



**LA VISUALIZACIÓN DIDÁCTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE  
PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD DEL VALLE:  
EL CASO DE LA DERIVADA EN UN CURSO DE CÁLCULO I**

Gonzalo Ramírez Bernal código: 0935820  
Joan Sebastián Ordoñez Cuastumal código: 0934663

UNIVERSIDAD DEL VALLE  
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA  
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
SANTIAGO DE CALI, SEPTIEMBRE DE 2014



**LA VISUALIZACIÓN DIDÁCTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE  
PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD DEL VALLE:  
EL CASO DE LA DERIVADA EN UN CURSO DE CÁLCULO I**

Gonzalo Ramírez Bernal código: 0935820  
Joan Sebastián Ordoñez Cuastumal código: 0934663

Requisito para optar el título: de Licenciados en Matemáticas y Física

**DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO**  
Evelio Bedoya Moreno, *Ph.D.*

UNIVERSIDAD DEL VALLE  
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA  
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA  
SANTIAGO DE CALI, SEPTIEMBRE DE 2014

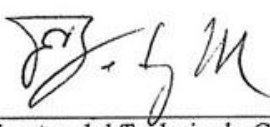
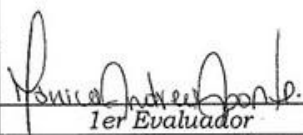



### Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: 1. Marque con una **X** la opción escogida.  
2. diligencie el formato con una letra legible.

Título del Trabajo:	La visualización didáctica en la formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad del Valle: el caso de la derivada en el curso de Cálculo I.							
Se trata de:	Proyecto	<input type="checkbox"/>	Informe Final	<input checked="" type="checkbox"/>				
Director:	Evelio Bedoya							
1er Evaluador:	Monica Andrea Aponte							
2do Evaluador:	Angela María Gómez							
Fecha y Hora	Año:	2014	Mes:	10	Día:	10	Hora:	2:00 pm
<b>Estudiantes</b>								
Nombres y Apellidos completos			Código		Programa Académico			
GONZALO RAMIREZ BERNAL			200935820		3487			
JOAN SEBASTIAN ORDOÑEZ CUASTUMAL			200934663		3487			

<b>Evaluación</b>								
Aprobado	<input type="checkbox"/>	Meritorio	<input type="checkbox"/>	Laureado	<input type="checkbox"/>			
Aprobado con recomendaciones	<input type="checkbox"/>	No Aprobado	<input type="checkbox"/>	Incompleto	<input type="checkbox"/>			
En el caso de ser <b>Aprobado con recomendaciones</b> (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de _____ (máximo un mes) <b>ante:</b>								
Director del Trabajo			1er Evaluador		2do Evaluador			
En el caso que el Informe Final se considere <b>Incompleto</b> , se da un plazo de máximo de _____ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:								
Año:	Mes:	Día:	Hora:					
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la <b>razón del desacuerdo</b> y las <b>alternativas</b> de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).								

<b>Firmas:</b>		
		
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador



PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

- a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.
- b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conozcan que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.
- c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la *Licencia Creative Commons* con que se publica.
- d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.
- e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.



PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1), que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo  No autorizo

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la *Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia* cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/> y que admite conocer.

Si autorizo  No autorizo

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbalala<sup>1</sup>:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: La Visualización Didáctica en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas en la Universidad del Valle: el caso de la denuada en el curso de Cálculo I

Autores:

Nombre: Gonzalo Ramirez Bernal Firma: Gonzalo Ramirez  
C.C. 1143940306

Nombre: Joan Sebastian Ordoñez Cuastumal Firma: Joan Sebastian Ordoñez  
C.C. 115142785

Nombre:  Firma: \_\_\_\_\_  
C.C. \_\_\_\_\_

Fecha: 10-10-2014

<sup>1</sup> Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

## **Agradecimientos**

A la vida por darme unos padres, Patricia y Gonzalo, tan insistentes que nunca dejaron de apoyarme y creer en mí aunque se atravesaran muchas dificultades. A mis tías Nelly y Nidia por su colaboración y respaldo.

A las enseñanzas y experiencias que me dejaron los profesores que tuve en todo mi paso por la Universidad, especialmente mis profes del Área de Educación Matemáticas y los del Departamento de Matemáticas, igualmente a mis compañeros por las risas, disgustos y largas jornadas de estudio con todos esos años.

A mi director de trabajo de grado, el profesor Evelio Bedoya, quien fue de gran apoyo para la culminación de mi formación profesional y en el inicio de futuros proyectos para mi formación, a mi compañero Sebastián de trabajo de grado quien compartió conmigo la elaboración y culminación de nuestro trabajo.

Finalmente agradezco muy especialmente a Natalia David Chilito por su apoyo incondicional, las sugerencias, ideas, y ayuda en la construcción y edición de nuestro proyecto y la culminación del trabajo.

*Gonzalo Ramirez Bernal*

## **Agradecimientos**

*A Dios por la fortaleza y la plenitud en el día a día de la vida y de esta carrera en particular, a nuestro director de trabajo de grado profesor Evelio Bedoya, nuestro maestro quien nos orientó en un inicio hacia la consolidación de un proyecto de grado en el campo de la didáctica de las matemáticas, a nuestros profesores del área de educación matemática que con sus cursos sembraron en nosotros el amor y la convicción por la enseñanza y que la vía más justa para una igualdad es mediante la educación, a mi familia: José, María y Alejandro que con su apoyo incondicional y compañía diaria en los buenos y malos momentos, siempre estuvieron presentes, a mis compañeros y amigos con los cuales compartí y disfrute la universidad como espacio de reflexión, a Gonzalo Ramírez Bernal por su amistad, su buen trabajo, su paciencia y tolerancia en los buenos y malos momentos y por último a María Fernanda Gil por su paciencia y amor incondicional.*

***Joan Sebastián Ordoñez Cuastumal***

## RESUMEN

La formación, el conocimiento, las competencias profesionales de los profesores de matemáticas son temas de actualidad en las agendas investigativas en el campo de la Didáctica de las Matemáticas (García, Gavilán & Linares, 2012; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013). Estos autores proponen el Análisis Didáctico (AD), en el marco de la Teoría de los Organizadores del Currículo, como una de las competencias centrales y estrategia de formación de los docentes de matemáticas. En particular en los Análisis Didácticos de Contenido y Cognitivo (componentes centrales del proceso general de AD), se propone la visualización como un proceso fundamental para el aprendizaje de las matemáticas en general y de los conceptos fundamentales del Cálculo – límite, continuidad, derivada, etc.-.

En este trabajo se realizó un AD del proceso de enseñanza de la derivada en el curso de Cálculo I, ofrecido a los estudiantes de los programas de Licenciatura del Área de Educación Matemática. Concretamente se interesó por describir y analizar críticamente el papel que los profesores (principal y “tallerista”) y los estudiantes le asignan a la visualización en el contexto local o particular del sistema didáctico que se implementa en la clase de Cálculo I, cuando se propone enseñar y aprender el concepto (sistema o estructura conceptual) de la derivada.

**Términos claves:** Formación de profesores de Educación Secundaria, Visualización Didáctica, Sistema o estructura conceptual de la derivada, Conocimiento Didáctico, Análisis Didáctico.



## TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN .....	8
INTRODUCCIÓN .....	13
CAPÍTULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN .....	17
1.1. ANTECEDENTES .....	17
1.2. JUSTIFICACIÓN .....	20
1.4. OBJETIVOS .....	26
1.4.1. Objetivo general .....	26
1.4.2. Objetivos específicos.....	26
CAPÍTULO 2: MARCO CONCEPTUAL .....	27
2.1. DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y FORMACIÓN DE PROFESORES: ANÁLISIS DIDÁCTICO .....	27
2.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA .....	29
2.2.1. Contextos curriculares .....	31
2.3. ANÁLISIS DIDÁCTICO DE CONTENIDO.....	37
2.3.1. Presentación de la derivada .....	37
2.3.2. Contextualización histórica-epistemológica.....	40
2.3.3. Análisis didáctico semiótico.....	41
2.3.4. Análisis fenomenológico .....	48
2.4. VISUALIZACIÓN MATEMÁTICA Y VISUALIZACIÓN DIDÁCTICA .....	52
CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA .....	54
3.1. MARCO METODOLÓGICO: INVESTIGACIÓN CUALITATIVA .....	54
3.1.1. Análisis didáctico como metodología de investigación .....	55
3.1.2. El método de estudio de caso .....	56
3.2. DISEÑO METODOLÓGICO .....	57
3.2.1. Contextualización.....	57
3.2.2. Participantes .....	57
3.2.3. Métodos, técnicas e instrumentos de recolección de datos y análisis de información ....	58
3.2.4. Cronograma.....	59
CAPÍTULO 4: OBSERVACIÓN, ENTREVISTA Y ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	60
4.1. INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN.....	61
4.2. ANÁLISIS GENERAL .....	69
4.2.1. Sobre el concepto de derivada.....	69
4.2.2. Formación fundamental del docente .....	71
4.3. VISUALIZACIÓN DIDÁCTICA .....	74
4.4. REJILLAS DE ANÁLISIS MOMENTO 1 .....	75

4.4.1. Rejillas entrevista docente.....	76
4.4.2. Rejillas entrevista estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Física.....	86
4.4.3. Rejillas de entrevista: estudiante de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas .....	96
4.4.4. Rejilla de análisis: documentos institucionales y texto guía .....	101
4.4.5. Rejilla de análisis: observación .....	102
4.5. REJILLAS DE ANÁLISIS MOMENTO 2: SUBCATEGORÍAS .....	110
4.5.1. Rejilla de análisis sobre el concepto de derivada – subcategorías: introducción y consolidación del concepto en los estudiantes .....	110
4.5.2. Rejilla de análisis formación fundamental del docente– subcategorías: modelos didácticos.....	111
4.5.3. Rejilla de análisis visualización didáctica – subcategorías: cambios de registro de representación para potenciar la visualización y uso de herramientas tecnológicas con el fin de promover el uso de la visualización .....	112
5. CONCLUSIONES.....	114
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	121
ANEXOS .....	i

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Sistema Didáctico tetrádico adaptado a esta propuesta.....	15
Figura 2 Interpretación gráfica de las rectas secantes de Guzmán (1996) .....	22
Figura 3 Propuesta de Guzmán para comprender mejor la derivada de las funciones inversas Guzmán (1996) .....	23
Figura 4 Representación visual del problema de la derivada de la función identidad inversa propuesta por Guzmán (1996) .....	23
Figura 5 Representación visual del problema de la derivada de dos funciones simétricas a la identidad propuesta por Guzmán (1996) .....	24
Figura 6 Pregunta de cálculo hecha a un profesor, tiene como objetivo probar el no uso de lo visual por parte del profesor. Hitt (2005) .....	25
Figura 7 Visualización y resolución de la pregunta hecha al profesor .....	25
Figura 8 Secante y tangente (tomada de Courant, R., & John, F. (1976). Introducción al cálculo y al análisis matemático. Limusa. Pág 178).....	38
Figura 9 (tomado de Courant, R., & John, F. (1976). Introducción al cálculo y al análisis matemático. Limusa.e Pág 179).....	39
Figura 10 Esquema de la estructura de la derivada .....	44
Figura 11 Esquema de representación entre la pendiente de una recta y el concepto de derivada (Elaboracion propia) .....	45
Figura 12 Esquema de las representaciones gráfica, analítica y numérica y la relación entre estas (Elaboración propia) .....	47
Figura 13 Diagrama que representa la posición respecto al tiempo con velocidad constante (Elaboración propia) .....	50
Figura 14 Gráfica de la posición respecto al tiempo (Elaboración propia Geogebra) .....	50
Figura 15 Gráfico de la función posición contra tiempo cuando la velocidad es variable (Elaboración propia Geogebra).....	51
Figura 16 Acercamiento gráfico de dos puntos y noción del límite (Elaboración propia Geogebra) .....	52
Figura 17 Representación esquemática del proceso metodológico .....	58
Figura 18 Procesos de enseñanza y aprendizaje: Visualización Didáctica. Fuente: Autores.....	118

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1	Contenidos del programa del curso de Cálculo I de la Universidad del Valle.	37
Tabla 2	Cronograma .....	59
Tabla 3	Fragmento entrevista Docente .....	63
Tabla 4	Fragmento rejilla de observación de la clase.....	64
Tabla 5	Fragmento rejilla documentos consultados .....	65
Tabla 6	Relación entre categorías de análisis y objetivos .....	66
Tabla 7	Rejilla de análisis por categoría.....	68
Tabla 8	Fragmentos de rejilla de observación de clase (ejercicio de tipo algebraico) ..	70
Tabla 9	Modelo Didáctico Tradicional      Fuente: Gómez y Polania (2008) Pág.55 ..	72
Tabla 10	Modelo Didáctico Conductista      Fuente: Gómez y Polania (2008) Pág.59..	73

## INTRODUCCIÓN

La investigación en Didáctica de las Matemáticas, así como de experiencias empíricas en el aula, en los contextos internacional, nacional y local, han mostrado que la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos fundamentales<sup>1</sup> del Cálculo, como por ejemplo, límite, continuidad, derivada e integral, son fuentes de frecuentes dificultades de comprensión y aprendizaje por parte de los estudiantes de educación secundaria y universitaria; algunos ejemplos de estos problemas son reportados por Tall (1992); Harel & Dubinsky (1992); Azcárate y otros (1996); Badillo (2003); Hitt (2005); entre otros.

En particular, en nuestro contexto local, el curso de Cálculo I ofrecido a los estudiantes de la Universidad del Valle en los programas académicos de Licenciatura en Matemáticas y Física y de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, en relación con este problema educativo no es la excepción. Esto se pone de manifiesto a través de los resultados de bajo rendimiento en este curso, reflejado en las bajas calificaciones y en los resultados de análisis empíricos no sistematizados que se han realizado, los cuales han llevado a la creencia generalizada entre muchos estudiantes y algunos profesores, que muchas de las dificultades que se suelen presentar más tarde en los cursos avanzados de matemáticas de estos programas académicos -Análisis Matemático, Topología, Geometría Diferencial-, tienen sus orígenes en los cursos de Cálculo que son prerrequisitos de estos.

Por otra parte, numerosas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, realizadas en las últimas décadas (Bishop, 1989; Zimmermann y Cunningham, 1991; Guzman, 1996; Presmeg, 2002; Duval, 2002, 2003; Hitt, 1998, 2005; Roesken y Rolka, 2006; Bedoya, 2002; 2011; entre otros), han mostrado que el proceso de “*visualización matemática*”, el cual está estrechamente relacionado con los diferentes registros de representación matemática, puede ser implementado como un medio importante para el desarrollo de la intuición, de representaciones internas y por lo tanto para la comprensión y el aprendizaje significativo de muchos conceptos matemáticos en general y de los conceptos fundamentales del Cálculo en

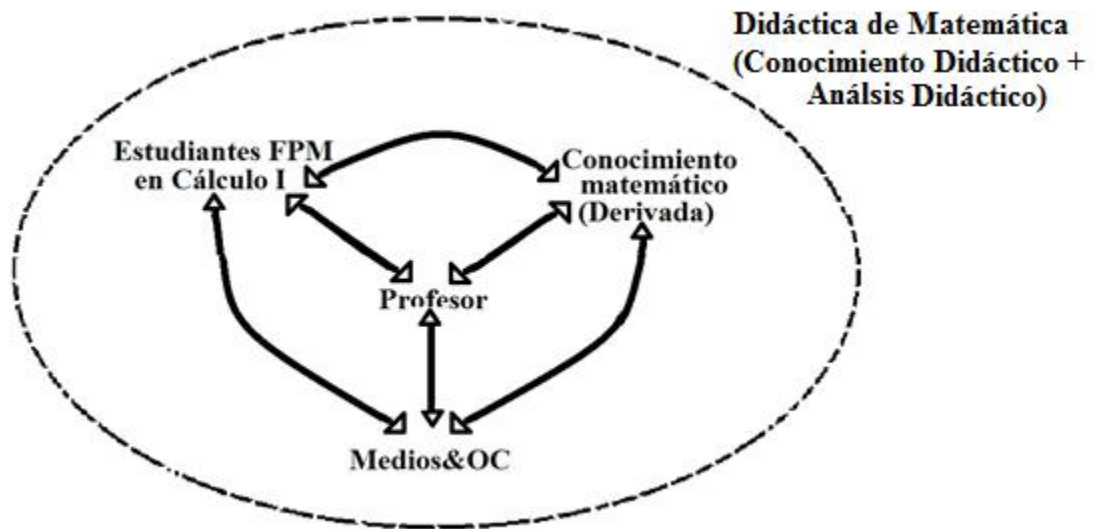
---

<sup>1</sup> Se consideran fundamentales ya que son centrales en el desarrollo del cálculo, cabe resaltar que también existen otros conceptos fundamentales en el cálculo que aquí no se van a abordar.

particular. Por ejemplo, para Duval (2002): *There is no understanding without visualization* (no es posible un aprendizaje sin una visualización); por su parte Hitt (2005) plantea que “la visualización facilita un conocimiento directo e intuitivo” de los conceptos matemáticos.

En los últimos 20 años, la visualización se ha venido constituyendo como un nuevo campo de investigación que estudia el potencial de los seres humanos para procesar representaciones visuales; Burkhard (2005) lo denomina “Visualización del Conocimiento”. Cuando este conocimiento –conceptual y procedimental– y habilidad se utilizan de modo explícito desde una perspectiva didáctica y con propósitos didácticos por parte del profesor de matemáticas, Bedoya (2002; 2011) lo denomina proceso de “visualización didáctica” y lo considera parte del conocimiento didáctico del contenido y una de las competencias didácticas profesionales del profesor de matemáticas. Todo lo anterior pone de manifiesto la gran importancia que tiene el proceso de visualización para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo con todo esto, el objetivo general de este trabajo consistió en describir y reflexionar (valorar) críticamente el papel que juega la visualización matemática y didáctica (o que le hacen jugar el profesor y los estudiantes, con los medios y recursos utilizados para tal efecto) en el sistema didáctico (SD) concreto referido al curso de Cálculo I, ofrecido a los estudiantes de los dos programas de Licenciaturas mencionados anteriormente, en torno al sistema conceptual asociado a la noción de derivada. Se trata de hacer un análisis didáctico (AD) de los procesos de enseñanza y aprendizaje desarrollados en y con dichos sistemas, desde el punto de vista de los principales y más reciente desarrollos en el campo de la Didáctica de las Matemáticas sobre el proceso de visualización. En la siguiente figura (Fig. 1) se presenta esquemáticamente los componentes, relaciones y estructura del SD (tomado y adaptado de Bedoya, 2011).



*Figura 1 Sistema Didáctico tetrádico adaptado a esta propuesta*

La tétrada de subsistemas está integrada por los estudiantes para profesores (de matemáticas en formación, FPM); el profesor del curso de Cálculo I; el contenido matemático en cuestión (sistema o estructura conceptual de la derivada); los medios (libros de texto, materiales, tecnologías, otros recurso) y Organizadores del Currículo (OC). La línea de puntos (óvalo) indica que el sistema además de dinámico es abierto, en el sentido que interacciona de manera continua y permanente con su entorno cultural, social, otras asignaturas, recursos tecnológicos, etc.

El carácter local o particular de los distintos agentes y componentes del SD concreto con el que se trabajará plantea el tratamiento metodológico de estudios de casos, donde los casos corresponden con cada uno de los componentes del SD. Para ello se realizó una revisión documental de textos y medios en que se apoya didáctica (o instruccional) y curricularmente el curso de Cálculo I; se observó y analizó cómo el profesor o algunos profesores de Cálculo I abordan el proceso de “visualización didáctica” del concepto de derivada en el aula de clase o en el SD en acción; además, cómo los estudiantes responden e identifican las principales nociones y procesos en el sistema o estructura conceptual que caracteriza el concepto de derivada. Y para efectos del análisis, se diseñó un modelo local o particular de AD que consulte las características más importantes del sistema didáctico en cuestión. En general, la propuesta teórica de AD (Bedoya, 2002; 2011) propone describir y analizar una serie de elementos y procesos que se presentan en el mencionado SD, de acuerdo a unas categorías o

unidades de análisis tales como: propuesta curricular (contextualización o análisis didáctico curricular); aspectos histórico-epistemológicos, fenomenológicos y semióticos del contenido matemático (análisis didáctico de contenido); errores, dificultades y obstáculos cognitivos (análisis didáctico cognitivo); proceso y modelo instruccional o didáctico, medios, materiales y recursos (análisis didáctico de instrucción).

De todo lo anterior se infiere que este trabajo está enmarcado conceptual y metodológicamente en la propuesta teórica de los “Organizadores del Currículo” sobre el Conocimiento Didáctico y el Análisis Didáctico, considerados conocimientos conceptuales y procedimentales bases de la formación profesional del profesor de matemáticas. Esta propuesta viene siendo desarrollada por el grupo de Didáctica de las Matemáticas y Formación de Profesores de Matemáticas “Pensamiento Numérico y Algebraico” - PNA - (Rico, 1997, Bedoya, 2002, 2011, 2013; Gallardo y González, 2006; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013; entre otros)

El presente trabajo de grado se propone como requisito para optar al título de Licenciados en Matemáticas y Física, que exige el programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle.



## CAPÍTULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

### 1.1. ANTECEDENTES

El aprendizaje del Cálculo ha sido por muchos años un campo donde se han centrado una gran cantidad de autores y es en el Cálculo donde se encuentra una de las principales preocupaciones, en la actualidad, de la educación superior dentro de la Universidad. Es así como en miras del desarrollo del aprendizaje, la Educación Matemática, específicamente la Didáctica de las Matemáticas, trata de observar e investigar la diversidad de dificultades para identificarlas y/o darle un tipo de tratamiento a estas. Una de las múltiples investigaciones sugiere que la problemática del aprendizaje de las matemáticas se puede mediar a través de la visualización.

