}{2}$

$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12} = \frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=24} = \frac{1}{2}$

$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30} = \frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=46} = \frac{1}{2}$

De esta manera instaura un cociente donde su numerador y denominador son sumas infinitas donde para cualquier l, la razón $\frac{0+1+2+3+4+l}{l+l+l+l+l+l} = \frac{1}{2}$ es constante.

[30] Tomado en (Wallis, 1656, p. 14)

El tratamiento numérico realizado por Wallis es inductivo, aunque para él dicho término significara simplemente que un patrón podría estar bien establecido y suponía que continuaba.

A partir de estas consideraciones Wallis realiza una serie de generalizaciones para otras razones como por ejemplo:

$$\frac{0^3+1^3}{1^3+1^3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ ;$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3}=\frac{9}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8};$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3}=\frac{36}{108}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3}{4^3+4^3+4^3+4^3+4^3}=\frac{100}{320}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+4^3+5^3}{5^3+5^3+\ldots\quad+5^3}=\frac{225}{750}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$

Finalmente todas estas generalizaciones realizadas por Wallis sirvieron de sustento teórico para hallar cuadraturas. En realidad obtiene resultados para razones de series. Aunque no es un tratamiento propiamente de series, desarrolla un procedimiento que puede considerarse un primer paso para logar un formalismo en el tratamiento de series. Pareciera ser que la idea de convergencia de una serie en Wallis, adquiere la idea de ir aumentando términos y al final suponer por inducción que el patrón sigue.

La obra de Wallis abre nuevas relaciones entre las cuadraturas y las series infinitas, es como si el problema de encontrar cuadraturas cada vez fuera ampliando, los métodos y teorías existentes, que a su vez desencadenan en otras. Todos estos desarrollos y el uso de razones de series infinitas, permearon sin duda un cambio en la manera de representar curvas y cuadraturas a través de expresiones compuestas por infinitos términos, donde el resultado no eran más que aproximaciones que daban cuenta del objeto en cuestión. El método de interpolación de Wallis permitió que Newton generalizara y encontrara la expansión del binomio, la cual se convertiría en una potente técnica para expresar y encontrar series infinitas de la forma $a_n x^n$.

Respecto al tratamiento de las series infinitas, se pueden distinguir en Wallis dos vertientes: la primera referida a la manera de encontrar expresiones infinitas de la forma $a_n x^n$ y la segunda relacionada con la manera de utilizar estas expresiones para hallar cuadraturas y representar curvas mediante expresiones analíticas. Concretamente esto se empieza a encontrar en los trabajos de Newton y Leibniz y algunos inicios en los trabajos de Nicolaus Mercator (1620- 1687), James Gregory (1638-1675) y Saint Vincent (1584-1667) .

Precisamente uno de los principales intereses respecto a las series era la posibilidad de obtener expresiones de la forma $\frac{1}{1+x}$ y mediante la división larga obtener una expresión equivalente que corresponde a una serie de potencia. El paso fundamental que lleva de las series numéricas a las de potencias es el establecimiento de cierta dependencia entre la ecuación y su variable.

2.4 SERIES NUMÉRICAS EN *LOGARITHMOTECHNIA*

Las series de potencias fueron apareciendo con los tratamientos efectuados al realizar procesos como la división larga y cuando se logra establecer un algoritmo concreto para el cálculo de los logaritmos. Por otro parte, el interés en la época era suscitado principalmente por el cálculo de cuadraturas de curvas cónicas, entre estas se destaca la hipérbola; pareciera ser que este interés era propiciado por la forma de la curva. A raíz de esto, uno de los primeros que logra obtener la cuadratura de la hipérbola es Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) en su obra *Opus geometricum*. Para Saint- Vincent, el calcular una cuadratura estaba relacionado principalmente con utilizar proporciones en ciertas porciones de la curva y demostrar que dichas porciones al final eran iguales. Sin embargo su resultado no le permite conectar que el área encerrada por la hipérbola corresponde a un logaritmo; quien vislumbra dicha conexión es Alphonse Antonio de Sarasa (1618-1667)[31]. El momento histórico en que se relaciona el área de la hipérbola como el logaritmo, es precisamente cuando Sarasa logra establecer que $A(ab) = A(a) + A(b)$ para áreas hiperbólicas. Este transito comienza a vislumbrarse en la obra de Mercator.

Nicolaus Mercator (1620-1687) en su obra *Logarithmotechnia*, encuentra una de las primeras expansiones mediante una serie infinita que denota una cuadratura. Mercator, encuentra una expresión para relacionar el área de la hipérbola a través de un logaritmo. Este resultado fue conocido por Saint Vincent[32] y Sarasa al establecer la cuadratura de la hipérbola, Para deducir esta ecuación lo que hace Mercator es aproximar el área de la hipérbola, $\frac{1}{1+t}$ entre 0 y x por n rectángulos de igual base $\frac{x}{n}$ y alturas $1, \frac{1}{1+\frac{x}{n}}, \frac{1}{1+\frac{2x}{n}}, \dots, \frac{1}{1+\frac{(n-1)x}{n}}$; luego representa $\frac{1}{1+\frac{kx}{n}}$ mediante series de potencias y aproxima el área de la hipérbola usando un resultado previo de Wallis. La relación entre la serie y el logaritmo se da, puesto que Gregorio de Saint Vicent había mostrado que el área de una hipérbola es un logaritmo, aunque Saint-Vincent no utilice el término logaritmo de manera explícita. Mercator halló un desarrollo en series de potencias para el logaritmo. (Newton I, 1711).

---

[31] Justamente como lo afirma (Burn, 2001, p. 1) las proposiciones de Sarasa fueron la conexión entre las áreas hiperbólicas y los logaritmos.

[32] Saint Vicent, encuentra la relación entre la cuadratura de la hipérbola y el logaritmo natural. En términos modernos se puede establecer que $\int_0^x \frac{1}{1+x} = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$ (Boyer, 2011)

Es Mercator en 1668, quien logra obtener la expansión para

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Esta expresión denota una serie infinita donde su valor aproximado queda determinado por x. Mercator dedica gran parte de su obra a unificar y sintetizar las reglas para el cálculo de logaritmos y el cálculo del área de la hipérbola. Otro de las expansiones obtenidas por Mercator y mejoradas por Gregory fue para el cociente que involucra el logaritmo, el cual se conoce modernamente que puede obtenerse con la propiedad del cociente de los logaritmos y aplicando la resta de los mismos.

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots$$ [33]

La instauración de ver una cuadratura como el resultado que expresa cierta relación funcional amarrada a un proceso infinito, representa un punto de partida referente a la representación de ecuaciones mediante ecuaciones infinitas (término usado por Newton) [34]este punto adquiere gran importancia en el momento de acoger las curvas que Descartes relego, las trascendentes (Término usado por Leibniz).

Precisamente con la instauración de las series infinitas como una herramienta es que Newton logra establecer un sin número de relaciones entre lo geométrico y algebraico, particularmente el teorema del binomio.

---

[34] Ver (Newton I, 1711)

2.5 SERIES DE POTENCIAS EN NEWTON Y LEIBNIZ

El nacimiento del cálculo se encuentra ligado con la solución del problema de la cuadratura de figuras planas, proveniente de la antigüedad griega. Dicho problema, como se mencionó anteriormente, permitió crear líneas de desarrollo a partir de algunos conocimientos intuitivos que en parte provienen de las obras de Descartes, Fermat, Wallis, Mercator, Barrow, entre otros.

El conocimiento matemático instaurado hasta el siglo XVII se constituyó en un aparato teórico donde abundaban las ecuaciones (Descartes), los métodos para determinar tangentes y normales a una curva (Descartes, Fermat), el uso de series numéricas para hallar cuadraturas (Wallis), el cálculo de logaritmos (Mercator) y las series de potencias (Newton, Mercator, Leibniz).

Estos últimos representan gran interés en este trabajo, puesto que constituyen un elemento clave a la hora de hablar de la representación que adquieren las curvas que fueron relegadas por Descartes, las curvas mecánicas. Dicha representación conduce a que siglos más tarde el uso de las series de potencias se convirtiera en una potente herramienta para encontrar cuadraturas y resolver problemas relacionados con la representación.

Tal como se afirma en (Mendoza Guzmán I, 2013.) uno de los precursores del uso de la representación de funciones, mediante series de potencias, fue Isaac Newton con el establecimiento de la serie binomial entre 1664 y 1665. A partir de este desarrollo, existió la posibilidad de obtener múltiples representaciones para funciones trascendentes y de potencias negativas como la hipérbola, pero el desarrollo establecido por Newton fue resultado de la lectura de la aritmética de Wallis. Sin embargo en *De analysi*, es la obra donde dedica gran parte a la expansión mediante ecuaciones infinitas.

2.6 SERIES DE POTENCIAS EN NEWTON

El paso de la curva a la ecuación, que se evidencia en la obra de Descartes, lleva arraigado la unión de lo geométrico y lo analítico. El punto clave que permite a Newton ampliar el universo de ecuaciones y de nuevas representaciones es el establecimiento de la serie binomial. Justamente, Newton se pregunta por los valores intermedios que pueden adquirir las siguientes curvas (Tabla 2), cuando el exponente corresponde a un fraccionario irreducible, para encontrar su cuadratura.

Curvas	**Cuadraturas**
$(1-x^2)^{\frac{0}{2}} = 1$	$z = x$
$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} =$	
$(1-x^2)^{\frac{2}{2}} = 1 - x^2$	$z = x - \frac{1}{3}x^3$
$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} =$	
$(1-x^2)^{\frac{4}{2}} = (1-x^2)^2$	$z = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$
$(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$	
$(1-x^2)^{\frac{6}{2}} = (1-x^2)^3$	$z = x - \frac{3}{3}x^2 + \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{7}x^4$

TABLA 2. CUADRATURAS DE ALGUNAS CURVAS DE LA FORMA $(\mathbf{1-x^2})^{\mathbf{n}}$

Esta pregunta es aclarada por la interpolación que realiza Wallis, donde en 1665 establece la famosa serie binomial o el binomio de Newton yen una carta enviada al Royal Society de Londres menciona:

> La extracción de raíces es mucho más corta por este teorema.[35]
>
> Donde $P+PQ$ significan que la cantidad de una raíz o una potencia, o la raíz de una potencia, puede ser hallada; P significa el primer término de esa cantidad, Q los términos restantes dividido por el primero, y $\frac{m}{n}$ el valor numérico de la potencia $P+PQ$, donde esa potencia es entera o una fracción positiva o negativa.
>
> $(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ +$ etc.(1)[36]
>
> Tomando los símbolos A, B, C como el termino anterior; de la forma $A = P^{\frac{m}{n}}$, $B = \frac{m}{n}AQ$

La condición necesaria que $|x| < 1$ para la convergencia de la serie, fue una condición que no estableció Newton, más bien fue mencionada por Wallis tal como se

[35] Tomado del fragmento de la carta enviada al Sr. Oldenburg el 13 de junio de 1676. en (Newton I, 1711, pág. 64)

[36] Modernamente el binomio se puede escribir como: $(p+q)^r = p^r + rp^{r-1}q + \frac{r(r-1)}{2!}p^{r-2}q^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}p^{r-3}q^3 + \cdots$

muestra en la Epistola prior[37] y establecida explícitamente por Cauchy en su curso de análisis.

