Emergencia Histórica de las Funciones Vectoriales en el Siglo XVIII

Juan Carlos Londoño

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2014

Emergencia Histórica de las Funciones

Vectoriales en el Siglo XVIII

JUAN CARLOS LONDOÑO ROJAS

Trabajo de grado presentado al Programa Académico de Licenciatura en Matemáticas y Física como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

Director

Dr. Luis Cornelio Recalde

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN
MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2014

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN
MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2014

JUAN CARLOS LONDOÑO ROJAS, 1981

Emergencia histórica de las funciones vectoriales

en el siglo XVIII

Materias o temas: Historia de las matemáticas, educación matemática.

Nota de Aprobación

El trabajo de grado titulado: EMERGENCIA HISTÓRICA DE LAS FUNCIONES VECTORIALES EN EL SIGLO XVIII, presentado por: Juan Carlos Londoño Rojas, para optar por el título de Licenciado en Matemáticas y Física, fue revisado por el jurado y calificado como:

Director

Jurado

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

AGRADECIMIENTOS

A mi madre, mi familia, mis amigos y compañeros que me acompañaron en este largo proceso,

Al profesor Recalde por su amistad, sus enseñanzas, orientación y dedicación a este trabajo.

"En una eternidad siempre se puede empezar de nuevo"

Facundo Cabral

RESUMEN

En este trabajo de tesis se llevó a cabo un estudio que da cuenta de la evolución de los métodos y teorías del conocimiento en el campo de las matemáticas y la física, en cuanto a la identificación de algunos de los elementos que contribuyeron al desarrollo de la noción de función vectorial. Los resultados se obtuvieron principalmente a partir de la revisión de textos relacionados con el estudio histórico-epistemológico de la noción de vector y textos relacionados con la enseñanza del cálculo vectorial en la formación universitaria de estudiantes de ciencias e ingenierías. En un primer momento se hace la descripción de la evolución de los métodos vectoriales partiendo de los conocimientos matemáticos de la época (siglos XVII y XVIII), influenciados por diversas cuestiones que desde la física trataron de describir algunos fenómenos de la naturaleza. En un segundo momento revisamos el trabajo llevado a cabo por Hamilton y Grassmann en cuanto a la formulación de la noción de vector indicando cómo emergió la noción de función vectorial en el estudio realizado por Tait tomando como base la teoría de cuaterniones. Finalmente tratamos aspectos en relación con la enseñanza de los métodos vectoriales y damos cuenta de algunos obstáculos epistemológicos que se presentaron en el proceso que conllevo a la emergencia de las funciones vectoriales, esto con el objeto de que el presente documento sirva como fuente de consulta para estudiantes y profesores que se interesen por desarrollo histórico de estos métodos y teorías.

Palabras claves: análisis histórico-epistemológico, vector, cuaternión, función vectorial, obstáculos epistemológicos.

INTRODUCCIÓN

Es indiscutible la relevancia que tiene en el mundo de hoy el uso de las funciones vectoriales en diversos campos del conocimiento científico; su desarrollo histórico estuvo marcado, como la mayoría de las teorías matemáticas, por diversos obstáculos que aún hoy en día son evidenciados en los cursos de cálculo vectorial que se imparten en las instituciones de educación superior, en especial en relación con el llamado obstáculo de permanencia. Un ejemplo de ello se presenta cuando se estudian los cambios de representación que se dan al pasar de funciones de una variable ($f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), a funciones de varias variables ($f: A \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$), en las cuales las operaciones como suma o producto ya no conservan las mismas propiedades que el estudiante reconoce en su formación preuniversitaria.

En este trabajo hemos indagado cómo a partir de los desarrollos que se dieron en el siglo XIX, relacionados con el reconocimiento de los vectores y sus métodos operativos se abrió el camino para la formalización de las *funciones vectoriales* en el intento por describir analíticamente fenómenos de naturaleza física. Para esto, hicimos una revisión historiográfica de algunas de las ideas que formularon investigadores como Galileo, Newton, Fourier, entre otros, y que a la larga, contribuyeron en la búsqueda y construcción de nuevos conceptos matemáticos que permitieron describir los fenómenos observados en la naturaleza.

Este proceso se culminó gracias a los trabajos llevados a cabo por Hamilton, Grassmann, Tait y algunos investigadores de finales del siglo XIX, quienes ayudaron a desarrollar el análisis vectorial, partiendo de la construcción de un nuevo elemento llamado vector el cual, al cumplir con algunas propiedades aritméticas operacionales, fue constituyéndose como un objeto matemático. En este sentido, se definieron operaciones como suma o producto entre vectores y se amplió su campo de estudio al combinar estas nociones con el recién creado análisis funcional.

El uso del cálculo vectorial propició el desarrollo del análisis con varias variables dando lugar a la aparición de la geometría diferencial, el análisis vectorial y proporcionó un método analítico de gran potencia para el estudio de la geometría (Arenzana, 1997, p. 63). Esta nueva geometría se basó en el uso de algunas nociones vectoriales tales como vector tangente, gradiente de un campo escalar o flujo de un campo de fuerzas, que fueron fundamentales para expresar teoremas geométricos y otro tipo de resultados derivados su aplicación a las investigaciones de las ciencias naturales, económicas y humanas. Dichas nociones recorrieron un largo camino antes de ser aceptadas por la comunidad científica de la época y su evolución se dio a partir de la aparición de las cantidades vectoriales en la descripción tanto analítica como geométrica de distintos fenómenos.

Concretamente en este trabajo hemos reconocido algunos aspectos conceptuales en el desarrollo de la física y de la matemática, los cuales conllevaron a la formulación de nociones novedosas en un momento de la historia, indagado sobre los elementos de causalidad provenientes de la matemática y de la modelación de fenómenos físicos que dieron lugar a la emergencia de las funciones vectoriales en el siglo XIX; todo ello sin dejar de lado aquellos obstáculos epistemológicos que debieron ser superados para que estas nociones fueran reconocidas y aceptadas por la comunidad matemática de la época.

Los objetivos de este trabajo se desarrollaron en tres capítulos donde se trataron las temáticas que se describen a continuación:

En el primer capítulo llamado *Antecedentes Históricos de la Noción Matemática de Vector*, tuvo como ejes de estudio conocer cómo se construye la noción de vector y su adopción. Para esto dimos una mirada a los elementos que de forma independiente sirvieron de base desde el campo de estudio de las matemáticas y de la física, y que contribuyeron en la creación de los vectores como objeto matemático.

En el ítem 1.1 se da una breve mirada a los elementos que fueron consolidando los métodos operacionales de las matemáticas desde algunas culturas de la antigüedad, en relación con el uso de la geometría y la aritmética, pasando por el estudio del álgebra constituida a partir de la adopción de la geometría analítica desarrollada por Descartes, hasta llegar a la introducción de los números negativos y los números imaginarios que sirvieron de base para representar los vectores y sus métodos operacionales.

En el ítem 1.2 se destacaron las cuestiones que desde la física contribuyeron a construir un método que de manera analítica permitió describir fenómenos como el movimiento o la caída de los cuerpos, gracias a los cuales se comienza a generar una relación de dependencia entre las ciencias físicas y matemáticas, rompiendo con viejas tradiciones; dicho método tuvo gran relevancia en los desarrollos posteriores a nivel científico y tecnológico.

Los vectores son reconocidos por sus propiedades operacionales y por su representación geométrica. En este sentido, el ítem 1.3 refiere al problema de la representación cartesiana de los vectores a partir de cantidades negativas o complejas, estudiadas por matemáticos como Argand, Wallis, Wessel, entre otros, y que influenciaron a Hamilton para describir la representación geométrica de los vectores.

Finalmente en el ítem 1.4 tratamos la constitución histórica de vector como objeto matemático, tomando en cuenta las consideraciones platónicas y aristotélicas con respecto a cómo se conciben los objetos matemáticos y las relaciones que se dan entre número, magnitud y dirección planteadas desde el punto de vista de la geometría euclidiana, la visión a partir de la geometría analítica y posteriormente con la introducción de los números complejos.

El segundo capítulo lo dedicamos a los desarrollos vectoriales llevados a cabo por Hamilton y Grassmann. En el ítem 2.1 se tratan de las operaciones que llevaron a la construcción de los vectores; en este sentido, estudiamos por un lado, los trabajos de Hamilton y, por el otro, los trabajos de Grassmannn en cuanto a las operaciones vectoriales definidas por ambos investigadores. Posteriormente, en el ítem 2.2, se destacaron aquellos elementos que contribuyeron a la introducción de las funciones vectoriales, revisando algunas de las definiciones que se fueron instaurando, en principio, en relación con las funciones de variable real, pero que implícitamente describen funciones que asociamos hoy en día con los campos escalares.

En el ítem 2.3 abordamos uno de los objetivos principales de este trabajo en relación con dar cuenta de la manera en que Peter Tait formalizó la noción de función escalar, haciendo una descripción analítica de las curvas paramétricas, tomando como punto de partida el análisis cauternionico de Hamilton al aplicarlo a problemas concretos de la física y la geometría.

El capítulo tres de este trabajo corresponde a las conclusiones. Se llama la atención sobre la importancia del desarrollo de las funciones vectoriales, con respecto a la relación que se dio entre los métodos vectoriales con los elementos del análisis matemático de lo cual se derivan importantes teoremas como el de la divergencia y el de Stokes, aunque si entrar en detalles con respecto a estos aspectos pues no hacen parte del objetivo de este trabajo

En el ítem 3.1 es dedicado al tratamiento de algunos aspectos que aparecen en la enseñanza de las nociones vectoriales, aplicadas al estudio de fenómenos, como por ejemplo, la electricidad y el magnetismo, y que han sido tratados por diversos autores[1] desde el punto de vista pedagógico y didáctico, los cuales han llevado a cabo investigaciones, tomando como referente la teoría de las situaciones didácticas de Brosseau.

Finalmente el ítem 3.2 damos cuenta de algunos de los obstáculos epistemológicos que tuvieron que sobrepasarse en el desarrollo histórico de las nociones vectoriales trabajadas por Hamilton y Grassmann, para ser aceptados por la comunidad científica especialmente en el caso de los matemáticos, destacando que estos obstáculos no son ajenos a los proceso de enseñanza, según algunas ideas que en este sentido encontramos en las teorías de Bachelard.

[1] Revisar bibliografía.

CAPITULO 1.

ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LA NOCIÓN MATEMÁTICA DE VECTOR

La construcción de la noción de vector y su adopción como objeto matemático, fue el resultado de varios siglos de discusión y del rompimiento con viejas tradiciones en relación con las operaciones aritméticas que desde la época de los griegos habían venido influenciando los desarrollos en las ciencias matemáticas y físicas. Se buscará en este primer capítulo, reconocer y describir algunos de los hechos más relevantes que influenciaron el desarrollo de esta noción, tomando como base el estudio de fenómenos como el movimiento, la caída de los cuerpos, entre otros.

1.1 Las primeras huellas de vectores en el desarrollo de las matemáticas.

En la antigüedad, algunas culturas humanas como los egipcios y babilonios, desarrollaron técnicas para medir y contar. Aunque en principio estas se relacionaron con la geometría y la aritmética, con el correr del tiempo se fueron convirtiendo en una ciencia cuyos estudios evolucionaron hasta llevarnos al desarrollo del álgebra o el cálculo entre los siglos XVI y XVII. A pesar de que antiguamente se consideraba la aritmética como la ciencia de los números y la geometría como la ciencia de las magnitudes, esta distinción se ha ido desvaneciendo debido a la evolución de las teorías matemáticas que han tendido a unir estas dos campos de estudio, estableciendo así, una síntesis entre ellas, para dar paso a la emergencia de nuevas nociones y conceptos.

Gracias a los estudios realizados por Rene Descartes (1596-1650) los cuales abrieron el camino hacia al desarrollo de la geometría analítica, se ampliaron los sistemas numéricos y se dio paso al surgimiento de una nueva concepción de álgebra que cumplía con las operaciones de la aritmética básica; a pesar de estos avances, para matemáticos como Gottfried Leibniz (1646-1716) el álgebra y los ejercicios que esta rama de estudio planteaba, solo representaban símbolos sin ningún tipo de información que pudiera brindar alguna utilidad más allá del uso de sus métodos operacionales. En este sentido, Leibniz proponía que el álgebra evolucionara, no solo en aspectos de la representación simbólica, sino también como herramienta para modelar algunos fenómenos físicos; aunque él enfoca sus estudios matemáticos desde esta perspectiva, no logra construir un método algebraico que permita llevar a cabo un análisis geométrico de dichos fenómenos, pero deja sentadas las bases para realizar investigaciones en esta dirección (Rosales, 2009).