La visualización sugiere que las representaciones, ya sea en lápiz y papel o a través de las ayudas tecnológicas pueden convertirse en una serie de interacciones mentales que mejora la comprensión del concepto, los autores Zimmermann y Cunningham (1991) en su documento *What Is Mathematical Visualization?* Plantean dos tendencias que están presentes en las matemáticas, la primera tendencia se presenta hacia los objetos abstractos que se muestra de una manera lógica y ordenada. La segunda hace énfasis en la intuitiva para fomentar la comprensión de los objetos que estudian, es así como estos autores plantean la imagen visual como eje articulador entre el concepto y la representación (lápiz y papel, tecnologías, entre otros.).

En ese sentido, los autores mencionados consideran que las matemáticas debe nutrirse de elementos no estrictamente algebraicos, también pueden incluir elementos de carácter espacial, verbal, lógico e intuitivo, procurando implementar la visualización y restaurarla a partir de imágenes visuales. La visualización matemática está interesada en que los estudiantes dibujen, manipulen o haga una representación adecuada y a partir de esta comprenda la representación misma del objeto<sup>2</sup>, utilizando un diagrama para encontrar la solución y comprender el concepto. Así la visualización no es un fin, sino un medio para

---

<sup>2</sup> En el presente documentó cuando se mencione objeto o concepto se estarán refiriendo a un mismo término.

llegar a un fin, es la comprensión, que en este caso es la comprensión de un conocimiento matemático.

Por otro lado, al abordar cualquier tipo de representación en matemática, estas no deben ser únicamente estáticas, sino que por el contrario con el surgir de nuevas tecnologías se debe hacer de las representaciones algo dinámico que construya el conocimiento a partir de la interpretación del concepto, para así ver que la visualización consiste en un conjunto interesante y distintivo de las Matemáticas como cuestiones pedagógicas y prácticas que deberían ser abordados directamente, no sólo como un tema secundario en otro contexto, por ejemplo en geometría se puede ver como se utilizan los procesos de visualización para desarrollar la comprensión de conceptos.

La Visualización Matemática tiene un lugar importante en las investigaciones como la realizada por Hitt (1998), quien publica “ Visualización Matemática, Nuevas Tecnologías y Currículum” en la cual resalta el valor de la Visualización en la resolución de problemas y la importancia de pasar de un sistema de representación a otro para lograr una visualización, pero en este mismo artículo señala que el trabajar con los estudiantes por medio de la Visualización Matemática requiere exigencias cognitivas superiores que el pensar algorítmicamente el cual ha sido la metodología de enseñanza tradicional por muchos años en la educación secundaria y primaria.

Dentro de este marco Hitt en (2005) publica “Dificultades en el aprendizaje del Cálculo” en donde refleja algunos de los problemas que se tiene en la enseñanza del Cálculo, aquí el autor alude también al papel que juega el profesor y es por esto que toma como ejemplo varios profesores de educación secundaria e intenta indagar sobre algunos conceptos fundamentales del Cálculo llegando a la deducción que los profesores de matemática hacen poco uso de diferentes tipos de representación y se limita a operaciones algebraicas dejando de un lado el contenido visual que puede ayudar en el momento de abordar distintos problemas en el aula de clase.

En el texto *Intuition and rigour: The Role of Visualization in the Calculus* de Tall (1991) el autor muestra por qué no riñe la intuición y el rigor, entendiendo la intuición como un cúmulo de contenidos que llegan a la mente de forma no organizada y el rigor de los contenidos como un orden secuencial que muestra la validez de los argumentos, al igual detalla que las ideas visuales que son intuitivas para algunas personas que tiene un grado de

experticia en un contenido matemático no son intuitivas para las persona que apenas se están acercando a comprender el concepto matemático tratado.

Por otro lado cuando se habla de la importancia del rigor en matemáticas el autor indica que la investigación en Educación Matemática afirma que la demostración es la última etapa del proceso y es por esto que antes de llegar a la demostración es necesario tener una idea de lo que se va a demostrar y es en este proceso de hacer una construcción visual global de las relaciones, donde esta imagen se puede beneficiar de una buena visualización, no es por nada que muchos matemáticos se valieron de esto para llegar a grandes descubrimientos en matemáticas y apartarse de estos es negar las raíces de muchos conceptos en matemáticas y quitarle la oportunidad al estudiante de comprender mejor esos conceptos.

En el texto Tall (1991) sugiere poner ejemplos para generar en el estudiante adecuadas visualizaciones de las ideas matemáticas, esto puede permitir una imagen más amplia de cómo abordar dichos conceptos en donde las intuiciones visuales de los estudiantes permitan llegar a poderosas ideas formales y con estas en contextos adecuados llegar naturalmente al rigor de la demostración en matemáticas.

En el documento de Hughes (1991) Visualization and Calculus Reform, también se aborda el papel que se otorga a la Visualización en el aprendizaje por parte de los estudiantes y cómo se implementa en la concepción de derivada, en este se plantea que a partir de las representaciones gráficas de los conceptos matemáticos se podría hacer más factible la comprensión por parte del estudiante.

La autora presenta la derivada mediante una gráfica, entrelazando la idea de representación algebraica de la derivada como eje inicial en la concepción del estudiante, de la misma forma propone que el estudiante debería saber desplazarse entre la gráfica de una función y la gráfica de su derivada, ya que así se generaría una manipulación del concepto y no una manipulación de lo algebraico, así mismo manifiesta que se debe presentar una especie de equilibrio entre lo visual y lo algebraico y replantear el currículo para que este balance se cumpla. La autora indica que la reforma en el cálculo solo será posible si se logra restablecer el pensar como una parte esencial en el aprendizaje de las matemáticas y hacer ver a los estudiantes que la resolución de un problema se potencializa a través de la visualización.

## 1.2. JUSTIFICACIÓN

En los primeros años de universidad los estudiantes que matriculan cursos de matemáticas se enfrentan principalmente con dificultades en el aprendizaje, por eso, es que en los cursos iniciales de matemáticas los estudiantes tiene un alto fracaso (Grupo Educación Matemática, 1990), entendiendo como fracaso el no lograr aprobar el curso, una de las causas de esto es que muchas veces se prioriza solamente lo algebraico y no logra alcanzar la comprensión del concepto. Para dar respuesta a esta problemática varios autores ha trabajado en la visualización matemática como un medio que permita generar una mejor apropiación de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes.

Se entiende por Visualización Matemática la que se da a través de diversas representaciones (papel, lápiz y computadoras) y que sirve en el proceso de las múltiples transformaciones mentales para una mejor comprensión de un concepto matemático (Hitt, 2005), particularmente este trabajo se interesó por la visualización desde la perspectiva Didáctica, lo que se conoce como visualización didáctica, entendida esta como “*un proceso y resultado de representación de los objetos matemáticos escolares con propósitos didácticos*” (Bedoya, 2002). Con lo anterior se evidencia que esto es algo que atañe tanto a los futuros profesores de matemáticas, como a las instituciones educativas, universidades, incluso a los mismos estudiantes que se enfrentan a estos cursos, por lo tanto se debe pensar si la formación de futuros profesores de matemáticas sirve para enfrentarse en el campo profesional, este trabajo sirvió para conocer si la formación que están recibiendo estos estudiantes está orientada en lo visual o si por el contrario sigue preponderando netamente lo algebraico, en este sentido Tall (1991) ha escrito sobre cómo se están enseñando algunos contenidos matemáticos y menciona que no se puede dejar de un lado el contenido visual que tiene algunos objetos matemáticos más si estos requirieron de lo visual para su formalización.

Con este trabajo se trata de mostrar el papel de la Visualización Didáctica en la formación de profesores de matemáticas en la Universidad del Valle y cuál es el modelo Didáctico que usan los profesores encargados de este proceso, además este trabajo tiene como centro un concepto matemático específico, es el concepto de derivada, dado su papel fundamental al momento de implementar la visualización, por su amplio contenido visual y cuenta con muchas herramientas (una de ellas es ver la derivada como un cambio y a provechar la

representación gráfica de la derivada de una función mediante herramientas tecnológicas que muestren dicho cambio) al momento de llevarlo al aula.

### **1.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

El estudio de procesos de visualización es un tema central en la agenda de muchos investigadores en el campo de la Didáctica de las Matemáticas; en particular, varios autores se han preocupado por indagar sobre la relación y contribución de la visualización matemática en el desarrollo del pensamiento matemático. De acuerdo con Hitt (2005) la visualización matemática “tiene que ver con procesos de transformaciones mentales y producciones en el papel, la pizarra, o en la computadora, y son generados por una lectura de enunciados matemáticos o interpretaciones de gráficas, promoviendo una interacción ente representaciones, para una mejor comprensión de conceptos matemáticos en juego.” (Pág. 22), particularmente se busca en la Visualización Matemática el enfoque desde la Didáctica misma, para concebir la Visualización Didáctica como un proceso y resultado de representación de los objetos matemáticos escolares con propósitos didácticos, esto se ve caracterizado e implementado a través de las herramientas tecnológicas donde se permite realizar múltiples representaciones de un objeto o proceso y percibir y deducir propiedades del objeto a través de la manipulación y la observación concreta de sus distintas representaciones, hacen posible y facilitan este tipo de visualización (Bedoya, 2002).

Los procesos de visualización son particularmente claves para la comprensión de muchos conceptos y procesos matemáticos que por su naturaleza abstracta presentan importantes dificultades y obstáculos para su aprendizaje y enseñanza; tal es el caso de los conceptos fundamentales del Cálculo como el de derivada. Al iniciar una revisión de la literatura relacionada con el tema, se encuentra que son numerosas las propuestas didácticas que insisten en la opción de provechar el “contenido visual” para la enseñanza de este importante concepto, por ejemplo Guzmán (1996, Pág. 216), propone presentar la función derivada a partir de su representación visual la cual se indica en la Figura 2.

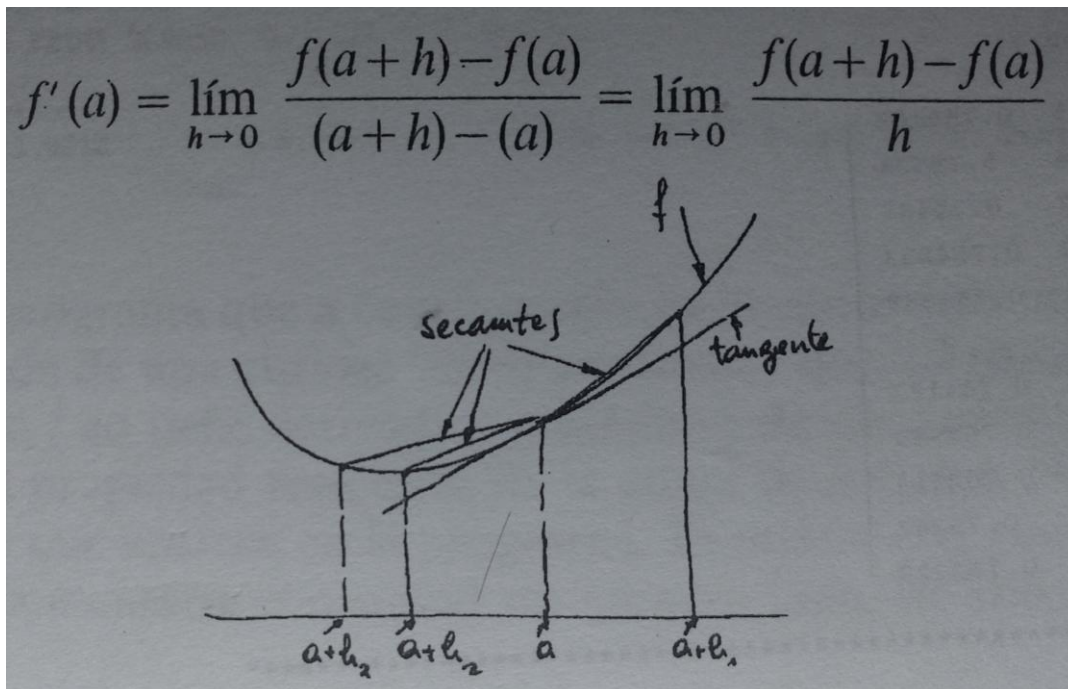


Figura 2 Interpretación gráfica de las rectas secantes de Guzmán (1996)

En la Figura. 2 se puede observar cómo a partir de la imagen visual, Guzmán presenta la derivada a partir de rectas secantes que mediante un proceso infinito (límite) se convierte en tangente, siendo esta en si la derivada. Lo que pretende el autor con este tipo de ejemplo es resaltar que con una visualización adecuada el estudiante se puede ayudar para una mejor comprensión del concepto que se trabaja. En otro ejemplo del mismo autor presentado en la Figura. 3, se puede observar cómo introduce la derivada de la función inversa a partir de su imagen, sin afectar el rigor teórico de la misma (Pág. 223):

$$(f \circ g)'(a) = 0 = f'(g(a))g'(a)$$

La propiedad anterior nos proporciona de una forma sencilla la derivada de la función inversa. Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en  $\mathbb{R}$  y tiene inversa  $g = f^{-1}$ , entonces  $f \circ g = i$ , siendo  $i$  la función identidad  $i(x) = x$ , y así tenemos, usando la regla de la cadena,  $f'(g(a))g'(a) = 1$ . Por tanto, si  $f'(g(a)) \neq 0$ , resulta

$$(f^{-1})'(a) = g'(a) = 1/f'(g(a)) = 1/f'(f^{-1}(a))$$

Esta igualdad tiene una representación visual interesante que se pone de manifiesto como sigue. Observa primero en la siguiente figura que si dos rectas son simétricas respecto de la bisectriz  $y = x$  entonces sus pendientes son inversas la una de la otra.

Figura 3 Propuesta de Guzmán para comprender mejor la derivada de las funciones inversas Guzmán (1996)

El autor se apoya luego en representaciones gráficas o geométricas para intentar hacer más accesible las relaciones y significados de la derivada de la función inversa (Pág. 224) como se puede ver en las figuras 4 y 5.

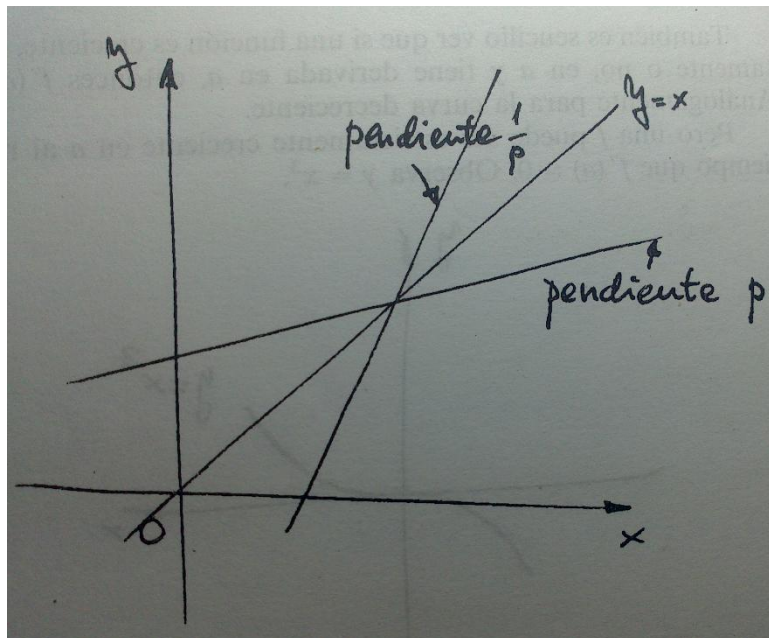


Figura 4 Representación visual del problema de la derivada de la función identidad inversa propuesta por Guzmán (1996)

En la siguiente figura observa que las rectas  $s$  y  $s^*$  son simétricas respecto de la bisectriz  $y = x$  y, por tanto, podemos aplicar la anterior observación.

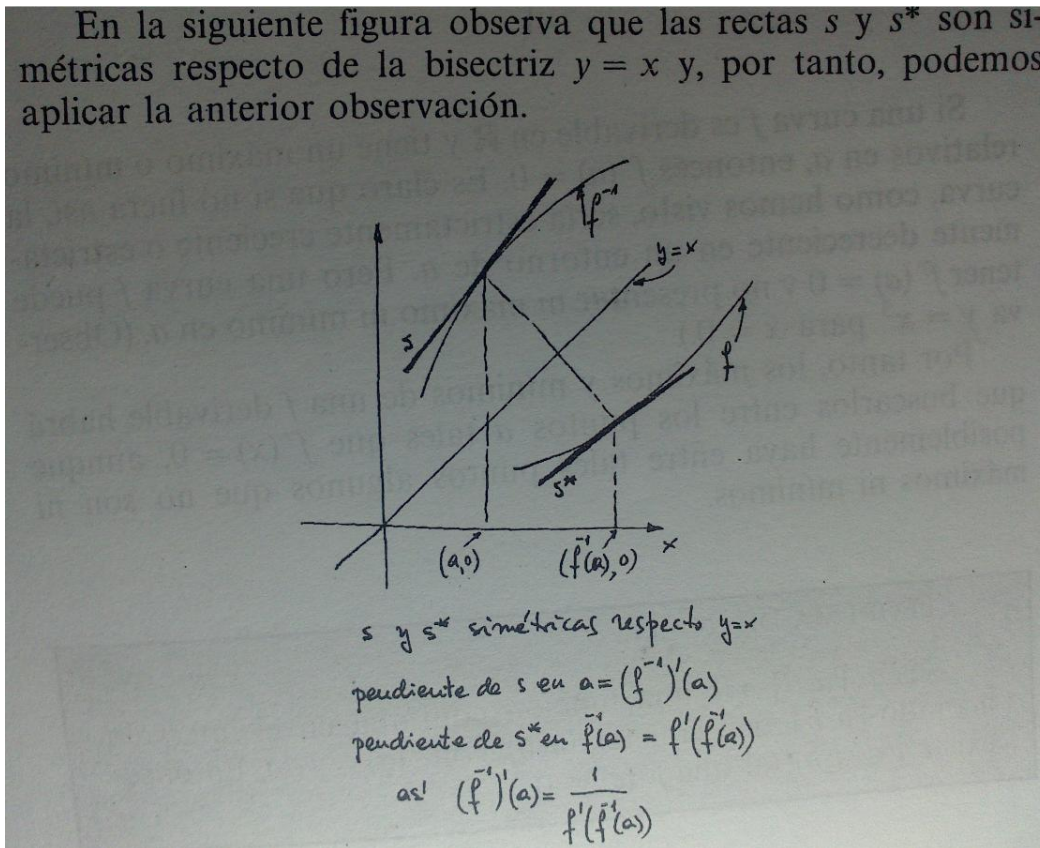


Figura 5 Representación visual del problema de la derivada de dos funciones simétricas a la identidad propuesta por Guzmán (1996)

De las figuras anteriores se puede observar de forma intuitiva lo que la definición de derivada de función inversa representa, así como geoméricamente se explicita de forma más amplia. Pero con los anteriores ejemplos se pueden evidenciar algunas ventajas (razonamiento basado en lo visual y no un proceso repetitivo) de lo visual que tienen las matemáticas, además de los estudiantes, los docentes le otorgan poca importancia al uso de las representaciones visuales para apoyarse a resolver algún tipo de problema, como lo muestra el siguiente ejemplo en Hitt (2005, Pág. 95) Figura 6, se hacen una pregunta de Cálculo a un profesor que coincidentalmente había escrito un libro de Cálculo.

$f'(-a) = (f(-a))' = (-f'(a)) = -f'(a)$  Es la respuesta del profesor a la siguiente pregunta:



“Dado que  $f$  es una función diferenciable tal que cumple que  $f(-x) = -f(x)$ . Entonces, para cualquier elemento  $a$  dado:  
 A)  $f'(-a) = -f'(a)$   
 B)  $f'(-a) = f'(a)$   
 C)  $f'(-a) = -f'(a)$   
 D) Ninguna de las anteriores”

Figura 6 Pregunta de cálculo hecha a un profesor, tiene como objetivo probar el no uso de lo visual por parte del profesor. Hitt (2005)

Hitt muestra a través de un contra ejemplo desde lo geométrico que el profesor que ha incurrido en un error (Pág.96), el cual se muestra en la Figura 7

Visualización y resolución del problema		
Sistema algebraico de representaciones	Idea intuitiva	Sistema geométrico de representaciones
<p>“Dado que <math>f</math> es una función diferenciable tal que cumple que <math>f(-x) = -f(x)</math>. Entonces, para cualquier elemento <math>a</math> dado:            A) <math>f'(-a) = -f'(a)</math>            B) <math>f'(-a) = f'(a)</math>            C) <math>f'(-a) = -f'(a)</math>            D) Ninguna de las anteriores”</p> <p><b>Argumentos:</b>  <math>f'(-a) = (f(-a))' = (-f'(a)) = -f'(a)</math></p> <p><b>Contra-ejemplo:</b>  <math>f(x) = x^3</math>. Entonces, <math>f'(-1) = f'(1)</math></p> <p><b>Nuevos argumentos:</b>  <math display="block">f'(-a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-a+h) - f(-a)}{h}</math> <math display="block">= \lim_{h \rightarrow 0} [-1] \frac{f(a-h) - f(a)}{h}</math> <math display="block">= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+(-h)) - f(a)}{(-h)} = f'(a)</math></p>	<p>Construcción de una gráfica de una función y sus tangentes en dos puntos simétricos <math>a</math> y <math>-a</math></p> <p>“SIGNO DE ADVERTENCIA”</p>	

Figura 7 Visualización y resolución de la pregunta hecha al profesor

En la Figura 7 el autor no está dudando del conocimiento del profesor pero se muestra que si el profesor hubiera tenido un apoyo visual del problema no se hubiera equivocado.

Los ejemplos anteriores son para resaltar el papel de la visualización de las matemáticas para dar soluciones a problemas que se plantean en el aula de clase y para generar en los estudiantes una mejor comprensión de los conceptos con una adecuada visualización, y así darle una mayor importancia a lo visual y no tanto a lo algebraico para generar un comprensión de los conceptos.