La influencia del trabajo de Wallis en Newton promovió la introducción de una nueva notación para el uso de potencias racionales negativas, por ejemplo expresiones de la forma $aa, aaa, etc.$, se escriben de la forma $a^2, a^3, etc.$, de está manera $\sqrt{a}, \sqrt{a^3}, \sqrt{a^5}$ se podían escribir como $a^{\frac{1}{2}},\ a^{\frac{3}{2}},\ a^{\frac{5}{2}}$ y $\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a^3}$ como $a^{\dot{1}}, a^{\dot{2}}, a^{\dot{3}}$.

Justamente el descubrimiento de la serie binomial, usando el método tabular de interpolación de Wallis, proporcionó a Newton una forma de extraer raíces cuadradas y de encontrar cocientes de ecuaciones de la forma $\frac{a}{b+cx}$ sin embargo, Newton no realiza una demostración formal del binomio.

Newton realiza múltiples cuadraturas para curvas de la forma $(1-x^2)^n$, y se pregunta por el caso en que el exponente sea fraccionario.

Uno de los puntos claves en los aportes de Newton, es realizar la cuadratura del círculo; la cual corresponde a los valores intermedios que no aparecen en la tabla anterior. Newton busca realizar un proceso de interpolación al estilo de Wallis. Para lo cual se apoya en el binomio que él mismo descubrió. Aquí intervienen primigeniamente unos objetos denominados series de potencias, donde a partir de la expansión del binomio y considerando la cantidad $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ que corresponde a la ecuación de un círculo, dicha expansión se puede escribir de la siguiente manera

$$1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\cdots$$

[37] Ver (Newton III, 1711). Precisamente quien estudia los valores que puede adquirir esta serie es Cauchy en su curso de análisis. En el capítulo 3 se discutirá acerca de la convergencia para Cauchy y se menciona este hecho.

Este resultado matemático presenta una nueva forma de obtener y amarrar series de potencias a una curva,[38] la cual expresa una suma infinita donde su característica principal viene determinada por una progresión de la forma $1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n}$; a partir de allí se evidencia un cambio cualitativo y estructural en la forma de ver las ecuaciones. En otras palabras, la potencia de la técnica adquiere sentido al establecer la igualdad, es así como el binomio establece una salida conceptual al problema de las cuadraturas. Cabe señalar que, el hecho de hallar una serie infinita y amarrarla a una curva, abre paso a una de las primeras representaciones de funciones mediante series de potencias. Si bien uno de los elementos de causalidad teórica que llevaron a Newton a obtener dichas representaciones fueron las lecturas previas de Descartes, Wallis y Pascal.

Luego de tener una expansión mediante series de potencias y a partir de los resultados obtenidos por Cavalieri y reafirmados por Wallis, en los cuales el área de una curva de la forma x^n queda determinada por la expresión $\frac{a^{n+1}}{n+1} x^{n+1}$, Newton realiza una integración término a término de la expansión para el círculo obteniendo como resultado

$$x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} + \cdots$$

La representación mediante series de potencias resolvió un cumulo de problemas como la cuadratura del círculo, la longitud de las curvas, abriendo una relación entre el problema de la cuadratura y anticuadratura. Pero Newton no sólo labora con las curvas geométricas (algebraicas) también lo hace con las mecánicas ¿Cuál es su tratamiento?

En el apartado del *análisis mediante ecuaciones infinitas*[39] se encuentra dedicado en extenso el tratamiento para dichas curvas, bajo el titulo “Aplicación de lo anteriormente explicado a curvas mecánicas”[40], una de estas curvas es la trocoide o cicloide

[38] En este caso la ecuación finita hace referencia a la del circulo $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

[39] (Newton I, 1711)

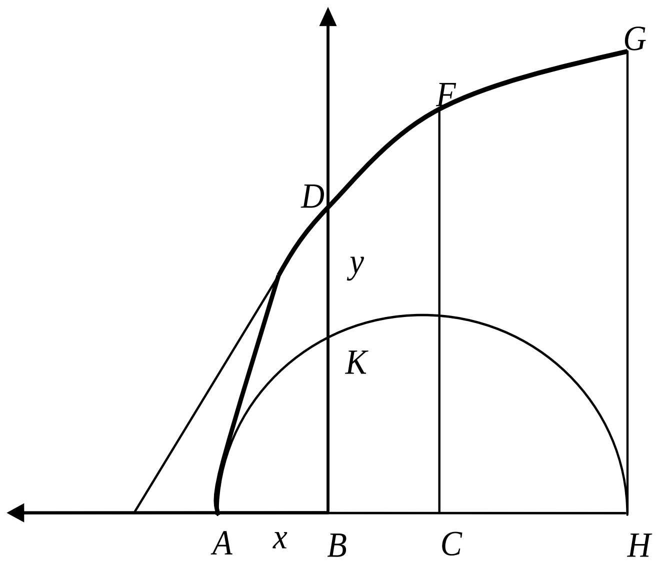


FIG.2 9.LA TROCOIDE O CICLOIDE.

Newton, al igual que Descartes, asigna un "sistema coordenado" (x, y) de forma que $AB = x$ y $BD = y$, y considera un segmento unidad $AH = 1$, el propósito de Newton es encontrar la superficie ABD. Tras una serie de consideraciones relacionadas con las propiedades geométricas de la cicloide, Newton encuentra que el área de la cicloide corresponde a una serie de potencias, que es:

$$ABD = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} - \cdots$$

[40] Al igual que Descartes Newton distingue curvas geométricas y mecánicas (Newton III, 1711, pág. 49)

Los métodos aplicados de Newton para las curvas mecánicas fueron utilizados para encontrar las longitudes de arco, el área bajo la curva y conocer propiedades de las curvas. Justamente otra de las curvas mecánicas que Newton trabaja es la mencionada anteriormente en el capítulo I, la cuadratriz de Hipias, al igual que para la cicloide Newton calcula el área bajo la curva con lo que obtiene una serie de potencias.

Uno de los problemas resueltos por Newton aplicando las series de potencias es el relacionado con la reversión de series, dicho problema consistía en dada una serie de potencias de la forma $z = a_n x^n$ encontrar $x = b_n z^n$, en términos generales el procedimiento adoptado por Newton, en el caso de la expansión para el área de la hipérbola

$$z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \ldots$$

Newton considera cinco términos para encontrar a $x$en términos de$z$, en este caso corresponde al siguiente polinomio finito, [41]

$$0 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^5 - z.$$

Tras una serie de consideraciones algebraicas Newton obtiene, para la serie anterior,

[41] Para entrar en detalle del procedimiento realizado por Newton para la reversión de series ver (Newton III, 1711)

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5,$$

La cual corresponde a la expansión para e^z. Todos estos resultados se constituyeron indudablemente en un indicador de que el uso de las series de potencias permitía generar nuevos resultados que sustentaban los métodos para encontrar aproximaciones y calcular áreas. Todo esto apunta a la manera de asociar series de potencias a las cuadraturas de las curvas mecánicas; entre ellas Newton se ocupa de calcular el área de la cicloide y la cuadratriz. De esta forma, dichas curvas mecánicas que fueron conocidas por los antiguos obtienen un tratamiento que involucra series de potencias. Para ello Newton se vale de las series para el seno y coseno, que fueron descubiertas por él, al aplicar el método de reversión de series,

La introducción de las series de potencias para el coseno y seno abren campo a la idea de la variación, de cierta dependencia implícita entre la ordenada y la abscisa, respecto al movimiento y una relación entre las cantidades involucradas, precisamente en el tratado de método de series y fluxiones, Newton introduce la idea de variación al establecer el cociente que involucra $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Siendo estas cantidades las respectivas fluxiones de x e y.

Todo este desarrollo propició diferentes líneas de evolución que posibilitaron la ampliación de una nueva ciencia, el cálculo. Tal como se afirma en (Maanen, 2003) "El cálculo se convierte en si mismo, solo cuando los matemáticos descubren que la diferenciación e integración son operaciones inversas.

La representación mediante series de potencias adquiere gran fuerza en la obra de Newton, en su *Tratado de Métodos de Series y Fluxiones*[42], donde dedica principalmente líneas a la expansión de ecuaciones y la reducción de divisiones de la forma $\frac{a^2}{b+x}$,

[42] Ver (Newton II, 2001)

obteniendo como resultado series infinitas de fracciones con numeradores y denominadores simples.

Los aportes de Newton a la teoría de series fueron de gran importancia puesto que ellos constituyeron una herramienta que permitía conocer acerca de la convergencia. Sin embargo esta idea de convergencia no es algo que estuviera bien definida.

2.7 SERIES DE POTENCIAS EN LEIBNIZ

El tratamiento brindado por Leibniz (1646- 1716) a las series, es geométrico; usa series infinitas de números, para obtener resultados aritméticos. En particular las relacionadas con las geométricas.[43]A diferencia de Newton, Leibniz se interesa por las diferencias entre secuencias numéricas, por ejemplo él caracteriza que para una secuencia numérica$a_0, a_1, \dots, a_n$ y definidas la diferencia de sus términos como $d_i = a_i - a_{i-1}$la suma de los d_n esta dada por

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_n - a_0. \end{aligned}$$

Leibniz estaba inaugurando un proceso sin duda inductivo que permitió extender para conocer otras sumas, como $1 + 2 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

[43] Recordemos que la manera de generar una serie geométrica puede generarse con los términos de una progresión geométrica, es decir, $ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^n$.

También Leibniz encuentra expansiones mediante series de potencias para el seno, coseno, logaritmo y arcotangente. Leibniz es el primero en utilizar series de potencias como solución a ecuaciones diferenciales, su método en términos generales consiste en tomar casos particulares como el caso de la derivada de $y = a\log\frac{a+x}{a}$, a Leibniz le interesa encontrar y expresada mediante una serie infinita. Hay un reconocimiento de los procesos inversos entre y y dy.

En el caso de la derivada anterior y expresándola mediante una EE.DD lineal adquiere la forma

$$a\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} - a = 0$$

Leibniz admite que una expresión "y" se puede expresar como $y = Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \cdots,$ [44] debido a la notación establecida por Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \cdots + \cdots$$

Sustituyendo esta última ecuación es posible determinar los coeficientes $A, B, C, D, \ldots$ Finalmente se encuentra la expansión para $y = x - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3} + \cdots$

El tratamiento relacionado con la solución de ecuaciones diferenciales, cuya solución involucra series de potencias fue un elemento determinante en lo que respecta a la constitución de la teoría de series; con esta técnica se comienza a evidenciar nuestra tesis principal: Las series de potencias permiten ampliar y producir nuevas comprensiones de

[44] Leibniz utiliza el siguiente principio establecido en *Supplementum geometriae praticae.* Una serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{\alpha_k}$ es igual a 0 para cada x en un intervalo I si solo si todos los coeficientes $b_k(k = 0,1,\ldots)$ son separadamente igual a cero. (Ferraro, 2008, pág. 42)

resultados conocidos y desconocidos, se constituyen en un elemento que de una u otra manera permiten establecer conexiones más generales entre curvas, funciones y otros conceptos matemáticos.[45]

Indudablemente el universo matemático poblado por ecuaciones y series de potencias, fue aumentando el interés por estudiar dichos elementos. Todo esto permeo la constitución de la teoría de series y el tratamiento de las mismas. Aunque en el universo de las series, las de potencias, en particular, representan un caso particular de series; el siguiente diagrama ilustra un poco lo mencionado.