Algunos fenómenos de la naturaleza tales como el movimiento o el estudio del calor, planteaban cuestiones que abrían el camino para introducir un método analítico que diera cuenta de estos fenómenos; es así como nuevos desarrollos matemáticos emergieron en el intento por modelar problemas propios de la rama de la física, ayudando a ampliar el campo de estudio de ambas ciencias y conllevando a la formulación de nuevas teorías, además de generar nuevas cuestiones debido al tipo de operaciones que aparecían y que en ocasiones no cumplían, por ejemplo, con el principio de permanencia, según el cual, “no es posible que un álgebra entre objetos matemáticos no cumpla con las propiedades del álgebra simbólica" (Monroy, 2011, p. 18), en casos como de la ley conmutativa para el producto.

Los matemáticos de la época cambiaron la tradición en cuanto a sus investigaciones ligadas al uso de la geometría, para dar paso a estudios a través de procesos algebraicos derivados de la recién surgida teoría de ecuaciones. Otro campo que había emergido era el estudio de los números complejos y aunque estos números "aparecieron en el álgebra en la solución de ecuaciones, los procesos en su tratamiento no se dieron en el álgebra, sino bajo las necesidades imperiosas del análisis matemático" (Zea, 2012, p.33).

Con la ampliación de las ramas de investigación en matemáticas y física, nos acercamos a las ideas de Leibniz en cuanto a la construcción de una herramienta matemática que, a partir de su representación geométrica o por medio de símbolos, brinde la posibilidad de hacer una descripción analítica de un fenómeno de la naturaleza, como por ejemplo, el movimiento. Estos símbolos serán llamados *vectores*, y serán conocidos gracias al uso del álgebra con objetos de características no necesariamente numéricas y la formalización matemática de algunos fenómenos físicos.

La emergencia histórica de la noción de vector estuvo ligada a la relación entre número, magnitud y dirección, relaciones que desde la antigüedad habían estado enmarcadas por diversas cuestiones filosóficas y cuyo modo de operar se basaba en el uso de la geometría euclidiana. Por otro lado, los desarrollos teóricos estuvieron fuertemente influenciados por la incorporación del concepto de segmento dirigido y la representación geométrica de los números complejos.

En la búsqueda por ampliar los horizontes del algebra en relación con el estudio de las operaciones con números complejos, William R. Hamilton (1805-

1865) presenta el primer trabajo original sobre álgebra de estos números en el que, como lo indica González (2008), estableció el primer desarrollo original en relación con los números complejos, los cuales relaciona con un producto entre magnitudes orientadas en el plano, tomando como base las operaciones conocidas con parejas de números reales.[2] En Arenzana (1997), también se menciona que en estos desarrollos Hamilton define un producto en el que intervendrá una rotación y se plantea el problema de ampliar esta operación al espacio. Dichas operaciones serán extendidas a unos nuevos objetos llamados cuaterniones que se convertirían en el vehículo que posibilitó la emergencia de los vectores, conocidos en principio por su modo de operar, a pesar de no estar definida formalmente la noción de vector.

Las operaciones con cuaterniones cumplen con algunas propiedades operativas similares a las propiedades de las operaciones aritméticas, pero difieren en algunos aspectos como por ejemplo:

- La ley conmutativa no se cumple
- El producto entre dos vectores distintos de cero puede ser cero
- El producto entre dos vectores no necesariamente es un vector

Con estos estudios, Hamilton introduce una primera idea de lo que será un vector, relacionándolo con un segmento de línea en una dirección y aplica las operaciones algebraicas para trabajar con este nuevo objeto, dando inicio al estudio del cálculo vectorial a partir de dichas operaciones y posteriormente realizar una generalización que ayude modelar matemáticamente los fenómenos observados

[2] Se hace mención números reales en relación a la cita del autor, puesto que estos solo serán definidos a finales del siglo XIX.

en el mundo tridimensional, distinta a la modelación a través del análisis cartesiano.

1.2 La evolución histórica de la noción de vector por la vía de la física.

Históricamente la física ha sido la ciencia que se ha encargado de estudiar los fenómenos de la naturaleza; en el intento por comprender estos fenómenos, ha encontrado en la matemática el vehículo que le permite desarrollar modelos teóricos para dar una explicación racional del mundo fenomenológico con el que el hombre convive.

Así como la física se ha valido de la matemática en sus desarrollos, esta última le debe a la física gran parte de su evolución puesto que, las nociones matemáticas que han ayudado a modelar los fenómenos de la naturaleza no siempre estuvieron presentes para ser utilizadas; al tratar de dar respuesta a las preguntas formuladas desde la física en relación con fenómenos como el movimiento, los matemáticos de la época debieron considerar elementos que no habían sido tenidos en cuenta y romper con obstáculos, como el ya mencionado obstáculo de permanencia, descubriendo así nuevos campos de estudio y construyendo nuevas nociones que posiblemente no abrían emergido si no se hubiese intentado explicar analíticamente dichos fenómenos.

Aunque actualmente la relación entre estas dos ciencias es indiscutible, no fue así en la antigüedad; desde los griegos, los desarrollos matemáticos y físicos se dieron de forma independiente, siguiendo la tradición aristotélica para la cual los fenómenos de la naturaleza no podían ser interpretados desde una concepción puramente matemática, puesto que los objetos matemáticos no hacen parte del mundo fenomenológico sino del mundo de la abstracción. Ya en el siglo XVII, Galileo Galilei

(1564-1642) trata de romper con esta tradición y encuentra en la matemática el vehículo a través del cual se podrán describir por ejemplo, el movimiento de un cuerpo que cae de una mesa describiendo un movimiento parabólico. En este sentido galileo escribe:

> La filosofía está escrita en ese grandioso libro que está continuamente abierto ante nuestros ojos (lo llamó universo). Pero no se puede descifrar si antes no se comprende el lenguaje y se conocen en él los caracteres en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, siendo sus caracteres triángulos, círculos y figuras geométricas. Sin estos medios es humanamente imposible comprender una palabra; sin ellos, deambulamos vanamente por un oscuro laberinto. (Galileo, 1981)

El método de Galileo consistió en eliminar del fenómeno las cualidades sensibles para dar un tratamiento estrictamente matemático. Desde este momento se da una nueva relación en la cual los problemas de la física comienzan a jugar un papel relevante en los desarrollos conceptuales de las matemáticas. Así Galileo intentaba "reducir las cualidades a términos cuantitativos, percibiendo una cierta analogía entre el espacio físico y el tipo de espacio manejado en los Elementos de Euclides. Es decir, interpretar los fenómenos de la naturaleza según las leyes de las matemáticas" (Zea, 2012, p. 54).

Uno de los problemas abordados por Galileo, es el problema del movimiento de un cuerpo que cae de una mesa; para este caso particular él supone que el movimiento se da en dos direcciones en las que aparecerá una velocidad horizontal y una velocidad vertical. Se evidencia aquí que Galileo da el mismo manejo vectorial que damos hoy en día a este tipo de movimiento; por supuesto que su descripción no la hace precisamente desde el álgebra vectorial dado que no se había desarrollado, pero sin duda alguna esta noción está implícita en su descripción analítica del fenómeno.

Isaac Newton (1642-1727) trató de encontrar métodos que le ayudaran a describir algunos fenómenos como el de la luz, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, entre otros. Uno de sus estudios se da en el intento por matematizar la fuerza total que siente un cuerpo cuando sobre este actúa más de una fuerza; así para el problema en el cual se aplican dos fuerzas a un mismo cuerpo, presenta una solución a través de la representación de un paralelogramo de fuerzas donde se incluía el sentido en el que actuaba la fuerza sobre una misma línea y que daría paso a la formulación de la segunda ley de Newton que en la actualidad definimos como "la fuerza total ejercida sobre un cuerpo es igual al producto de la masa por la aceleración" (Kittel, Knigth & Ruderman, 1968, p. 55).

Sus ideas tendrían gran influencia en las representaciones geométricas de los vectores, puesto que el paralelogramo de fuerzas es la forma usada en el análisis vectorial para describir la suma entre vectores cuando sobre un cuerpo actúan dos fuerzas. Newton desarrollo métodos matemáticos que fueron apareciendo posteriormente en el álgebra vectorial; sus trabajos junto con los trabajos de Leibniz en relación con la descripción del movimiento y otros fenómenos de la naturaleza, llevaron a la creación de una nueva rama de estudio de las matemáticas conocida como cálculo diferencial e integral.

Otro de los fenómenos que se trató de abordar desde la física y que a la larga tendría mayor relevancia en las futuras investigaciones en matemáticas en relación con el análisis vectorial, fue el tratamiento del fenómeno del calor. En el siglo XVIII, los físicos coincidían en tratar el calor como un tipo de movimiento interno de los cuerpos; una de las experiencias más reconocidas, fueron las realizadas por William

Thompson (1753-1814), quien mostro que al taladrar cañones con brocas romas se generaba mucho calor y éste era proporcional al trabajo realizado; hasta este momento, las descripciones de este tipo de problemas eran tratadas con métodos de la mecánica analítica desarrollada por Newton.

En la evolución del estudio del fenómeno del calor, el físico Jean-Baptiste J. Fourier (1768-1830), mostro su interés y trató de entender como ocurre la transmisión de calor en un cuerpo continuo al que se le quiere determinar la temperatura en un punto específico y en un tiempo determinado. Antes de la aparición de Fourier los métodos analíticos para describir fenómenos naturales estaban ligados a las descripciones netamente algebraicas; en el intento por dar una explicación analítica, él establece un método de trabajo con el que espera obtener resultados coherentes que permitan interpretar un fenómeno natural. Dicho método plantea lo siguiente:

> El primero es el momento de la observación empírica. El segundo, todavía en estrecha relación con el primero, en el del análisis matemático (según lo que era entendido por análisis para esa época), su propósito es establecer las relaciones cuantitativas existentes entre las cualidades específicas del fenómeno. El tercer momento es el del análisis especial al que Fourier le da un carácter netamente matemático; se trata aquí de aplicar la teoría y de suministrar los medios para analizar fenómenos compuestos que no se pueden reducir directamente de las leyes generales. En el cuarto momento de las observaciones exactas, las relaciones establecidas por el análisis matemático y el especial se someten a verificación experimental. (Bobadilla, 2001, p.14)

Basado en dicho método, Fourier realiza sus investigaciones con respecto a la transmisión del calor, llegando a desarrollar un tratamiento a través de un análisis de ecuaciones diferenciales parciales asociadas con este fenómeno. A partir de este trabajo, lo que él plantea visto desde nuestro contexto es una función del tipo

$$\alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, t) \to (y)$$

En este momento, un nuevo campo de estudio llamado Análisis comienza a cobrar vida y tomará un camino independiente de los procesos algebraicos. Aunque Fourier no es consciente, está dando paso a un nuevo modelo matemático que será usado años después por James C. Maxwell (1831-1879) en la descripción analítica de la teoría electromagnética haciendo uso de la noción de campo vectorial.

Otro tipo de trabajos que influenciarían el desarrollo de los vectores y el establecimiento del cálculo vectorial, emergen en el sentido de encontrar métodos matemáticos que permitan representar figuras y movimientos por medio de símbolos, de la misma forma en que el álgebra representaba números o cantidades; Hamilton desarrolla su teoría de los cuaterniones, convirtiéndose en un instrumento que abriría nuevos horizontes para las investigaciones en física. Maxwell en sus trabajo en física reivindica el deseo de Leibniz de poder describir un fenómeno a través de su visualización geométrica y encuentra en los vectores, el aparato teórico buscado por esta ciencia, cuyo tratamiento lo aplica en el estudio de la teoría electromagnética haciendo uso de campos escalares y campos vectoriales los cuales constituyen la noción de función vectorial; este estudio que será revisado y ampliado posteriormente por Oliver Heaviside (1850-1925), uno de los precursores del análisis vectorial que conocemos en la actualidad.

1.3 El problema de la representación en el desarrollo histórico de la noción de vector.

El campo de aplicación de la geometría hoy en día dista bastante de la geometría euclidiana. Descartes al introducir los métodos de la geometría analítica con los cuales una ecuación podrá describir una curva en el plano o en el espacio, marca un punto de inflexión en la evolución de las teorías y desarrollos matemáticos, dado que con la introducción de sus métodos analíticos abre la puerta a nuevos campos de estudio tal vez inimaginables para la época (Rosales, 2009). Uno de estos estudios, se dio en relación con la posibilidad de representar números negativos en la solución de ecuaciones de tercer grado; también se darán algunos intentos para solucionar ecuaciones de grado mayor que dos y emergerá una nueva simbología para el manejo algebraico de cantidades, como por ejemplo, los números negativos, o para el tratamiento del cálculo infinitesimal, enfocado en el estudio de problemas geométricos.