Es por esto que como futuros profesores de matemáticas es de interés identificar el papel de la Visualización Matemática vista desde la perspectiva Didáctica en la formación inicial

de profesores de matemáticas adscritos al programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle, específicamente en los conceptos fundamentales del Cálculo que son una base fundamental en la formación de profesores de matemáticas y además un requisito fundamental en los cursos avanzados de matemáticas que tienen que ver con estos estudiantes. De los conceptos fundamentales del Cálculo este trabajo se centra en la derivada y las nociones que estructuran este concepto. Por lo tanto el trabajo intenta responder a la siguiente pregunta:

**¿Cuál es el papel que se le asigna a la Visualización Didáctica y mediante qué modelo Didáctico se aborda en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la derivada en el curso de Cálculo I que se ofrece a los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle?**

## **1.4. OBJETIVOS**

### **1.4.1. Objetivo general**

Describir el papel que se le asigna a la Visualización Didáctica y el modelo didáctico que se aborda en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la derivada en el curso de Cálculo I, ofrecidos a los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas Licenciatura en Matemáticas y Física y de la Universidad del Valle

### **1.4.2. Objetivos específicos**

- Identificar el papel de la Visualización en la enseñanza y aprendizaje de nociones que estructuran el concepto de derivada mediante una sistematización de experiencias realizada a los estudiantes del Área de Educación Matemática que se encuentran en el curso de Cálculo I de la Universidad del Valle.
- Identificar la manera en que se aborda la Visualización Didáctica del concepto de derivada en el texto guía (notas de Cálculo) de la Universidad del Valle, a través de una rejilla diseñada a partir del Análisis Didáctico.
- Caracterizar el Modelo Didáctico entorno a la Visualización de los docentes de Cálculo I en el concepto de derivada en los cursos dirigidos a futuros Licenciados del Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle.

## CAPÍTULO 2: MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo se presentarán las diferentes bases conceptuales desde las cuales se aborda este trabajo de investigación y en específico lo relacionado con la fundamentación y descripción del problema a abordar.

Este trabajo centra el interés en identificar el papel de la Visualización Didáctica y el modelo Didáctico de enseñanza y aprendizaje de la derivada en los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Física y Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle, con lo anterior se puede decir que el sujeto de estudio principal serán los Futuros Profesores de Matemática, es por esto que se hace una revisión de investigaciones en Didáctica de las Matemáticas encontrando que el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico –PNA– tiene un amplio número de investigaciones relacionadas con la formación de profesores de Matemáticas, es aquí donde los Organizadores de Currículo y el AD empiezan ampliar su desarrollo en busca de una mejor formación de profesores, estos dos se ampliarán a continuación. Además se hará una breve reseña de lo que se entiende por visualización matemática y visualización didáctica:

- Didáctica de la Matemática y Formación de Profesores, análisis didáctico (Bedoya, 2002)
- Análisis Didáctico (AD): Trabajado en (Bedoya, 2011), (Rico y otros, 2013)
- Visualización Matemática y Visualización Didáctica (Hitt, 2005); (Bedoya, 2002)

### **2.1. DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS Y FORMACIÓN DE PROFESORES: ANÁLISIS DIDÁCTICO**

Desde hace más de 30 años el grupo PNA ha hecho investigaciones y reflexiones teóricas acerca del Currículo, esto se ha sostenido empírica y tácitamente en la adecuación de unidades para el mejoramiento del aprendizaje en la comunidad de granada en España. Por otra parte el grupo ha hecho énfasis principal y sostiene una metodología basada en el AD y en el Conocimiento Didáctico (CD). *“La línea de investigación que el grupo PNA desarrolla en Didáctica de las Matemáticas versa sobre los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y utilización de conceptos numéricos, algebraicos y analíticos”* (Bedoya, 2002, Pág. 2).

Uno de los diversos componentes que investiga el PNA es el campo referido a la formación de profesores de matemáticas el cual es un hilo fundamental en la presente investigación, se entiende el campo de la formación de profesores desde Bedoya (2002) en donde se concibe al profesor de matemáticas como un profesional formado, reflexivo y autónomo, con especial dominio en las matemáticas escolares, de su didáctica y de su pedagogía, para lo cual se necesita un plan de formación inicial y permanente que le aporte los conocimientos, saberes y competencias necesarias sobre los siguientes contenidos: fundamentos teóricos, conceptuales y metodológicos del currículo, nociones generales y fundamentales de Didáctica de la Matemática, Conocimiento Didáctico y principios organizadores y analíticos

Además a partir de los Organizadores del Currículo, entendiendo por estos como los que concibe a aquellos conocimientos que se adoptan como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas, se habla así de organizadores del currículo (Rico, 1997, Pág. 7). El PNA propone un mejor diseño, planificación y desarrollo de unidades didácticas, es así que se consideran “cuatro organizadores fundamentales de contenido” -hechos, conceptos, procedimientos y principios- y cinco categorías relacionales, que pueden presentarse entre los distintos elementos de estos organizadores de contenidos, y que son pertinentes con las decisiones y prácticas e instrucciones, es decir, para la organización y secuenciación de la enseñanza: relaciones de requisitos de aprendizaje, relaciones de procedimientos, relaciones de organización y coordinación, relaciones de principios y relaciones de atributos (Bedoya, 2002, Pág. 4).

Así, es pertinente especificar y relatar los organizadores adscritos directamente a la visualización y su concepción en el trabajo:

Se va a determinar la Visualización Didáctica en el marco conceptual desde tres organizadores del currículo en específico, los cuales son:

- Diversidad de representaciones y modelización
- Diversidad de materiales y recursos para la enseñanza
- Errores y dificultades y problemas y obstáculos en el aprendizaje

Cada uno de estos definidos y relacionados con la visualización de la siguiente forma:

**-Diversidad de representaciones y modelización:** se relaciona la diversidad de representaciones y modelización con la visualización ya que es este organizador el que hace referencia a dominar un concepto matemático a través de sus representaciones, al significado de cada una de estas y a la posible traducción entre ellas (Castro & Castro, 1997).

**-Diversidad de materiales y recursos para la enseñanza:** Puede decirse que los materiales y recursos están estrechamente ligados a la visualización, debido en gran parte a la importancia que estos tienen con la concepción del conocimiento, ya que la diversidad de representaciones de cualquier tipo genera la visualización, los materiales y recursos permiten la transformación del concepto. Se entiende por recurso cualquier material, no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, que el profesor decide incorporar en sus enseñanzas y por material los que específicamente han sido diseñados con fines educativos (Coriat, 1997, Pág. 158-159)

**-Errores, dificultades, problemas y obstáculos en el aprendizaje:** a través de la visualización se hace más factible que los errores de los estudiantes (vistos como organizador) sean corregidos ya que la diversidad de representaciones y la interacción que estos estudiantes tienen acerca de los conceptos matemáticos surgen de un concepto previo (Socas, 1997).

Otra unidad a destacar, es la conocida acerca del AD como metodología de investigación, la cual se ampliará a continuación como base fundamental en la concepción del trabajo:

## **2.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

Teniendo en cuenta que la investigación es de carácter didáctico y a partir de los organizadores del currículo anteriormente mencionados, se toma como campo disciplinar de investigación el adscrito al AD de uso común en Didáctica de la Matemática Bedoya (2002); Rico (2013). El AD ha alcanzado relevancia en la disciplina ya que aporta un modo específico de abordar cuestiones didácticas primordiales, así se entiende por Análisis Didáctico como el que expresa un conjunto de conceptos y métodos que alcanzan un uso generalizado, manejados por un grupo de investigación constituidos en el área de Educación Matemática (Rico y Fernández, 2013, Pág. 1).

A través de las diversas concepciones el análisis se considera como núcleo del método filosófico, de la diversidad que se tiene acerca de la noción de análisis es que se ven sus

diversas concepciones. Así se introducen dos nuevas concepciones vinculadas con el AD y que las preceden, estas son:

**-Análisis Conceptual:** Es una herramienta metodológica que permite controlar la complejidad semántica, seleccionar las opciones idóneas y disponer del aparato teórico adecuado para una investigación educativa (Rico y Fernández, 2013, Pág. 7)

**-Análisis de Contenido:** Es uno de los métodos más extendidos para el procesamiento y revisión de las dimensiones cuantitativas (médium) y cualitativas (mediador) de los contenidos de la comunicación. (Rico, Fernández, 2013. Pág. 7)

El trabajo se enmarcara estructuralmente en el Análisis de Contenido, el cual se utilizara en el contexto de la Educación Matemática, teniendo claridad de que el Análisis Conceptual sustenta un primer nivel del Análisis de Contenido y el Análisis de Contenido es una extensión del trabajo del primero. Este se entenderá como:

Un método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en un texto (discurso del profesor, textos escolares y producciones escolares para la producción de sesgos). (Rico y Fernández, 2013, Pág. 11)

Al tomar como referencia el Análisis de Contenido de un documento escolar se encuentran las siguientes categorías:

- Conceptual: considera el momento histórico y el marco poblacional
- Formal y estructural: abarca los conceptos, definiciones y procedimientos
- Representacional: comprende las notaciones gráficas y simbólicas
- Fenomenológica: aborda los fenómenos que dan origen a los conceptos

Se contempló el AD como método de investigación en este trabajo de grado donde se utilizaron las técnicas del Análisis Conceptual y del Análisis de Contenido. Se abordó el AD como un procedimiento cíclico determinado por cinco componentes: Análisis Conceptual, Análisis del Contenido Matemático Escolar, Análisis Cognitivo, Análisis de Instrucción y Análisis Evaluativo. A partir de las categorías de AD y Análisis de Contenido, se consideran nuevas categorías que son:

**Análisis Cognitivo:** Es el que se ajusta a una concepción escrutadora o regresiva, ya que trata de organizar el para qué y hasta dónde aprender determinados conocimientos sobre un tópico. El Análisis Cognitivo se compone de unas categorías denominadas análisis-síntesis,

las cuales son de tres tipos: la primera hace referencia a las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares, la segunda se centra en las dificultades del aprendizaje y la tercera se centra hacia las demandas cognitivas.

**Análisis de Instrucción:** Supone la transformación y adaptaciones de las consideraciones realizadas en los dos análisis anteriores (Análisis de Contenido y Análisis Conceptual) a las condiciones que se dan en un marco, para su interpretación. Las categorías de este son de tres tipos; la primera considera las funciones y tipos de tareas junto con su secuenciación, en segundo lugar los materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas, y en tercer lugar como faceta interpretativa, la organización y gestión del trabajo en el aula.

**Análisis Evaluativo:** Es el que representa las cuestiones hacia donde se orientan los resultados, maneja dos tipos de categorías: en primer lugar los criterios e instrumentos para diagnosticar, orientar y valorar los aprendizajes, en segundo lugar hacia la interpretación de los rendimientos y de los logros alcanzados.

De acuerdo al método de AD que se ha presentado se ve la combinación entre el Análisis Conceptual y de Contenido relativo a textos escolares y textos matemáticos escolares, el cual utiliza un sistema de categorías basado en la definición del currículo en matemáticas.

Con las categorías del AD no solo se analizan textos, también se contribuye a su elaboración. Las categorías ofrecen una guía precisa y detallada de los aspectos en considerar para redactar propuestas curriculares según distintos tópicos, proporcionan criterios para estructurar los contenidos, la cognición, la instrucción y la evaluación de un tema en específico de las matemáticas escolares. (Rico, 2013, Pág. 20)

También se puede observar cómo cada una de las fases del AD y las categorías surgen como propuesta para la formación inicial de profesores de matemáticas, además de influir en la transformación de las nociones teóricas del currículo de matemáticas y a la posible articulación y planificación de un programa de matemáticas. A partir de lo anteriormente mencionado se implementó el Análisis de Contenido de la derivada como un referencial para la presente investigación.

### **2.2.1. Contextos curriculares**

Con el interés de realizar un análisis curricular es indispensable conocer los contextos de concreción del currículo para así tener una idea más amplia sobre cómo está presente la

Visualización Didáctica en la formación de profesores de secundaria:

Contexto curricular institucional: Revisión de los programas de los cursos del Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle, los cuales son la carta de navegación de los mismos y están diseñados pensando en unos contenidos, metodologías, objetivos y formas de evaluación. El programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemática tiene un total de créditos de 170 además tiene 5 líneas de formación, cada una respaldada por una línea de investigación: Línea de Formación en Matemáticas; Didáctica de las Matemáticas; Historia y Epistemología de las Matemáticas; Comunicación, Lenguaje y Razonamiento Matemático; Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación en la Educación Matemática. El programa de Licenciatura en Matemáticas y Física tiene un total de 171 créditos y cuenta con las misma Líneas de Formación además de la Línea de Formación en Física.

Como el interés de este trabajo se centra particularmente en el curso de Cálculo I esta contextualización se hace sobre los cursos anteriores a este.

En el caso del programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas los estudiantes regularmente en el cuarto semestre de su programa matriculan Cálculo I, estos estudiantes deben cursar unas materias que hacen parte de unas líneas de formación, en el caso de la línea de formación en matemáticas los estudiantes cursan: Elementos de Lógica Matemática, Números y Operaciones, Iniciación al Álgebra, Geometría I, Teoría de Conjuntos, Geometría II y en cuarto semestre que es donde tiene matriculado el curso de Cálculo I también tienen matriculado Álgebra Lineal. En este programa académico el curso de Cálculo I tiene como único prerrequisito aprobar el curso de Números y Operaciones el cual se encuentra en primer semestre y tiene como objetivos<sup>3</sup>:

“- Adquirir competencias conceptuales, procedimentales, de razonamiento matemático, de comunicación y resolución de problemas a través del estudio de los sistemas numéricos, sus definiciones, operaciones, relaciones e interrelaciones entre estos sistemas.

- Analizar la construcción formal y didáctica de los distintos sistemas numéricos a partir de la coordinación de sus sistemas de representación.

---

<sup>3</sup> Estos objetivos son tomados del programa del curso de Números y operaciones 405049M (3469) Febrero– Junio de 2013



- Reconocer las características del lenguaje aritmético y los problemas propios de su construcción.

- Reconocer la importancia de estos conceptos y procedimientos numéricos en la formación de nuevos objetos matemáticos de la geometría, el álgebra, el Cálculo y la estadística.”

Los contenidos abordados en este curso no son en su mayoría nuevos para los estudiantes, pero se espera que a nivel universitario haya una mayor profundidad en el estudio de los conjuntos numéricos, propiedades, relaciones, relaciones y estructuras, estos contenidos son bases para iniciar en el Cálculo. A pesar de que los demás cursos de la línea de formación en matemáticas no sean prerrequisitos; estos pueden potenciar un mejor desempeño en el curso de Cálculo I ya que pueden tener un mejor manejo del álgebra y geometría además de un inicio al rigor de la demostración en los curso de Teoría de Conjuntos y Geometría. Las otras líneas de formación tiene como interés en potenciar al estudiante en el estudio de la Educación Matemática y Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica, conocer algunos inicios del desarrollo en matemáticas y ver las matemáticas como una construcción humana y la línea de Razonamiento y Lenguaje.

En el programa de Licenciatura en Matemáticas y Física los estudiantes matriculan Cálculo I en segundo semestre, estos estudiantes deben aprobar unas materias que hacen parte de unas líneas de formación, en el caso de la línea de formación en matemáticas los estudiantes deben cursar: Matemáticas Fundamentales y Fundamentos de Geometría y en segundo semestre están matriculados en Lógica y Teoría de Conjuntos, Geometría Analítica y Vectorial y Cálculo I, de las materias vistas en primer semestre, Matemática Fundamental es la única que es prerrequisito para matricular Cálculo I, además tiene como objetivos<sup>4</sup>:

“- Establecer un puente teórico entre la formación matemática adquirida en la formación básica y media y la formación matemática universitaria.

- Cimentar teóricamente los conceptos fundamentales requeridos para afrontar los cursos de matemáticas posteriores.

- Promover el estudio formal de las matemáticas sin olvidar que ellas son el resultado del razonamiento humano en el marco de contextos socioculturales propios.”

Este curso se centra en el trabajo con funciones lineal, cuadrática, logarítmica, entre otras estudiando su representación analítica y gráfica, además de abordar expresiones algebraicas,

---

<sup>4</sup> Estos objetivos son tomados del programa del curso de Matemáticas Fundamentales 405036M Febrero – Junio 2013

productos notables, factorización, soluciones de ecuaciones e inecuaciones y un inicio a la lógica y métodos de demostración.

El curso de Fundamentos de Geometría no es un prerrequisito pero puede aportar al curso de Cálculo I ya que es un acercamiento a la demostración ayuda al rigor en la solución de problemas sumado a eso que los estudiantes tienen un mejor manejo de las figuras geométricas y propiedades.

Los cursos de las otras líneas de formación son casi iguales en ambas licenciaturas durante los primeros semestres.

**- Contexto curricular del curso:** Programa del curso de Cálculo I ofrecido a los estudiantes de licenciatura y más específicamente de la estructura conceptual de la derivada.

El programa del curso de Cálculo I (111050M) cuenta con 4 créditos y tiene un tiempo de dedicación en el aula de clase de 5 horas por semana el programa está distribuido de la siguiente manera:

Objetivos<sup>5</sup>:

- Capacitar al estudiante para manejar con destreza las técnicas propias del cálculo diferencial y sus aplicaciones a la resolución de problemas.
- Ampliar y mejorar la capacidad para plantear, manejar e interpretar argumentos matemáticos, contribuyendo así al desarrollo de la disciplina mental y de trabajo de los estudiantes.

Después de mencionar los objetivos del curso se muestran los contenidos de este distribuidos en tres unidades cada una con un tiempo determinado de duración:

**Unidad 1: Funciones y gráficas (6 semanas)**

**Unidad 2: Derivada de una función (6 semanas)**

**Unidad 3: Aplicaciones de la Derivada (3 semanas)**

Cada una de estas unidades tiene unos temas específicos que se van a desarrollando en el transcurso de la unidad, por el interés se muestra únicamente la unidad dos y tres.

**Unidad 2: Derivada de una función (6 semanas)**

Definición de límite de una función. Límites laterales. Teoremas sobre límites. Límites infinitos y al infinito. Límites infinitos. Continuidad y discontinuidad de funciones.

---

<sup>5</sup> Los objetivos son tomados del programa del curso de Cálculo I 111050M

Álgebra de funciones continuas. Teorema de Bolzano y del valor intermedio. Definición de la velocidad y tasas de cambio. Derivada. Interpretación geométrica de la derivada. Reglas de derivación. Regla de la cadena. Derivación implícita. Derivación de función inversa. Derivación de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Derivadas de orden superior. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio.

### **Unidad 3: Aplicaciones de la Derivada (3 semanas)**

Cálculo de derivadas. Funciones crecientes y decrecientes. Máximos y mínimos relativos y absolutos. Criterio de la primera derivada. Concavidad y puntos de inflexión. Criterio de segunda derivada. Dibujo de gráficas. Razones relacionadas. Problemas de máximos y mínimos. Incrementos diferenciales y aproximación lineal.

Se puede notar que cada unidad contiene un cúmulo de contenidos que se deben abordar para el desarrollo del curso, después de los contenidos viene una metodología de trabajo que se centra en la distribución de trabajo entre el tallerista y el profesor (clase magistral) del curso, el tallerista hace un seguimiento más de cerca al estudiante y tiene como objetivo trabajar y discutir problemas previamente asignados, el profesor en su clase magistral desarrolla los contenidos del curso.

En caso de no contar con tallerista el profesor asume los dos roles, además cuentan con un criterio de evaluación el cual es de la siguiente manera:

#### **Evaluación. Porcentaje**

Primer parcial (unidad 1) 25%

Opcional primer parcial

Segundo parcial (aprobatorio) (unidades 2 y 3) 50%

Opcional segundo parcial

Quices y tareas quincenalmente 25%

Habilitación 100%

El curso de Cálculo I en la Universidad del Valle cuenta con un texto guía “Notas de clase de Cálculo I, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle”, además se sugiere una bibliografía para complementar estudio.

Este curso puede ser matriculado por estudiantes de la Facultad de Ingeniería y del Instituto de Educación y Pedagogía, lo que indica que es ofrecido a una gran variedad de programas académicos, el programa es diseñado por los profesores del Departamento de Matemáticas a cargo de los cursos de Cálculo I.

**- Documentos oficiales currículo de enseñanza Universidad del Valle**

La resolución 044 del 12 de abril del 2002 por lo cual se establece el currículo del programa de Licenciatura en Matemáticas y Física y la resolución 046 del 12 de abril por la cual se establece el currículo del programa de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle establece, que el curso de Cálculo I está dentro de la Línea de Formación de Matemáticas.