2.8 LA SERIE DE TAYLOR

Brook Taylor (1685-1731), matemático británico en 1715 publica en su obra *methodus incrementorum directa et inversa*, una formula la cuál modernamente se conoce como la serie de Taylor. Dicha serie permitía expresar mediante series de potencias un sin número de expresiones de forma analítica. En la proposición VII de su obra establece.

> **Proposición VII.**[46] Sean z y x dos cantidades variables de las cuales z crece uniformemente con incrementos dados de z. Entonces digo que en el momento que z se aproxima a $z + v$, x de igual manera aumentará de la siguiente manera.

[45] Justamente uno de los resultados de esta tesis es la publicación de un artículo (ANEXO 2, “Los polinomios particulares: Una definición para exploraciones cartesianas”) donde se apoyo lo anteriormente dicho. En dicho artículo se halla y se demuestra un teorema que relaciona las series de potencias de la forma $a_n x^n$ con la geometría analítica permitiendo combinar series de potencias con las derivadas de las mismas y obtener resultados atractivos que producen nuevas comprensiones sobre conceptos ya conocidos . Ver (Mendoza Guzmán I, 2013.)

[46] (Taylor, 1715, pág. 37)

$$x + \dot{x}\frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v\acute{v}}{1.2.z^2} + \dddot{x}\frac{v\acute{v}\acute{\acute{v}}}{1.2.3.z^3} + \cdots + \cdots$$

Modernamente, lo que Taylor pretende, al suponer incrementos para las cantidades dadas z y x, es analizar el aumento de las dos con respecto a la cantidad v, que modernamente correspondería a tomar incrementos Δz y Δx.De esta forma si para valores $x = x_0 + n\Delta x$ siendo $n\Delta x = x - x_0$. El correspondiente valor estaría dado por $y = f(x) = f(x_0 + n\Delta x$. Taylor utiliza una formula conocida por Newton en *Principia*; esta fórmula permite relacionar el valor de y en términos.

Taylor nota que para valores de n, la expresión toma la forma[47]

$y(x) = y(x)$

$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta x$

$y(x + 2\Delta x) = y(x) + 2\Delta x + \Delta^2 x$

$y(x + 3\Delta x) = y(x) + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x$

$y(x + 4\Delta x) = y(x) + 4\Delta x + 6\Delta^2 x + 4\Delta^3 x + \Delta^4 x$

Una de las particularidades que Taylor observa es que los coeficientes de las expresiones anteriores corresponden con las del binomio de Newton.

Con el trabajo de Taylor se abren las maneras de representación de ecuaciones, permitiendo la introducción de series de potencias para senos, cosenos, logaritmos,

[47] La formula de interpolación de Newton puede escribirse como $y(x) = y(a) + \frac{x}{h}\Delta y(a) + \frac{x(x-h)(x-2h)}{1.2.3.h^3}\Delta^3 y(a) + \cdots +$ (Newton III, 1711)

funciones exponenciales, racionales y algunas algebraicas. Históricamente la serie de Taylor ha posibilitado la representación de ecuaciones mediante expresiones analíticas.

En el siglo XVIII, una de las más importantes herramientas de la representación de ecuaciones (funciones) eran las series de potencias que se consideraban como polinomios infinitos y de gran importancia en la representación racional y algebraica de las funciones trascendentes. La representación de funciones mediante series de potencias, por parte de Taylor,[48] garantizaba, según Lagrange, el desarrollo de una variable $f(x)$ de la forma

$$f(x+h) = a_0 + a_1 h + a_2 \frac{h^2}{2} + a_2 \frac{h^3}{3} + \cdots + \cdots,$$

Donde los coeficientes $a_0, a_1, a_3, \ldots$, Lagrange los denominaba funciones derivadas; todo este bagaje conceptual posibilitó la instauración de una técnica, que permitiera obtener expansiones de funciones mediante una forma analítica.

2.9 Series de Potencias y Trigonométricas en Euler

El recurrente uso de las series de potencias, a partir de la obra de Newton, inauguró, de cierta forma, un estilo y abrió un cumulo de posibilidades relacionadas con el uso de las series. Precisamente Leonhard Euler (1707-1783) utiliza series de potencias y series trigonométricas. Estas últimas fueron ampliamente tratadas en el siglo XVIII con estudios relacionados con problemas físicos y constituyeron un punto de entrada para estas series que comienzan a encontrar apoyo en las matemáticas y los procesos infinitos. En algunos casos estos fenómenos se encontraban asociados con fenómenos periódicos que requirieron de algoritmos y expresiones especiales que dieran cuenta del fenómeno. Precisamente en

[48] Las llamadas series de Taylor. Eran ya conocidas por Newton y Leibniz (ver (Newton III, 1711), pero aparecen de manera formal en el libro *methodus incrementorum directa et inversa* de Brook Taylor (1715).

esta identificación las expresiones trigonométricas adquirieron gran importancia puesto que su comportamiento era periódico como el seno, coseno.

Precisamente Euler estudia estas series al preguntarse por el movimiento de las orbitas de Saturno y Júpiter. Este problema de orden físico requería la solución de una ecuación diferencial cuyo resultado dependía de una expresión de la forma

$$(1 - g\cos\omega)^{-\mu}.$$

Esta expresión admite expansión mediante el binomio de Newton de la forma

$$1 + \frac{\mu}{1} g\cos\omega + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2} g^2 \cos^2\omega + \cdots$$

El problema con esta expresión radica principalmente en la convergencia debido al crecimiento del coseno. Euler logra esquivar este problema y finalmente encuentra que la serie:

$(1 - g\cos\omega)^{-\mu}$ admite una expansión de la forma $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cos i\omega$.

2.10 El Problema de la cuerda vibrante y el cálculo algebraico en el siglo XVIII

Con el surgimiento del Cálculo por parte de Newton y Leibniz se amplió el horizonte matemático. En el siglo XVIII se suscita un gran problema relacionado con la física matemática, relacionado con la propagación del calor en una lamina. Precisamente este problema comienza a suscitar discusiones en torno a la manera de encontrar una expresión que permitiera modelar este fenómeno físico. Uno de los precursores que dan solución a este problema es Joseph Fourier (1768-1830). Lo que realiza Fourier es hallar una expresión que relaciona la difusión del calor en una lámina en términos de sus dimensiones es decir obtiene $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; el desafío para Fourier consiste en encontrar la solución de esta ecuación. Para ello, Fourier utiliza el método de separación de variables obteniendo una serie infinita como solución de la ecuación anterior que corresponde a la siguiente expresión,

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-n_k x} \cos n_k y.$$

Para Fourier el problema de la conducción del calor en una lámina estaba ampliamente condicionado a la manera de hallar los coeficientes de la forma a_k; para ello Fourier supone las condiciones de frontera: cuando $z = 0$ entonces $y = \pm 1$ y $z = 1$, entonces $x = 0$. Sustituyendo estos valores en la expresión se obtiene la siguiente serie trigonométrica

$$1 = a_1 \cos u + a_2 \cos 3u + a_3 \cos 5u + \cdots$$

Para hallar los coeficientes, Fourier utiliza dos métodos. En el primero introduce un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas, en un método muy poco riguroso. Posteriormente Fourier utiliza la integración término a término para calcular los coeficientes:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt.$$

Esta manera de representar una función mediante series de senos y cosenos está ventilando nuevos lineamientos referentes al uso de funciones trigonométricas para modelar problemas de orden físico. Esta serie permite relacionar e introducir el uso de las series trigonométricas puesto que a partir de estas se permitía la introducción de nuevas cantidades distintas a las funciones elementales.

En su obra *Teoría analítica del calor*,[49] uno de los problemas principales está relacionado con determinar cuál es la temperatura en cada punto de un cuerpo en un instante dado, suponiendo que las temperaturas iniciales son conocidas.

Un problema que antecede al problema de la matematización del fenómeno del calor es el problema de la *cuerda vibrante*. Se trata de modelar el movimiento físico generado por una cuerda que vibra bajo ciertas condiciones espacio temporal. Las series trigonométricas fueron usadas para resolver este problema.

El problema de la cuerda vibrante consiste en dar ciertas condiciones iniciales como la posición de la cuerda en dos puntos de la forma $x = 0$ y $x = \pi$. Se busca encontrar

[49] Ver (Fourier, 1878)

una expresión de la forma $y = f(x)$ en el plano xy. Lo interesante de este problema es hallar su posición, velocidad y aceleración en un instante t. Este problema constituyo un gran desafío entre los matemáticos del siglo XVIII puesto que permitía aplicar matemáticas a la física. Justamente la forma de la cuerda permite denotar la su posición en algún instante t y posición x constante, así para cada desplazamiento transversal de la cuerda es posible obtener la ordenada $y = (x, t)$

En este sentido consideramos la forma como realiza (Farfán Márquez, 1997) considerando un pedacito de cuerda de tal forma que en su posición posea longitud Δx. Al aplicar la segunda ley de Newton y considerando la fuerza transversal que actúa sobre el pedacito de cuerda y suponiendo que el ángulo θ efectúa pequeñas variaciones obtenemos la siguiente ecuación

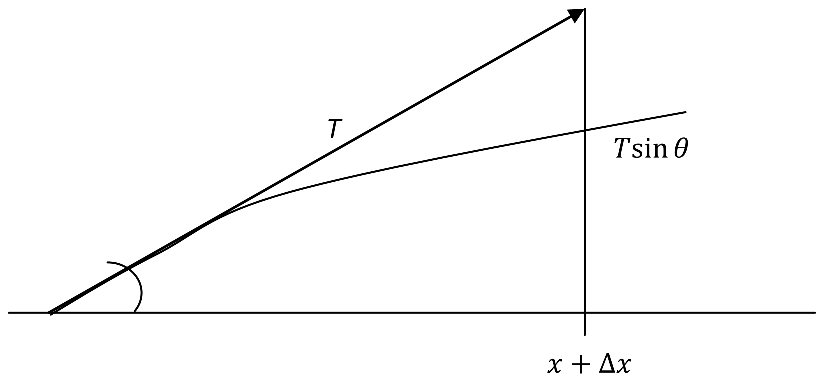
$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

Siendo $a = \sqrt{\frac{T}{m}}$.

Usando el método de separación de variables la solución de la ecuación anterior tiene la forma

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + a_n \sin nx + \cdots$$

Esta ecuación representa una serie trigonométrica



Anteriormente Euler había establecido una expresión que determinaba una parte de la curva, precisamente en una carta enviada a Golbach, establece que

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

En 1747 d´ Alembert encontró que la ecuación diferencial que modelaba la cuerda vibrante era de la forma $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, a constante. La solución de esta ecuación diferencial involucrabalas condiciones iniciales siguientes:

$$y(x,0) = f(x), \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Resolviendo se obtiene que $y(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)]$,como la solución.