El camino para llegar a construir la representación geométrica de la noción de vector se dio a partir de dos conceptos. El primero es el concepto de segmento dirigido y el segundo la representación de los números complejos. Con la aparición de las cantidades negativas y la aceptación de tratar cantidades numéricas como magnitudes, según se registra en los trabajos de Argand (1768-1822), se dio vía libre para que éstas cantidades pudieran ser representadas por medio de un segmento dirigido en sentido opuesto las cantidades positivas a partir de una rotación de 180º contraria al giro de las manecillas del reloj.

De otra parte, los números complejos habían aparecido en la tentativa por dar solución a la ecuación de tercer grado; algunos investigadores llevaron a cabo intentos por dar una representación geométrica de estos números, sin embargo, encontramos en Monroy (2011), que es a partir de los desarrollos publicados por Carl F. Gauss (1777-1855) que estas ideas logran ser introducidas.

Jhon Wallis (1616-1703), toma la idea de descartes, con respecto a la ubicación de la parte compleja saliendo de la recta numérica y da a conocer la primera representación geométrica del número complejo:

Figura 1: Representación geométrica del número complejo *a* + *bi* de Wallis.

Posteriormente Caspar Wessel (1745-1818), tomando de base algunas de las ideas de Wallis, amplia los desarrollos con los números negativos y las cantidades imaginarias extendiendo los conceptos de segmento y dirección dando a conocer una nueva representación que es usada en la actualidad:

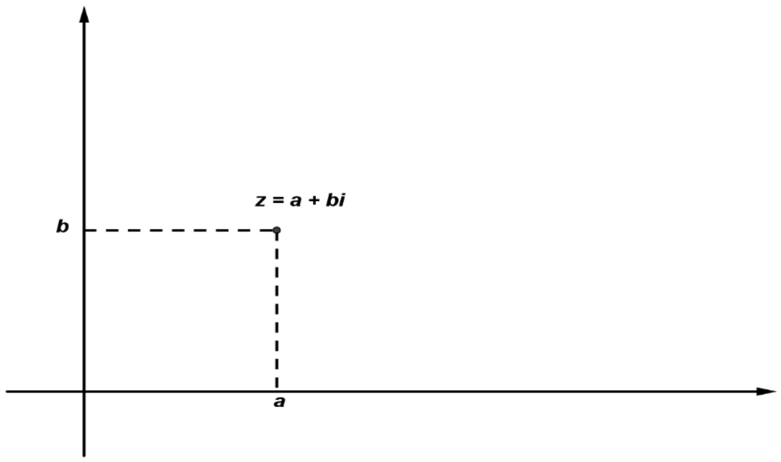

Figura 2. Representación geométrica del número complejo *Z* = *a* + *bi* de Wessel.

En Zea (2012) se menciona que Argand y Wessel mostraron que los números complejos podían ser geométricamente sumados y multiplicados. A pesar de esto, su representación presentaba problemas para los físicos cuando se deseaba trabajar con fuerzas en más de dos dimensiones.

Hamilton presentó el vector como “un operador de trasporte o como una diferencia entre dos puntos, introduce el vector opuesto y la suma de vectores” (Rosales, 2009, pp. 66-67), apoyándose en los números complejos para desarrollar el álgebra que permite describir a los vectores y las operaciones con estos, así como su representación geométrica de puntos o segmentos de recta dirigidos en el plano. La implementación de los números complejos a los vectores, permitió que se les relacionara con puntos en el plano cartesiano; de este modo se hizo evidente la potencia de los números complejos que vendrían a convertirse en una herramienta fundamental en la solución de problemas físicos.

Una de esas primeras aplicaciones que surgen, es la posibilidad de describir la suma de varios vectores de fuerza que tiene como origen un punto en común, pero donde cada uno apunta en una dirección distinta; este proceso se modela por medio del paralelogramo de fuerzas cuyo vector suma estará representado por la diagonal que cruza el paralelogramo desde el punto inicial común de los vectores y su punto terminal común. Esta aplicación será extendida en el mismo sentido a la representación de velocidades y otros movimientos y fenómenos relacionados a futuro con electricidad, magnetismos y la teoría cuántica.

1.4 La constitución histórica del objeto vector.

Los vectores son el resultado del intercambio científico llevado a cabo por matemáticos y físicos. Su construcción y posterior instauración como objeto matemático se deriva a partir de la aplicación de los procesos aritméticos para describir el movimiento en contraposición a la tesis Aristotélica que consideraba que estas dos ciencias atendían a objetos de distinta naturaleza. Debemos tener en cuenta que los objetos matemáticos desde el punto de vista filosófico han estado enmarcados por dos corrientes del pensamiento:

- Las concepciones Platónicas, en las cuales los objetos matemáticos existen independientemente del mundo fenomenológico.
- Las concepciones Aristotélicas, en las que los objetos matemáticos son seres que pertenecen al mundo de la abstracción, que no poseen ningún tipo de naturaleza física; son objetos inmóviles.

Con la presentación y posterior aceptación del vector como objeto matemático se da un rompimiento en estas concepciones, pues estos objetos ahora no solo son tratados a partir de la abstracción, sino que además dependen y describen fenómenos tales como el movimiento, además de contar con una representación geométrica.

La emergencia de los vectores es el resultado de la combinación de tres conceptos: el número, la magnitud y la dirección.

- La relación entre número y magnitud conocida desde la antigüedad con los trabajos de Euclides.
- La relación entre magnitud y dirección que toma como base las aplicaciones de la geometría analítica, y que permitió ampliar el uso de los números negativos descritos en sentido opuesto a los números positivos a partir de un giro de 180º en la recta numérica.
- La relación entre número y dirección que emerge con la instauración de los números complejos, con los cuales se pueden hacer descripciones que involucran rotaciones en ángulos en todas las direcciones en el plano complejo, derivado del plano cartesiano.[3]

Con la combinación de estos conceptos, se puede ahora hablar de la distancia entre dos puntos geométricos a partir de los valores absolutos de las cantidades tomadas en consideración, también se puede hablar de la orientación de un punto "*a*" tomando un eje de referencia donde se puede decir si el punto está ubicado a derecha

[3] En Zea (2012) se encuentra un desarrollo más detallado de estas relaciones.

o izquierda, arriba o debajo de un punto en particular "*b"*. Así mismo se podrán consideran operaciones como adición o sustracción entre segmentos que permiten representar movimientos en el plano.

La instauración de los vectores como objetos matemáticos surge en gran medida gracias a las relaciones anteriores, influenciadas por cuestiones fenomenológicas que buscaban ser comprendidas analíticamente y su adopción no solo transformo la forma de trabajar en matemáticas. En el campo de la física su influencia fue aún más relevante; como lo comenta Crowe (1985), innovó por completo su campo de estudio puesto que se da una transformación en el modo de describir algunos fenómenos, pasando del trabajo con cantidades escalares como posición, peso o temperatura a cantidades vectoriales como fuerzas, velocidades, aceleración, abriendo el camino para la posterior introducción de los campos vectoriales que permitirán describir las fuerzas eléctricas y magnéticas de forma analítica, a partir de los trabajos llevados a cabo por Maxwell al extender las ideas intuitivas planteadas por Michael Faraday (1791-1867), en relación con la modelación de dichos fenómenos.

CAPITULO 2

LA FORMALIZACIÓN DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN VECTORIAL

Con la adopción de la noción de vector y los vectores como objetos matemáticos se abrieron nuevos campos de estudio y nuevas aplicaciones que contribuyeron notablemente en los desarrollos de la física y la matemática a finales de los siglos IXX y XX, donde uno de los campos más beneficiados fue la joven teoría de funciones desarrollada por matemáticos como Louis Cauchy (1789-1857). Gracias a la adaptación de los vectores con la teoría de funciones se abre el camino para la emergencia de una nueva noción llamada *la función vectorial*; Esta noción contribuiría al fortalecimiento de la relación entre matemáticas y física, dando además un nuevo aire a los campos de investigación en ambas ciencias.

2.1 Las operaciones con vectores: Hamilton y Grassmann

Sir Willian Rowan Hamilton (1805-1865) y Hermann Günter Grassmann (1809-1877) jugaron un papel fundamental en el desarrollo de la noción de vector y la formalización del análisis vectorial como rama de estudio de las matemáticas, aunque ambos trabajaron de manera independiente y por líneas de desarrollo distintas. Hamilton se basó en operaciones con números complejos para extender esta noción al espacio a través del uso de cuaterniones, mientras que Grassmann introdujo los principios del cálculo vectorial e hiso uso de los infinitesimales, conocidos desde la época de los griegos pero desarrollados por Newton y Leibniz en el siglo XVII en el estudio del cálculo integral, extendiéndolos a funciones escalares y vectoriales.

Dado que ambas teorías mostraban líneas de desarrollo distintas, los partidarios de cada una de ellas entraron en grandes discusiones con respecto a cuál teoría era más conveniente para modelar fenómenos naturales y realizar otros tipos de descripciones algebraicas. Los aportes de ambos abrieron la puerta para que otros investigadores plantearan nuevos modelos matemáticos y físicos como en el caso de algebras más abstractas que las conocidas hasta ese momento, la creación de una nueva rama llamada topología y la teoría electromagnética, por mencionar algunos casos.

2.1.1 Operaciones vectoriales desarrolladas por Hamilton

Hamilton nació en Dublín, Irlanda en el año de 1905, fue un personaje inquieto en cuanto a la búsqueda de conocimientos en relación con los idiomas y la aritmética; gracias a sus trabajos en este campo matemático logro el "descubrimiento de un error en la demostración del paralelogramo de las fuerzas propuesto por Laplace en su *Mécanique céleste*" (Sánchez, 2011, p. 8). Dedicó gran parte de su vida al estudio de los cuaterniones, especialmente en cuanto sus aplicaciones en dinámica, astronomía y la teoría de la luz.

Los números negativos y su representación así como los desarrollos con números complejos en el plano, fueron fundamentales en la instauración de los vectores y el análisis vectorial. A partir los trabajos llevados a cabo por el matemático Jhon Thomas Graves (1806-1870) relacionados con la construcción de una teoría de logaritmos de números negativos y complejos, Hamilton se interesó por estos números pensando en la posibilidad de que a través de ellos se pudieran representar movimientos y rotaciones, convirtiendo a los números complejos en una herramienta fundamental para la formulación de leyes de la física a partir de la descripción de movimientos de cuerpos rígidos en el espacio.[4] Siguiendo esta línea de trabajo, en 1833 presenta su primer desarrollo con números complejos en la Irich Academy a partir un álgebra formal con pares de números reales en donde sus operaciones, suma y producto, son definidas como en la actualidad de la siguiente manera[5]:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\lambda(c, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Hamilton estaba en contra de la idea de los matemáticos de la época quienes consideraban que los números complejos debían reducirse a la simple manipulación simbólica carente de significado; para él, el álgebra y la física se relacionaban a través de la representación geométrica de estos números, y aunque esta representación no sirve para justificar su existencia, ayuda a comprender estas ideas de forma intuitiva. La anterior forma algebraica presento un método para representar vectores y las operaciones con ellos donde la suma y el producto de complejos resultaban equivalentes a la suma y producto vectorial con lo cual se podían manipular algebraicamente.

En Arlego y Costa (2013) encontramos que “la utilidad de los números complejos es limitada pues si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo, estas no tienen porque estar en un mismo plano, por consiguiente se hace necesaria una versión tridimensional de los números complejos” (p. 32). En este sentido, Hamilton pensó en la posibilidad de extender estos números al espacio tridimensional de tal forma

[4] Ver (Sánchez, 2011).
[5] Ecuaciones publicadas en González (2008).

que se definiesen cantidades parecidas con propiedades algebraicas y geométricas análogas. De este modo aparecería la teoría de los cuaterniones que Hamilton construye a partir de imaginar tripletes de la forma $a + bi + cj$ donde cada unidad era perpendicular entre sí; i, j representan números imaginarios y a, b, c son números reales. Al realizar la suma entre dos vectores de este tipo, no se hacía evidente ninguna dificultad, esto es:

$$(a + bi + cj) + (a' + b'i + c'j) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j.$$

Sin embargo, al llevar estos vectores a la operación producto y suponiendo previamente que $ii = jj = -1$ y que $ij = ji$, se encuentra con el siguiente resultado:

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j)$$
$$= (aa' - bb' - cc') + (ab' + ba')i + (ac' + ca')j + (bc' + cb')ij,$$

el cual no era cerrado con respecto a esta operación dado que aparecía un elemento adicional. Hamilton se dio a la tarea de interpretar el valor del producto de ij. Después de trabajar distintas ideas, logra encontrar un nuevo símbolo imaginario llamado $k = ij = -ji$, considerando ahora no tripletas sino cuaternios, de este modo los cuaterniones serán números de la siguiente forma:

$$Q = a + bi + cj + dk,$$

donde a, b, c, d son números reales y los símbolos i, j, k vectores unitarios a lo largo de los tres ejes, para los que Hamilton definirá algunas propiedades algebraicas las cuales no cumplen con la ley conmutativa del producto. Un ejemplo de ello es la aparición de dos nuevas definiciones de producto:

- **El producto punto:** no se cumple la ley modulativa
- **El producto cruz:** no cumple la ley asociativa ni conmutativa

Con estos trabajos “Hamilton estaba absolutamente convencido de que los cuaterniones se convertirían en la herramienta precisa con la que se podría describir el espacio físico y el tiempo” (Sánchez, 2011).