Los temas de Cálculo I, constituyen una introducción a las funciones y gráficas como temas fundamentales, además de abarcar la derivada (límites y continuidad) y la aplicación de la derivada constituidos los tres como unidad en el programa que ofrece el Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle, el programa ofrece el curso establecido de la siguiente manera:

Presentación inicial del curso de Cálculo I

<b>Básico</b>	<b>Intermedio</b>	<b>Avanzado</b>
<b>Funciones y gráficas</b>	<b>Derivada de una función</b>	<b>Aplicación De la Derivada</b>
Establecidos en una duración de seis semanas	A partir de lo visto inicialmente la duración de esta unidad es de seis semanas	Como última unidad tiene una duración de tres semanas
Funciones y sus gráficas	Definición de límite de una función	<b>Cálculo de Derivadas</b>
Operaciones con funciones	Limites laterales	Funciones crecientes y decrecientes
Composición de funciones	Limites infinitos y al infinito	Máximos y mínimos (relativos y absolutos)
Funciones trigonométricas inversas	Continuidad y discontinuidad de funciones	<b>Criterio de la primera Derivada</b>
Función exponencial y logarítmica	Álgebra de funciones continuas	Concavidad y puntos de inflexión
	Teorema de Bolzano y teorema del valor medio	<b>Criterio de la segunda Derivada</b>
	Definición de velocidad y tasas de cambio	
	- <b>Derivada</b> - <b>Interpretación geométrica de la Derivada</b> <b>Reglas de la derivación</b>	
	<b>Regla de la cadena</b>	

	<b>Derivación implícita</b> <b>Derivación de función inversa</b> <b>Derivación de funciones exponencial y logarítmica</b> <b>Derivadas de orden superior</b> <b>Teorema de rolle y del valor medio</b>	
--	--	--

*Tabla 1 Contenidos del programa del curso de Cálculo I de la Universidad del Valle*

## 2.3. ANÁLISIS DIDÁCTICO DE CONTENIDO

### 2.3.1. Presentación de la derivada

Antes de mostrar los distintos análisis que ajustan el análisis didáctico de contenido, se realizará una presentación de lo que es la Derivada, tomada del libro *Introducción al cálculo y al análisis matemático de Courant & Fritz (1999)* en donde se representa la derivada a partir de tres dimensiones, a saber:

- **La derivada como pendiente**

La noción intuitiva de derivada es referida a partir de la tangente de una curva suave  $y = f(x)$  en un punto  $P$  de coordenadas  $x$  e  $y$ . Donde la idea intuitiva de encontrar tangentes surge a partir de problemas de optimización evidenciados en la mitad del siglo XIX, específicamente con problemas de máximos y mínimos. Gráficamente un máximo corresponde a una cúspide más alta que todos los demás puntos próximos, mientras que un mínimo corresponde al fondo de un valle situado por debajo de todos los puntos inmediatos. El concepto de tangente a una curva es el método utilizado para caracterizar los puntos máximos o mínimos de dicha curva, si se supone que la curva no tiene puntos angulosos o otras singularidades y que además todo punto tiene dirección definida dada por una recta tangente. En los puntos máximos y mínimos dicha tangente debe ser paralela al eje de las  $x$ , puesto que la curva ascendería o descendería en dichos puntos.

- **La derivada como límite**

La pendiente de una curva  $y = f(x)$  en un punto  $P(x, y)$  no puede calcularse de manera exclusiva a la curva en  $P$ , es necesario recurrir a paso al límite; el cual es el método base para la concepción del Cálculo diferencial

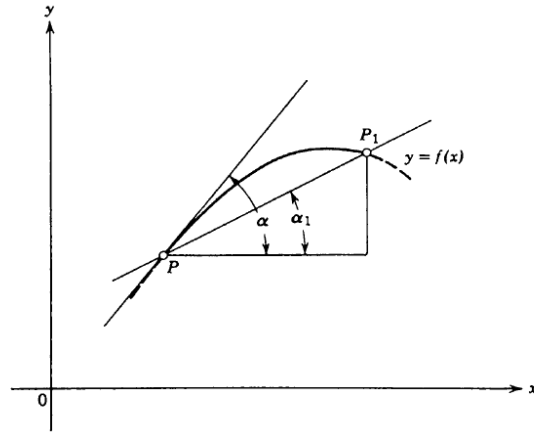


Figura 8 Secante y tangente (tomada de Courant, R., & John, F. (1976). *Introducción al Cálculo y al análisis matemático*. Limusa. Pág 178)

Se define la tangente a la curva dada  $y = f(x)$ , en uno de sus puntos  $P$ , a partir de los siguientes procesos de límites geométricos (figura 8). Considérese un segundo punto  $P_1$  sobre la curva cercano a  $P$ , por los dos puntos  $P$  y  $P_1$  se traza una línea recta secante a la curva. Si ahora el punto  $P_1$  se mueve a lo largo de la curva hacia el punto  $P$ , entonces es de esperarse que la secante se aproxime a una posición límite la cual es independiente del lado del cual  $P_1$  tienda a  $P$ . Puesto que la curva está representada por una función de la forma  $y = f(x)$ , debe formularse el proceso de límite geométrico analíticamente con referencia a  $f(x)$ . Este proceso se denomina derivación de  $f(x)$  y es el siguiente:

Considérese al ángulo que una línea recta forma con el eje  $x$  como aquel según el cual el eje  $x$  positivo debe ser girado en la dirección positiva o en el sentido contrario de las manecillas del reloj de modo que quede por primera vez paralelo a la recta (este sería un ángulo  $\alpha$  en el intervalo  $0 \leq \alpha \leq \pi$ ). Sea  $\alpha_1$  el ángulo que la secante  $PP_1$  forma con el eje  $x$  positivo (ver figura 8) y  $\alpha$  el ángulo que la tangente forma con el eje  $x$  positivo. Entonces:

$$\lim_{P_1 \rightarrow P} \alpha_1 = \alpha$$

Si  $x, y$  y  $x_1, y_1$  son las coordenadas correspondientes de los puntos  $P$  y  $P_1$  respectivamente entonces encontramos analíticamente:

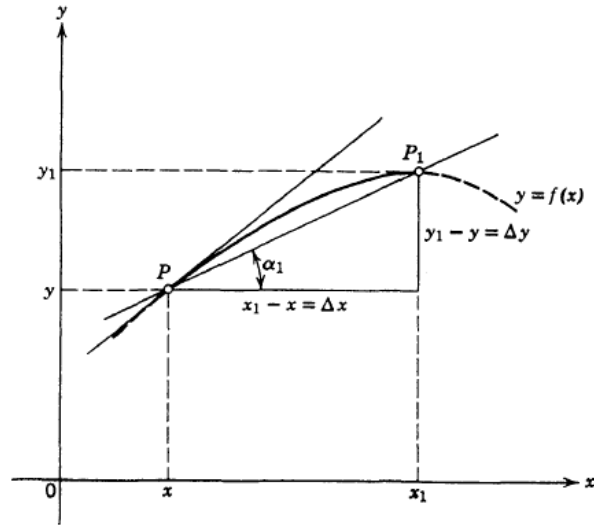


Figura 9 (tomado de Courant, R., & John, F. (1976). *Introducción al Cálculo y al análisis matemático*. Limusa.e Pág 179)

$$\tan \alpha_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Así el proceso del límite (donde se omite el caso de  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  de una tangente perpendicular) está representado por:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{x_1 \rightarrow x} \tan \alpha_1 = \tan \alpha$$

Donde la expresión:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se denomina cociente incremental de la función  $y = f(x)$ , y los símbolos  $\Delta y$  y  $\Delta x$  denotan las diferencias de la función  $y = f(x)$  y de la variable independiente  $x$ . (El símbolo  $\Delta$  es una abreviación para diferencia y no es un factor.) La tangente trigonométrica de  $\alpha$ , la pendiente de la curva, es por eso igual al límite al cual el cociente incremental de nuestra función tiende a  $x_1$  tiende a  $x$ . A este límite del cociente incremental se le denomina derivada.

#### - **La derivada como velocidad**

La necesidad de reemplazar el concepto intuitivo de velocidad o rapidez por una definición más formal conduce nuevamente al mismo proceso de límite que ya se ha denominado a través de la diferenciación. Al considerarse como ejemplo un punto que se mueve sobre una línea recta, el eje  $y$  dirigido, estando determinado por una sola coordenada  $y$ . Esta coordenada  $y$  es la distancia, con su signo adecuado, de nuestro punto móvil medida desde

un punto inicial fijo sobre la línea. El movimiento esta dado si se conoce  $y$  como función del tiempo  $t$ ;  $y = f(t)$ . Si esta función es una función lineal  $f(t) = ct + b$ , se habla entonces de un movimiento uniforme con velocidad  $c$ , y para cualquier par de valores distintos,  $t$  y  $t_1$ , puede obtenerse la velocidad dividiendo la distancia recorrida en un intervalo de tiempo por la longitud de dicho intervalo de tiempo:

$$c = \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}$$

La derivada es por tanto el cociente incremental de la función  $ct + b$ , donde el cociente de incrementos es independiente del par de partículas que se fijen, cuando el movimiento no es uniforme se considera el coeficiente de incrementos anterior el cual se denomina velocidad promedio al considerar el límite de este cociente incremental cuando  $t$  tiende a  $t_1$ , este límite se interpretara como la velocidad en un tiempo  $t$ . Asi se puede definir la velocidad como la razón instantánea de variación de la distancia con respecto al tiempo en el tiempo  $t$ , lo que es la derivada, así:

$$f'(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}$$

### 2.3.2. Contextualización histórica-epistemológica

Los antecedentes de la derivada se remontan explícitamente a partir de ocho momentos desde su concepción (Recalde, 2009). El primero se remonta a la instauración de la geometría analítica, donde fue esta la que transformó los problemas de cuadraturas en problemas de hallar el área bajo la curva. Descartes en su geometría, establece una clasificación de curvas a partir de su geometría analítica de la misma forma en la que aumenta la concepción de estas a través del universo de las denominadas curvas mecánicas que posteriormente se designarían como curvas trascendentes y que darían paso a las funciones denominadas con el mismo nombre. Además del surgimiento de nuevas curvas como las trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, etc., las cuales se construían a partir de tabla de valores y se definían recorriendo un punto continuo en el plano. Es así que a partir de Descartes el problema de las cuadraturas empieza a tener vistos de Cálculo.

El segundo momento involucra algunos métodos que surgieron para el Cálculo de áreas, Johannes Kepler fue uno de los eruditos que en su libro *Nova stereometria dolioorum* calculaba el volumen de los barriles de vinos a través de procesos infinitesimales, este



consideraba que los cuerpos sólidos estaban formados por una cantidad infinita de partes sólidas y además se basa en los preceptos del método exhaustivo de Arquímedes, también Cavalieri con su teoría de indivisibles y Pascal con un método igual (en lugar de sumar indivisibles, pascal toma coordenadas muy próximas entre sí, de modo que consideraba la suma de áreas, resguardándose en el principio de la homogeneidad y acercándose a un método infinitesimal) consideraba la sumas de áreas.

En el tercer y cuarto momento se involucran el problema de la recta tangente y el teorema del binomio, en el primero se involucran los problemas de cuadraturas y el trazado de tangentes que inicialmente se concebían separados mutuamente, solo a partir del siglo XVII se logra establecer la mutua dependencia con problemas que matemáticos como Descartes, Fermat y Roverbal resolvieron en ese siglo; en el cuarto momento se ve como para la cuadratura del círculo Isaac Newton utiliza la expansión del binomio  $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ , como una generalización del binomio  $(a + b)^2$ , el cual ya había sido estudiado por Blas Pascal. En el quinto momento se puede referenciar lo expuesto por Fermat con sus métodos para calcular máximos y mínimos, donde se puede destacar el primer proceso analítico para calcularlos, en este se puede ver como se produce el Cálculo de tangentes en un punto. El tratamiento de series es el considerado como el sexto momento ya que es mediante este que Wallis establece una teoría de sumas infinitas que hacen posible la cuadratura del círculo, su método se denomina inducción completa. La necesidad de establecer un sistema numérico y las exigencias de la descripción del movimiento proveniente de la física son los dos últimos momentos.

### **2.3.3. Análisis didáctico semiótico**

#### **Representaciones y modelos**

La noción de derivada y sus diferentes representaciones han sido estudiadas por diversos autores, descripción verbal, representaciones geométricas, aproximación a través del límite, representaciones a partir de las ayudas tecnológicas y las fórmulas son los modelos matemáticos más comunes que se usan para tratar de describir la noción conceptual de la derivada y la tasa de variación. Aunque cabe aclarar que los procesos de representación de una estructura a otra no es proceso sencillo de explicitar. Tall (1991) resalta que el estudiante destaca un modelo intuitivo de las variaciones como: distancia, velocidad, aceleración, entre

otros, lo cual genera en el estudiante una amplia idea de la derivada que hace más factible la concepción del concepto en la mente del estudiante (ideas internas) en las cuales se incluyen:

- Representaciones de acción establecidas meramente en experiencias humanas dándole sentido al cambio, la velocidad y la aceleración.
- Representaciones numéricas y simbólicas que pueden estar ligadas a programas de computadores que son de gran utilidad por su fácil manipulación tanto para el maestro como para el alumno.
- Representaciones de forma visual representada de manera un poco primitiva a través del lápiz o el papel o con ayuda de las nuevas tecnologías.
- Representaciones a través de la demostración de ámbito más formal.

La interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la tangente a la curva en un punto tiene un significado general y es utilizada para explicitar la diferenciación, además de también representar un sinnúmero de diversidad de fenómenos en física; como por ejemplo la tasa de variación relativa, así vemos que la velocidad de una partícula en movimiento se define por medio de la diferenciación, ya que es la intensidad de medida de variación de un desplazamiento con respecto al tiempo.

Con miras a establecer el análisis de contenido semiótico se establecerán una serie de preguntas que ayudarán en la concepción que de este se tenga, el análisis se concibe alrededor de la visualización matemática y la visualización didáctica (específicamente). La visualización matemática se percibe como un medio que tiene que ver con los diversos procesos de transformaciones mentales y las distintas elaboraciones tanto en papel, como en el tablero o en el ordenador, que es generada por la lectura de enunciados matemáticos o de gráficas, promoviendo una fuerte interacción entre la diversidad de representaciones generando una mejor comprensión del concepto matemático Hitt (2005).

Zimmermann & Cunningham (1991) consideran la visualización como la capacidad para representar materialmente e interpretar gráfica o pictóricamente conceptos y procedimientos matemáticos. Esta visualización la denominan visualización matemática. Estos autores consideran, también, que si se mejora la capacidad de visualización de los estudiantes se aumenta la intuición proporcionando una mayor capacidad de comprensión.

En este trabajo se considerará principalmente la propuesta sugerida por Bedoya (2002); la Visualización Didáctica: concebida como un proceso y resultado de representación de los

objetos matemáticos escolares con propósitos didácticos, aprovechando la diversidad de modernas tecnologías informáticas con sistemas de representación múltiple, sistema de Cálculo simbólico integrados y posibilidades dinámicas e interactivas (como las actuales calculadoras graficadoras y software de computadoras) permitiendo realizar diversas representaciones de un objeto o proceso matemático y percibir o deducir propiedades del objeto a través de la factible manipulación y observación concreta, ya que hacen posible y facilitan este tipo de visualización. La visualización didáctica mediante las nuevas tecnologías, permite hacer una aproximación experimental de algunos conceptos y procedimientos matemáticos escolares.

Por consiguiente se determinarán algunas preguntas que permitirán centrar el análisis de contenido semiótico:

- *¿Cuáles son las nociones básicas de la derivada que tiene un alto contenido de visualización?*
- *¿Se articulan las nociones básicas con el resto de contenido?*
- *¿Qué sistemas de representación se emplean en la derivada?*
- *¿Constituyen los sistemas de representación un contenido en sí mismo?*
- *¿Se hace expresa la relación entre los diferentes sistemas de representación de la derivada?*
- *¿Cuál es la relación entre los aspectos conceptuales de la derivada y los procedimentales en torno a la visualización?<sup>6</sup>*

Se pretende, inicialmente considerar las diferentes representaciones y los fenómenos ligados a la derivada y a la función derivada, es en el diagrama de la figura 10 donde se esquematizará, además se tratarán de ver las diversas concepciones y/o relaciones que existen entre las representaciones (analítica, numérica y gráfica) y los fenómenos asociados a la derivada y a la función derivada.

---

<sup>6</sup> Preguntas tomadas de trabajo de investigación no publicado del profesor Evelio Bedoya, de la Universidad del Valle.

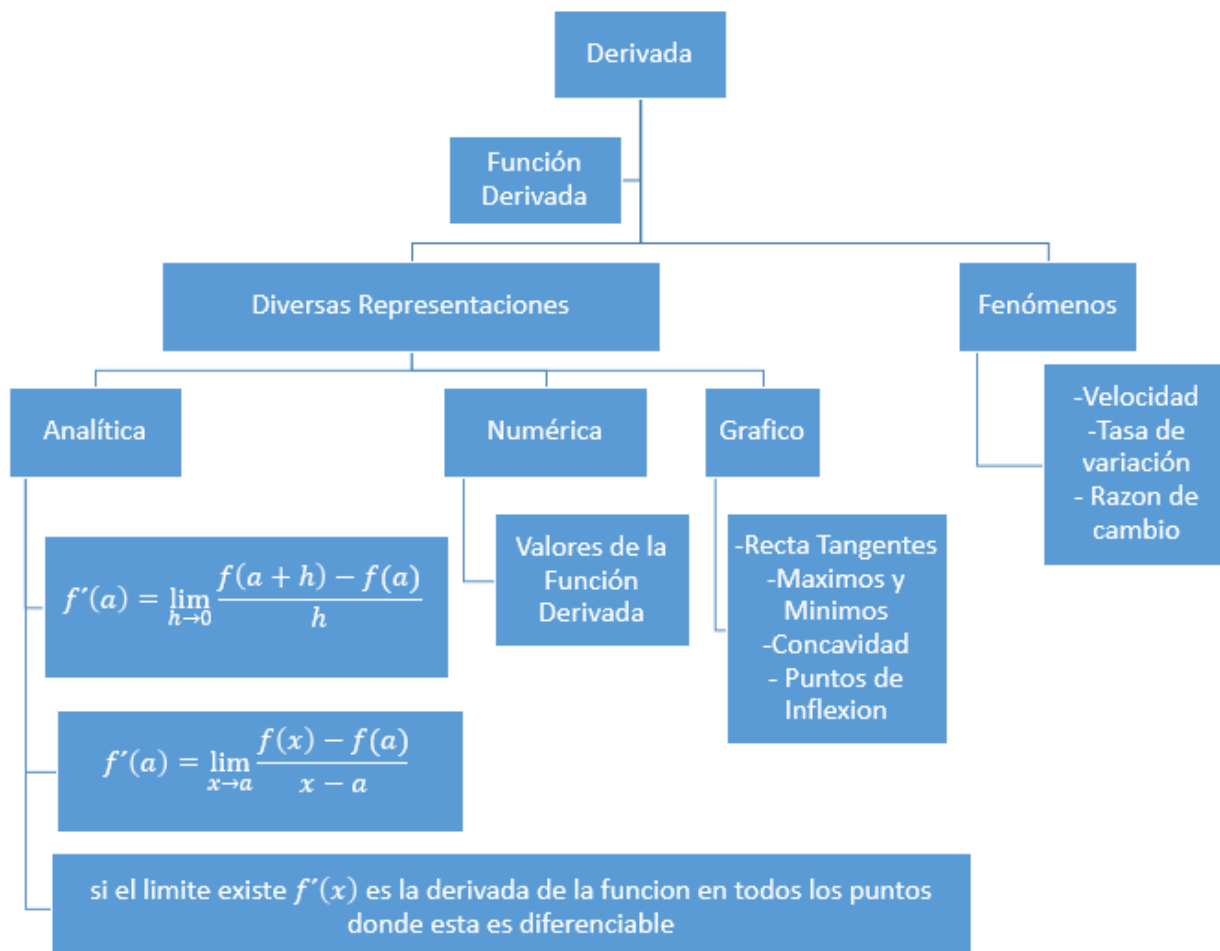


Figura 10 Esquema de la estructura de la derivada

**Nociones fundamentales del concepto de derivada en la visualización didáctica y/o matemática:**

Una de las nociones fundamentales que se considera es la pendiente de la recta, es en esta donde la primera interpretación de derivada toma mayor fuerza como la pendiente de la recta tangente a una curva en único punto Courant & Fritz (1999). La interpretación tanto geométrica y analítica de la pendiente de una recta da una buena interpretación y apropiación del concepto de derivada, en la figura 11 que a continuación se presenta se intentará determinar la relación entre esta primera noción y su interpretación gráfica con la descrita en la derivada y su interpretación geométrica.

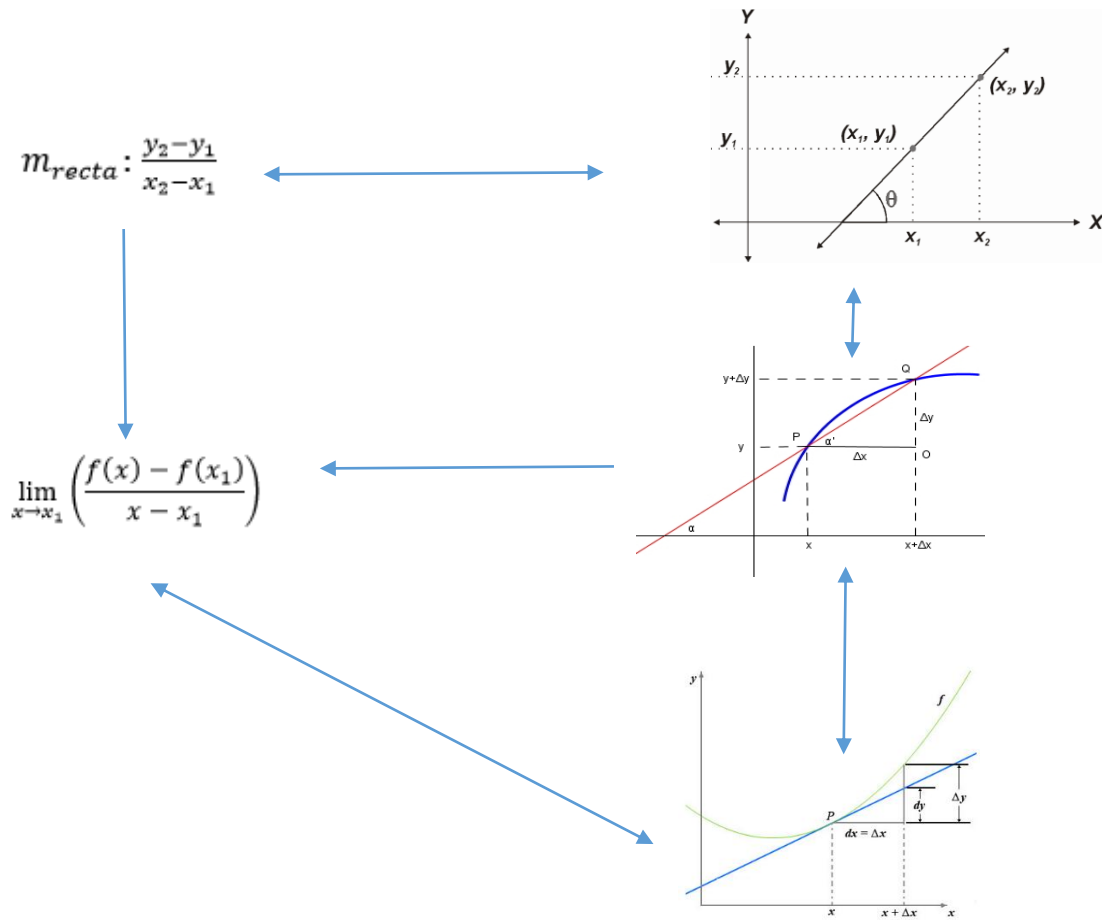


Figura 11 Esquema de representación entre la pendiente de una recta y el concepto de derivada (Elaboración propia)

En el diagrama de la figura 11 se trata de representar los conceptos “iniciales” relacionados con algunos elementos de la derivada, a continuación interpretaremos algunos de estos:

- **Elementos de la recta:** El primer acercamiento intuitivo que se considera es el relacionado con la pendiente de una recta (forma analítica y forma gráfica) con la derivada, primero se empieza a considerar la pendiente de una recta secante a una curva al pretender hacer más pequeña la diferencia que hay entre los puntos que se encuentran inscritos en la curva. Entra en juego un acercamiento infinito (paso al límite) ya que se van a considerar distancias infinitamente pequeñas hasta llegar a que esa recta sea tangente a la curva, el realizar este proceso lleva directamente a la definición algebraica de derivada y coinciden las interpretaciones geométricas de ambas.
- **Definición formal de derivada:** En el diagrama de la figura 2 se trata de ver una aparente relación entre la forma gráfica y analítica de la recta y una interpretación de recta (secante) ligada al contexto particular del problema de la recta tangente en un punto de una curva

cualesquiera (forma gráfica) y se define mediante el paso al límite que desencadena una definición analítica-algebraica de derivada.