La importancia de este resultado se visualizó con los trabajos sobre la conducción del calor, por parte de Fourier, quien resuelve una ecuación similar a la de la cuerda vibrante a partir del método separación de variables. Lo interesante del método de Fourier es que las funciones involucradas debían tener una representación en series de senos y cosenos, denominada representación en series de Fourier. Esta representación comienza a ventilar el surgimiento de la noción de función vista como la relación entre dos conjuntos y que a cada elemento de uno le corresponde un elemento del otro. La razón de esto está relacionada con que para cada instante de tiempo *t*, le corresponde un único valor de temperatura. De esta manera Fourier considera una función como:

> En general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dados una infinidad de valores de la abscisa x, hay un número igual de ordenadas$f$ $f(x)$. Todas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola.[50]

2.11 Elementos primigenios en la constitución de la noción de serie y una posible clasificación. Siglo XVII-XVIII

La representación de ecuaciones (funciones) mediante series de potencias constituyó un elemento que a su vez contenía ciertas generalidades respecto a las ecuaciones. Precisamente en esta clasificación del objeto series se ha considerado dicho

[50] Ver (Ruthing, 1984, p. 73)

desarrollo a partir del siglo XVII hasta XVIII. Hemos distinguido dos vertientes relacionadas con las series. La primera corresponde a las series de potencias, las cuales aparecen constituidas principalmente por la representación de ecuaciones algebraicas, logaritmos, exponenciales. Dentro del conjunto de las series de potencias aparecen:

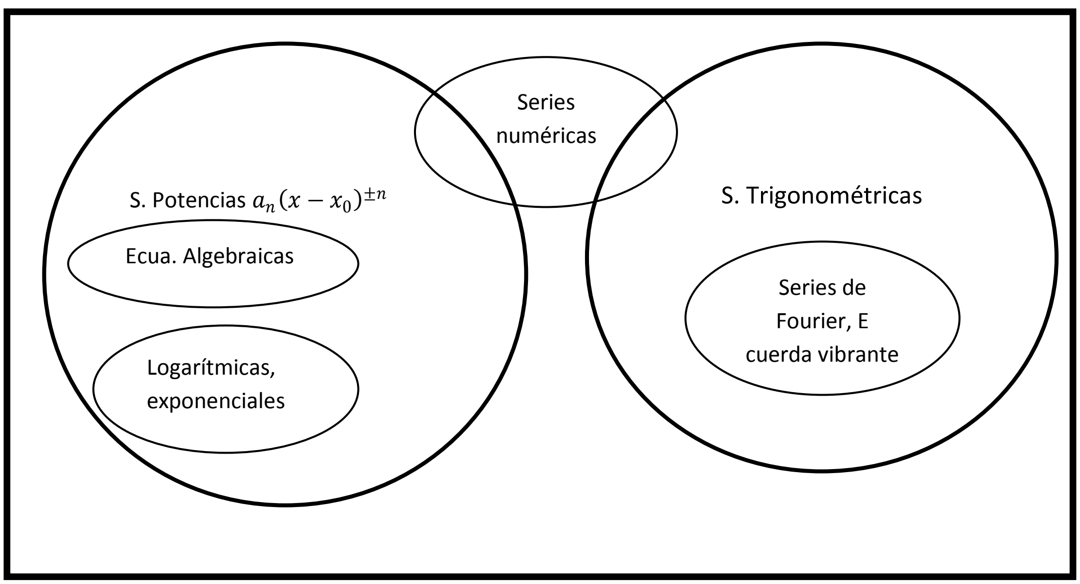
- La representación de ecuaciones algebraicas.
- La representación de expresiones logarítmicas y exponenciales.
- En el caso de una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, si $x = b$ una constante, se obtiene una serie numérica. Por esta razón las series numéricas representan casos particulares de las series de potencias.

La segunda vertiente de esta clasificación corresponde a las series trigonométricas, debido a su importancia en la solución y modelación de problemas físicos en el siglo XVIII. Dentro de estas se enmarcan las series de Fourier y las series obtenidas que dan solución al problema de la cuerda vibrante y la conducción del calor.

2.11.1.1 SERIES TRIGONOMÉTRICAS

La representación de ecuaciones trigonométricas que relacionan senos, cosenos, etc. Funciones que determinan de cierta manera una periodicidad y que en algunos casos explican fenómenos físicos.

El siguiente cuadro muestra la manera como se relacionan e interceptan las series numéricas las cuales aparecen ubicadas en un punto intermedio de las dos vertientes mencionadas. La razón de esto se explica porque tanto las series de potencias y trigonométricas, para valores numéricos específicos constantes, generan series numéricas.



Esta clasificación indudablemente se propone bajo el hecho de que la teoría de series se ha constituido por diversos elementos, bien sean algebraicos, geométricos o aritméticos. Esta clasificación es el resultado de la investigación realizada y de las diferentes líneas de desarrollo del objeto serie. Pasando de una primitiva representación e idea de convergencia a tomar un formalismo limitado a la idea de limite y la domesticación del infinito.

CAPITULO III

3 DE LA ECUACIÓN A LA FUNCIÓN: LAS PRIMERAS HUELLAS DEL ANÁLISIS.

El concepto de función es casi tan fundamental y primitivo como el concepto de conjunto. Una relación funcional está formada por pares de elementos, al igual que un conjunto está formado por elementos individuales».

Hausdorff (1978).

ISAAC NEWTON

En este capítulo se aborda el movimiento evolutivo producido por la incorporación de ecuaciones algebraicas y su relación con las curvas. El punto terminal de estos cambios desemboca en el desarrollo de la noción de función donde los principales precursores de este concepto son Newton, Leibniz, Euler, Bernoulli y Cauchy. Aunque la formalización de dicho concepto presente huellas en la obra de Cauchy, compartimos la idea que establece (Youschkevitch, 1975).

> La idea de función entendida de una u otra manera esta implícitamente contenida en las reglas para medir áreas de las figuras más simples tales como rectángulos, círculos,

> etc., conocida al principio de la civilización y las primeras tablas (algunas tablas son funciones de dos variables) de adición, multiplicación, división etc.[51]

Para precisar el desarrollo del concepto de función, es necesario entrar en detalle con sus elementos primigenios, como el concepto de variación, dependencia entre variables y cantidades, todo esto posteriormente desemboca en la creación del análisis matemático, donde el concepto principal es la noción de función.

3.1 LA PRIMITIVA IDEA DE CANTIDAD VARIABLE

Indudablemente la manera de reconocer las curvas geométricas a través de ecuaciones algebraicas lleva implícitamente cierto sentido de dependencia entre valores conocidos y desconocidos (segmentos para Descartes) como los puntos de la forma (x, y) que son la base del sistema referencial sea oblicuo o perpendicular. A raíz de esto comienza a engendrarse la idea de la variación de magnitudes, es decir, dado un valor de x obtener su respectivo y, esta idea es tratada [52] por Descartes. Los elementos primigenios de esta idea surgen cuando Newton establece la idea de variación entre cantidades expresadas mediante las fluentes, es decir cantidades que varían de posición con respecto al tiempo.

Una conexión encontrada con la idea de variación con respecto al movimiento, se presenta en la forma de definir las curvas mecánicas, recordemos que estas son generadas por dos movimientos independientes que generan la curva punto a punto, precisamente la variación de sus parámetros es la permite relacionar e inferir dicha relación. Pero quien intenta establecer una definición para cantidad variables es Euler, el cual define que una

---

[51] Ver (Youschkevitch, 1975, pág. 40).

52 Tal como se mostró en el primer capítulo I, sección **1.2.1 Descartes y el problema de Pappus.**

cantidad variable "es una cantidad indeterminada o universal la cual comprende por si mismo todos sus valores (Youschkevitch, 1975, pág. 61)

3.2 El concepto de "función" en Newton y Leibniz

«Mis matemáticas han sido un juego prodigioso a la orilla del misterio».

Newton

Entre el siglo XVII y XVIII, Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Von Leibniz (1646-1716) sistematizaron y enriquecieron un conjunto de técnicas provenientes de sus antecesores como la geometría analítica de Descartes, las tangentes de Fermat-Descartes entre otros. En este sentido desarrollaron unos potentes algoritmos que permitieron la solución de problemas como los centros de gravedad, áreas, volúmenes, tangentes, radios de curvatura, longitudes de arco, etc. De esta manera el legado teórico de Descartes permitió extender los conceptos y aportes matemáticos que desencadenaron la creación de una ciencia llamada el cálculo infinitesimal.

En el siglo XVIII el cálculo presenta conexiones con los fenómenos físicos permitiendo el desarrollo de la mecánica, la óptica y astronomía. Posteriormente todos estos desarrollos fueron aumentando y abriendo nuevos del conocimiento matemático. Una de las ideas claves de todo este cumulo de conocimiento se refiere a la idea de "función". Precisamente quien se le acuña por primera vez el uso del término "función", es a Leibniz, el cual expresa que la relación entre la ordenada ED y abscisa AE es representada por alguna ecuación conocida,…otra clase de líneas las cuales en una figura dada, forman una función. (Youschkevitch, 1975, pág. 56). Este reconocimiento permite inferir que Leibniz admite el sistema coordenado y más aún que a partir de este sistema existe una ecuación que satisface una relación entre sus componentes.

En cambio Newton no realiza mención de esto, pero tiene implícitamente la dependencia entre variables y cantidades constantes, el sistema coordenado referencial, no se distancia mucho del propuesto por Descartes, ni la notación usada. A los segmentos los llama usando las letras x,y,z, etc. mientras que las constantes$a$,b ,c ,etc.

3.3 El concepto de función y el delineamiento del Análisis Matemático Siglo XVIII- XIX

El desarrollo y la introducción de las curvas que involucran senos, cosenos y en general las correspondientes a las curvas mecánicas abrió la posibilidad relacionada con la representación. Esto represento un problema puesto que el representar una cantidad expresada mediante una serie infinita permitía conocer una expresión analítica, a partir de esto surgen cierto interés de encontrar expresiones más generales que permitan relacionar cantidades. (En el sentido de Newton, encontrar fórmulas generales, como el binomio, que permiten acoger un gran número de curvas) Precisamente Johann Bernoulli (1694- 1718) encuentra una de estas representaciones la cual denota una formula general que relaciona todas las cuadraturas[53]

$$int.n\,dz = nz - \frac{1}{2}zz\frac{dn}{dz} + \frac{1}{1.2.3}\frac{z^3ddn}{dz^2} - \frac{1}{1.2.3.4}\frac{z^4dddn}{dz^3} + \cdots$$

[53] Otro de los resultados que giran alrededor de este trabajo y que apoyan nuestra tesis principal es la publicación de otro artículo “A generalization of integrals by the formula of integration by parts” (ANEXO I) en el cual se encuentra una manera alternativa para deducir la formula de Bernoulli. Se ha encontrado que ésta fórmula, para algunas funciones presenta problema respecto a la convergencia. La serie hallada puede reescribirse como $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n f^n(x)x^{n+1}}{(n+1)!} + C$. Ver (Mendoza- Guzmán II, 2013, p. 4)

Aparentemente esta serie admite la expansión de una cantidad n como una expresión analítica arbitraria, sin embargo, la formula presenta problemas en el caso de considerarse ecuaciones de la forma $\frac{a}{x^n}, a \neq 0$ [54]. Una de las primeras definiciones dadas acerca de que es una función, fue establecida por Johann Bernoulli en 1718, el cual define que una función como sigue:

> **Definición 1**. Se llama función de una o varias variables a una cantidad compuesta de cualquier manera. Se llama función de una variable a una cantidad compuesta, de manera que sea, por esa variable y por constantes. [55]

Esta definición admite la manera de crear funciones bajo condiciones de composición entre cantidades variables y constantes, sin embargo cabe preguntarse ¿si las series de potencias constituían en sí una función? Precisamente quien considera que las series de potencias son funciones es Leonhard Euler (1707-1783); primero que todo brinda una segunda definición de lo que es función, aunque que con respecto a la dada por Bernoulli discrepa un poco debido a que admite el término "función analítica", en términos generales pareciera ser que las funciones podían ser obtenidas mediante la aplicación de las propiedades aritméticas conocidas, suma, multiplicación, división y radicación sin importar si la cantidad de términos era finita o infinita .