Una de las características más importantes de los cuaterniones es que se pueden descomponer en dos partes; una parte escalar *S(Q)* y una parte imaginaria *V(Q)* la cual llamaría vector de la siguiente manera:

$$Q = S(Q) + V(Q)$$

Esta descomposición fue cuestionada por algunos investigadores de la época, teniendo en cuenta que la anterior relación presentaba una suma de dos cantidades de diferente naturaleza (escalares y vectores). Hamilton trabajó en éstas teorías hasta el final de su vida, tratando de convertir a los cuaterniones en la herramienta privilegiada de uso en las modelaciones de la física, sin embargo, no llegaron a ser completamente aceptadas puesto que sus desarrollos y modo de operar revestían un alto grado de dificultad.

2.1.2 Operaciones vectoriales desarrolladas por Grassmann

Grassmann nació en Stettin, Polonia en el año de 1809. Se formó de manera autodidacta en matemáticas y escribió un texto llamado *Theorie der Ebbe un Flut*, en el que lleva a cabo un estudio sobre las mareas, apoyándose en “la teoría de la *Méchanique analytique* de Lagrange y de la *Méchanique céleste* de Laplace, pero exponiendo esta teoría por métodos vectoriales sobre los que trabajaba desde 1832” (González, 2008, p. 8). En ese estudio se trataban operaciones como la suma, la diferencia, producto de vectores, entre otros, similares a lo que aparecen en los textos de álgebra lineal usados hoy en día.

En el año de 1943 Hamilton había descubierto la multiplicación correcta de los cuaterniones, un año más tarde Grassmann publicaría su *teoría de la extensión lineal*, obra en la cual estaban contenidas importantes ideas del cálculo vectorial incluyendo una multiplicación no conmutativa. La importancia de esta obra no fue reconocida sino hasta 20 años después de publicada, debido a la dificultad de su lectura y su carácter filosófico. Grassmann publicaría una segunda redacción en el año de 1962, mucho más clara y en la cual se incluían conceptos como combinación lineal de magnitudes, dependencia e independencia lineal o dimensión. A pesar de esto, debido a su poca difusión la relevancia de su trabajo no fue tomada en cuenta sino hasta principios del siglo XX.

Herman Hankel (1839-1873) al tratar de escribir una obra relacionada con el análisis de números complejos llevados a cabo por Hamilton, y otro matemáticos, se encuentra con los trabajos de Grassmann. Éstos despertarían su interés por lo que enfocó sus estudios en este sentido hasta llegar a concluir que las ideas de Grassmann revestían de mayor relevancia y utilidad en cuanto a sus aplicaciones, donde para él, los trabajos de Hamilton representaban un caso particular de la generalización hecha por Grassmann en sus desarrollos de nociones vectoriales, las cuales se extendían a *n* dimensiones.

La relevancia del trabajo de Grassmann se da en el sentido de que logra generalizar el actual producto vectorial. Así como Hamilton basa sus desarrollos a partir del álgebra, las investigaciones de Grassmann toman como base de estudio algunas consideraciones geométricas en la búsqueda por solucionar algunos problemas físicos. Su gran aporte fue llevar a cabo una generalización del producto vectorial a partir de las siguientes consideraciones:

> Concibió el área barrida por un segmento que se desliza sobre otro y sobre una línea quebrada dotada de una orientación, y por lo tanto, de un signo,

según recorriera el perímetro del área en un sentido u otro. Con esto, definió un nuevo producto, el producto que en la actualidad se llama producto exterior, $ab = a \wedge b$ que él llamaba producto escalón, íntimamente relacionado con el producto vectorial, y que, empero, a diferencia de éste, no está restringido a una dimensionalidad fija como en el caso del producto vectorial. (González, 2008, p 10)

Para dar una mejor idea de las consideraciones anteriores, presentaremos el procedimiento y los desarrollos algebraicos con vectores que aparecen en (Arenzana, 1997, p. 69):

a) Si un segmento se desplaza en el plano sobre un número cualquiera de segmentos, la superficie total que se obtiene es igual al espacio que se obtiene cuando se desplaza ese segmento por la suma de los segmentos.
b) Si en el plano un segmento se mueve entre dos paralelas fijas de modo que se mueve de una a otra, la superficie total barrida es la misma cualquiera que sea el camino recorrido.

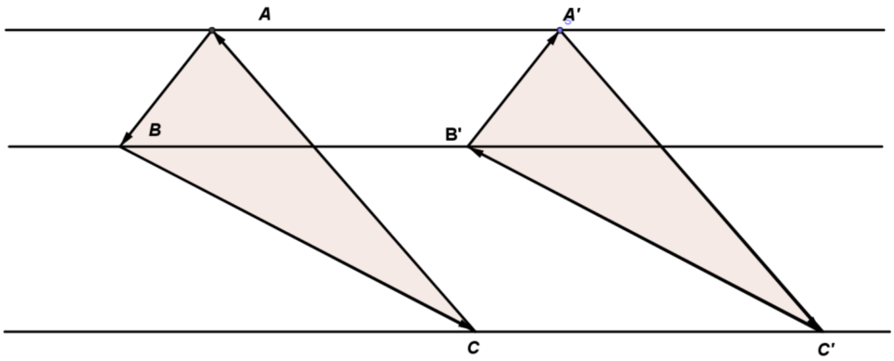

Figura 3. Movimiento 1 entre dos paralelas en ambos sentidos que barre igual superficie.

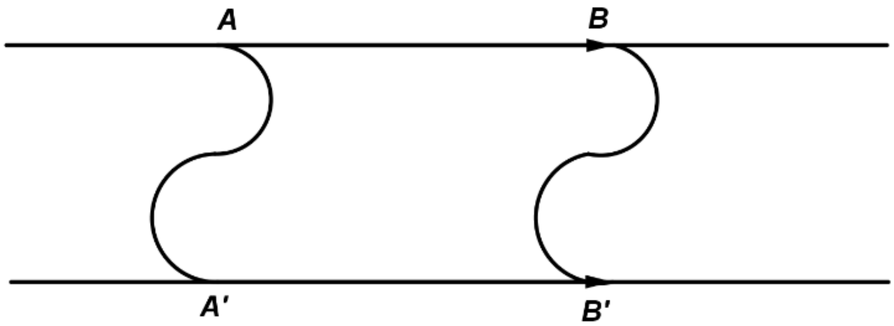

Figura 4. Movimiento 2 entre dos paralelas en ambos sentidos que barre igual superficie.

Su expresiones cambiando el lado medido por el que mide, serían:

c) La superficie que describe una línea quebrada es igual a la descrita por un segmento que tiene los mismos puntos inicial y final que ella.

d) La superficie total que describe una superficie cerrada en el plano al moverse es nula.

Estas propiedades las podemos expresar de forma simbólica así:

$$a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c$$

$$(b + c) \wedge a = b \wedge a + c \wedge a$$

e) La expresión $a \wedge b$ significa superficie y la expresión $(a \wedge b) \wedge c$ significará volumen. Esto llevó a Grassmann a definir a como segmento del primer escalón (dimensión uno), $a \wedge b$ segmento del segundo escalón (dimensión dos), $(a \wedge b) \wedge c$ segmento del tercer escalón, etc.

f) Vectores de la misma especie. Si dos vectores son de la misma especie $ab = 0$.

g) Si $b_1\ y\ b_2$ son de la misa especie, se verifica:

$$(a + b_1)b_2 = ab_2$$

$$b_2(a + b_1) = b_2 a$$

h) Nos fijaremos en los signos y no sólo en el valor absoluto de las expresiones de

$$(a + b_1)b_2 = ab_2$$

$$b_2(a + b_1) = b_2 a$$

Para ello supondremos que $a\ y\ b$ son dos vectores no de la misma especie, el producto $(a + b)(a + b)$ es nulo, puesto que es producto de un vector por sí mismo, es decir dos vectores de la misma especie, pero además se puede desarrollar aplicando la propiedad distributiva:

$$(a + b)(a + b) = (a + b)a + (a + b)b$$

$$= aa + ba + ab + bb = ba + ab,$$

de donde $ab = -ba$

i) Pone como ejemplo de un producto no conmutativo de segmentos, y a lo que Grassmann llama primer escalon significa área cuyo producto es

$$ab = |a||b| \sin ab$$

donde, evidentemente, el seno cambia de signo según se tome el ángulo de a a b o de b a a**.**

Como se observa, el modo de operar desarrollado por Grassmann es muy similar al que usamos en la actualidad.

Anteriormente mencionamos que los sistemas de Hamilton y Grassmann entraron en disputa puesto que se daban argumentos a favor y en contra de cada uno de ellos en cuanto a la relevancia que cada método presentaba a la hora de solucionar problemas físicos, por parte de quienes defendían éstas teorías, resaltando al físico Peter Guthrie Tait (1831-1901), colaborador de los estudios de Hamilton en la aplicación de los cuaterniones a la modelación de algunos fenómenos naturales y quien por su puesto, defendía la importancia de los cuaterniones; por otro lado, el ingeniero Josiah Willard Gibbs (1839-1903) escribe algunas notas de análisis vectorial y defiende el uso de estos métodos frente a la formulación cuaternionica por la posibilidad de extender los métodos vectoriales a n dimensiones. “la polémica se decidió finalmente del lado de los vectores; los ingenieros aceptaron de buenas maneras el cálculo vectorial aunque no así los matemáticos. Finalmente, los matemáticos siguieron e introdujeron los métodos vectoriales en la geometría analítica y diferencial” (Rosales, 2009, p. 74).

2.2 Antecedentes de la noción de función vectorial

Para algunos matemáticos, como Michel Spivak, el concepto de función constituye el epicentro de las matemáticas: “el concepto más importante de todas las matemáticas es, sin dudarlo, el de función” (Spivak, 1996, p49). Su uso hoy en día abarca diversos campos de estudio que tratan directa o indirectamente este concepto;

podemos destacar entre ellos al análisis matemático, la teoría de ecuaciones diferenciales e integrales, el análisis funcional o el análisis numérico, por mencionar algunos. Para revisar los antecedentes de la noción de función vectorial, vamos a dar una breve mirada al desarrollo histórico del concepto de función.

Los antecedentes de la noción de función vectorial están ligados a la evolución del concepto función de variable real y el análisis matemático. Diferentes autores[6] han llevado a cabo estudios históricos en relación con la emergencia de la noción de función encontrando que, en algunas de las operaciones matemáticas relacionadas con el uso de cantidades numéricas en las culturas babilónicas, egipcias y griegas, puede identificarse el uso implícito de funciones del tipo $f\colon \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, o $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Un ejemplo de esto se da con la contribuciones de Arquímedes (287-212 a. C.) en relación con la primer ley de la hidrostática en cuyo enunciado se puede observar una relación entre variables que involucran de manera implícita la noción de función. El enunciado de esta ley establece que "cualquier cuerpo solido que se encuentre sumergido total o parcialmente en un fluido será empujado en dirección ascendente por una fuerza igual al peso del volumen del líquido desplazado por el cuerpo sólido" (Ugalde, 2013, p. 6).

En Ponte (1992) se resalta al matemático y astrónomo Francés Nicole Oresme (1320-1282) como uno de los primeros investigadores que trato de describir algunas leyes, relacionando dos magnitudes que llamaba longitudes (tiempo) y latitudes (velocidad) apoyado en el uso de teorías geométricas.

Galileo en su intento por encontrar expresiones analíticas que pudieran describir o modelar diversos fenómenos naturales a partir de la relación entre matemáticas y física, estudia el problema de la caída libre de los cuerpos que ya había

[6] Se hace referencia a algunos de los autores incluidos en la bibliografía de este trabajo de grado.

sido tratado también por algunos investigadores como Oresme, Leonardo Da Vinci (1452-1519), entre otros. Ellos en diversas experiencias habían dejado caer objetos de distinto peso y material desde la misma altura y en el mismo instante de tiempo, notando que estos tocaban el suelo de forma simultánea.