**- Formas gráficas ligadas a la concepción de la derivada:** Entre las representaciones que se encuentran (estas representaciones son las ligadas a la recta y a su relación conceptual con el concepto de derivada) están las que se relacionan mediante el gráfico de la figura 12 y evoluciona en la concepción del concepto de derivada; inicialmente presenta la definición de una recta, posteriormente se presenta la gráfica de un problema en particular, para después determinar la representación adscrita al problema inicial que es el de la pendiente de la línea tangente a la curva en un punto y su relación con la idea formal de derivada.

### **Relaciones entre los aspectos conceptuales de la derivada y los procedimentales en torno a la visualización**

Como ya se ha mencionado, la estructura conceptual de la derivada tiene varias nociones básicas que permiten una buena visualización debido a su origen tanto a los fenómenos físicos como en la modelación del mismo mediante las funciones, en donde las funciones cuentan con una gran variedad de representaciones. En la solución de problemas planteados a los estudiantes una manera de resolverlos la sugiere Guzmán (1996) con un procedimiento de índole visual, que consiste en poner los problemas a través de representaciones geométricas y/o gráficas a través de una ayuda tecnológica para así encontrar la solución al problema. La relación de lo conceptual y lo procedimental en la visualización se evidencia en que lo conceptual la visualización es precisa para definir la derivada y comprender el concepto a través de las diferentes nociones, mientras que en lo procedimental la visualización tiene el papel de ayudar a la solución de problemas partiendo de un contenido visual y, como ya se ha aclarado en este trabajo, lo visual y la intuición están fuertemente relacionados con la visualización y esto puede generar una mejor comprensión.

La estructura conceptual de la derivada cuenta con algunas representaciones dentro de las cuales se presentarán las de cualidad “intuitiva” y las que ayudarán a generar una visualización del concepto, dentro de estas se encuentran las de carácter analítico, gráfico y numérico. El esquema de la figura 12 explica y relaciona de una forma las diversas representaciones mencionadas con anterioridad

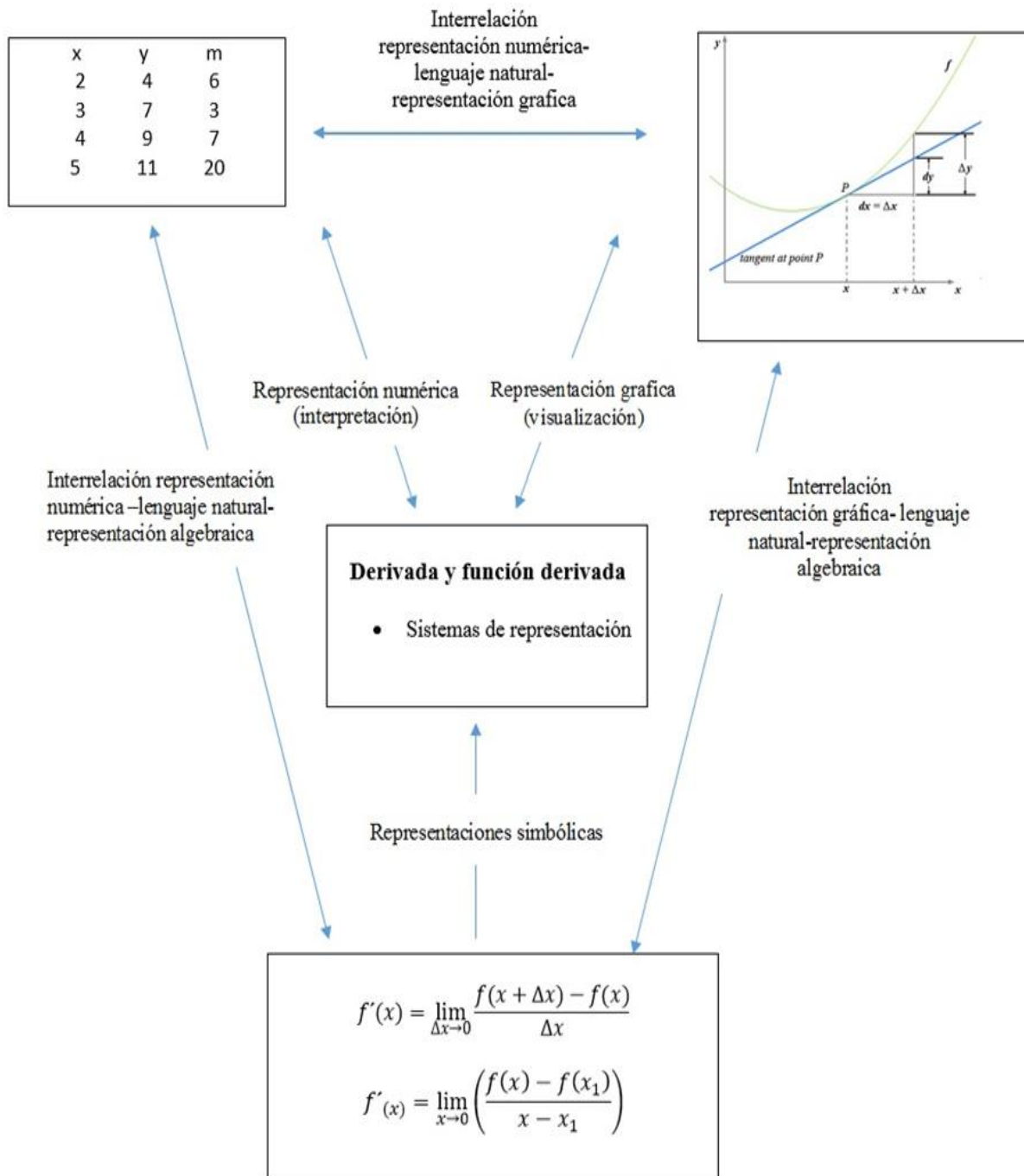


Figura 12 Esquema de las representaciones gráfica, analítica y numérica y la relación entre estas (Elaboración propia)

En la figura 12 se presenta la diversidad de representaciones y las posibles relaciones que surgen en torno a estas, a continuación se tratará de mostrar las relaciones entre la diversidad de representaciones:

**Representaciones simbólicas:** El primer ámbito formal en torno a la derivada es su representación analítica, esta se relaciona directamente con cada una de las demás

representaciones observadas en la figura 3 y de denominación formal (la denominación formal es utilizada directamente en los cursos de mayor rigurosidad como el adscrito al análisis matemático). Es mediante esta que la derivada se concibe como un elemento matemático formal.

**Representación gráfica:** otro tipo de representación es la ligada a la concebida geoméricamente, es mediante esta que se puede percibir (inicialmente) la cualidad visual de la derivada además de ser más factible su comprensión. Es común pensar la convencionalidad de esta representación y de la relación que tiene esta con cada una de las diferentes representaciones.

**Representación numérica:** mediante esta se genera la concepción inicial de pendientes de rectas tangentes. A partir de la tabulación y la función derivada es posible tratar de concebir el carácter de derivada y la diferenciación de la función derivada.

Cabe destacar que la primera noción intuitiva que se presenta de derivada es la ligada a la pendiente de la línea tangente a la curva de una función continua en un punto inscrito en la curva, después se trata de introducir la forma simbólica (gráfica y analítica) de la derivada y se define la derivada de una función. A partir de lo cual se puede implantar una concepción denominada función derivada como la infinidad de pendientes de líneas tangentes de una curva determinada. Se debe resaltar que el proceso de visualización del concepto dependerá exclusivamente de la interacción de las representaciones.

#### **2.3.4. Análisis fenomenológico**

Este podría considerarse un conjunto de temas respecto a los cuales muchos educadores convendrían decir que si bien es fácil enseñar procedimientos y Cálculos de forma mecánica, es de muchísima dificultad hacer que el estudiante comprenda de forma satisfactoria los conceptos y métodos en el pensamiento que constituyen el núcleo del análisis. Según Hitt (2005):

“Los estudiantes se restringen a una manipulación algebraica que produce una limitación en su comprensión. En general, las tareas de conectar las diferentes representaciones de un concepto, no son consideradas por muchos profesores”

Aunque lo anterior se puede aplicar a cualquier campo de las matemáticas, se hace un especial énfasis en el Cálculo, particularmente en el concepto de derivada, es en este concepto donde la diversidad de representaciones juega un papel fundamental en la obtención del



mismo. Así, aunque no haya en un principio una experiencia física que involucre el concepto matemático de derivada, se puede abarcar distintas experiencias que ayude a organizar diferentes fenómenos en torno a esta noción. Podemos ver que las matemáticas surge como una abstracción de la realidad y de cierto modo los conceptos matemáticos representan lo “común” de una amplia variedad de situaciones (Castro-Rodriguez, Castro y Torralbo, 2013).

Uno de los propósitos de la derivada es representar la razón de cambio de un evento, por tanto también es factible considerar la noción de límite que ayuda en la interpretación del concepto de derivada, para cuantificar y medir, además de establecer leyes para la variación, la razón de cambio, la derivada en sí. Se puede establecer la noción de derivada a fenómenos reales, como: la variación de la temperatura en un día o también a fenómenos de variación de la velocidad a partir de representaciones geométricas de espacio y tiempo que se pueden utilizar como una especie de base para el concepto de derivada.

Una de los fenómenos fundamentales que se considera es el ligado al fenómeno físico del movimiento ya que es en este donde se evidencia una primera aproximación al concepto de derivada y se ve una especie de dependencia de velocidad media-gráfica en la proximidad al concepto, además la función también juega un papel importante como noción y con estas todas sus representaciones.

A continuación se va a desarrollar lo anteriormente expuesto mostrando la importancia de estas nociones desde la visualización matemática y visualización didáctica para el desarrollo del concepto de derivada.

El movimiento de objetos es algo muy cercano para los seres humanos ya que esto es algo que ha visto en el transcurso de la vida, incluso intuitivamente se trata de predecir el movimiento de objetos en la vida cotidiana, este fenómeno físico puede ser modelado mediante una función de posición respecto a tiempo y es de gran utilidad contrastar la gráfica de la función con el movimiento del objeto. La definición de velocidad media es de gran importancia al incluirla en la gráfica que modela el movimiento, a partir de lo cual se estudia la variación de la posición con respecto a un intervalo de tiempo, esto quiere decir que se puede observar un primer acercamiento a la razón de cambio y se introduce su relación con el concepto de pendiente de una recta, es importante resaltar el carácter visual que ejerce la velocidad media ya que es un primer avance “intuitivo” a la derivada. Con este fenómeno es posible concretar más el concepto.

Consideremos un carro con velocidad uniforme que desplaza de una posición inicial  $x_1$  en un instante  $t_1$  a una posición final  $x_2$  en un instante  $t_2$  como lo muestra la figura 13.

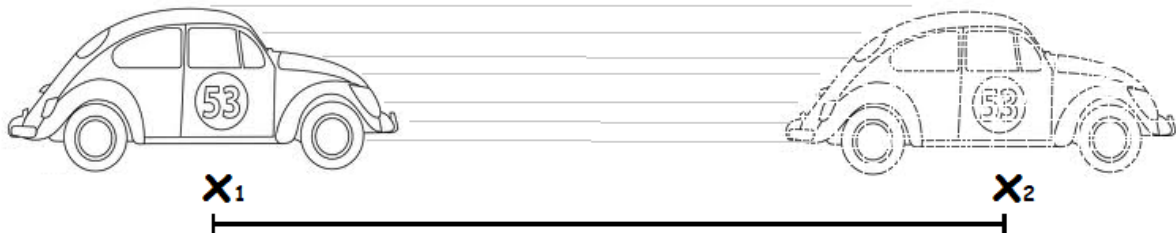


Figura 13 Diagrama que representa la posición respecto al tiempo con velocidad constante (Elaboración propia)

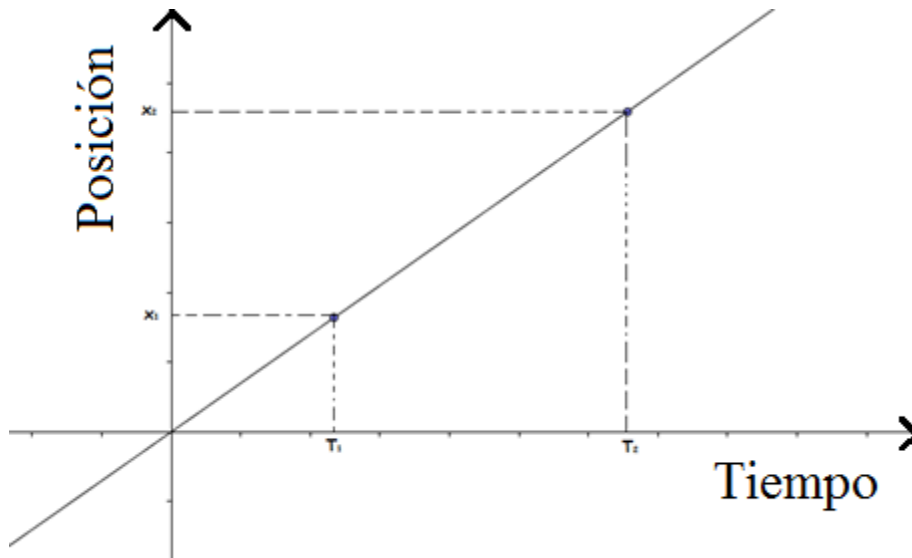


Figura 14 Gráfica de la posición respecto al tiempo (Elaboración propia Geogebra)

En la figura 14 se intenta modelar el movimiento de la figura 13 mediante una representación gráfica, para estudiar la velocidad se debe tener presente que “la velocidad es por definición el cambio de posición con respecto al cambio de tiempo”.

$$v_{media} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Pero esta definición está relacionada con la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos señalados en la figura 14, lo cual puede comprobar visualmente e intuitivamente que la pendiente en cualquier instante de tiempo en este tipo de movimiento es la misma.

Pero, en el caso de que la velocidad no sea constante si no que cambie, es decir que el movimiento es acelerado, la velocidad entre dos posiciones  $x_1$  y  $x_2$  no necesariamente sería

la misma en otros puntos en contra posición con el caso anterior, esto lleva a pensar que la idea de velocidad media en este caso no va a ser tan precisa ya que puede llegar a variar mucho dependiendo de la posición en donde se estudie.

En la figura siguiente se modela el movimiento del objeto en una gráfica de posición contra tiempo además se traza la recta entre dos posiciones distintas.

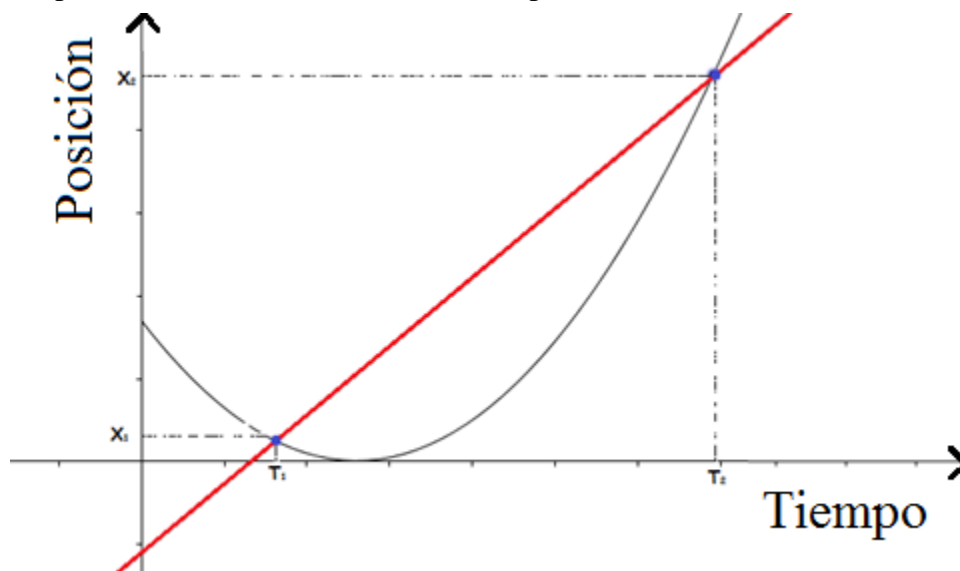


Figura 15 Gráfico de la función posición contra tiempo cuando la velocidad es variable (Elaboración propia Geogebra)

La pendiente de esta recta va a cambiar cada vez que estudiemos la velocidad media en diferentes puntos, a diferencia del caso anterior en donde se puede hallar la velocidad en cualquier instante de tiempo, para lograr hacer esto mismo en el caso en que la velocidad cambie es necesario considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños.

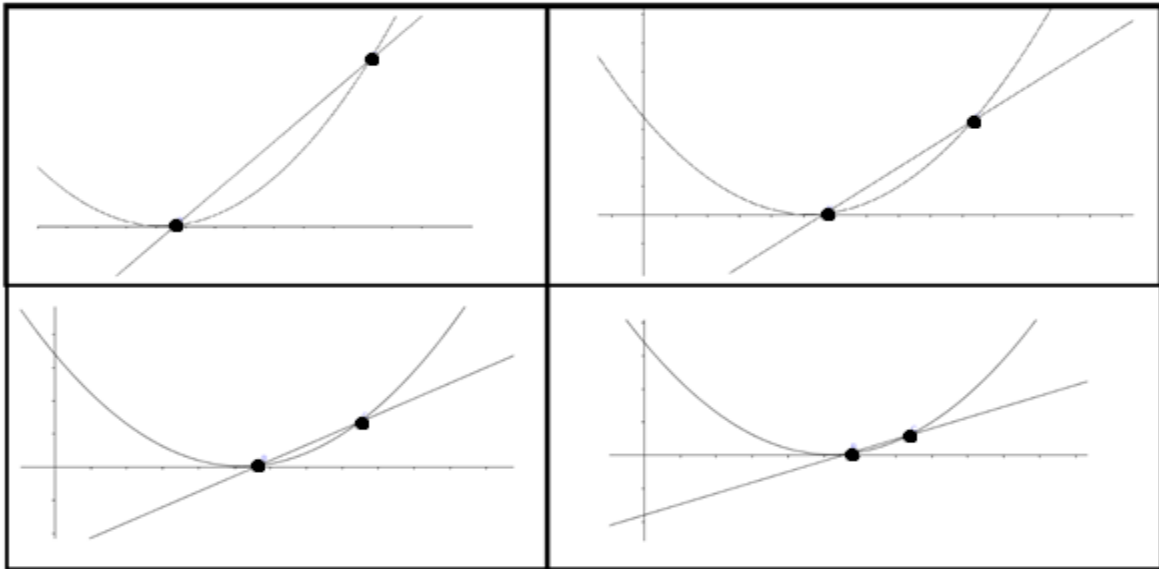


Figura 16 Acercamiento gráfico de dos puntos y noción del límite (Elaboración propia Geogebra)

Se puede ver en la figura anterior como la recta que pasa por los dos puntos se va acercando a la gráfica que modela el movimiento cada vez que el tiempo entre las posiciones va disminuyendo hasta llegar al punto donde la recta ya no corta a la gráfica en dos puntos sino solo en uno, lo cual indicaría que no habría diferencia entre los instantes de tiempo evaluados, lo que indica que se estudia el movimiento en un instante.

Con lo anterior se quiere llegar a mostrar que es posible hallar la velocidad en cualquier instante, en este caso donde la velocidad varía en el tiempo, esta velocidad instantánea está relacionada con la pendiente de una recta particular la cual pasa por un punto de la gráfica pero no la corta, analíticamente la velocidad instantánea se define como:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} \quad \text{Donde } \Delta t = t_2 - t_1$$

Lo anterior da relación de velocidad con la definición de derivada de una función:

$$v = f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_1} \left( \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right)$$

## 2.4. VISUALIZACIÓN MATEMÁTICA Y VISUALIZACIÓN DIDÁCTICA

La Visualización Matemática como ya se había mencionado en la introducción, se concibe como un medio que tiene que ver con los diversos procesos de transformaciones mentales y las distintas elaboraciones tanto en papel, como en el tablero o en el ordenador, que es

generada por la lectura de enunciados matemáticos o de gráficas, promoviendo una fuerte interacción entre la diversidad de representaciones y generando una mejor comprensión del concepto matemático Hitt (2005).