> **Definición 2.**Una función de cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera por esta cantidad variable y por números o cantidades constantes.[56]

---

[54] Para entrar en detalle ver (Mendoza- Guzmán II, 2013, p. 4)

[55] Tomado de (Youschkevitch, 1975, p. 60)

[56] Tomado de (Youschkevitch, 1975, p. 61)

El desarrollo del concepto de función ha estado amarrado a la forma de quienes han intentado y establecido una definición, bien sea explícita o implícita e inclusive intuitiva, a sus líneas de desarrollo y a su aplicabilidad en la resolución de problemas y formalización del análisis matemático. A continuación se han recogido las diferentes definiciones que se han dado de función, a lo largo de un periodo de 200 años, entre éstas se destacan las definiciones dadas por; Nicolás de Condorcet (1743-1794), Joseph Lagrange (1736-1813), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768- 1830), Gustave Dirichlet (1805-1859), Augustin Louis Cauchy (1789- 1857), Nicoles Bourbaki (1939- 1967).

Por ejemplo Nicolás de Condorcet (1743-1794) intenta dar una definición de función aunque esta definición da una caracterización de la dependencia entre F y ciertas cantidades.

Nicolás de Condorcet (1743-1794)

> **Definición 3.**Asumo que tengo un cierto número de cantidades $x, y, z, \ldots$ y para cada valor definido de $x, y, z, \ldots F$ tiene uno o más valores definidos correspondientes a ellos; yo digo que Fes una función de $x, y, z.$ [57]

Joseph Lagrange (1736-1813)

> **Definición 4.**A cualquier expresión del cálculo en la cual esas cantidades entran de manera cualquiera, mezcladas o no con otras cantidades que miramos como teniendo valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones consideramos solo las cantidades que suponemos variables sin ninguna mirada a las constantes.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768- 1830)

> **Definición 5**. En general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dados una infinidad de valores de la abscisa x, hay un número igual de ordenadas$f$ $f(x)$. Todas tienen valores numéricos, ya sean positivos,

[57] Tomado en (Youschkevitch, 1975, p. 75)

negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola.[58]

Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859)

Definición 6. y Es una función de una variable $x$en un intervalo $a < x < b$, si para cada valor de la variable x en este intervalo corresponde un valor definido de la variable y. Sin importar de qué forma esta correspondencia es establecida.[59]

Augustin Louis Cauchy (1789- 1857)[60]

Definición 6. Cuando cantidades variables están relacionadas entre sí de tal manera que los valores de algunos de los unos se dan, puede encontrar todos los demás, consideramos estas distintas cantidades que se expresa por medio de varios de ellos, que por lo tanto, toman el nombre variables independientes. Las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente se denominan funciones de esas mismas variables.

Todas estas definiciones muestran como el concepto de función ha ido evolucionando, pasando por consideraciones como expresión analítica y dependencia e independencia de sus términos (constantes y variables). Pero a raíz de la admisión de ciertas funciones como las trascendentes y de funciones definidas a trozos, se comienza a clasificar las funciones.

Como se mencionó en el capítulo II, Descartes es el primero en dar una clasificación para las curvas conocidas: geométricas y trascendentes. Pero el clasificar las

---

[58] Tomado en (Ruthing, 1984, p. 73)

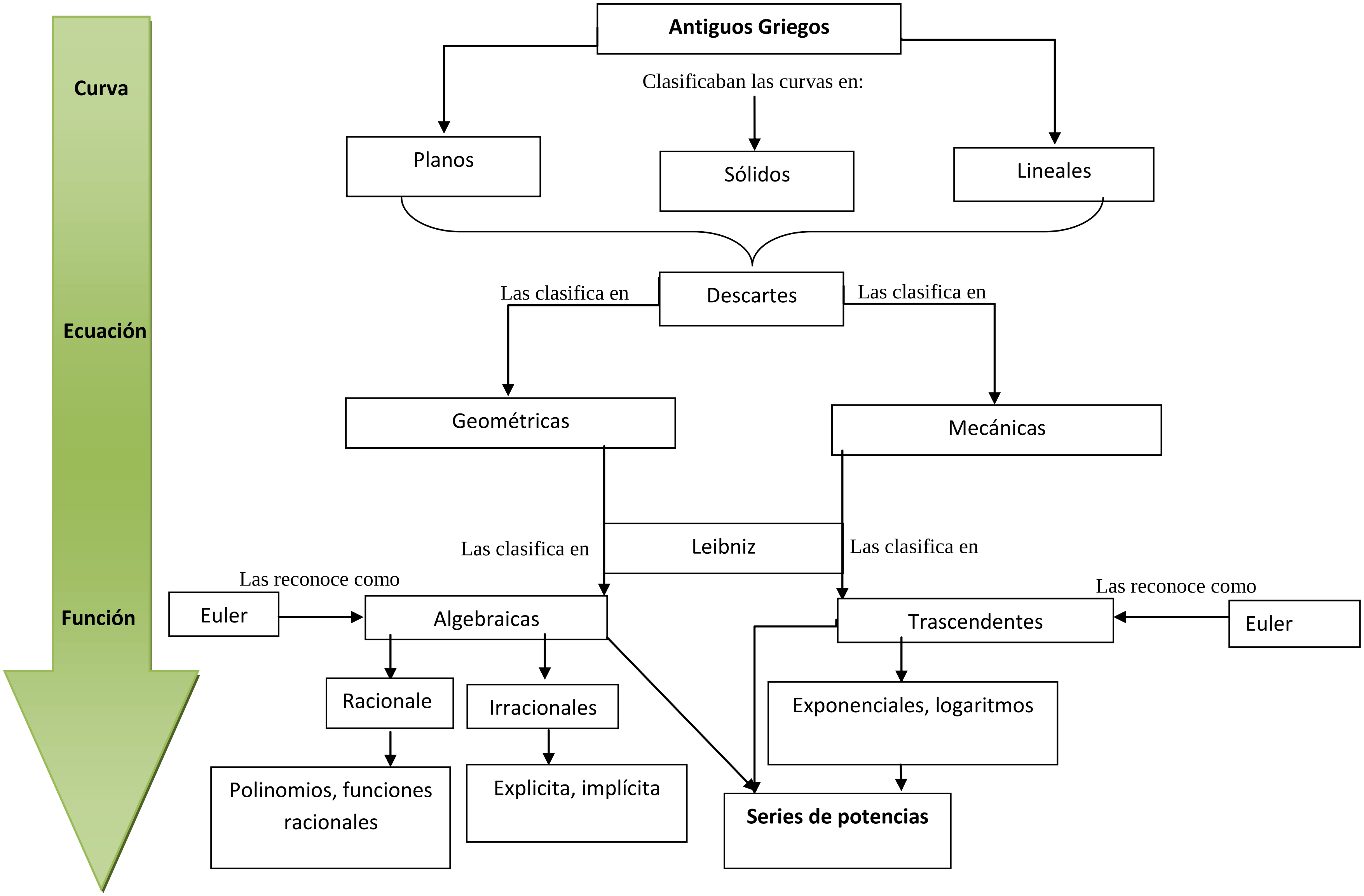
[59] Tomado en (Youschkevitch, 1975, p. 78)

[60] Tomado en (Cauchy, 1821, p. 17)

curvas no implicaría no necesariamente clasificar funciones, sin embargo es Euler quien brinda una clasificación un poco más formal para las curvas, todo esto precedido por la clasificación de Leibniz. Si analizamos las líneas de desarrollo para el objeto curva proveniente desde la concepción de los antiguos hasta Descartes; que corresponde al primer movimiento curva-ecuación, sumado al segundo movimiento correspondiente desde Descartes a ecuación y función. El siguiente cuadro muestra las líneas de desarrollo desde los antiguos pasando por Descartes hasta Euler y la instauración de la función ha sufrido el objeto curva. Como base se toma el itinerario curva- ecuación- función.

El siguiente cuadro muestra como las curvas comienzan a caer y a tener acogida bajo ciertas líneas que permitieron un desarrollo más formal.

Como primera parte la concepción de los griegos hacia las curvas permitió distinguir la primera clasificación de la curvas (problemas planos, sólidos y lineales). Posteriormente Descartes acoge esta concepción y clasifica las curvas geométricas y mecánicas, mientras que en la línea de desarrollo de las curvas geométricas se conciben las curvas algebraicas, racionales, irracionales, polinomios infinitos (series de potencias) caracterizadas por Euler y, por otra parte, la línea de desarrollo de las curvas mecánicas (trascendentes) nombradas por Leibniz e identificadas por Euler sucumben los logaritmos, exponenciales y las series infinitas y de potencias. Notemos como este desarrollo se encuentra enmarcado en el itinerario curva, ecuación y función, las series de potencias aparecen como una herramienta alternativa que acoge gran cantidad de curvas que los matemáticos usan actualmente.


Curva
Ecuación
Función
Antiguos Griegos
Clasificaban las curvas en:
Planos
Sólidos
Lineales
Descartes
Las clasifica en
Las clasifica en
Geométricas
Mecánicas
Leibniz
Las clasifica en
Las clasifica en
Las reconoce como
Euler
Algebraicas
Las reconoce como
Trascendentes
Euler
Racionale
Irracionales
Exponenciales, logaritmos
Polinomios, funciones racionales
Explicita, implícita
Series de potencias

3.4 La convergencia de las series en Cauchy

En su curso de análisis[61] de 1821, Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) sistematiza el conocimiento matemático que desemboca en la creación del análisis. En su libro, dedica un capítulo especialmente al formalismo de las series infinitas y a definir mediante supuestos algebraicos y un tanto alejados de lo geométrico, cuando una serie converge o diverge.