Galileo inicia sus estudios tomando como punto de partida las conclusiones a las que habían llegado sus antecesores y continúa sus investigaciones en esta línea; supuso que si se dejaban caer objetos de distinto peso en un medio donde no hubiese aire, es decir, en el vacío, estos deberían llegar al suelo al mismo tiempo. Puesto que sus estudios se basaban en encontrar la forma de describir los fenómenos naturales por medio de expresiones matemáticas, plantea el fenómeno de la caída de los cuerpos haciendo uso de un modelo matemático en el que da cuenta de una relación entre variables como distancia, tiempo y aceleración, descrito por la siguiente expresión:

$$s(t) = c.t^2$$

Donde *s* representará la distancia que cae el cuerpo, c es la constante gravitacional y t el tiempo durante el que transcurre la caída. Esta expresión será posteriormente reformulada por Galileo de la siguiente forma:

$$s(t) = \frac{1}{2}c.t^2$$

En la anterior expresión se observa que la masa del cuerpo no afecta el fenómeno. Aunque Galileo no contó con una máquina de vacío para realizar el experimento, sus suposiciones fueron comprobadas posteriormente.

Al tiempo en que Galileo llevaba a cabo sus investigaciones, en Francia Descartes trabajaba en la elaboración de su geometría analítica, que abría la posibilidad de relacionar elementos del álgebra con la geometría a partir de la descripción de curvas por medio de expresiones algebraicas. Para Ponte (1992) el surgimiento de la noción de función es contemporáneo con la emergencia de cálculo infinitesimal; según entiende él en su estudio “Descartes claramente estableció que una ecuación con dos variables geométricamente representadas por una curva, indican una dependencia entre cantidades variables” (Ponte, 1992, p. 2). Por otro lado, Medvedev (1991) destaca que desarrollar una ley que relaciona la dependencia de cantidades variables es uno de los ideas más relevantes en la evolución de las ciencias y las matemáticas en los siglos XVI, XVII y XVIII, y a pesar de que Descartes no da una definición formal de lo que es una función, se hace evidente la presencia de una interpretación intuitiva de este concepto al considerar la existencia de una dependencia entre variables para poder determinar algunas curvas. Otros resultados que se dan para la época, y que también incluyen la noción intuitiva de función están relacionados con el desarrollo, por ejemplo, de tablas astronómicas o las tablas logarítmicas.

El siglo XVI y XVII se gestan distintos desarrollos matemáticos y evidentemente, los aportes de Galileo y Descartes en matemáticas y física potencian los campos de investigación en estas ciencias. Por esta época aparecen trabajos con expresiones analíticas y se abre el camino al desarrollo del análisis matemático, el cual estará ligado al propio desarrollo y formalización de la noción de función. Para Medvedev (1991), la representación de una función como una expresión analítica, se va convirtiendo en forma gradual en el método principal de definir una función.

Para dar cuenta de la emergencia de las funciones vectoriales, a partir de la adaptación de los métodos vectoriales a las funciones, daremos a continuación algunas de las definiciones que desde el siglo XVI se fueron formulando para definir el concepto de función pero sin ahondar en los detalles que llevaron a sus autores a presentarlos, puesto que hacer este análisis sobrepasa los objetivos de este trabajo.

Para Recalde (2011) el matemático y astrónomo James Gregory (1638-1675) es quien da una primera definición de función:

> Cantidad que se obtiene a partir de otras cantidades a través de operaciones algebraicas o mediante otra operación (Recalde, 2011, p. 5).

Uno de los primeros grandes aportes en el camino por la formalizar de la noción de función, se da en el proceso de construcción y fundamentación del cálculo diferencial e integral llevado a cabo por Newton y Leibniz. Newton a través de su teoría de fluxiones usará el término “fluentes” para designar las variables dependientes de una variable independiente, como por ejemplo, el tiempo; en este sentido, la variable dependiente se va generando a partir de la variable independiente de forma continua. Leibniz en un manuscrito de 1673,[7] hace uso explícito de la palabra función al relacionar cualquier cantidad que varía de un punto a otro en una curva. Leibniz sostiene un intercambio de cartas con el matemático y filósofo Johann Bernoulli (1667-1748) relacionado con el estudio de las funciones; Bernoulli publicará un artículo en 1699[8] en el que definirá una función de la siguiente manera:

> Una cantidad compuesta, de cualquier manera a partir de una variable y constantes arbitrarias. (Boyer, 1999, p. 531)

Leonar Euler (1707-1783), fue uno de los grandes matemáticos del siglo XVIII; publica en el año de 1748 un tratado de 2 volúmenes llamado *Introductio in analysin infinitorum*, que para Boyer (1999) se convertiría en el texto que impulsó los principales desarrollos matemáticos de la segunda mitad de éste siglo. Euler fue el primero en hacer uso del símbolo $f(x)$ como forma de representar las funciones y dio la siguiente definición para estas:

[7] (Ugalde, 2013)
[8] (Ugalde, 2013)

> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, de cualquier manera que sea, de esta misma cantidad y de números o cantidades constantes. (Recalde, 2011, p. 5)

Josep Louis de Lagrange (1736-1813), en sus estudios sobre las funciones analíticas definirá función de la siguiente manera:

> Llamamos función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que puedan estar mezcladas. (Ugalde, 2013, p.14)

Según el entendimiento de Euler con respecto al manejo de las funciones, estas debían ser representadas por una sola expresión analítica; sin embargo Fourier en oposición a ésta idea, plantea en su teoría analítica del calor la posibilidad de extender el concepto de función al decir que "en general la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas, cada una de las cuales es arbitraria… no suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se suceden una a otra" (Recalde, 2006, p. 6).

Finalmente en esta pequeña descripción del desarrollo de la noción de función, resaltaremos al matemático Augustin Louis Cauchy (1789-1857) quien fuera una de las principales figuras que contribuyo al desarrollo y formalización del análisis matemático en el siglo XVIII. Cauchy, aunque no lo menciona explícitamente en sus trabajos, realiza según Recalde (2011), la primera clasificación de las funciones continuas y discontinuas y define función continua de la siguiente manera:

> La función $f(x)$ es una función continua de la variable x entre dos límites asignados, si para cada valor de $\boldsymbol{x}$ entre estos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x+a)-f(x)$, decrece indefinidamente con a. En otras palabras, la función $f(x)$ será continua entre dos límites, si un incremento infinitamente pequeño de la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma. (Recalde, 2011, p. 8)

La formalización de la noción de función como la conocemos hoy en día, se dará gracias a los estudios de investigadores contemporáneos y posteriores a Cauchy quienes continuaron llevando a cabo investigaciones en esta línea a finales del siglo XVIII e inicios del siglo XIX, y también a la introducción de la teoría de conjuntos que dio elementos que permitían rigorizar el concepto de función como una relación entre elementos $x\epsilon A$ y $y\epsilon B$. Según Ponte (1992), el desarrollo de la noción de función se dio gracias a diversos estudios llevados a cabo en el intento por encontrar la definición más adecuada a partir del uso de un simbolismo y el descubrimiento de las conexiones con otros campos de la matemática.

Como se hace notar en Medvedev (1991), la historia de las funciones vectoriales no ha sido tratada con suficiente rigor como se ha hecho con otros campos, como por ejemplo, el desarrollo histórico de la noción de función. Sin embargo, cuando revisamos algunas de las definiciones dadas anteriormente, notamos que, a pesar de no ser trabajada de manera explícita la noción de función vectorial, ella aparece en los desarrollos de algunos de los investigadores mencionados, como por ejemplo, en el caso de Newton quien en la descripción de algunas curvas, llama a las variables dependientes del tiempo como “fluentes”, estas hacen relación a lo que hoy en día conocemos como función paramétrica. Es decir funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$. También Fourier realiza trabajos con funciones de varias variables al considerar la dependencia de la temperatura en términos de la posición y el tiempo, o Lagrange quien habla de la función que depende de una o varias cantidades. En estos ejemplos se hace evidente un planteamiento en términos modernos de funciones del tipo

$$\alpha: \mathbb{R}^n \;\rightarrow\; \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Con el desarrollo de las funciones y el análisis matemático se abrió una manera de describir fenómenos como el movimiento, el sonido, el calor, el magnetismo, entre otros, donde se busca un método que permita interpretar dichos fenómenos a partir de ecuaciones en las que aparecen variables que pueden relacionarse, tal como se describe en los trabajos de Galileo o Fourier. Por otro lado, la emergencia y fundamentación del análisis vectorial, llevada a cabo principalmente por Hamilton y Grassmann, es influenciada por el interés de encontrar explicaciones de tipo analíticas de algunos fenómenos naturales, usando como punto de partida los métodos algebraicos existentes hasta ese momento, en los que se incluye el uso de cantidades negativas y números imaginarios los cuales pueden ser representados en el plano cartesiano.

Cuando los vectores aparecen en los trabajos de Hamilton y Grassmann sus estudios se enfocan principalmente en la fundamentación de un nuevo campo teórico el cual debe cumplir con todas las operaciones algebraicas aceptadas. Sin embargo, al no cumplirse la propiedad conmutativa como se mencionó en el capítulo anterior, se da paso al estudio y a aceptación de nuevas propiedades que conllevan al desarrollo de matemáticas más abstractas y los métodos vectoriales los cuales serán adaptados a las teorías ya desarrolladas del cálculo integral y diferencial. En este sentido, el estudio de las funciones es relacionado a los tratamientos vectoriales y gracias a los trabajos de Peter Guthrie Tait, conoceremos un primer planteamiento de tipo analítico de una función vectorial al representar una curva, es decir, la primera representación analítica de una función paramétrica.

2.3 La definición formal de las funciones vectoriales llevada a cabo por Peter Tait.

En el ítem anterior, presentamos algunas de las definiciones del concepto de función, a las cuales llegaron los investigadores mencionados en los siglos XVII y XVIII; como se describió, estas definiciones se dan en relación con las funciones de una variable, aunque en las mismas se identifican elementos que tratan con funciones de varias variables pero que no fueron definidas formalmente. En esta parte veremos cómo haciendo uso de los vectores, se da a conocer una de las primeras definiciones formales de la noción de función vectorial llevada a cabo por el físico y matemático Peter Guthrie Tait.

Peter Guthrie Tait, nació en Dalkeith, Escocia en el año de 1831, en 1841 ingreso a la Universidad de Edimburgo donde fue compañero de Maxwell; su interés por los cuaterniones se despierta, como se describe en Rosales (2009), a partir de la lectura de un artículo que trataba el problema del movimiento de los torbellinos escrito por Hermann von Helmholtz (1821-1894); en 1853 recibe una primer copia del libro *Lectures on Quaternions* de Hamilton. Tait analizo este libro a fondo y sostuvo un permanente intercambio epistolar con Hamilton para tratar aspectos del mismo, lo que le permitió escribir un primer artículo en 1859 que trataba sobre la aplicación de los cuaterniones al problema de las ondas de Fresnel (1788 – 1827), publicación que sería sugerida por el propio Hamilton.

Aunque Tait no fue el descubridor de los cuaterniones, los aportes que logró extraer a partir de la aplicación de estos a problemas físicos fueron relevantes en el desarrollo del actual análisis vectorial como se destaca en el siguiente texto:

> Su importancia histórica es indudable, pues lideró desde 1865, la recepción y divulgación del sistema por dos razones: en primer lugar, visualizó un análisis vectorial moderno de gran utilidad para los físicos. En segundo lugar, entendió que, a pesar de la originalidad, los desarrollos de Hamilton eran de difícil comprensión. En síntesis, su principal idea fue exponer de una manera sistemática los pensamientos de Hamilton, organizar los conceptos y establecer relaciones de causalidad. (Zea, 2012, p. 100)

Tait publica su libro *An elementary treatise on quaternions* en 1867, en el que describió las operaciones vectoriales en relación con el uso de los cuaterniones introduciendo una definición analítica de una función vectorial. En este punto, nos centraremos en algunos de los procesos que Tait sigue para mostrar cómo se puede operar con los vectores, hasta llegar a la expresión que define las funciones vectoriales, objetivo principal de este trabajo.

Este capítulo comienza tratando el tema de la representación algebraica de cantidades negativas e imaginarias como -1, $\sqrt{-1}$ y describe la forma en la cual Wallis aborda el problema. A continuación indica que en el plano bidimensional se pueden representar las cantidades 1, $\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}$, como una rotación donde cada una de ellas se genera a partir de la multiplicación por $\sqrt{-1}$ el cual considera como un operador, en sus palabras describe este proceso como "análogo a una manija perpendicular al plano *XY*, cuyo efecto en cualquier línea en el plano es hacer que esta rote sobre el origen a través de un ángulo de 90º" (Tait, 1890, p. 2). Estos procesos son descritos desde el apartado 1 al 4[9].

[9] Tait desarrolla su libro en apartados. El primer capítulo consta de 44, pero para el interés de nuestro trabajo solo consideraremos el libro hasta el aparatado 31 de este capítulo.