Por lo anterior la visualización matemática es de importancia en la enseñanza de las matemáticas, es por esto que investigaciones en Didáctica de las Matemáticas desarrollan la visualización didáctica, concebida como un proceso y resultado de representación de los objetos matemáticos escolares con propósitos Didácticos, aprovechando la diversidad de modernas tecnologías informáticas con sistemas de representación múltiple, sistema de Cálculo simbólico integrados y posibilidades dinámicas e interactivas (como las actuales calculadoras graficadoras y software de computadoras) permitiendo realizar diversas representaciones de un objeto o proceso matemático y percibir o deducir propiedades del objeto a través de la factible manipulación y observación concreta, ya que hacen posible y facilitan este tipo de visualización. La visualización didáctica mediante las nuevas tecnologías, permite hacer una aproximación experimental de algunos conceptos y procedimientos matemáticos escolares Bedoya (2002).

## CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA

### 3.1. MARCO METODOLÓGICO: INVESTIGACIÓN CUALITATIVA

Este proyecto se enmarcó metodológicamente en una investigación de tipo cualitativo ya que tuvo como su centro el estudio de personas y la interacción de estas. Este tipo de investigación busca mostrar por medio de los estudios, la realidad que les rodea desde su percepción, además de investigar a estos en un contexto natural para así interpretarlo o darle sentido a fenómenos que se desarrollen (Carvajal, 2008); (Rodríguez, Gil y García, 1996).

Como este trabajo se desarrolló en un contexto educativo y teniendo en cuenta los múltiples factores que inciden en este tipo de contexto, además porque son personas las que están en constante interacción, es en este sentido que Rodríguez, Gil y García (1996) plantean que:

*“La complejidad de un estudio cualitativo hace difícil predecir con gran precisión lo que va a suceder, por ello la característica fundamental del diseño cualitativo es su flexibilidad, su capacidad de adaptarse en cada momento y circunstancia en función del cambio que se produzca en la realidad que se esté indagando”*

Esta característica fundamental resaltada por los autores es de mucha ayuda en el desarrollo de la investigación ya que en el desarrollo de la misma puede haber cambios propios del contexto, los cuales no van a interferir con el desarrollo de la investigación ya que se pueden evaluar y modificar en la investigación para continuar su desarrollo.

En la investigación cualitativa también se pueden encontrar una diversidad de enfoques dos de los que se ha desarrollado en el trabajo son el enfoque *exploratorio* y *observación*.

El enfoque *exploratorio* se usa cuando se indagan problemas de investigación poco estudiados es por esto que es conveniente para familiarizarse con los fenómenos desconocidos además es útil para aclarar fenómenos para conocer el problema de investigación. Esta investigación se interesó por buscar las relaciones entre las variables o factores que tiene con algún fenómeno, por otro lado este tipo de investigación es flexible ya que el investigador mira qué tipo de información requiere para su investigación y cual no, para así poder hacer un nuevo plan de trabajo para desarrollar su investigación (Cazau, 2006).

El enfoque de *observación* también puede ser tomado como una observación no estructurada la cual es útil para ir conociendo el entorno del objeto de la investigación, además esta puede ir modificándose dependiendo de lo que se encuentre en la misma exploración y observación hasta llegar a ser una observación estructurada la cual se caracteriza porque solo se restringe a observar los fenómenos ya preestablecidos por el investigador el cual cuenta con hipótesis previas (Ramirez, 2010) la observación que se usó en este trabajo fue no participativa la cual consiste en interactuar lo menos posible con los sujetos observados.

### **3.1.1. Análisis didáctico como metodología de investigación**

En el capítulo anterior se mencionó al AD que se usó en este trabajo no solo como un referente conceptual sino también como un complemento a la metodología de investigación ya que este implica una revisión sistémica de la información de fuentes de información relevantes entorno al objeto de estudio pero además considera fuentes de otras áreas del conocimiento que se relacionen con el objeto a estudiar, este análisis permitió tener la información recolectada de forma sistémica y obteniendo así un mejor análisis de la información aprovechando el carácter doblemente cíclico del AD permitiendo sobre esta información ya estudiada volver hacer una revisión, encontrando nuevas relaciones y concretar más el objeto de estudio (Gallardo y González, 2006).

Como ya se había mencionado en el capítulo anterior este trabajo contempló el AD como método de investigación completaría donde se utilizaron las técnicas del Análisis Conceptual y el Análisis de Contenido.

El Análisis Conceptual tiene como interés estudiar la naturaleza de las definiciones y el lenguaje en el que están las mismas, además trata de delimitar términos y las relaciones de estos, esta misma línea (Gómez y Rico, 2001) dicen que el Análisis Conceptual “*Examina cuidadosamente la diversidad de significados, las posibilidades de conexión entre los términos y los niveles subjetivos (creencias y concepciones) y objetivos (conceptos) de cada campo conceptual*” (Pág. 186), con lo anterior se puede observar que es posible caracterizar detalladamente lo que se analiza, definir la variedad de significados y los objetivos de los mismos, esto resulta pertinente en busca de una delimitación de los problemas de investigación y es por esto que se selecciona como método e instrumento para delimitar el problema de estudio, caracterizar la información y analizar la misma.

El Análisis de Contenido tiene como unidad central de indagación los textos, los discursos, la tarea escrita o la comunicación, entrevista, entre otros donde el sentido es el interno a las unidades centrales de indagación, el nivel de análisis es continuo, manifiesto y latente, entre las técnicas propias está la delimitación de la unidad básica, establecimiento de categorías, interrelación de categorías, adscripción de unidades a categorías e interpretación de categorías (Rico y Fernandez-Cano, 2013).

Este tipo de Análisis según (López, 2002) citando a Berelson (1952:17) afirma que el Análisis de contenido “es una técnica de investigación que pretende ser objetiva, sistemática y cuantitativa en el estudio del contenido manifiesto de la comunicación.” (p. 173) es por esto que este análisis fue usado en este trabajo, debido a sus características fue de gran utilidad al momento de analizar documentos curriculares y entrevistas.

### **3.1.2. El método de estudio de caso**

El método de estudio de caso es muy utilizado en investigaciones de tipo cualitativo pero este también permite usar fuentes de tipo cuantitativo ya que usa una gran variedad de fuentes tales como documentos, entrevistas, observaciones entre otras. La mayor fortaleza de este método es que se centra en medir y registrar conductas de personas que se están involucrando con el fenómeno a estudiar (Martínez, 2006).

El método de estudio de caso se usó en este trabajo como agentes a estudiar a, uno profesor y dos estudiantes que más adelante se presentarán. Este método se caracteriza por ser particularista orientado a comprender la realidad singular, es por esto que su función principal es particularizar mas no generalizar, lo cual permite que se analice y se profundice en lo que se está estudiando (Castillo y otros, sin fecha). Como este trabajo se enmarcó en una investigación cualitativa además de exploratoria y de observación Martínez (2006) dice que:

*“Las investigaciones realizadas a través del método de estudio de caso pueden ser: descriptivas, si lo que se pretende es identificar y describir los distintos factores que ejercen influencia en el fenómeno estudiado, y exploratorias, si a través de las mismas se pretende conseguir un acercamiento entre las teorías inscritas en el marco teórico y la realidad objeto de estudio”*



Con la anterior se evidencia el por qué se usó este método para el trabajo, ya que por medio de la exploración no se generaliza o encuentra una solución general sino más bien se genera conocimiento a través de un caso particular.

## **3.2. DISEÑO METODOLÓGICO**

### **3.2.1. Contextualización**

#### **- Contexto Institucional**

Programas académicos de Licenciatura en Matemáticas y Física y Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas adscritos al Instituto de Educación y Pedagogía –IEP- de la Universidad del Valle en la sede Cali. Específicamente en el curso de Cálculo I ofrecido por el Departamento de Matemáticas a los estudiantes de las licenciaturas.

#### **- Contextos Curriculares**

Con el interés de realizar un análisis curricular es indispensable conocer los contextos de concreción del currículo para así tener una idea más amplia sobre cómo está presente la Visualización Didáctica en la formación de profesores de secundaria:

- Contexto curricular institucional: Se realizó una revisión general de las mallas curriculares de los programas de Licenciatura en Matemáticas y Física y Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.
- Contexto curricular del curso: Se estudió la propuesta del programa del curso de Cálculo I ofrecido a los estudiantes de las licenciatura y más específicamente de la estructura conceptual de la derivada.

### **3.2.2. Participantes**

Este trabajo tenía como interés estudiar el papel de la visualización matemática en la formación de los estudiantes de licenciatura adscritos al IEP, para concretar más el campo de interés se estudió el curso de Cálculo I (111050M) ofrecido por el Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle para el periodo académico Febrero –Junio del 2014, el curso seleccionado fue el de mayor cantidad de estudiantes de las licenciaturas matriculados para este mismo periodo académico. El profesor seleccionado fue el que estaba dirigiendo el curso anteriormente seleccionado.

En el estudio de caso se seleccionaron a dos estudiantes matriculados, uno de la Licenciatura en Matemáticas y Física y otro de la Licenciatura en Educación Básica con

Énfasis en Matemáticas, estos dos estudiantes estaban cursando el curso de Cálculo I ya mencionado, la selección de estos dos estudiantes se realizó buscando en la lista, de este grupo de estudiantes se seleccionaron dos al azar y se les invitó a participar en el trabajo.

### 3.2.3. Métodos, técnicas e instrumentos de recolección de datos y análisis de información

En la siguiente figura, adoptada de una propuesta metodológica de investigación cualitativa de Carvajal (2008), se presenta de manera esquemática la estrategia que se siguió en este trabajo para la recogida de información pertinente.



Figura 17 Representación esquemática del proceso metodológico

Asociado con cada uno de estos (sub) procesos – observación, entrevista, documentación-, utilizaron las técnicas e instrumentos correspondientes.

Así, por ejemplo, las actividades de observación que fue de carácter no participativa, se llevaron a cabo durante el desarrollo de las clases en el curso de Cálculo I (código 111050M) durante el periodo febrero-junio de 2014. Las clases estuvieron a cargo del profesor responsable del curso, al cual se le pidió firmar un consentimiento informado con la información sobre el proyecto para así estar en todas las sesiones de clases (durante el desarrollo del concepto de derivada) registrado con grabaciones de vídeo y audio. Los observadores hicieron registro en sus notas de campo.

Simultáneamente durante este mismo periodo se continuó realizando el proceso de documentación o de revisión y análisis de documentos pertinentes para el proyecto; proceso que se inició desde el semestre anterior (agosto-diciembre de 2013), y que consistió en la revisión y análisis de los respectivos documentos curriculares de las Licenciaturas en Matemáticas y Física, y en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, los respectivos libros de textos y de materiales didácticos utilizados en el curso de Cálculo I, y otros documentos relevantes para el trabajo.

Poco antes de acabar las clases se realizaron las entrevistas al profesor del curso y a los estudiantes seleccionados como casos de estudio. A partir de la revisión y análisis documental se eligieron las respectivas categorías y subcategorías que permitieron estructurar y concretar los instrumentos de entrevista correspondientes. De lo anterior se concluye que la técnica de entrevista consistió en la denominada “entrevista semiestructurada” (Carvajal, 2008). En la elaboración de los análisis asociados a cada uno de los subprocesos descritos anteriormente, así como de los resultados o de la información generada, se tuvo en cuenta los aportes metodológicos de AD propuestos por el grupo PNA, en el cual se concibe esta propuesta como estrategia y metodología de investigación, de formación de profesores y de desarrollo e innovación curricular en Educación Matemáticas (Rico, Lupiañez & Molina, 2013.). Las rejillas de análisis que facilitaron y estructuraron el mismo se diseñaron de acuerdo con este enfoque de AD.

### 3.2.4. Cronograma

A continuación se presenta el cronograma en que se desarrolló esta investigación el cual consta de unas actividades y tiempos, esto facilitó la recolección y análisis de la información teniendo en cuenta el curso de Cálculo I que se seleccionó.

Actividad / meses	Agosto 2013	Septiembre 2013	Octubre 2013	Noviembre 2013	Diciembre 2013	Enero 2014	Febrero 2014	Marzo 2014	Abril 2014	Mayo 2014	Junio 2014	Julio 2014	Agosto 2014
Precisión del marco conceptual y metodológico.	X	X	X	X	X	X							
Revisión de los documentos y búsqueda de antecedentes	X	X	X	X									
Consulta de documentación complementaria sobre: OC, FPM y VD.				X	X	X							
Construcción, precisión de los instrumentos de recogida de información.					X	X							
Recogida de información, protocolos de observación, entrevistas.				X	X				X	X			
Rejillas de Análisis y Análisis de resultados							X	X	X	X	X	X	
Construcción del documento final	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Consolidación y correcciones finales									X	X	X	X	X

Tabla 2 Cronograma

## **CAPÍTULO 4: OBSERVACIÓN, ENTREVISTA Y ANÁLISIS DE RESULTADOS**

El interés general en este trabajo se centra principalmente en la formación inicial de profesores del Área de Educación Matemática (Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y Física). La formación inicial de profesores es un ítem fundamental en la concepción de la Didáctica de las Matemáticas, además de la importancia que toma para la sociedad tener docentes altamente calificados por lo cual se hace necesario la investigación continua en este campo (Didáctica de las Matemáticas y/o formación de profesores).

De acuerdo con esto, se toma como referente conceptual y metodológico el AD para estudiar los procesos de enseñanza de la derivada en el curso de Cálculo I, esto con la intención de describir y analizar el papel que juega la visualización en el profesor del curso y los estudiantes que se están formando para ser profesores.

En el capítulo anterior se mencionó que la estrategia de recolección, donde se presenta de manera esquemática la estrategia que se siguió en el desarrollo de este trabajo para la recolección de información necesaria, este esquema tiene tres componentes.

**Documentación:** Está compuesta por una revisión al programa del curso de Cálculo I y malla curricular de ambos programas académicos para tener una visión general de la formación de los estudiantes del Área de Educación Matemática, también al texto guía del curso de Cálculo I por medio de una rejilla se hizo un análisis para identificar cómo se aborda la visualización didáctica.

**Observación:** Esta se realizó en la clase de Cálculo I cuando se esté abordando el concepto de derivada, la observación permitió ver las relaciones presentes en el aula de clase pensadas desde tetraedro propuesto por Bedoya (2011).

**Conversación:** Se centra en el profesor encargado del curso de Cálculo I y en dos estudiantes seleccionados para el estudio de casos, cada uno de ellos de un programa distinto pero matriculado en el curso, esta conversación estuvo enfocada en las exploraciones que se han venido haciendo en la documentación y observación además de documento abordados para el desarrollo del trabajo.

En esta investigación de tipo cualitativo la exploración y observación fueron de vital importancia para el diseño de instrumento de recolección y análisis de formación, al igual que el análisis de contenido y el análisis de conceptual sirvieron para caracterizar el concepto de derivada y la visualización.

Enseguida se presentan los instrumentos empleados en la recolección de información de la conversación, observación y documentación, además se exponen las categorías que se van a usar en la rejilla de análisis.

#### **4.1. INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN**

La observación se realizó en un salón de la Universidad del Valle en la clase de Cálculo I en el periodo Febrero-Junio del 2014 además se seleccionó el curso que más estudiantes del Área de Educación Matemática tenía matriculados, se tomaron 5 protocolos de observación en el aula de clase mientras se estaba desarrollando el concepto de derivada, la metodología usada fue una observación no participativa semiestructurada ya que en cada observación y registro de los protocolos se consideraron elementos imprevisto a lo diseñado, para el registro de información también se usó una videograbadora. Esta observación tiene como objetivos identificar el papel que juega la visualización en las relaciones presentes en el aula junto con el profesor, estudiante, conocimiento matemático y medios presentes.

- Para identificar elementos que puedan aportar el docentes y los estudiantes se realizó una entrevista el día 5 de junio del 2014 al profesor encargado del curso de Cálculo I seleccionado, esta entrevista tiene como objetivo ser contrastada con la demás información recolectada para así identificar la importancia de la visualización en la formación de futuros profesores y como media está en el modelo didáctico del profesor, esta entrevista realizada es de carácter semiestructurada para la cual se desarrolló una serie de preguntas (ver anexo 1), para la entrevista a los estudiantes se seleccionaron dos casos, cada uno de ellos perteneces a un programa distinto de licenciatura, esta entrevista semiestructurada tiene un cuestionario diseñado (anexo 2) con la intención de identificar la visualización presente en los estudiante, estas dos entrevista se registran con ayuda de una video grabadora para el posterior análisis.
- Se realizó una revisión general al texto guía y a los documentos oficiales de la universidad como planes de estudio y programa del curso para después realizar un AD por medio del

diseño de la rejilla de análisis (ver al final de este Capítulo) este permitirá caracterizar la visualización matemática presente en el texto guía del curso de Cálculo I.

También se hizo una revisión a los siguientes documentos para lograr identificar elementos pertinentes en la culminación del trabajo.

Malla curricular de los programas Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y Física (anexo 3).

Programa oficial del curso de Cálculo I del periodo Febrero-Junio del 2014 del curso seleccionado (anexo 3).

El análisis de estos documentos y la construcción de las rejillas de análisis se realizaron mediante las categorías caracterizadas para dar cuenta de la pregunta problema y objetivos planteados.

A continuación se presentan las categorías (C1-C3) usadas en la recogida y análisis de información.

**C.1. Sobre el concepto de derivada (CD):** se centra en el concepto de derivada por parte del profesor a la hora de ser enseñado, además de cómo presenta y se enseña dicho concepto tanto en el profesor como en el texto guía.

**C.2. Formación inicial del docente (FFD):** se indaga sobre los medios necesarios para el desarrollo de la clase por parte del profesor con la intención de identificar los dos primeros objetivos y dar respuesta a la pregunta problema, con esto se trató de identificar la importancia de la visualización en los procesos de enseñanza y aprendizaje además de cómo media esta en el modelo didáctico del profesor.

**C.3. Visualización Didáctica (VD):** relaciona la presencia de la visualización en el profesor, estudiantes y medios centrándose en el texto guía en este caso.

Ya con las categorías se presentan en la siguiente tabla las categorías con sus respectivas Subcategorías/Item relacionadas con los objetivos ya planteados.

Categorías	Sobre el conocimiento de derivada	Formación inicial del docente	Visualización Didáctica
Objetivos			
Objetivo 1	X	X	X
Objetivo 2	X	X	X
Objetivo 3	X		X

*Tabla 3 Relación entre categorías de análisis y objetivos*

La información recolectada en las entrevistas, observaciones y documentos se presentó mediante rejillas con tres etapas de análisis:

**Primera etapa:** se organizaron las entrevistas mediante una rejilla (Tabla 3 se muestra un fragmento de la entrevista del docente) a partir de las preguntas formuladas por los entrevistados (estudiantes que estaban a cargo de la investigación) se logró clasificar la información y entender la coherencia respecto a esta, se pudo establecer cuatro ítems que permitieron entender la información obtenida: pregunta, descripción, argumentos y tendencia). En esta se puede identificar la relación entre las preguntas y las categorías de análisis ya definidas, se logró una primera interpretación teórica de lo que fue expresado por el entrevistado (profesor y alumnos) en cada pregunta, esto se denominó como la sección adscrita al argumento.

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
¿Ha propuesto alguna actividad en algún sistema de representación simbólico o gráfico?	Distinto a lo que se conocen clásicos con respecto al cálculo, no, a mí me gusta respetar mucho esas porque ellos, yo les doy una bibliografía y ellos van a leer eso no me gusta como “leí en este Pues a ellos no, nunca les sugerí hacerlo, obviamente si ayuda bastante en esta parte pero decirles así en el curso de Cálculo I, no me gusta que ellos sean como tan dependientes de eso en el sentido de que yo quiero que ellos empiecen a escribir y empiecen a sacar todas esas cosas, más bien me gusta decirles “miren en este examen usted ni siquiera tiene que usar calculadora para responder las preguntas” en este curso si me parece una cosa así.	Con respecto a los sistemas de representación la docente insiste en utilizar los sistemas tradicionales de Respecto a los programas para la observación de las gráficas matemáticas no cree que sean convenientes debido a la dependencia que pueda generarse debido a estos.	Utiliza un método curricular y tradicionalista para No cree necesario la utilización de las herramientas tecnológicas para la visualización del concepto, se centra en lo analítico.

Tabla 3 Fragmento entrevista Docente

Con el insumo del argumento se procedió a identificar la tendencia, la cual se entiende como la carga argumentativa que da prioridad el entrevistado en las respuestas; por último se concibe a la descripción como el ítem que explicita la conversación con el entrevistado y la pregunta que se establece a partir de lo que busca el entrevistador, la coherencia de la rejilla la determinamos a partir de los diferentes datos que se toman a las entrevistadas (docentes y estudiantes) y una transcripción de este según lo explicitado en el argumento, posteriormente se busca con ayuda de los objetivos la tendencia a la que se aproxima el argumento descrito; en la imagen de la figura anterior, se puede establecer cómo a partir de la pregunta de herramientas tecnológicas la docente instaura su postura y posteriormente se relaciona directamente con la concepción de un objetivo, en este caso se puede ver como la docente no

necesariamente cree en la determinación de alguna herramienta tecnológica en el curso y cómo a partir de la tendencia es posible determinar la posible explicación que está ligada directamente con el objetivo expuesto (ver al final de este Capítulo)

En los protocolos de observación de clase se identificaron argumentos y tendencias en la clase de Cálculo I (concepto de derivada) centrándose en la metodología empleada por el docente y el uso que este le hizo a la visualización matemática en el momento de dar la clase, esto articulado con las categorías de análisis descritas anteriormente (en la Tabla 4 podemos ver un fragmento de la rejilla de observación de la clase).