Primero que todo Cauchy considera una serie como una secuencia indefinida de cantidades que siguen una determinada ley de formación, bajo esta concepción define la suma de la serie S_n la cual se constituye como la suma de los primeros n elementos de las cantidades dadas, de la forma $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$. Si esta suma tiende a un cierto límite S, entonces converge de lo contrario diverge. Todo esto permite evidenciar que el tratamiento inicial para las series en Cauchy está determinado a separar las series en dos grupos; Convergentes y divergentes. Con Cauchy se desliga la idea de obtener nuevas representaciones de ecuaciones amarradas a las cuadraturas, por ello una de las ideas claves es cuando se establece que si se tiene la serie de cantidades de la forma $1, x, x^2, x^3, \ldots$ su respectiva suma corresponderá a $\frac{1}{1-x}$.

La representación de un objeto estaría amarrada a establecer y asociarle una cantidad para ciertos valores de x. Uno de los hechos de gran importancia respecto al tratamiento de las series es el reconocimiento entre los distintos valores que puede adquirir una serie, para ello Cauchy realiza un análisis particular para los valores que puede tomar la siguiente serie y se pregunta por su respectiva suma. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 0$(Modernamente sabemos que $x < 1$). El análisis en este caso corresponde a suponer cuando $x > 1, x = 1, x < 1$, en los dos primeros casos la serie diverge, mientras que en el tercer caso realiza la siguiente cadena de comparaciones.

[61] Ver (Cauchy, 1821)

Cauchy aprovecha el hecho de tomar valores menores que uno, puesto que estos permiten obtener que a medida que n sea muy grande la suma sea infinitamente pequeña. Con esto se comienza a evidenciar la idea de límite.

$$x^n < x^n + x^{n+1} = x^n \frac{1-x^2}{1-x} < x^n + x^{n+1} + x^{n+2} = x^n \frac{1-x^3}{1-x} < \cdots$$

Cauchy caracteriza las series de términos positivos y establece algunos teoremas de convergencia. Históricamente la propuesta de Cauchy constituye un punto de quiebre en la constitución del análisis como rama de las matemáticas, al cimentar los obre unas bases sólidas a partir del concepto de función y limite.

Al introducir una definición de límite que prefigura su tratamiento en términos de inecuaciones, se puede afirmar que los trabajos de Cauchy abren perspectivas del desarrollo de las funciones en series de potencias. A partir de Cauchy empieza a discutirse el problema de la convergencia puntal y la convergencia uniforme.

Como antesala a esta discusión Cauchy establece y demuestra los criterios de convergencia para series de términos positivos, entre estos bien conocidos tenemos:

- El criterio de la raíz (Cauchy, 1821, p. 91) establece que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es convergente si lim sup $\sqrt[n]{|u_n| < 1}$ y es divergente si lim sup $\sqrt[n]{|u_n|} > 1$

- Criterio de la razón (Cauchy, 1821, p. 92)establece que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$es convergente para valores crecientes de n en la proporción $\frac{u_{n+1}}{u_n}$cuando el $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, cuando $k < 1$, en caso contrario diverge.

- Criterio de comparación (Cauchy, 1821, p. 93) establece que si $u_{n+1} > u_n > 0$entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$y $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n u_{2^{2n}}$ son convergentes en caso contrario no.

- Criterio del logaritmo (Cauchy, 1821, p. 94) establece que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es convergente para $\frac{\ln u_n}{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}$ cuando el límite es un valor finito h, para valores crecientes de n. Converge cuando $h < 1$, diverge cuando $h > 1$.

- Criterio de la serie alterante (Cauchy, 1821, p. 98)establece que si el valor numérico del término general $u_n$decrece constantemente e indefinidamente para valores crecientes de n y si además los diferentes términos son alternados positivos y negativos entonces la serie converge.

CAPÍTULO IV

4 CONCLUSIONES:

LA CREACIÓN DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO Y LA TRANSVERSALIDAD DE LA REPRESENTACIÓN MEDIANTE SERIES DE POTENCIAS

Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas solo se revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella.

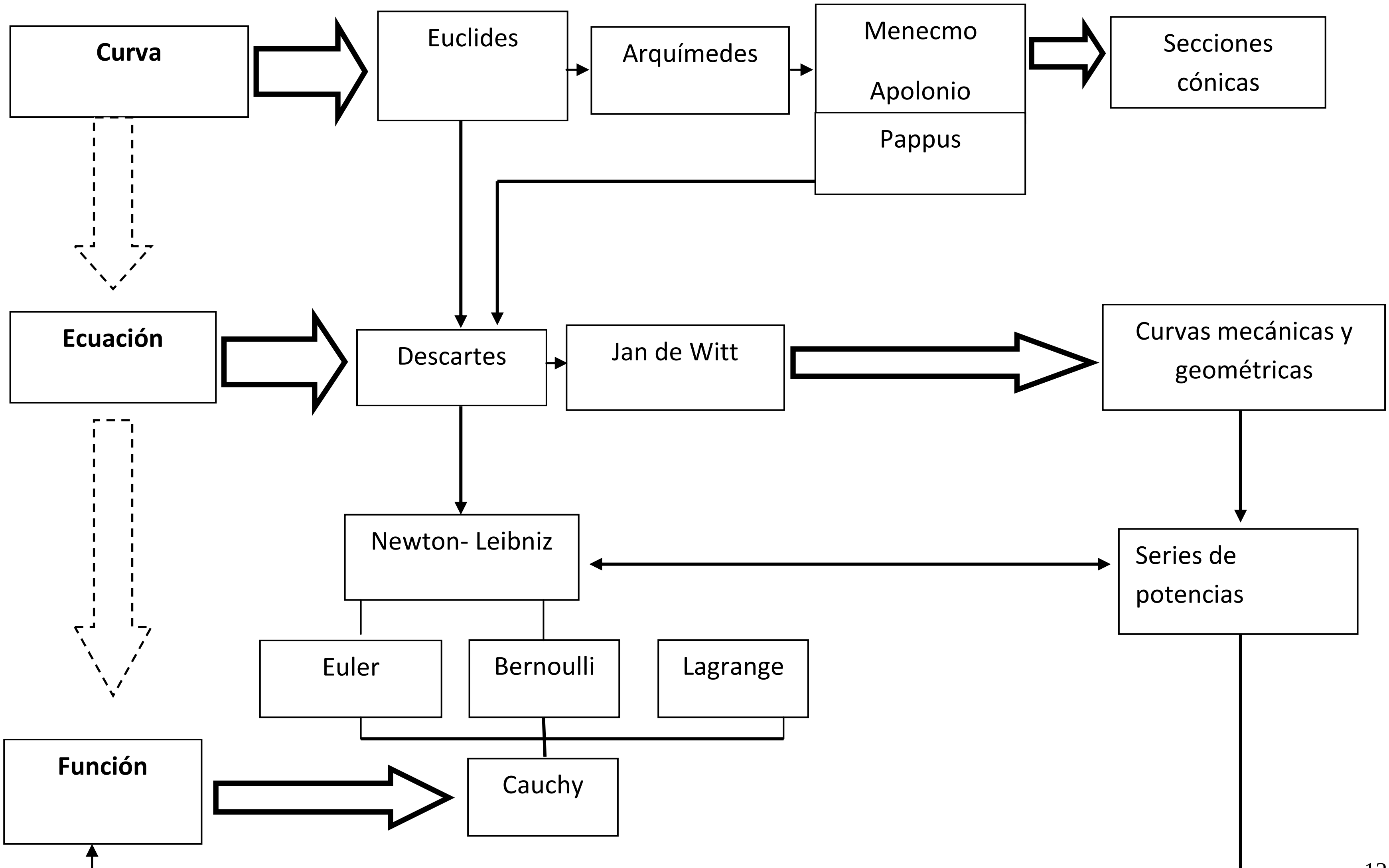
Gauss.

Los estudios históricos epistemológicos que relacionan un concepto sin duda se constituyen en un elemento clave que permite develar su génesis y su instauración a lo largo de la historia de las matemáticas.

Tal como lo establece (Anacona, 2003, p. 2) la relación entre la historia de las matemáticas y la educación matemática se encuentra permeada por ciertos procesos internalistas y externalistas; desde la corriente internalista, se considera que el objeto de la Historia de las Ciencias es la ciencia misma y desde la externalista se considera que las explicaciones sobre acontecimientos científicos se pueden obtener primordialmente desde el ámbito social. Postura que se acerca más a una sociología de las ciencias.

Sin embargo la dirección de este trabajo en gran parte evidencia lo internalista, la génesis de un concepto y su instauración en la comunidad matemática; todo esto permeado por líneas de causalidad y vertientes que hicieron posible su constitución.

En este trabajo se utilizan varias fuentes primarias como la obra de Apolonio, el cuarto libro de Pappus de Alejandría, la *geometría* de Descartes, los *Elementos de las líneas curvas* de Jan de Witt, *De Analysi* de Newton, *tratado de método de series y fluxiones*, el *análisis infinito* de Leibniz, la *aritmética del infinito* de Wallis, la *teoría analítica del calor* de Fourier, *los incrementos* de Taylor, el *curso de análisis* de Cauchy.
Para nuestro caso el desarrollo de la curva, ecuación y función está ligado a ciertas líneas de desarrollo, tal como se muestra en el siguiente cuadro.


Curva
Euclides
Arquímedes
Menecmo
Apolonio
Pappus
Secciones cónicas
Ecuación
Descartes
Jan de Witt
Curvas mecánicas y geométricas
Newton- Leibniz
Series de potencias
Euler
Bernoulli
Lagrange
Función
Cauchy

Como un primer momento y como se muestra en el capítulo I el paso de lo sintético (curva) a lo analítico (ecuación), se encuentra constituido en dos momentos cruciales

1. El descubrimiento y tratamiento dado a las secciones cónicas
2. La introducción y representación de ecuaciones algebraicas asociadas a las curvas geométricas

Estos dos momentos nos permiten decir que los procesos evidenciados e intermedios, que se presentan en el paso de la curva a la ecuación, los entes geométricos (secciones cónicas, rectas, circulo, curvas) se conciben como un elemento inicial en la constitución de las matemáticas y, más aún, provenientes de la antigüedad griega. En este mismo el tránsito de lo sintético relacionado con la manera de producir curvas se ve inducido con la introducción de las ecuaciones algebraicas por Descartes y sus contemporáneos.

Precisamente en esta identificación las curvas geométricas y mecánicas aparecen caracterizadas tal como lo hace Descartes. Una de los aportes más relevantes encontrados en la obra de Descartes es el cambio cualitativo que se presenta al crear un método para asociar ecuaciones a las curvas. Justamente el paso de una representación visual a una representación analítica expresada mediante una ecuación es el que permite la introducción de un sistema de coordenadas, donde sus elementos constitutivos comienzan a permear la idea de variación bien sea entre segmentos, puntos o curvas.