En el apartado 5, Tait toma la expresión $a + b\sqrt{-1}$ que representa un punto P cuyas coordenadas son (a, b) y traza un segmento desde el origen O hasta P, esto es $\overline{OP} = a + b\sqrt{-1}$, este segmento contendrá implícitamente una dirección y una longitud y lo que llamo *Vector***.** El paso siguiente, se da en función de describir las operaciones como suma y producto entre vectores, lo cual realiza entre los apartados 6 y 11, haciendo alusión a operaciones ya realizadas en este sentido por matemáticos como Argand, Warren, Moivre, Servois entre otros, limitadas al espacio de dos dimensiones, aunque en el caso de Servois, hizo algunas especulaciones para trabajar expandir la forma $a + b\sqrt{-1}$ a tres dimensiones.

En el apartado 12 siguiendo con la idea anterior, encontramos la primera referencia que hace Tait sobre Hamilton, en el sentido de que él fue el único que obtuvo resultados simples y prácticos al extender los principios anteriores a tres dimensiones, y aunque destaca las contribuciones hechas por sus predecesores, reconoce en Hamilton como único descubridor del término $\sqrt{-1}$. En el apartado 13, presenta el modelo del vector de Hamilton para tres dimensiones, descrito por la expresión $\boldsymbol{\rho} = iX + jY + kZ$, el cual al sumarlo con otra cantidad ω se convierte en el cuaternión, esto es $\omega + \boldsymbol{\rho}$, considerándola como una noción elegante y muy poderosa en el cálculo de cuaterniones.

A partir del apartado 14 y hasta el apartado 27 Tait va a desarrollar las propiedades operativas entre vectores, haciendo uso para sus representaciones del plano cartesiano, pues considera que es más familiar para el lector. Inicialmente define que es un vector en el espacio haciendo referencia a los elementos que lo caracterizan como la dirección, el sentido, la longitud, asignándole un símbolo que lo caracteriza, ejemplo de esto es el vector $\overline{AB} = \boldsymbol{\omega}$, siendo A el origen y B el extremo del vector; a continuación define las propiedades características entre vectores para la suma, diferencia, igualdad, producto escalar, ley asociativa, ley distributiva, define la expresión -$\overline{AB} = \overline{BA}$ donde $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$, indicando que estos vectores son iguales en longitud y dirección pero tienen sentido opuesto.[10]

En el apartado 28 introduce la expresión

$$\boldsymbol{\rho} = x\boldsymbol{\beta}$$

Donde $\boldsymbol{\rho}$ es un vector que relaciona un punto de una variable con el origen, x un número indefinido y $\boldsymbol{\beta}$ otro vector definido. Así tenemos una expresión que describe una línea recta dibujada desde el origen y paralela a la recta $\boldsymbol{\beta}$; esta línea recta que partirá desde el rigen O hasta el punto A donde $\overline{OA} = \boldsymbol{\alpha}$ y tendrá como ecuación a la expresión

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha} + x\boldsymbol{\beta},$$

resaltando que "ésta ecuación es una de las principales formas usadas en los cuaterniones puesto que permite mostrar en general la ecuación de una línea recta en el espacio" (Tait, 1890, p. 11). Modernamente lo que se está describiendo la expresión $\boldsymbol{\rho}$ es la ecuación paramétrica de una recta la cual conocemos a través de la expresión

$$\vec{x} = p + t\vec{n},$$ [11]

con $\vec{x}$ y $\vec{n}$ vectores, p es un punto y t es el vector director.

En el apartado 29 presenta la ecuación

$$\boldsymbol{\rho} = y\boldsymbol{\alpha} + x\boldsymbol{\beta}.$$

la cual contiene dos cantidades indefinidas equivalentes a una ecuación numérica; Tait aclara en este punto que esta expresión representa al plano en el cual viven las líneas $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$[12]. A continuación da la ecuación

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\gamma} + y\boldsymbol{\alpha} + x\boldsymbol{\beta},$$

[10] El desarrollo de esta y otras propiedades se encuentra descrito en Zea (2012).
[11] (Nakos & Joyner, 1999)
[12] Tait no hace diferencia entre línea y vector.

que representa a un plano que pasa a través del extremo $\boldsymbol{\gamma}$ y es paralela a $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ y finalmente va a presentar la ecuación

$$\boldsymbol{\rho} = p_1\boldsymbol{\alpha}_1 + p_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_n\boldsymbol{\alpha}_n = \sum p\boldsymbol{\alpha},$$

donde $\boldsymbol{\alpha_n}$ son vectores y p_n son cantidades numéricas; p va a representar una línea recta si p_1, p_2, etc, son funciones de una sola variable y será un plano si la expresión contiene dos variables. Aquí vemos una de las primeras nociones que nos irán acercando a la definición de la función vectorial.

En el apartado 31 de este capítulo, haciendo uso de las propiedades definidas en los apartados anteriores, Tait probara 12 proposiciones que involucran problemas físicos y geométricos en el plano y el espacio, en las que "utiliza combinaciones de vectores y funciones escalares, las cuales, modernamente corresponden a las funciones paramétricas de una curva" (Zea, 2012, p. 110). Sin embargo, aclara que aún está lejos de la intención del texto,[13] puesto que, estas proposiciones, solo se basan en el uso de ecuaciones lineales en relación con dos o más vectores. A continuación mencionaremos algunas de ellas:[14]

- Las diagonales de un paralelogramo bisecan a cada diagonal.
- Encontrar el centro de inercia de cualquier sistema de masas.

Para nuestro interés particular con respecto al objetivo de este trabajo, revisaremos las proposiciones (l) y (m). En la proposición (l) Tait presenta la ecuación

$$\boldsymbol{\rho} = \sum p\boldsymbol{\alpha},$$

[13] La intención real del texto es explicar el uso de los cuaterniones de en la aplicación de problemas físicos.

[14] Estas proposiciones se refieren a los ejemplos a, d, e.

afirmando que es la ecuación de una curva en el espacio, para la cual si p_1, p_2, etc, son funciones de una variable, la expresión se reescribirá de la forma:

$$\rho = \varphi(t);$$

ésta expresión es precisamente lo que en la actualidad reconocemos como una función paramétrica de la forma

$$\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

En este mismo sentido, indica que si p_1, p_2, etc, son funciones de dos variables, el lugar geométrico de la extremidad ρ es una superficie cuya ecuación se representa de la forma:

$$\rho = \varphi(t, u),$$

la cual hoy en día reconocemos como una función paramétrica de una curva en el plano y que describimos por medio de la expresión

$$\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Tait llama la atención en que las expresiones $\varphi(t)$, $\varphi(t, u)$ son necesariamente vectores, puesto que son iguales al vector ρ. De este modo encontramos la primer definición formal de una *función vectorial* presentada en el siglo XVIII, que hoy en día refiere a las funciones escalares que describen curvas paramétricas.

Finalmente en la proposición (m), y partiendo de las expresiones anteriores describirá nuevas curvas geométricas en el espacio por medio de ecuaciones

$$\rho = \alpha cos(t) + \beta sen(t) + \gamma t,$$

que describe una hélice. La ecuación,

$$\rho = \alpha cos(t) + \beta sen(t) + \gamma u$$

representa un cilindro, donde las líneas que genera son paralelas a ρ y cuya base es la elipse descrita por la ecuación

$$\rho = \alpha cos(t) + \beta sen(t).$$

Éstas son expresiones del tipo que describimos como funciones paramétricas en el espacio de la forma:

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha resaltado que la emergencia de la noción de función vectorial estuvo ligada al desarrollo del concepto de vector, junto con sus operaciones, y al estudio llevado a cabo por Tait sobre la teoría de cuaterniones de Hamilton. Se ha realizado un análisis histórico-epistemológico, consultando diversas fuentes que han llevado a cabo estudios más detallados sobre algunos aspectos puntuales del desarrollo del análisis vectorial, dada la importancia que este tipo de estudios pueden llegar a alcanzar pues, como lo describen Benoit y Mertínez (2008):

> Un análisis histórico epistemológico tiene por objetivo entender su naturaleza, su significado y sentido al determinar las causas que posibilitaron su aparición (del conocimiento específico), de identificar las diferentes etapas de construcción en el ámbito científico, así como las condiciones de sus trasformaciones sucesivas hasta llegar al aula como objeto de enseñanza. (p. 2)

De este modo hemos hecho un recorrido histórico para tratar de identificar los elementos que fueron relevantes en la construcción de las nociones vectoriales, sin entrar en los detalles particulares de cada uno ellos, esto con el objetivo de mostrar cómo se presenta, de forma explícita y en un lenguaje formal la definición de función vectorial, en principio aplicada a funciones escalares para el tratamiento de curvas, y que fue trabajada por investigadores del siglo XVI y XVII como Newton, Leibniz, Laplace, entre otros ya mencionados, más no definida formalmente por ninguno de ellos, pero que servirán de base para el desarrollo del análisis vectorial que conocemos hoy en día.

La importancia de la introducción y posterior establecimiento de las funciones vectoriales del tipo $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que reconocemos como campos escalares, en este caso particular para dos dimensiones, es que con estudios posteriores se introducirán los conceptos fundamentales de los campos vectoriales, trabajados por Fourier pero sin que éste los defina formalmente, los cuales establecen una función que relaciona a un vector con cada punto de su dominio, esto es funciones del tipo $\alpha: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con $n, m \in \mathbb{N}$.

Con el establecimiento de las funciones vectoriales, se abre el camino a diversos desarrollos científicos en relación con el tratamiento de fenómenos naturales, pues gracias a estas nociones fue posible desarrollar campos como la termodinámica, la electricidad y el magnetismo, el estudio del flujo de corrientes de aire, entre otros, a partir de la introducción de diversos operadores. Como describe en Arlego y Costa (2013):

> El estudio de las variaciones de un campo vectorial y de un campo escalar, calculadas a partir del operador ∇ mediante el producto punto o el producto cruz a campos escalares f o a campos vectoriales F, obteniendo magnitudes vectoriales o escalares (gradiente $(\nabla.\mathrm{f})$, Rotor $(\nabla \mathrm{x} \mathrm{F})$, divergencia $(\nabla.\mathrm{F})$ y laplaciano $(\nabla.(\nabla.\mathrm{f}))$ son importantes para describir el comportamiento cualitativo de diversos fenómenos físicos. (p. 25)

De los más importantes avances logrados con la ayuda de las funciones vectoriales, en relación con la descripción de los fenómenos naturales descritos anteriormente, es el desarrollo del análisis vectorial en el cual se fusionan las nociones vectoriales con el cálculo diferencial e integral, a través de teoremas como el de la Divergencia de Gauss, en el que se establece la relación que existe entre una integral sobre la superficie S y la integral triple de una región solida B en la cual la superficie S es su frontera y el teorema de Stokes, el cual permite convertir una integral de línea en una integral de superficie.

> **Teorema de la Divergencia:** supongamos que S es una superficie cerrada suave por partes que acota la región del espacio T. Sea $F = Pi + Qj + Rk$ un campo vectorial con funciones componentes que tienen derivadas parciales de primer orden continuas en T. sea $\boldsymbol{n}$ el vector normal unitario exterior a S. entonces

$$\oiint_S F.ndS = \iiint_T \nabla\mathrm{F}.dS$$ [15]

Teorema de Stokes: Sea *S* una superficie suave por partes, orientada y acotada en el espacio, con frontera *C* orientada positivamente. Suponga que las componentes del campo vectorial *F* tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región del espacio que contiene a *S*. Entonces

$$\oint_C F.TdS = \iint_S (rotF).ndS.$$ [16]

Uno de los conceptos fundamentales en la evolución del análisis vectorial es el concepto de campo; como se mencionó anteriormente, Fourier trató con elementos que referían a este concepto, sin embargo es Maxwell quien lo formaliza para llevar a cabo sus desarrollos en la teoría electromagnética, tomando como base los planteamientos de Faraday, quién había descubierto que el magnetismo producía electricidad a través del movimiento. Con respecto a las investigaciones de Faraday, Arlego y Costa (2013) hacen el siguiente comentario:

> En 1845, durante el transcurso de sus investigaciones sobre el efecto magneto-óptico, llamo por primera vez campo a la región del espacio que hay entre los polos magnéticos, la cual está llena de líneas de fuerza. Faraday entendió el campo como un espacio lleno de líneas de fuerzas eléctricas o magnéticas. Así, el concepto de líneas de fuerza estaba bien establecido en la física británica, pero faltaba una explicación de constitución física. (p. 28)

[15] (Edwars & Penney, 1994, p. 940).
[16] (Edwars & Penney, 1994, p. 947).

A partir de estos trabajos de Faraday, Maxwell se da a la tarea de fundamentar analíticamente estas nociones. Así mientras Tait llevaba a cabo sus estudios con respecto a los cuaterniones junto a Hamilton, Maxwell escribió su tratado de electricidad y magnetismo fundamentado el concepto de campo, donde se involucraban algunos problemas matemáticos tratados en el análisis de cuaterniones. Esto llevó a pensar, cómo se afirma en Crowe (1985), que Maxwell había basado el desarrollo de sus trabajos en el uso de cuaterniones, pero como se constata, en un intercambio epistolar entre él y su amigo Tait, Maxwell solo conoció estas teorías en el año de 1870, posterior a la publicación de su tratado.