Descripción	Argumento	Tendencia
<p><b>P:</b> ahora vamos aplicar lo que acabamos de ver, encontremos la derivada de <math>f(x) = k</math></p> <p><b>O:</b> la profesora escribe la derivada por definición en el tablero de la función anteriormente dicha preguntando a los estudiantes quien es <math>f(x + h)</math></p> <p><b>P:</b> ¿cuánto me da el limite de esta función? como ya hicimos la derivada de una constante por la definición ya después no es necesario usar esto para saber que la derivada de una constante es cero.</p> <p><b>O:</b> el profesor va preguntando mientras va haciendo el procedimiento en el tablero pero solo dos estudiantes participan.</p>	<p>Usa la definición de derivada para resolver algunos ejercicios.</p> <p>Hechas las derivadas de algunas funciones por medio de la definición usa la derivada como un algoritmo.</p>	<p>El uso de lenguaje algebraico predomina en la construcción del concepto.</p> <p>Lo algorítmico juega un papel fundamental.</p>

Tabla 4 Fragmento rejilla de observación de la clase

En la Tabla 5 se puede observar el desarrollo de la clase, después de encontrar el argumento en la rejilla los investigadores determinan la tendencia, en esta figura el profesor (identificada por la letra P) y los apuntes de los observadores (identificados con la letra O), estos últimos son generados a partir de lo observado, en este fragmento se muestra lo que pasa en gran parte de la observación, donde se trabajan ejercicios repetitivos que no se apoyan en ningún elementos geometría o gráfico.

En las rejillas de análisis de documentos se identificaron descripciones, argumentos y tendencias que son relevantes en la concepción de la visualización del concepto de derivada en el curso de Cálculo I tanto en la malla curricular, programa del curso (Cálculo I) y el texto guía.



Argumento	Tendencia
<p>El curso de cálculo I tiene los siguientes objetivos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Capacitar al estudiante para manejar con destreza las técnicas propias del Cálculo diferencial y sus aplicaciones a la resolución de problemas.</li> <li>-Ampliar y mejorar la capacidad para plantear, manejar e interpretar argumentos matemáticos, contribuyendo así al desarrollo de la disciplina mental y de trabajo de los estudiantes.</li> </ul> <p>El programa del curso de cálculo I tiene bien definido un listado de temáticas a abordar en el transcurso del semestre distribuido en unidades.</p>	<p>El curso tiene como objetivos que los estudiantes tengan una buena destreza en la utilización del cálculo con sus aplicaciones para la solución de problemas, puede estar mediado por la alta presencia de estudiantes de ingeniería.</p> <p>El curso considera contenido y metodologías “genéricas” esto quiere decir que no se considera los estudiantes presentes en el curso y las particularidades de cada uno según su programa académico.</p>

*Tabla 5 Fragmento rejilla documentos consultados*

Respecto a la rejilla que se hizo para los textos y el programa curricular, se generaron dos categorías que organizaba la información respecto a los objetivos adscritos en el trabajo, a partir de esto se pudo inferir el tipo de representación que predomina en el texto y los objetivos previstos en el programa curricular, por ejemplo para el libro de texto se originaron preguntas únicamente referenciados al capítulo de derivada y se pudo establecer cómo el programa del curso, el libro de texto y el docente se encasillan en un modelo didáctico tradicionalista, además, en estos no se puede evidenciar elementos que aporten al uso de la visualización.

**Segunda etapa:** Después de haber realizado el proceso anterior con ayuda de las rejillas desarrolladas se identificaron unas subcategorías por cada categoría tomando como referencia las tendencias que se encontraron en la etapa anterior, esto es relacionado mediante la Tabla 6.

Posteriormente se identifican las intercepciones que se generan a partir de las tendencias de la primera etapa relacionadas en las tablas, se lograron identificar nuevas tendencias las cuales permitieron dar respuesta a los objetivos propuestos en el trabajo y resolver la pregunta de investigación planteada. Para identificar estas tendencias se realizó una lectura analítica y reflexiva del marco conceptual, lo cual permitió evidenciar los argumentos teóricos que se evidenciaron en las variables estudiadas (estudiantes, docentes, documentos y libro de texto).

Los resultados obtenidos de esta etapa se presentan en las rejillas ver sección 4.5 Rejillas de análisis momento2: Subcategorías.

CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍAS	ELEMENTOS DE ANÁLISIS
C.1. Sobre el concepto de derivada	- Introducción y consolidación del concepto de derivada en los estudiantes	Entrevistas, documentos, texto guía y observaciones.
C.2. Formación inicial del docente	- Modelos didácticos de la docente y el texto guía	Entrevistas, texto guía, documentos y observaciones
C.3. Visualización Didáctica	- Cambios de registro de representación para potenciar la visualización - Uso de tecnológicas para potenciar una visualización	Entrevistas, texto guía y observaciones

*Tabla 6 Relación entre categorías de análisis y objetivos*

En la tabla 6 fue posible establecer las categorías y subcategorías que se creyeron pertinentes para la resolución de los objetivos del trabajo, a partir de la pregunta problema fue posible establecer las categorías (descritas anteriormente) y las subcategorías como consecuencias de las anteriores. las subcategorías surgen a partir de la respuestas que se quiere dar a los objetivos específicos, así para la primera subcategoría: Introducción y consolidación del concepto de derivada en los estudiantes lo que se pretende es observar la concepción que en este se origine sobre el concepto de derivada y establecer la posible relación entre el concepto y el estudiante del curso de Cálculo I; para la segunda subcategoría: modelo didáctico del docente y del texto guía lo que se pretendió fue establecer a que modelo didáctico se está más cercano (inconsciente o consiente) según lo encontrado en la investigación y las terceras subcategorías (compartidas ambas): cambios de registro de representación para potenciar la visualización y uso de tecnológicas para potenciar una visualización, se pretendió identificar lo adscrito a la visualización (su uso, su determinación en el aula, el proceso de esta, etc.)

**Tercera etapa:** de acuerdo con la información establecida en cada una de las rejillas de subcategorías de análisis (Ver sección 4.5 Rejillas de análisis momento2: Subcategorías), se realizó una rejilla final (Ver Tabla 7) que contiene las tendencias o elementos teóricos que se lograron identificar en cada una de las categorías de análisis al interceptar las tendencias de cada subcategoría.

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA	TENDENCIAS
<b>SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA</b>	<b>INTRODUCCIÓN Y CONSOLIDACIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN LOS ESTUDIANTES</b>	<p>La definición de derivada que predomina es la algebraica, dejando de un lado otros elementos visuales. Se apoya de lo geométrico en ocasiones para la presentación del concepto pero se resalta este registro como importante a la hora de introducir el concepto. Predomina el uso de lo algebraico en el desarrollo del curso. Saber derivar es identificar cuándo y dónde aplicar las derivadas para la solución de problemas. Se debe hacer en repetidas ocasiones ejercicios algebraicos para la comprensión de estos, es el caso de la derivada de funciones no polinómica.</p>
<b>FORMACIÓN INICIAL DEL DOCENTE</b>	<b>MODELOS DIDÁCTICOS DE LA DOCENTE Y EL TEXTO GUÍA</b>	<p>El modelo que principalmente perdura es el Tradicional-Conductista en la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada, se puede entender como los componentes principales del curso de Cálculo I enfocados principalmente en el concepto de derivada</p>

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍA		TENDENCIAS
<b>VISUALIZACIÓN DIDÁCTICA</b>	<b>CAMBIOS DE REGISTRO DE REPRESENTACIÓN PARA POTENCIAR LA VISUALIZACIÓN.</b>	<b>USO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS CON EL FIN DE PROMOVER EL USO DE LA VISUALIZACIÓN.</b>	
	<p>El registro de representación que predomina es el algebraico.</p> <p>El gráfico o geométrico se usa en algunos momentos por parte del docente y en algunas ocasiones después de hacer su representación analítica.</p> <p>Por parte del estudiante se resalta el papel de lo geométrico o gráfico a la hora de abordar el concepto.</p> <p>El programa y el texto están relacionados pero esta relación no aporta en el cambio de registro.</p> <p>Se deja de un lado lo geométrico en situaciones o problemas donde podría ser potente su uso.</p>	<p>Aunque los estudiantes ven necesario el uso de tecnologías para la comprensión del concepto de derivada la docente, el programa curricular y el libro de texto no evidencian la importancia de la misma</p>	<p>Los cambios de registro que predominan en los elementos investigados (entrevistados, libro de texto, programa curricular y observaciones) son del tipo geométrico y algebraico-analítico los cuales logra afianzar el concepto de derivada en los estudiantes.</p> <p>Lo geométrico es utilizado para afianzar y corroborar el concepto que se muestra en una primera fase al estudiante, para esto se utiliza por parte de los estudiantes ayudas tecnológicas que permitan dominar de una manera sencilla lo geométrico o gráfico, aunque hay que tener en cuenta que el libro de texto, el programa curricular y el docente, no consideran centrales este tipo de herramientas.</p> <p>Lo gráfico o geométrico se usa pero no tanto como las representaciones de tipo algebraico.</p>

Tabla 7 Rejilla de análisis por categoría

Respecto a la rejilla general, se involucran directamente la consolidación de todas las tendencias (intersección de estas) y a partir de las categorías generales y subcategorías se realiza una coherencia horizontal que organiza la información que de estas se establecen, así se determina un posible acercamiento final en las repuestas a los objetivos inicialmente planteados, respecto al concepto de derivada, introducción y consolidación de este en los estudiantes, se infiere que la definición que del concepto prevalece es la algebraica y que si de representaciones se trata, la que predomina es la analítica según los datos recolectados. (a partir de las rejillas de las entrevistas y los protocolos de información), también fue posible inferir a partir de este análisis como lo geométrico puede vislumbrarse, mas no es importante, incluso puede verse como la docente usa la representación geométrica para después desecharla y no relacionarla con los ejercicios que esta propone, así los ejercicios quedan relegados a una operación monótona y sin sentido, además respecto a la formación inicial del docente y al modelo didáctico que el texto presenta y que en este existe, se puede inferir a partir de la intersección de todas las tendencias se puede establecer que esta más cerca a ser de carácter tradicional-conductista y como lo relaciona principalmente con el concepto de derivada. también se infirió a partir del análisis que se hizo de la visualización didáctica, los cambios de registro de representación y el uso de las herramientas tecnológicas que el registro está ligado fundamentalmente con el algebraico formal y que aunque a veces la docente trata de ligar lo geométrico, lo descontextualiza y cae en la misma representación algebraica, aunque en los estudiantes están presentes las herramientas tecnológicas, no conocen el adecuado uso de estas y las utilizan únicamente como una herramienta refutadora de ejercicios que examina la veracidad de estos.

## **4.2. ANÁLISIS GENERAL**

### **4.2.1. Sobre el concepto de derivada**

En los procesos de enseñanza de la gran mayoría de conceptos fundamentales del Cálculo, en especial en la enseñanza de la derivada; pueden surgir dificultades en la concepción y comprensión de este. Investigadores en Didáctica de las Matemáticas sugieren que la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos fundamentales del Cálculo son fuentes frecuentes de dificultades en la comprensión y aprendizaje por parte de los estudiantes de educación secundaria y universitaria.

Es así, como numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática (Didáctica de las Matemáticas) sugieren el concepto de Visualización y presentan en estas una especie de herramienta que permite concebir de una manera más conveniente el objeto matemático. Es desde la Visualización donde la representación de un concepto se hace más importante y esto es debido a la manipulación y apreciación que se pueden concebir de las mismas, a partir de lo cual se empieza a determinar el concepto de derivada y a relacionarlo con las representaciones.

Por esto, se estableció para los entrevistados: docente, estudiantes y demás elementos del curso: programa curricular y libro de texto; la categoría sobre el concepto de derivada que trata de establecer la correspondencia de los siguientes ítems: derivada y derivación, conocimientos previos para la derivada, aplicaciones de la derivada y/o la interpretación de la derivada que existe en los docentes, estudiantes y demás elementos.

Así teniendo en cuenta los resultados de la rejilla final se puede establecer que la representación predominante en el curso de Cálculo I es la de tipo algebraica (en la Tabla 8 muestra un ejemplo donde solo se resuelven con representaciones algebraicas), la cual es presentada tanto por la docente, estudiantes y libro de texto dejando casi de lado otros tipos de representaciones como la gráfica-geométrica, se puede llegar a establecer el poco uso de representaciones grafica-geométrica y como estas pasan a ser simples herramientas refutadoras, únicamente utilizada por los estudiantes del curso.

Descripción	Argumento	Tendencia
<p><b>P:</b> Ahora hagamos otro ejemplo <math>g(x) = x^3 + 2x</math> hallemos la derivada.</p> <p><b>O:</b> el profesor resuelve la derivada en el tablero y sigue preguntando a los estudiantes el proceso.</p> <p><b>O:</b> el profesor resuelve de la misma forma la derivada de la función raíz y de algunas potencias ya sin usar la definición de derivada.</p> <p><b>P:</b> ahora vamos a ver algunas propiedades de la derivada “suma de derivada, producto división, entro otras”</p> <p><b>P:</b> demostremos la derivada del producto y el cociente por medio de la definición de derivada.</p>	<p>Usa conocimientos previos para el procedimiento.</p>	<p>Se deja de un lado lo geométrico en situaciones donde podría aportar.</p>

Tabla 8 Fragmentos de rejilla de observación de clase (ejercicio de tipo algebraico)

Respecto al saber derivar se pudo constatar como la aplicación que se da del concepto (derivada) es fundamental en el aprendizaje de la misma, ya que permite el manejo y

manipulación de este en sucesos y/o fenómenos de la vida cotidiana. Por otra parte se pudo identificar la forma como el concepto de derivada se presenta normalmente en el aula de clase, la categoría sobre el concepto de derivada permitió establecer parámetros para poder relacionar las diferentes concepciones presentes en el aula, por parte de la docente fue posible establecer (Ver sección 4.4.1.1. Tabla contigua) como esta involucra los conceptos previos para así identificar los ítems que le dan forma a la derivada, además se logra identificar la representación que en esta predomina la cual es de carácter algebraico-analítico.

Fue posible establecer además, que en los estudiantes el concepto de derivada es un proceso formal de tipo analítico, presentado a través del proceso de límites del coeficiente de diferencias de la misma forma en que se pudo encontrar que la derivación para estos (Revisar sección 4.4.2.1. en la Tabla contigua) es un proceso rutinario seguido por una especie de reglas y que la forma en que se puede establecer el concepto como tal, es únicamente a partir de los ejercicios de las aplicaciones que de estos se tienen.

#### **4.2.2. Formación fundamental del docente**

En la Educación Matemática y en la Didáctica de las Matemáticas es de interés la formación de profesores para lo cual se siguen investigando alrededor de este tema, como ya se había mencionado en la en el marco conceptual el grupo PNA en el 2013 publica “Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular” donde muestran las últimas investigación sobre la formación de profesores en este escenario.

Todo docente primero debe tener un conocimiento a enseñar en este caso el conocimientos es matemático, el cual debe ir de la mano con una reflexión didáctica del cómo se puede enseñar dicho conocimiento al igual que una serie de cursos que dan peso y fundamento a la formación del docente.

Siguiendo con lo anterior este concepto a enseñar, es importancia ya que el docente debe tenerlo lo más claro posible y adquirir herramientas necesarias para usar a la hora de enseñar, estas herramientas se adquieren en medio de la formación docentes mediante cursos donde se abordan los conceptos o en cursos donde se haga una reflexión sobre lo que se enseña y como se enseña; otro método de adquirir estas herramientas es mediante la práctica como docentes.

Los cursos en donde se da una fundamentación del concepto que en este caso sería el de derivada, están siendo dirigidos por unos profesores en el caso de este trabajo estos son en su mayoría matemáticos y dictan el curso en modalidad genérico como ya se había mencionado en la contextualización institucional.

El curso de Cálculo I en el que se encuentran matriculados la mayoría de los estudiantes del Área de Educación Matemática, es un curso diseñado para estudiantes de diferentes programas académicos, centrándose principalmente en estudiantes de la Facultad de Ingeniería por ser la que más estudiantes matricula en este curso, con esto dejando de un lado el interés principal de los estudiantes del Área que debería centrarse en cómo enseñar estos conocimientos (del curso de Cálculo I).

Por otra parte es decisión del docente (mencionado en la entrevista) la decisión de incluir o no elementos propios de la formación de profesores.

El modelo didáctico empleado por el docente consciente o inconscientemente influye en el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, para ampliar un poco esto se presentan las Tablas 9 y 10.

<b>Características</b>	<b>Indicadores</b>
<b>Contenido:</b> Identifica lo que es enseñable en una disciplina particular	Los conceptos de una disciplina son verdaderos e inmodificables.
	Los conceptos disciplinares están establecidos en los textos.
	Puesto que los contenidos de una disciplina están en textos, son independientes de la realidad de sus estudiantes.
<b>Enseñanza:</b> Son las formas particulares de comunicar esos contenidos en el aula	El docente debe enseñar los contenidos de forma verbal, expositiva.
	El docente debe dictar su clase bajo un régimen de disciplina, a unos estudiantes que son básicamente receptores.
	El docente dicta la lección a un estudiante que recibirá las informaciones y las normas transmitidas.
<b>Interacción con los estudiantes:</b> Se concreta en la relación cotidiana con los estudiantes.	En un proceso de enseñanza el profesor es quien enseña y el estudiante es quien aprende.
	La autoridad en el aula se mantiene gracias al dominio de los contenidos por parte del profesor.
	Los criterios de organización y formas de proceder en el aula los define solamente el profesor.
<b>Evaluación:</b> Identifica el logro o no de las metas de la enseñanza.	La evaluación es un ejercicio de repetición y memorización de la información que narra y expone para identificar los conceptos verdaderos e inmodificables que el estudiante aprende.
	La evaluación de los contenidos de una disciplina se basa en los textos a partir de los cuales se desarrolló la enseñanza.
	El resultado del desempeño en las evaluaciones es independiente de la realidad que viven los estudiantes.

Tabla 9 Modelo Didáctico Tradicional Fuente: Gómez y Polania (2008) Pág.55



Esta tabla caracteriza el modelo didáctico tradicional donde muestra las características principales de estos modelos, se analizó que tanto este modelo se relaciona con el modelo empleado en el curso de Cálculo I.

El cómo se evalúa y como se organizan los contenidos se pueden ver la similitud en la entrevista con la docente y en la relación del programa del curso, texto guía y contenido mencionado por el docente, también se muestra en las observaciones al estudiante como un receptor y al docente transmisor de conocimientos.

En la siguiente tabla también se encontró una relación con el modelo pedagógico que se presenta y el identificado en el aula.

<b>Características</b>	<b>Indicadores</b>
<b>Contenido:</b> Identifica lo que es enseñable en una disciplina particular	Los contenidos deben estar caracterizados por la parcelación de saberes técnicos.
	Los contenidos se deben basar en la fijación de objetivos instruccionales fijados con precisión.
	<i>Los contenidos de una disciplina deben ser saberes aceptados como socialmente útiles</i>
<b>Enseñanza:</b> Son las formas particulares de comunicar esos contenidos en el aula	El profesor debe animar permanentemente a sus estudiantes para que logren los objetivos que se les proponen.
	El profesor debe recordar permanentemente a los estudiantes los objetivos que deben alcanzar.
	El profesor debe realzar y estimular los logros alcanzados por sus estudiantes para alcanzar los objetivos.
<b>Interacción con los estudiantes:</b> Se concreta en la relación cotidiana con los estudiantes.	Es importante premiar los logros de los estudiantes con buenas calificaciones, anotaciones o felicitaciones.
	Los premios y los estímulos deben ser proporcionales al logro de los estudiantes.
	El refuerzo es indispensable para que los estudiantes alcancen los objetivos que se les han fijado.
<b>Evaluación:</b> Identifica el logro o no de las metas de la enseñanza.	Los resultados de la evaluación deben ser observables y medibles.
	La evaluación debe ser permanente, pues señala la mayor o menor proximidad al logro de los objetivos instruccionales
	La evaluación sirve para controlar el logro o no de los objetivos de aprendizaje elaborados para los estudiantes.

Tabla 10 Modelo Didáctico Conductista

Fuente: Gómez y Polania (2008) Pág.59

Respecto a este modelo pedagógico también se encuentran algunas relaciones en su mayoría en el estilo de evaluación que se puede identificar en el programa del curso (anexo 3, programa del curso de Cálculo I) ya que miden y muestran que tanto está cumpliendo con los objetivos propuestos inicialmente.

La metodología empleada por el docente se relacionan principalmente con un modelo tradicional y conductistas los cuales no muestran por lo menos en este trabajo que ayude a potenciar el uso de la visualización didáctica por parte de los futuros docentes ya que se puede ver que en gran parte de la información recolectada se evidencia un mayor uso de

representaciones algebraicas y juegan un mayor papel la repetición de ejercicios de este tipo (entrevista docente y estudiantes).

El texto guía usado en el curso de Cálculo I (Notas de clase, Cálculo I) para el semestre Febrero-Junio tiene muchas similitudes con el programa del curso en su orden de contenidos, además, el desarrollo de los contenidos en este texto son muy similar al cómo se desarrolla los contenidos en el curso por parte del docente.

El texto guía para los estudiantes del curso se queda en su desarrollo de contenidos en un modelo tradicional en donde primero se presenta un contenido después un ejemplo, seguido de un teorema y otros ejemplos, sumado a que en este texto al igual que en la clase no se usa muchas representaciones diferentes a la algebraica, con esto dando prioridad a los procesos repetitivos por parte de los estudiantes y el docente.

### **4.3. VISUALIZACIÓN DIDÁCTICA**

Desde la perspectiva teórica y conceptual, mencionada en el siguiente trabajo de grado, se considera la visualización matemáticas con propósitos didácticos; lo que comúnmente se conoce como Visualización Didáctica (Bedoya, 2002). Es a partir de la visualización didáctica donde se puede lograr a implantar una relación más pertinente entre el conocimiento matemático (concepto de derivada en el curso de Cálculo I de la Universidad del Valle) y cada uno de los actores involucrados en el aula de clase (docente, estudiante, etc.). A partir de las interacciones existentes entre el docente-conocimiento matemático-estudiantes y las que se tejen en torno al sistema didáctico implementado en el aula, se va a tratar de establecer el papel principal que tiene la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las nociones que estructuran el concepto de derivada, así como se caracterizó el modelo didáctico alrededor de la visualización (segunda categoría) y por último determinar como la visualización didáctica se emplea en el texto guía del curso de Cálculo I, específicamente la sección perteneciente a la derivada.