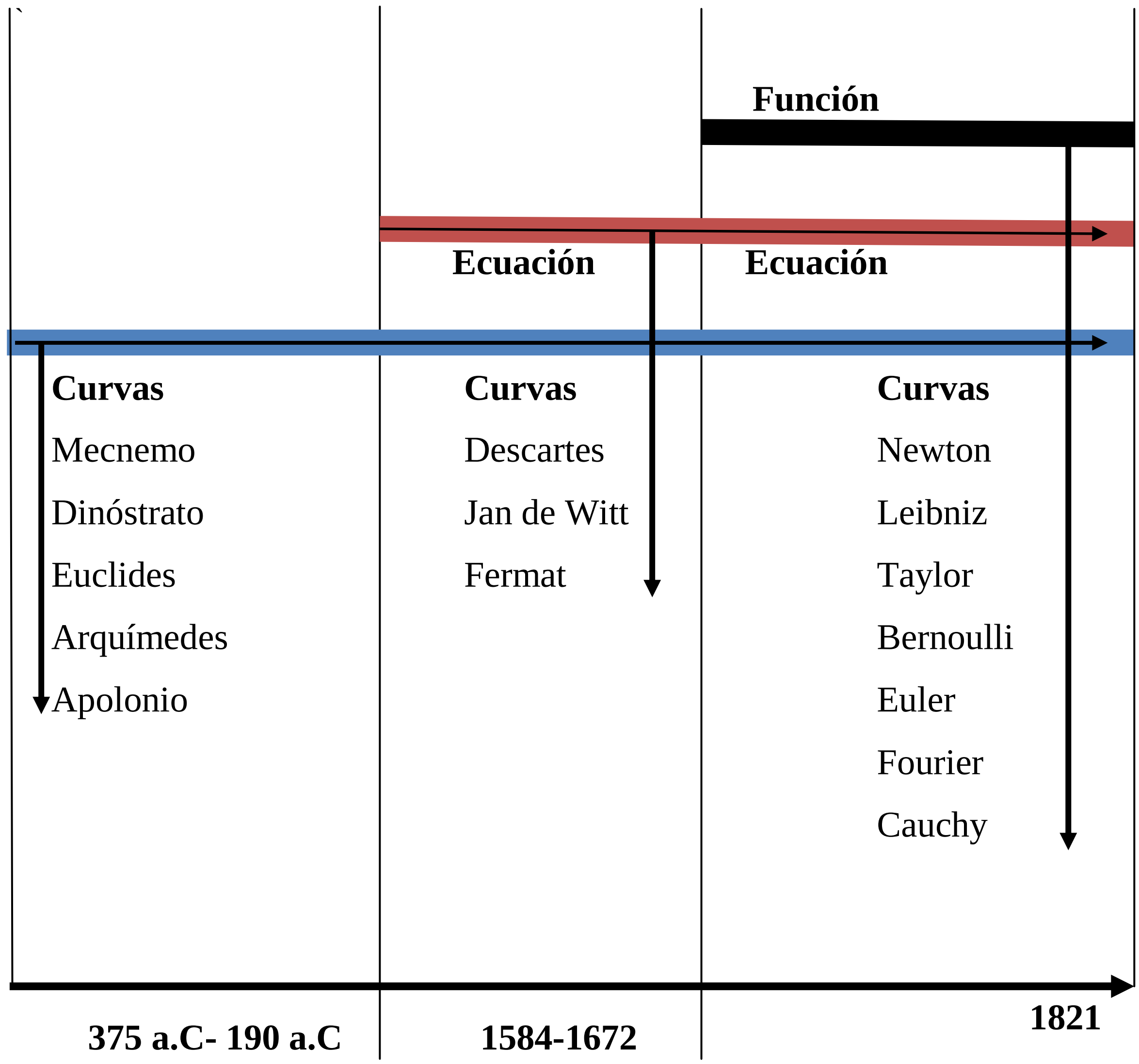
Tal como se mostró en la sección 1.2 referente al problema de Pappus; el punto central en la solución de este problema es la caracterización de las secciones cónicas, que con respecto a la caracterización de Menecmo y Apolonio sufren un cambio referente al desprendimiento de una situación netamente geométrica (secciones de un cono) a ser vistas como curvas que poseen una representación analítica. Justamente Descartes al establecer un conjunto de operaciones definidas para los segmentos permiten establecer la dualidad numero-magnitud, con lo cual está introduciendo un cuerpo numérico, que le permite operar segmentos y definirlos como una operación bien establecida.

La constitución de una teoría de ecuaciones algebraicas proveniente de los trabajos de Descartes, se constituye en un elemento fundamental en el desarrollo de la idea de función. Precisamente en esta idea es que el paso de la ecuación a la función es necesario identificar los elementos fundamentales para este tránsito. Como punto de partida menciónenos la introducción del sistema de coordenadas por parte de Descartes y de Witt, posteriormente la idea de variación comenzada por Newton- Leibniz y formalizada por Cauchy y al final los diferentes trabajos relacionados con las funciones hasta desembocar en la creación del análisis matemático.

En este devenir histórico, se comienza a ventilar la idea de función, como la dependencia entre cantidades variables y la generación de curvas bien sean mecánicas o trascendentes, aunque se presenta alguna idea de esto en la antigüedad, como lo establece (Youschkevitch, 1975), la noción de función como se conoce modernamente, como una relación entre dos conjuntos A y B que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y solo uno del otro, tiene sus raíces en el tratamiento brindado a los problemas físicos, como el de la cuerda vibrante y la transmisión del calor.

Justamente esta idea se ventila, puesto que para determinar la temperatura en un determinado instante de tiempo t, para una lámina delgada uniforme, el resultado obtenido corresponde a un único valor de temperatura $T(t)$, lo mismo sucede en el caso de la cuerda vibrante, cuando se quiere determinar la velocidad con que oscila la cuerda dependiendo de la posición x, se obtiene su valor $v(x)$. La solución de estos problemas se realiza en términos de expresiones que involucran series trigonométricas sin embargo el proceso histórico y evolutivo seguido por las series infinitas pasa por consideraciones como cuadraturas y anticuadraturas.

Tal como se muestra en el capítulo II, las series de potencias comienzan a ser transversales en el desarrollo de las matemáticas en la medida que estas se presentan como objetos cruciales en la solución de problemas.



Función
Ecuación
Ecuación
Curvas
Mecnemo
Dinóstrato
Euclides
Arquímedes
Apolonio
Curvas
Descartes
Jan de Witt
Fermat
Curvas
Newton
Leibniz
Taylor
Bernoulli
Euler
Fourier
Cauchy
375 a.C- 190 a.C
1584-1672
1821

En el cuadro anterior se han delimitado tres espacios temporales relacionados con la aparición de este estudio: la curva, la ecuación y la función. La primera etapa corresponde al periodo entre 375 a.C- 190 a.C, donde justamente se permea el objeto curva y la manera como los antiguos la utilizaban para resolver problemas. El segundo periodo corresponde a 1584-1672, donde se tienen indicios de la aparición de la representación de curvas mediante ecuaciones algebraicas.

El tercero periodo abarca hasta el año 1821 con el primer curso de análisis propuesto por Cauchy. Posteriormente se identifican las respectivas líneas de desarrollo de cada concepto amarradas a los diferentes aportes de sus autores que se constituyen de gran importancia en la instauración del concepto de función.

De esta manera, en la línea de desarrollo del análisis se distingue la **curva** como un objeto presente en toda su línea de desarrollo, después aparece la ecuación algebraica que subsidia las **curvas** y al final la "**función**" la cual estaría en la intersección de la curva y la ecuación. En todo este desarrollo presentado a lo largo del trabajo siguiendo el circuito curva-ecuación- función se evidencia que el objeto serie se vuelve transversal cuando las técnicas y métodos desarrollados no son suficientes en el sentido de producir y resolver problemas.

Todo esto gradualmente va permeando el desarrollo de la matemática de cierta manera transversal, es decir, existen unos saltos temporales y cognitivos que no permitieron que dicho desarrollo fuese continuo, más bien las dificultades encontradas en la línea de evolución del concepto son determinantes en la transversalidad. Por ejemplo al objeto curva, le correspondió un gran salto temporal respecto a su representación, el paso de lo sintético a lo analítico y la manera de amarrar ecuaciones a las curvas.

La linealidad de su desarrollo se ve frenada en función de la solución de los tres problemas clásicos de la antigüedad griega. Sin embargo es Descartes quien soluciona este impase. Por otra parte el problema de realizar cuadraturas de figuras curvilíneas comienza a gestarse en Wallis y su manera de operar razones de series numéricas, pero este a su vez tiene una idea intuitiva de convergencia la cual representa cierto problema de rigor. Posteriormente Newton y Leibniz inauguran la introducción de las series de potencias para resolver cuadraturas, pareciera ser que las series representan una herramienta que permite dar solución a problemas que los métodos tradicionales no podían sustentar.

4.1 UNA PROPUESTA RELACIONADA CON LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Todo este proceso tan exhaustivo, permeado por las diferentes líneas de desarrollo y sus correspondientes autores, permite evidenciar cómo el objeto función ha ido evolucionando. En nuestro caso la representación de funciones mediante series de potencias desempeñaron un rol de gran importancia en el desarrollo del concepto de función y el análisis puesto que en ellas se comienza a fundamentar y domesticar el infinito. Sin embargo el proceso de expandir funciones mediante series de potencias no fue inmediato más bien fue condicionado a los diferentes usos que la series podrían tener. De esta manera se comienzan a abrir discusiones relacionadas con la utilidad de las series infinitas y de potencias en el aula de clases y la forma como estas permiten obtener nuevas representaciones analíticas de funciones en cierta manera complejas.

Precisamente entre estas discusiones en el articulo *A generalization of integrals by the formula of integration by parts*[62] se contextualiza un poco la manera de deducir una serie infinita usando un método un poco inusual pero que lleva a encontrar una fórmula equivalente a la encontrada por Bernoulli en el año 1694[63].

Justamente este articulo indaga la forma como los métodos de integración pueden ser "relegados" por uno solo, es decir se puede reducir cualquier cuadratura mediante una serie infinita de la forma

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^n(x) x^{n+1}}{(n+1)!} + C$$

[62] (Mendoza- Guzmán II, 2013)

[63] Tal como se mencionó en el capitulo anterior, este artículo es resultado de esta indagación histórica y uno de sus hallazgos más relevantes es concluir que esta fórmula es equivalencia a una fórmula encontrada por Bernoulli en 1654.

Este resultado de cierta manera considerado por algunos evaluadores "interesante y curioso para las clase del cálculo" respecto a la representación y la relación entre la derivada e integral también tiene su punto clave en la practicidad y la confrontación por ejemplo si se compara con la serie de Taylor, aunque presente problemas respecto al tipo de funciones que admiten esta expansión; funciones que pertenezcan a la clase C_∞. Permite obtener la expansión para la función e^x y otros tipos de curiosas representaciones que se encuentran en proceso de investigación. Todos estos métodos alternativos ligados a su desarrollo histórico y procedimental de cierta manera permiten introducir nuevos elementos conceptuales que se muestran interesantes para ser enseñados. Pero cabe preguntarnos ¿si el utilizar este método sería conveniente para enseñarse por ejemplo en una clase de cálculo integral? Esta discusión podría realizarse por ejemplo realizando una secuencia didáctica en la cual se establezcan una serie de actividades que permitan relacionar, por ejemplo, las ventajas y desventajas que tiene el usar esta representación con respecto a la serie de Taylor. En este sentido, el concepto y el desarrollo de la noción de función se convertiría en un elemento clave que giraría entorno a dicha propuesta, dado que en la noción de función se fundan las ideas de convergencia y representación. Justamente la indagación histórica exhaustiva que se evidencia en este trabajo permitiría tomar elementos para realizar una propuesta de esta índole; por ejemplo en el caso de las ideas de variación y las diferentes definiciones que se han encontrado de función.