Maxwell se interesa por el estudio de los cuaterniones y de acuerdo a Rosales (2009) anunció, en 1870, su interés por los vectores de Hamilton y por remodelar el cálculo de cuaterniones, el cual, como mencionamos, presentaba algunas dificultades en su lectura, dado el lenguaje abstracto en el que había sido desarrollado. En ocasión de una conferencia a la sociedad matemática, dictada en Londres, Maxwell anotará algunas cuestiones de tipo lexicográfico, en relación con los nombres que se les debe a asignar a algunos operadores y que detallaremos a continuación:[17]

> Acabaré proponiendo a la consideración de los matemáticos ciertas frases que expresan los resultados de aplicar el operador de Hamilton ∇P.
> Yo, en primer lugar supongo que el resultado de aplicar ∇^2 (operador de Laplace con signo negativo) sea llamado la concentración de la cantidad a la cual se aplica.
> Para una función escalar P, la cantidad ∇P es un vector que indica la dirección en que P disminuye más deprisa y mide en qué proporción disminuye. Me atreveré, con mucho recelo a llamar a esto declive (nuestro

[17] Tomado de (Rosales, 2009, pp. 69-70).

actual gradiente) de P. la magnitud ∇$ es llamada por Lamé el "primer parámetro diferencial" de P pero en su concepción no interviene la dirección. Necesitamos una palabra que exprese las dos cosas, dirección y magnitud, y que no sea tomada en ningún otro sentido matemático. Me he tomado la libertad de extender el sentido original de la palabra declive generalizándola al espacio tridimensional.

"Si σ representa una función vectorial, $\nabla\sigma$ puede contener una parte escalar y otra vectorial que escribiremos $S\nabla\sigma$ y $V\nabla\sigma$ respectivamente. Propongo que la parte escalar sea llamada convergencia de σ".

Pero en general $\nabla\sigma$ también tiene una parte vectorial y propongo, aunque con recelo, que este vector sea llamado el rotacional (Curl) de la función vectorial original. Representa la dirección y la magnitud de la rotación de la transportada por el vector σ.

Sin lugar a dudas, el desarrollo y la introducción de la noción de campo dentro de las ciencias físicas revolucionaron el mundo de las ciencias, tanto así que Einstein llego a considerarla como uno de los más grandes inventos después de las leyes de Newton (Crowe, 1985). La formulación de las leyes de la electricidad y el magnetismo de Maxwell transformaron el mundo tal como se conocía hasta el siglo XIX, y gracias a los estudios, que posteriormente realizaron, investigadores como Josiah W. Gibbs, Willian K. Clifford (1845-1879), Oliver Heaviside, entre otros, como el matemático italiano Giusseppe Peano (1858-1932) quien "logra sintetizar las propiedades inherentes a la noción de vector y define la axiomática de los espacios vectoriales sobre los números reales, más o menos de una forma moderna" (Zea, 2012, p. 141), se ampliaron los campos de aplicación.

3.1 Análisis del proceso de enseñanza y aprendizaje de las nociones vectoriales.

El cálculo vectorial jugó un papel relevante en el último siglo, puesto que la aplicación de los métodos vectoriales en campos como como la termodinámica, la mecánica de fluidos, la electricidad y el magnetismo, entre otros, posibilitaron el desarrollo de grandes avances a nivel científico y tecnológico. En este sentido, el estudio del cálculo vectorial está ligado a la modelación matemática de fenómenos físicos y tiene como uno de sus objetivos brindar algunas soluciones, desde el campo de la tecnología, a necesidades de la sociedad (Costa, Arlego & Otero, 2014).

En el ámbito universitario, la enseñanza de las nociones vectoriales juega un rol fundamental en la formación de los estudiantes de carreras como matemáticas, física e ingenierías, gracias a que los métodos vectoriales brindan al estudiante la posibilidad de modelar fenómenos físicos como los mencionados en el párrafo anterior. Sin embargo, su enseñanza así como la enseñanza de las demás nociones matemáticas, se ha convertido en uno de los principales temas de investigación de las últimas décadas. Estudios como los de Colman, Costa y Landarreche (2012), han permitido llevar a cabo reflexiones con respecto a la práctica docente con el objeto de encontrar estrategias, desde un punto de vista didáctico, que puedan contribuir a mejorar los proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo vectorial; esto debido a las dificultades que presentan los estudiantes para comprender y trabajar con las nociones mencionadas.

Al tratar de analizar las causas que impiden a los estudiantes apropiarse de estas nuevas nociones, debemos tener en cuenta que el cálculo vectorial cumple algunas reglas en cuanto a su modo de operar, distintas a las reglas de las operaciones matemáticas con las que el estudiante está familiarizado y con las cuales ha venido trabajando hasta cierto momento de su formación escolar. Otra causa relevante se relaciona con aquellos conceptos que por su naturaleza, traen implícitamente algunas dificultades; esto en relación con los obstáculos epistemológicos y los obstáculos de carácter didáctico que puedan surgir en el aula de clase al momento de presentar las propiedades del producto escalar o el producto vectorial, que se diferencian del producto entre números reales.

También vale la pena destacar el punto de vista de la investigadora María del Mar Moreno quien considera que:

> La enseñanza de los principios del cálculo resulta bastante problemática, y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de formas más o menos mecánicas algunos problemas estándar, o bien, realizar algunas derivadas o integrales, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas. (Moreno, 2005, p. 82)

Aunque en este texto no se habla propiamente del cálculo vectorial, sin duda alguna, esta problemática también aplica a las nociones vectoriales teniendo en cuenta que los métodos de las derivadas e integrales son aplicados a los vectores.

De las teorías más importantes que se ha estudiado desde el punto de vista de la didáctica en relación con la enseñanza de las matemáticas, es la formulada por el investigador y especialista en didáctica Guy Brousseau (1933) llamada *teoría de las situaciones didácticas*[18] que, según Panizza, (2004) "se trata de una teoría de la enseñanza que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea" (p. 60). Es decir, según esta teoría, el docente puede crear una situación didáctica usando diversas

[18] Ver (Brousseau, 2004).

herramientas, ya sean por medio de juegos, fichas, software, entre otras, cuando se tiene la intención de que los estudiantes adquieran un conocimiento determinado.

Para el caso particular del estudio de las nociones vectoriales en el sentido de como presentar al estudiante dichas nociones, se encuentra que introducir los vectores y todas sus operaciones desde el punto de vista de la pura abstracción, genera diversas dificultades en cuanto a que estas operaciones no son fácilmente asimiladas por los estudiantes; para hacerle frente a esta dificultad desde la didáctica se ha optado por llevar a cabo le siguiente propuesta de enseñanza:

> En la enseñanza elemental, en vez de modelizar el sistema físico por medio del modelo matemático, lo que se hace es modelizar la noción matemática que se quiere enseñar por medio de algún sistema o fenómeno físico o social. La razón de este proceder radica en que estos últimos están mucho más cerca de la experiencia cotidiana del niño que las nociones aritméticas que se quieren enseñar. (Castro, 2001, p. 2)

Como ya hemos comentado anteriormente, el desarrollo de los métodos vectoriales surge del intento por modelar algunos fenómenos de la naturaleza; de este modo, dado que en nuestra experiencia cotidiana estamos familiarizados con estos fenómenos, se recurre a ellos en los procesos de enseñanza con el objeto de presentar una idea que pueda ser asimilada desde la intuición y sirva de base para introducir posteriormente los procesos operativos que desde la matemática, explican y describen el fenómeno estudiado.

Una de las dificultades de la enseñanza de las nociones vectoriales, que para Zea[19] se evidencia es las aulas de clase, está relacionada con el siguiente aspecto:

---

[19] (Zea, 2012).

> En el contexto algebraico los estudiantes realizan operaciones entre vectores sin mayor dificultad, pero son incapaces de establecer una interpretación de estos cálculos porque no es claramente percibida por ellos. Esto se debe a que en ocasiones no logran desprenderse de su referente geométrico y piensan que lo que no se puede representar fácilmente no existe, convirtiendo esto en un obstáculo para el aprendizaje de un concepto. (Zea, 2012, p. 136)

Sin lugar a dudas, hoy en día los estudios en didáctica juegan un papel relevante en los procesos de enseñanza de las matemáticas, dado que éstos han dado elementos que contribuyen a mejorar la relación entre docente–estudiante–conocimiento, y que por lo tanto, han contribuido a vislumbrar los elementos que entran en juego en esta relación y pueden llegar a impulsar o dificultar la adquisición de saberes por parte de los estudiantes. Por lo tanto se puede considerar que “uno de los objetivos de la didáctica de la ciencias es explicar cómo se construye conocimiento científico en situación escolar” (Martínez, G. & Benoit, P., 2008, pp. 201-202); destacan estos autores, en su estudio, un interés particular con respecto a la forma en que se dan los “procesos de construcción de conocimiento y de los fenómenos que se suscitan en el sistema didáctico (el conocimiento, la institución profesor, y el alumno) y del contexto sociocultural que lo rodea ” (Martínez, G. & Benoit, P., 2008, p. 202).

Resaltamos un último aspecto en relación con la evolución histórica de un concepto o noción matemática, que se encuentra inmerso en los procesos de enseñanza de las nociones vectoriales, en el sentido de tener la posibilidad de conocer las dificultades que se debieron de sobrepasar para que dichas nociones fueran aceptadas como un lenguaje científico, es un hecho que trae consigo un gran interés desde el punto de vista pedagógico, puesto que los estudios de carácter histórico permiten entender cuestiones con respecto a cómo, a partir de la geometría, se llega a una operación de tipo algebraico, esto en relación con las operaciones vectoriales y la representación geométrica de los vectores en el plano y el espacio (Arenzana, 1997). Sin embargo, pocas veces los docentes toman estos aspectos en consideración y desconocen que "las situaciones de desarrollo histórico de un concepto no son directamente trasferibles al salón. No se puede recrear en unas horas o semestres una génesis que históricamente, se extiende sobre varias décadas o siglos" (Martínez, G. & Benoit, P., 2008, p. 202), convirtiéndose éste, en uno de los factores que mayor dificultad genera a los estudiantes para la asimilación de conceptos en el aula de clase.

3.2 Identificación de algunos obstáculos epistemológicos surgidos en el desarrollo histórico de la noción de función vectorial.

Iniciamos en esta parte citando algunos planteamientos descritos en Zea (2012), en relación con la importancia que desde el punto de vista histórico, brinda la posibilidad de reconocer los obstáculos epistemológicos; él en su tesis de maestría considera que:

> La historia nos enseña que es imposible establecer la evolución de una noción en una línea de desarrollo progresiva, bien delimitada y auto referenciada. Todo concepto trae amarrados conceptos, algunos de los cuales obran como elementos de causalidad y otros como obstáculos (Zea, 2012, p. 125).

La teoría de los obstáculos epistemológicos, es una propuesta planteada por el filósofo francés Gaston Bachelard (1884-1962), que trata de los problemas que se presentan de manera implícita en el desarrollo histórico del conocimiento científico, en palabras de Bachelard (1976) “la noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y la práctica de la educación” (p. 19).

Esta teoría describe principalmente 5 obstáculos.[20]

- **Los conocimientos previos**: estos, como su nombre indica, refiere a aquellos conocimientos que el estudiante concibe y acepta hasta un determinado momento en su formación sociocultural y académica, y que en determinado momento se presentan resistentes ante la posibilidad de ser cambiados. Para Bachelard (1976) “en la formación del espíritu científico el primer obstáculo es la experiencia básica” (p. 27).

- **El obstáculo verbal**: este obstáculo se refiere al hecho de tratar de explicar un concepto a partir algunas palabras o imágenes, las cuales pueden describir ciertos aspectos más no pueden abarcar todos los detalles que fundamentan la existencia y aceptación de dicho concepto. Como refiere Bachelard (1976) a veces vemos cosas que aparentemente son tan evidentes que no hace falta explicación
.

- **El peligro de la explicación por la utilidad**: en este caso, se refiere al hecho de explicar fenómenos a partir de la utilidad de un concepto, sin entrar a describir las características físicas del fenómeno. Por lo tanto “en todos los fenómenos se busca la utilidad humana, no solo por la ventaja positiva que pueda procurar sino como principio de explicación” (Bachelard, 1976, p. 110).

- **El conocimiento general**: el uso de generalizaciones puede ser adecuado para explicar algunos conceptos, pero no siempre las generalizaciones pueden respondes a cuestiones particulares. Con respecto a este punto Bachelard dice: “nada ha retardado más el progreso del conocimiento científico que la falsa doctrina de lo general que ha reinado desde Aristóteles a Bacon inclusive, y que aún permanece, para tantos espíritus como una doctrina fundamental del saber” (p. 66)

[20] Ver (Mora, 2002).

- **El obstáculo animista**: en este caso, se refiere la explicación de algunos fenómenos por medio de analogías; explica Bachelard (1976) “los fenómenos biológicos son los que sirven de medio de explicación de los fenómenos físicos. Esta característica de valorizar el carácter biológico en la descripción de hechos, fenómenos u objetos, representan claramente el obstáculo animista” (p. 186).

Las noción de obstáculo epistemológico de Bachelard es estudiada por Brousseau para explicar desde un punto de vista didáctico, los elementos que aparecen en juego en la relación entre enseñanza y aprendizaje. Según Brousseau “el error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado” (Brousseau, 1998, citado en Barrantes, 2006, p. 3), es decir, en el estudio de los obstáculo epistemológico se busca determinar las causas que conducen a errores, puesto que para él, los equivocaciones que cometen los estudiantes no se da solo por la falta de conocimientos previos que éstos tengan para analizar una situación determinada; en ocasiones son los mismos conocimientos previos quienes dificultan el acceso a nuevos conocimientos debido a que en algunos caso estos están tan arraigados, que ofrecen resistencia en la mente del estudiante para que sean replanteados o cambiados por completo.

La enseñanza de las nociones vectoriales, no es ajena a estos obstáculos y en este sentido, vamos a tratar algunas de las dificultades a las que se vieron enfrentados los investigadores que desarrollaron los métodos vectoriales y a los cuales también se ven enfrentados los estudiantes hoy en día en los cursos que tratan con estas nociones.

El desarrollo de los vectores y las nociones relacionadas con estos objetos matemáticos, tiene como base la representación geométrica de los números negativos y los números complejos en el plano, así como sus métodos aritméticos; aceptar los números negativos y su representación tardo varios siglos, pues aunque éstos ya se conocían desde la época del matemático Diofanto, uno de los obstáculos a considerar era su no aceptación como cantidades numéricas debido a las concepciones matemáticas de la época, en este sentido como se escribe en Malisani (1999):

> La falta de aceptación de los números negativos por parte de Diofanto, los árabes y los matemáticos europeos hasta el 1500 fue la causa por la cual evitaban los coeficientes negativos en la formulación de las reglas de resolución y admitían solo soluciones positivas. (p. 17)

Del mismo modo, en el desarrollo de la teoría de ecuaciones las expresiones de la forma $x^2 = -1$, no fueron aceptadas, pues solo se consideraban válidas las raíces cuadradas de cantidades positivas. Al respecto, en Malisani (1999) se afirma que:

> La necesidad de ampliar el campo numérico con los números complejos no apareció con la resolución de las ecuaciones cuadráticas, sino de aquellas cúbicas. Es decir, el obstáculo del número complejo no dependía del tipo de ecuación o de problema, sino del procedimiento efectuado en la resolución. Porque hasta ese entonces, la presencia de la raíz cuadrada de un número negativo en las ecuaciones de segundo grado implicaba la ausencia de solución; mientras que en las ecuaciones de tercer grado no sucedía lo mismo: a veces, se podía encontrar una expresión imaginaria en el procedimiento de resolución aunque las tres raíces fueran reales. (p.17)

Como mencionamos, los vectores aparecen a partir de la generalización en el plano y las operaciones con números complejos, llevada a cabo por Hamilton, al introducir los cuaterniones como métodos operacionales para describir fenómenos naturales, los cuales rompían con la tradición matemática que basaba sus estudios ligados a las propiedades aritméticas aceptadas hasta ese momento y que, como muchas nociones matemáticas, tuvieron que pasar por un proceso de revisión por parte de la comunidad científica;

incluso el mismo Hamilton se vio permeado por estas tradiciones pues en sus trabajos, se vio enfrentado a algunos obstáculos, como bien se observa en Benoit y Martínez (2008):

> El primero y claro está que Hamilton no podía saberlo, es que no existe un algebra tridimensional, sino de hipercomplejos cuatridimensional. El segundo es el principio de permanencia que tuvo que rebasar para admitir una multiplicación no conmutativa. (p.3)

Los obstáculos que tuvieron que sobrepasar las nociones vectoriales para ser aceptadas no vino solo desde el punto de vista de las operaciones, también el lenguaje en el cual eran redactadas estas teorías no siempre era accesible a quienes trataban de comprenderlas; un ejemplo de ello es el pedido que hacen compañeros de Cambridge de Tait para que redacte un texto que hable sobre los cuaterniones pero en un lenguaje más claro y accesible a la comunidad matemática.

Otras propiedades de las operaciones que presentaron alguna dificultad, pues se diferenciaban de las operaciones tradicionales en varios aspectos: (1) el producto entre dos términos[21] pude ser igual a cero a pesar de que ambos términos sean diferentes de cero, lo cual no ocurre con el producto entre números reales; (2) la suma y el producto entre vectores se hacían componente a componente; (3) la representación geométrica de los vectores en el plano y en el espacio; (4) el problema que representaba en el cuaternión sumar expresiones de distinta naturaleza.[22]

En el caso de Grassmann, aparte de los obstáculos ya mencionados, destacamos principalmente el obstáculo que representaba su pensamiento de carácter filosófico y bajo el cual escribió la primera versión de su *teoría de la extensión lineal* que para algunos historiadores[23], contenía conceptos dados de manera implícita y de forma oscura. Se

[21] Se hace referencia a los vectores.
[22] El cuaternión de se compone de la suma entre una expresión escalar y una vectorial.
[23] Ver (Arenzana, 1997).

encontró con un obstáculo de carácter social, en el sentido de que su texto apareció en un momento en que la comunidad matemática se hallaba concentrada en estudiar los textos de Hamilton en relación con los cuaterniones y no fue sino hasta la segunda edición de su libro, y gracias al interés del matemático Hermann Hankel, que sus desarrollos lograron salir a la luz y ser conocidos, a tal punto que los métodos operacionales con los vectores que allí aparecieron terminaron por imponerse sobre los cuaterniones dentro de la comunidad científica de finales del siglo XIX, para describir los fenómenos naturales que hasta este momento de la historia venían siendo estudiados.

Finalmente para resaltar la importancia que tiene en la enseñanza de las nociones vectoriales conocer los obstáculos que dificultan el aprendizaje citamos las anotaciones que se expresan en Contreras (2003):

> Cuando se estudia un determinado concepto a lo largo de su evolución epistemológica, aparecen concepciones que no son capaces de dar respuesta a nuevos tipos de problemas, pero que están muy ancladas en la cultura del momento y si responden a otros tipos de problemas. Se hablará en este caso de la idea de obstáculo epistemológico. (p. 4)

Como se hemos anotado antes, hay muchos aspectos del desarrollo del análisis vectorial que aún quedan por analizar. La investigación es una especie de caja de Pandora: cuando uno la abre van apareciendo dificultades e interrogantes que abren nuevos caminos de indagación.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, J. L. (2012). *El fenómeno de la caida de los cuerpos*. (Revista mexicana de física, E 58, Num. 1, pp. 36-40.) Obtenido de http://rmf.smf.mx/page/rmf-e_anteriores?volume=58&issue=1

Apostol, T. (2001). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal* (2 ed., Vol. 1). Barcelona, España: Reverté, S.A.

Apostol, T. (2001). *Calculus. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades* (2 ed., Vol. 2). Barcelona, España: Reverté, S.A.

Arenzana, V. (1997). *El lenguaje vectorial en geometría. Los pioneros Willian Rowan, Hamilton y Hermann Günther Grassmann*. (Revista Suma, Vol 25, pp. 61-70) Obtenido de http://revistasuma.es/IMG/pdf/25/061-070.pdf

Arlego, M., & Costa, V. A. (2013). *El rol de las ciencias en la enseñanza del cálculo vectorial en carreras de ingeniría*. (Revista iberoamericana de educación matemática, Num. 36) Obtenido de http://www.fisem.org/www/union/revista36.php

Arlego, M., Costa, V., & Otero, M. (2014). *Enseñanza del cáclculo vectorial en la universidad: propuesta de recorridos de estudio e investigación*. (Revista de formación e innovación educativa universitaria, Vol. 7, Num. 1) Obtenido de http://webs.uvigo.es/refiedu/num_es.htm

Bachelard, G. (1976). *La formación del espiritú científico* (5 ed.). México: Siglo veitiuno editores.

Barrantes, H. (2006). *Los obstaculos epistemológicos*. (Cuadernos de investigación y formación en eduación matemática, Año. 1, Num. 2) Obtenido de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6886

Benoit, P., & Martínez, G. (2008). *Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial*. (Latin-american journal physics education, Vol. 2, Num. 2) Obtenido de http://www.lajpe.org/index_may08.html

Bobadilla, M. L. (2001). *Las concepciones de Fourier sobre matemáticas y experiencia y la instauración de la teoría analítica del calor.* Tesis de Maestría, Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática.* España: Alianza editorial.

Brousseau, G. (2004). *Théorie des situations didactiques (didactique des mathématiques 1970-1990).* Francia: La pensee sauvage.

Castro, E. C. (2001). *Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos*. (Pre-publicaciones del seminario matemático "Garcia de Galdeano", Num 21.) Obtenido de http://dialnet.unirioja.es/servlet/revista?codigo=8036

Colman, J., Costa, V., & Landerreche, F. (2012). *El cálculo vectorial en la formación del ingeniero: una perspectiva de alumnos de último año de la carrera*. (Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería - CAEDI 2012) Obtenido de http://www.researchgate.net/profile/Viviana_Costa/publications

Contreras, A. (2003). *La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad: una perspectiva desde la teoría de los obstaculos epistemológicos y los actos de comprensión*. (Cuarto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática) Obtenido de http://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=332837

Crowe, M. J. (1985). *A history of vector analysis. The evolution of the idea of a vectorial system.* New York: Dover Publications, Inc.

Edwars, C., & Penney, D. (1994). *Cálculo con geometría analítica* (4 ed.). Naucalpan de Juárez, México: Pretince hall hispanoamerica, S.A.

Flament, D. (1997). *Le nombre une hydre án visages. Entre nombres complexes et vecteurs.* Paris: De la Maison des Sciences de L`Homme.

Galileo, G. (1981). *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias.* Madrid : Editorial Nacional.

González, J. F. (2008). *Historia del producto vectorial*. (Notas de clase no publicadas) Obtenido de http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/realquiler/fich/jfgh.pdf

Kittel, C., Knigth, W., & Ruderman, M. (1968). *Mecánica. Berkeley phisycs course* (Vol. 1). Barcelona, España: Reverté.

Malisani, E. (1999). *Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica*. (Revista IRICE del instituto rosario de investigaciones en ciencias de la educación) Obtenido de http://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf

Medvedev, F. (1991). *Scenes from the history of real functions.* Berlin, Alemania: Bikhäuser verlag.

Monroy, L. (2011). *El álgebra lineal en el contexto histórico de las matemáticas.* Tesis de maestría, Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Mora, A. (2002). *Obstáculos epistemológicos que afectan el proceso de construcción de conceptos del área de ciencias en niños de edad escolar*. (Intersedes: revista de las sedes regionales, Vol. III, Num. 5) Obtenido de http://www.redalyc.org/revista.oa?id=666

Moreno, M. d. (2005). *El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros*. (Noveno simposio de la sociedad española de educación matemática SEIEM) Obtenido de http://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=332834

Nakos, G., & Joyner, D. (1999). *Algebra lineal con aplicaciones.* México: International Thompson Editores, S.A. de C.V.

Panizza, M. (2004). *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la E. G. B: analisis y propuestas.* Buenos Aires, Argentina: Paidos.

Ponte, J. P. (1992). *The history of the concept of function and some educational implications*. (The mathematics educator, Vol. 3, Num. 2) Obtenido de http://tme.coe.uga.edu/volume-3-number-2/

Recalde, L. (2011). Lecciones de historia. *Universidad del Valle*. Cali.

Rosales, A. (2009). *Desarrollo histórico del álgebra vectorial*. (Revista iberoamericana de educación matemática, Vol. 19, pp. 63-76.) Obtenido de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3053465

Sánchez, J. M. (2011). *Historias de Matemáticas: Hamilton y el descubrimiento de los cuaterniones*. (Revista de investigación "Pensamiento Matemático", Num. 1) Obtenido de http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/index4_numero1.html

Spivak, M. (1996). *Cálculo infinitesimal* (2 ed.). México, D.F, México: Reverté, S.A.

Tait, P. G. (1890). *An elementary treatise on quaternions* (3 ed.). Londres, Inglaterra: Cambridge At The University Press.

Ugalde, W. J. (2013). *Funciones: desarrollo historico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje*. (Revista digital matemática, educación e internet, Vol. 14, Num. 1) Obtenido de http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/

Zea, C. A. (2012). *La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático.* Tesis de maestría, Universidad del Valle, Cali.