Por otra parte, en esta misma dirección, pensando en realizar otra propuesta didáctica, es posible relacionar los resultados del artículo *Los polinomios particulares: Una definición para exploraciones cartesianas* con el uso de las series de potencias. Justamente este trabajo permite relacionar funciones polinómicas de la forma $f(x) = a_n x^n$ con su derivada y algunas operaciones que se definen en el marco del artículo.[64] En el artículo solo se trabaja con parábolas, dejando abierta la discusión para otro tipo de funciones.

El desarrollo histórico en este trabajo pasa por varios autores que fueron claves. Indudablemente sus obras constituyeron puntos de corte respecto a tratamientos, representaciones y concepciones que en su época lograron gran aceptación en una comunidad científica. A continuación se describen los principales autores citados en este trabajo acompañados por su aporte más relevante.

[64] Ver (Mendoza Guzmán I, 2013.)

Cronología del desarrollo histórico presentado en el trabajo

Mecnemo (375-325 a.C) Descubre las secciones cónicas al intentar dar solución al problema de la duplicación del cubo.

Dinóstrato (390 a. C. 320 a.C) Construye una de las primeras curvas mecánicas.

Euclides de Alejandría. Realiza valiosos aportes al tratamiento de las cónicas, caracterizando conos, pirámides; su aporte más importante los Elementos.

Pappus de Alejandría (290 a.C- 350 a.C) Caracteriza y sistematiza los aportes de Euclides y Mecnemo. Su aporte más significativo es el problema de Pappus. La solución de este problema constituyó un punto de partida para Descartes en la geometría.

Arquímedes de Siracusa (287 a.C- 212 a.C) Construye la espiral de Arquímedes y utiliza procesos como la neusis.

Apolonio de Perga (262-190 A.C) Estudia en extenso las secciones cónicas y caracteriza elementos como diámetros y cuerdas. Su aporte más importante es producir las cónicas mediante un único cono.

Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) Realiza diversas cuadraturas de las secciones cónicas. Uno de los más importantes hallazgos es la relación entre el área de la hipérbola y el logaritmo.

René Descartes (1596-1650) Introduce las ecuaciones algebraicas que permiten la creación de la geometría analítica y la instauración de un método general para resolver problemas. En su obra se presenta el elemento más tangible en el transito curva-ecuación.

Girolamo Cardano (1501-1576) se destacan los aportes al algebra en particular a la solución de ecuaciones cubicas.

Nicolás Oresme (1323-1382) Trabaja con series numéricas, muestra la “divergencia de la serie armónica”.

Jan de Witt (1625-1672) Realiza aportes a la geometría analítica desde un punto de cierta manera formal. Muestra métodos para encontrar las ecuaciones de rectas, parábolas, círculo, elipses, hipérbolas.

Pierre de Fermat (1601-1665) Junto con Descartes constituyó la geometría y un cumulo técnicas para el cálculo de tangentes y normales a las curvas geométricas.

Francois Viete (1540-1603) Utiliza una notación particular para tratar ecuaciones.

Pietro Mengoli (1625-1686) Trabaja con series numéricas y utiliza la comparación para términos de la serie armónica. Al igual que Oresme muestra que esta diverge.

John Wallis (1616-1703) Trabaja desde las razones de series infinitas, logra encontrar una conexión entre las cuadraturas de las curvas de la forma x^n y el exponente n.

Nicolaus Mercator (1620- 1687) Es uno de los primeros en encontrar una expansión mediante series de potencias y de relacionar el área de la hipérbola con el logaritmo.

Isaac Newton (1642-1727) Su obra constituye uno de los pilares referentes a la representación de ecuaciones mediante series de potencias. Su amplio trabajo y la creación de técnicas para hallar cuadraturas y anti cuadraturas desembocan en la creación del cálculo infinitesimal.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 1716) Trabaja con series numéricas y de potencias. Es el primero en introducir el término función.

Brook Taylor (1685-1731) Encuentra una expresión que representa un gran salto cualitativo respecto a la representación de funciones mediante series de potencias. Usa incrementos diferenciales y el comportamiento de estos para estimar el valor de una función $f(x)$.

Johann Bernoulli (1694-1718) Encuentra una expresión analítica que permite expresar cuadraturas mediante una serie de potencias. Sin embargo esta expresión posee problemas en cuanto a la convergencia.

Leonhard Euler (1707-1783) Se encuentra en la línea de fundadores del análisis matemático.

Joseph Fourier (1768–1830) Contribuye en la manera de ver una función expresada como una serie infinita de senos y cosenos con esto da explicación a la conducción del calor.

Augustin-Louis Cauchy (1789 1857), Formaliza las bases del análisis matemático con la introducción del concepto de función como punto central en este. Introduce los criterios de convergencia para series amarrada a la idea de límite.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, C. (2000). Descartes lector de Euclides. En C. Á., & R. Martinez, *Descartes y la ciencia del siglo XVII* (págs. 15-69). México D.F, México: Siglo ventiuno editores.

Anacona, M. (2003). La historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA , 8* (1), 30-46.

Arboleda, L. C. (2012). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas.

Boyer, C. (2011). *A History of Mathematics* (Third Edition ed.). New Jersey, United States of America: John Wiley & Sons.

Burn, R. P. (2001). Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms. *Historia Mathematica* , 1-17.

Cauchy, A. (1821). *Cauchy´s Course d´analyse.* (J. Buchwald, Ed., R. E. Bradley, & C. E. Sandifer, Trans.) New York: Springer.

Descartes, R. (1637). *La geometría.* (J. M. Ron, Ed., & G. Quintás, Trad.) España: Opera Mundi.

Descartes, R. (1637). *La Géometrié.* (D. E. Smith, & M. L. Lathan, Trans.) The open court publishing company.

Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York: Springer-Verlag.

Euclides. (1970). *Elementos de geometría.* Madrid: Aguilar.

Euler, L. (1835). *Introduction á l´analyse infinitésimal, A.* (J. Labey, Trad.) Paris (Bachelier).

Farfán Márquez, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* (N. G. Philp, Ed.) México, D.F: Grupo Editorial Iberoaméricana.

Ferraro, G. (2008). *The rise and development of the Theory of Series up to the Early 1820s.* New York: Springer.

Fourier, J. B. (1878). *The analitical Theory of Heat.* (A. Freeman, Trad.) London: Cambridge University Press.

Grootendorst, A. W., Aarts, J., Bakker, M., & Erné, R. (2010). *Jan de Witt´s Elementa Curvarum Linearum Liber Secundus.* (J. Buchwald, Ed.) New York: Springer- Verlag London.

Guicciardini, N. (2003). Newton's Method and Leibniz's Calculus. En H. N. Jahnke, *A History of Analysis* (págs. 73-103). Rhode Island: American Mathematical Society.

Heath, S. T. (1908). *Euclid The thiteen books of the elements* (Vol. 1). Cambridge University Press.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A Brief Survey. College Mathematical Journal.

Leibniz, G. (1963). Supplementum geometriae practicae sese ad problemata transcendentia extendens, ope novae methodi generalissimae per series infinitas. *Acta Eruditorum* , 178-180.

Leibniz, G. W. (1684). *Nova methodus pro maximinis et minimis, itemque tantengibus, quae nec fractas nec irrationales quantities moratur, et singulare pro illis calculi genus.* (S. T. Martin, Trad.) Acta Eruditorum.

Leibniz, N. Y. (1977). *El Cálculo Infinitesimal. Introducción de José Babini.* Editorial Universitaria de Buenos Aires Argentina. 1977.

Maanen, J. V. (2003). Precursors of Differentiation and Integration. En H. N. Janhke, *A history of analysis* (págs. 41-72). Rhode Island: American Mathematical Society.

Mendoza Guzmán I, J. E. (2013.). Los polinomios particulares: Una definición para exploraciones cartesianas. *Revista digital Matemática, educación e Internet , 14* (1), 1-5.

Mendoza- Guzmán II, J. E. (2013). A generalization of integrals by the formula of integration by parts. *Revista Digital 360° , 8*.

Newton I, I. (1711). *Analysis Per Quantitatum Series, Fluxiones, ac differentias: cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis* (Vol. 141). (A. J. Durán Guardeño, J. Pérez Fernández, Edits., & J. L. Tamayo Arantegui, Trad.) Londres, España: Real Sociedad Matemáticas Española.

Newton II, I. (2001). *Tratado de método de series y fluxiones.* (M. Panza, Ed.) México: Mathema.

Newton III, I. (1711). *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias con una enumeración de las líneas de tercer orden.* (A. J. Duran Guardeño, F. J. Pérez Fernandez, Edits., & J. L. Arantegui Tamayo, Trad.) Real Sociedad Matemática Española SAEM " Thales".

R. R. (2008). *Apollonius de Perge, Coniques Tome 1.1: Livre I.* Berlin, Germany: Deutschen Nationalbibliothek.

Recalde, L. C. (2013). *Lecciones de Historia.* Cali: Universidad del Valle.

Ruthing, D. (1984). Some Definitions of the Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. *Math Intelligencer , 6*, 72-77.

Sefrin-Weis, H. (2010). *Pappus of Alexandria: Book 4 of the collection.* (J. Z. Buchwald, Ed., & H. Sefrin-Weis, Trans.) New York, USA: Springer-Verlag.

Solarte, L. H., & Constain, A. Y. *Tesis pregrado: La constitucion historica del objeto conica: Un estudio desde Apolonio hasta Descartes.* Universidad del valle, Cali .

Struik, D. J. (1969). *A Source Book in Mathematics, 1200-1800.* Harvard Univ. Press.

Taylor, B. (1715). *Brook Taylor : METHODUS INCREMENTORUM DIRECTA & INVERSA (1715).*

Wallis, J. (1656). *The Arithmetic of Infinitesimals.* (J. A. Stedall, Trans.) Springer-Verlag.

Youschkevitch, A. (1975). The Concept of function up to the Middle of the 19th Century.

TESIS REFERENCIAS

Solarte, L. H., & Constain, A. Y. *Tesis pregrado: La constitucion historica del objeto conica: Un estudio desde Apolonio hasta Descartes.* Universidad del valle, Cali .

Gutierrez, P. I. Tesis maestría: Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, D.C

5 ANEXOS

- **Mendoza- Guzmán, J. E. (2013). A generalization of integrals by the formula of integration by parts. *Revista Digital 360°, 8* .** http://cremc.ponce.inter.edu/360/revista360/Articulos%20para%20publicar%20Octava%20Edicion/A%20Generalization%20of%20Integrals%20by%20the%20Formula%20of%20Integration%20by%20Parts%20by%20J%20Mendoza.pdf

- **Mendoza Guzmán, J. E. (2013.). Los polinomios particulares: Una definición para exploraciones cartesianas. *Revista digital Matemática, educación e Internet, 14* (1), 1-5.** http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V14_N1_2013/RevistaDigital_Mendoza_V14_n1_2013/index.html