Inicialmente se empezó la investigación desde el ámbito de la docente y se logró establecer que de una manera indirecta involucra el concepto de visualización, ver sección 4.4.1.2, en esta se determina como la docente recalca la visualización a partir de lo que esta denomina motivación, se puede establecer, como el día a día que prepara de sus clases involucra presentar los conceptos dependiendo de la dificultad de estos y según sea el caso

involucra diversidad de representaciones ( tecnología, gráficos en el tablero, etc.) aunque determina que para el curso en cuestión (Cálculo I) no cree necesario la utilización de las representaciones tecnológicas para el curso en cuestión, por el contrario defiende la utilización de una rigurosidad analítica (en el curso de Cálculo I) y no crear dependencia de las tecnologías, no obstante ella considera que para cursos posteriores al de Cálculo I es necesaria las herramientas tecnológicas y/o graficas ya que estas consienten en el estudiante una noción intuitiva que permite ser un poco más conveniente en la adquisición del mismo. Respecto a la diversidad de representaciones presentes en el aula, la docente considera el conveniente uso de estas y reconoce la importancia aduciendo la importancia de las mismas a herramientas refutadoras, aunque siempre deja entrever la importancia de lo algebraico-analítico sobre lo gráfico-geométrico.

En las estudiantes (Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y Física) se puede determinar que el diferente uso de las representaciones: representaciones gráficas, analíticas y el uso de la tecnología es fundamental a la hora de trabajar en el concepto, afirmando ambas (Sección 4.4.2.3. y 4.4.3.3, en las Tablas contiguas) como lo visual es importante en el aprendizaje del concepto (derivada), también establecen como lo geométrico es fundamental en las aplicaciones de la derivada y en el entendimiento de la misma. Por otra parte en el libro de texto (Sección 4.4.4. respectiva Tabla) no se evidencia de una manera clara el uso de la visualización, ya que se puede ver como la representación que predomina en este es de tipo analítica-algebraica, en este se puede ver la poca relación que existe entre los listados de contenidos y elementos visuales que permitan establecer algún tipo de relación. En general fue posible determinar las tendencias generales y el tipo de representación determinado en las rejillas de análisis de las categorías y sub-categorías, las cuales son del tipo algebraico-analítico, lo geométrico es utilizado en los estudiantes como herramienta que corrobora los ejercicios y teoría propuesto por la docente.

#### **4.4. REJILLAS DE ANÁLISIS MOMENTO 1**

A continuación se presentan las rejillas del momento I en donde se organiza y sistematiza la información recolectada a partir de las diferentes técnicas que se utilizaron en el desarrollo de la investigación.

#### 4.4.1. Rejillas entrevista docente

##### 4.4.1.1. Rejilla de análisis: entrevista docente - categoría c1-cd.sobre el concepto de derivada

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
<p><b>¿Qué conocimientos previos deben saber los estudiantes para derivar?</b></p>	<p>Pues primero tiene que venir y en el mismo curso está el proceso de Límites, esa parte allí sobre todo a la hora de presentar lo que es la definición de la derivada en términos de límites, la derivada depende de que él ya se haya familiarizado con lo que se trabajaba allá, entonces está esa parte, además pues la construcción de la parte de lo que es funciones, eso es completamente fundamental allí, que es precisamente la primera parte del curso, esta toda la parte de funciones, digamos que así como está estructurado el curso, esas partes que están dadas antes de derivada son fundamentales, cómo ellos hayan venido en esa construcción influye en qué pase con derivadas, obviamente hay una parte y es un comentario que es en general yo lo he escuchado mucho “no es que cuando llegamos a derivada ya el curso se vuelve fácil, eso derivar es una cosa rápida, no entendí límites pero yo puedo derivar” eso uno lo observa, en los mismos exámenes uno se da cuenta, ganó el curso en 3 y pico pero uno observa lo que presentaba y de verdad su tiene serios problemas con límites pero si uno se dedica a ver la parte de derivadas, cómo estaba haciendo la parte de los cálculos, sí, lo estaba haciendo bien, entonces digamos ahí yo siempre he observado, con la experiencia que tengo bueno, uno cómo hace para solucionar esa parte, que ellos no vean que eso está completamente desligado de tomar una función y evaluarla o pensar en el dominio, o en el rango de una función o pensar en el límite cuando X tiene a tal valor de tal función, cómo se comporta eso, para qué me sirve eso en esta parte de derivadas, entonces hay ahí un cierto conflicto, yo les repito a ellos “usted tiene que hacer una buena construcción porque mire el orden en el que vamos y ese orden a mí me parece que es propicio para generar buenas cosas sí se hace bien” entonces estoy en el proceso de que ellos, cómo adquieran ellos los conocimientos y por su puesto más atrás de eso viene la relación de ellos con las matemáticas anterior a esa parte que eso a veces es otro conflicto porque hay muchas personas que en esta parte de las funciones dice “es que eso es redifícil” y llega a derivadas y dice “esto es muy fácil, es tener las fórmulas allí y eso ya va saliendo” entonces yo en esa parte a veces quedo como frustrada porque hay muchas personas que</p>	<p>Respecto al programa curricular que se presenta del curso de Cálculo, la profesora plantea los conocimientos previos antes de derivar y la coincidencia es casi total con el programa del curso (ver análisis de contenido de la derivada).</p> <p>Con respecto a los conocimientos previos esta menciona la definición analítica de la derivada (en términos de límites), además de especificar la importancia de conocer el concepto de función (dominio, rango, etc.).</p> <p>Destaca la problemática que hay entre conocer el concepto y realizar el desarrollo, y que muchas veces se hace lo segundo si conocer lo primero.</p> <p>También, da una primera impresión de su noción de derivada en términos de límites, dando un enfoque a lo que se debe conocer anteriormente, como el concepto de limite propiamente y los relacionados con este (función, continuidad, etc.).</p>	<p>La noción de derivada de la docente es la definición tradicional encontrada en los libros de Cálculo (por medio de límites).</p> <p>El programa está enfocado principalmente en un modelo didáctico tradicionalista.</p> <p>La profesora argumenta su interés en la concepción del tema (derivada) y reconoce la problemática existente alrededor de la enseñanza y posterior aprendizaje concepto de derivada.</p>

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	<p>pasan estos cursos que aprendieron una mecánica acá en derivadas y que está completamente desligada de todo, eso sí me parece, digamos que es una cosa que me inspira a mí en la creación de los parciales.</p>		
<p><b>¿Un estudiante sabe derivar cuándo?</b></p>	<p>Esa es una pregunta compleja, a mí me parece una parte fundamental que él se dé cuenta, usted tiene una función y usted dice “la derivada de esa función”, cuando una persona capta que cuando calcula esa derivada de esa función lo que obtiene una nueva función que tiene también sus características, un dominio, un rango, eso es una ganancia, obviamente en esa parte hay que usar lo que es el Cálculo como tal dependiendo de cómo era esa función original, qué reglas o qué propiedades tuve que usar para llegar a la derivada de esa función, esa parte que es una parte obviamente del Cálculo que es mecánica, me parece a mí y la otra parte que es ser consciente de que es lo que yo tengo después de realizar ese proceso, que es una nueva función y además reconocer que la derivada no es que sea la pendiente de la recta tangente sino que cuando hablamos de la pendiente de la recta tangente de un punto, entonces yo cómo voy a darme esa información, llegando a la derivada de esa función evaluada en ese punto al que me estoy refiriendo, ese punto de tangencia, entonces digamos esas dos partes me parece que son la base y una vez que tiene eso ya puede seguir construyendo, obviamente viene lo de atrás que es la derivada de una función, que la derivada está dada en términos de unos límites, que es otra parte allí, pero bueno, saber derivar, cuando un estudiante sabe derivar, cuando puede calcular la derivada de, ya otra parte sería, cuándo un estudiante sabe que una función es derivable en tal valor, ahí sí está la parte fuerte de límites.</p>	<p>A partir de la pregunta, la profesora involucro conceptos y maneras previas de identificar los diferentes ítems que le dan forma a la función derivada.</p> <p>La explicación que brinda hace pensar en dos momentos estrictos de la función derivada, el primero hace referencia a la función derivada como pendiente de la recta tangente a un punto (noción intuitiva) y la función derivada como límite (noción analítica).</p> <p>La docente estructura su plan de enseñanza al instaurado en el programa y en el libro de texto.</p> <p>Para la docente el aprendizaje de la derivada dejaría de ser mecánico cuando el estudiante entienda lo que es una función derivada y cuando sea coherente decir la derivabilidad de una función en un punto.</p>	
<p><b>¿Hay alguna diferencia entre conocer el concepto de derivada y saber derivar?</b></p>	<p>Sí, yo creo que sí porque como concepto se presenta “bueno, la derivada está definida en términos de límites entonces”, entonces la parte digamos donde termina la motivación. El problema de hallarle la recta tangente a una curva termina como bueno la derivada se puede dar en términos de límite de determinado cociente, entonces, bueno allí se acaba esa parte del tema de motivación. Listo, sí en la primera parte está la motivación y decir “la derivada se puede definir en términos de límite de seno y coseno ahora</p>	<p>La docente menciona el límite del cociente incremental (<b>DERIVADA</b>) en términos de lo que ella denomina motivación. Y acepta una diferencia entre derivar y saber derivar.</p>	<p>No es claro ver en la conversación con la docente una diferencia entre derivada y derivación. A la que la docente alude el</p>

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	<p>vamos a derivar, listo y cuando vamos a derivar ellos le preguntan a uno “¿siempre tenemos que calcular ese límite para conocer la derivada de una función?” entonces ahí aparece lo que son las propiedades, la regla de la potencia y empiezan ellos otra vez “ya, ya con esto es más fácil, entonces ya, eso son fórmulas que yo me aprendo y empiezo a hacer y ya no tengo que hacer ese procedimiento tan largo” pero digamos que pensando en ellos para mí si hay una gran diferencia porque a ellos se les vuelve fácil y les empieza a gustar el tema cuando eso se vuelve así mecánico y “solamente son estas reglas y no tengo que hacer nada más”, entonces si hay una división. Obviamente esa parte yo la necesito porque es la aproximación, tener en cuenta que el problema que está detrás de la motivación es clave, esa parte y de reconocer lo que le mencionaba ahorita acerca de cuándo yo tengo una función y pienso en su derivada obtengo otra función y tiene sus características y cómo relaciono eso yo, conocer la derivada de una función con poder establecer cuál es la pendiente de la recta tangente y la curva en dicho punto, esas partes son fundamentales y toca en ese curso tocar la parte de cuándo una función es derivable, esa parte, serían cuatro partes en sí fundamentales que tienen que tener una buena construcción para que si usted le pregunta algo alguien acerca de derivadas le pueda dar razón de esas cuatro instancias.</p>		<p>saber derivar como los procedimientos que se contrasta con el saber de un concepto que en este caso es el de derivación.</p>
<p><b>¿En qué momento es conveniente usar las aplicaciones de la derivada y en qué casos?</b></p>	<p>En qué momento, bueno pues una vez se tiene la parte de la motivación, que se dan las reglas, una vez que se dan las reglas allí empieza la parte de “bueno, yo tengo todas esas reglas pero cómo las voy a usar”, entonces ya en esa parte aparecen los ejemplos, se hacen necesario para que la persona pueda adquirir esa parte mecánica porque eso también se necesita, empezar a entrenar con todas esas reglas viendo cómo son las funciones que se les han presentado, él ha trabajado en la primera parte del curso con ellas, ver cómo voy a observar yo la estructura de la función para poder tener éxito a la hora de hallar la derivada, esa parte hay que ir la trabajando y digamos que ahí está la parte de los ejemplos, aparte de lo de aplicaciones, como una de las cosas fundamentales es cuando hablamos de derivadas uno tiene esa otra forma de mencionarlo, uno dice “la razón de cambio de una variable con respecto a otra” esa parte que digamos es la parte que fundamenta la parte de las aplicaciones y que es muy importante en este tipo de cursos donde están estudiantes de Ingenierías porque esa es una de las cosas que ellos toman para ellos y es necesaria para el resto de su carrera y pues digamos que para las personas que</p>	<p>La docente manifiesta la importancia de construir primero una base teórica con la cual se pueda sustentar las aplicaciones para generar a lo que ella alude como motivación.</p> <p>La necesidad de sustentar la teoría y el saber para qué sirve lo que se ha enseñado hace que sea necesario ver el uso de las aplicaciones, ya que con esto se puede practicar las reglas que se han adquirido respecto al concepto.</p>	

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	<p>estudian Licenciatura el estilo de ellos, puede decirse, “yo me estoy aprendiendo unos ciertos conceptos y yo tengo que”, ahí si no se respecto a lo que ustedes piensan pero adquieren esos conceptos y tienen que mirar cómo esos conceptos va a intentar mostrárselo a esas personas que necesitan directamente, pero ¿cómo aplicó yo las derivadas?, está bien yo necesito las definiciones, las reglas, todo eso pero digamos eso queda en la parte teórica, ¿cómo voy yo para dar todo eso en la vida real? Podría decirse que eso le competen un poco más a los ingenieros, que una persona que está en un curso de Cálculo I así esté estudiando ingeniería necesita preocuparse por esa parte porque si no la construye bien qué va a hacer en las aplicaciones, entonces cuándo da las aplicaciones, ya tenemos toda esa construcción comencemos a ver qué tipo de aplicaciones vamos a ver en el curso, cómo vamos a enfocar eso, y bueno cuándo presentarlas, esa parte, la construcción de eso y digamos que a partir de los ejemplos en esa parte ya que tienen manejo en esa parte mecánica, en esa parte teórica y puede ir allá digamos a enfrentarse a los problemas, entonces para la hora de enfrentarse a las aplicaciones está la parte de “primero tengo que entender la situación y ver en qué instancia de resolver la situación o resolver el problema que se me está planteando, contestar una pregunta voy a usar la derivada” porque la aplicación no es solamente “está regla me sirve, la aplicó y listo”, no digamos que viene como en una parte de lo que es la aplicación, está en entendimiento y una vez tenga el entendimiento hay una función que me va a parecer que me va a relacionar todas las variables de la situación , uso la derivada para tener unos ciertos datos y esos datos los interpreto y ahora sí puedo contestar en esa instancia la pregunta.</p>		
<p><b>¿Qué interpretación deben tener los estudiantes en la derivada?</b></p>	<p>Que la derivada está relacionada con cambio, digamos que esa es mi primer tema que hace parte de ese cálculo diferencial y es la parte del Cálculo que hace la diferencia en lo que es digamos matemáticas estática, matemática fundamental, hace un proceso de límite y llegamos a derivadas, entonces ahí llega el Cálculo y empieza usted a ver que a partir de esa derivada usted puede hacer modelaciones de cosas que suceden en la vida real, en la vida real usted tiene movimientos y esa derivada le permite a usted hacer mucho, entonces se necesita de esa parte teórica pero dependiendo usted cómo lo vaya a enfocar necesita también que tenga esto “derivada está relacionada también con cambio, movimientos”.</p>	<p>La derivada debe estar relacionada directamente con el límite del coeficiente diferencial, es por este que es posible ver las aplicaciones en la vida real y partir de este es que son más factible sus diversas representaciones pendientes de la recta tangente a la curva en un punto, velocidad de un movimiento).</p>	

#### 4.4.1.2. Rejilla de análisis: entrevista docente - categoría c2-ffd. Formación fundamental del docente

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
<p><b>¿Cómo prepara usted las clases?</b></p>	<p>Pues primero yo lo que hago para los cursos, yo hago un día a día de todo el semestre, cada fecha lleva algo “bueno, en esta clase voy a trabajar estos temas” entonces pensando en el tiempo que tengo, la cantidad de temas hago esa distribución y digo “en este tema tengo que presentar tales cosas teóricas, este tema necesita una introducción antes de presentar una parte teórica, o sea una motivación”, por ejemplo la parte de derivadas es necesario, parte hacer un acercamiento al problema de poder hallar la pendiente de una recta tangente, entonces hay una parte que es fundamental y que por su puesto los libros de Cálculo en general la contienen entonces esas motivaciones y en el libro que ya me enfoque sobre todo para usarlo para, allá hay unos ejercicios, los estudiantes pueden trabajar esos ejercicios y eso digamos es un mínimo de una buena base para que ellos puedan continuar los que necesiten más tarde, en fin, entonces ese libro que es el que se ha creado aquí, el de Notas de Clase de Cálculo I es del que viene de lo que yo le comentaba del trabajo de la profesora Martha Pinzón, el profesor Álvaro Garzón y otros profesores que han trabajado allí, entonces esa fue mi base, entonces veo mis temas, cómo lo abordan aquí “listo, aquí hay una forma de valorar, la teoría” si hay otros ejemplos, busco otros libros, obviamente yo le doy las fuentes porque en ese mismo día a día donde tengo cada uno de los temas ellos tienen esa programación, ahí está incluido fechas de quices, fechas de parciales, temas de los quices, temas de los parciales entonces todo eso está incluido allí y obviamente la bibliografía. Esa es la forma de preparación de clases, respetar mucho esa bibliografía que yo les doy a ellos para que ellos también puedan consultarla.</p>	<p>La docente prepara sus clases en términos del “día a día” y estructura su plan de clase en términos del programa curricular presentado por el departamento de matemáticas.</p> <p>Las motivaciones a las que la docente alude, se representan según el tema que se esté viendo y se debe principalmente a la dificultad del tema que esté presente. Cuando se introduce un tema demasiado complicado se busca alguna motivación (representaciones) para hacerlo más accesible a los estudiantes.</p> <p>El libro de texto (varios, en especial el texto guía) contribuye enormemente a la preparación que la docente haga de los temas y este determina su principal herramienta.</p>	<p>El enfoque didáctico que tiene el docente parece ser de tipo curricular y tradicionalista.</p> <p>Se puede observar como el docente involucra la visualización indirectamente y es esta la que ella denomina como motivación.</p> <p>La estructura del libro condiciona la clase como una medida inicial, aunque la docente recalca los demás usos que se le dan a materiales distintos que se recomiendan en el programa.</p>
<p><b>¿Usa alguna herramienta tecnológica en la para la preparación de las clases de Cálculo I?</b></p>	<p>Para este curso, en las experiencias que he tenido como tallerista digamos que busco preguntas con respecto a la creación de parciales y de quices, en esa experiencia que ya había tenido es eso lo que usó.</p>		
<p><b>Prepara usted sus clases con ejemplos y</b></p>	<p>Sí, en la experiencia y por su puesto del texto que está allí.</p>		



PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
<p><b>ejercicios diferentes a los propuestas en el aula y en el texto guía ¿Qué texto diferente utiliza para dicha preparación?</b></p>			
<p><b>¿El diseño del curso, ejemplos y ejercicios cambian dependiente del grupo de estudiantes o sigue con la modalidad de genérico?</b></p>	<p>Pues la verdad eso cambia respecto a, yo presento una situación, no siempre me gusta, a menos que sea necesario dar una introducción de un tema, pero a mí me agrada, digamos uno presenta una situación y antes de dar una respuesta ver todo lo que se está dando alrededor de una pregunta decirles “bueno, ustedes qué piensan de eso” ese tipo de preguntas, ese tipo de situaciones, “qué les dicen a ustedes, qué creen que va a suceder”, me gusta mucho usar eso, a ver ellos que están leyendo, que están entendiendo allí, qué dudas tienen, uso esa parte y pues la verdad eso es bastante subjetivo porque eso depende del grupo que uno tenga allí, si ellos participan o no porque si no hay esa interacción me toca dar todos los elementos y a veces, entonces yo pienso que cuando yo doy todos los elementos hay cosas, tal vez dudas, puntos de vista, que se me van a escapar, tal vez porque no sé, no me es posible saber qué están pensando cada uno de ellos cuando yo les doy una situación qué les inspira eso, entonces ahí en esa parte depende del grupo que yo tenga y obviamente uno tiene una parte general, “tengo un tema, tengo que llegar a tal punto”, pero en esa parte creo que hay una libertad en el sentido de las preguntas que ellos van haciendo y vamos a ver si eso se va a ampliar o se va a quedar completamente restringido a lo que yo pensaba dar entonces yo observo a veces que si yo me dedicó solamente a dar el tema como yo lo tengo pensado porque hay veces que uno no está como tan nutrido de lo que ellos nos quieren dar, a mí me gusta mucho ese intercambio se vuelve como listo, yo preparo una base para la clase pero vamos a ver ellos cómo responden a eso, entonces cada día uno lo ve.</p>	<p>La docente reconoce que el interactuar con los estudiantes juega un papel fundamental en la concepción de su clase y todo es debido a la participación que estos tengan.</p> <p>Además es recurrente al decir que utiliza el espacio de pregunta para abordar las diferentes dudas que los estudiantes posean.</p> <p>Admite también de que el tema lo prepara de una manera general pero el desarrollo del mismo la lleva a manejarlo de manera diferente dependiendo el grupo.</p>	<p>La preparación de las clases hace que la docente muestre el modelo didáctico curricular sin salirse de los estándares que este conlleva.</p>
<p><b>¿Ha propuesto alguna actividad en algún sistema de</b></p>	<p>Distinto a lo que se conocen clásicos con respecto al Cálculo, no, a mí me gusta respetar mucho esas porque ellos, yo les doy una bibliografía y ellos van a leer eso no me gusta como “leí en este</p>	<p>Con respecto a los sistemas de representación la docente insiste en utilizar los sistemas tradicionales de</p>	<p>Utiliza un método curricular y tradicionalista para</p>

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
<p><b>representación simbólico o grafico?</b></p>	<p>libro de esta forma y cuando me fui a mirar este ya no entendí nada porque no tenía nada que ver a como lo explicó usted en la clase” y yo me he dado cuenta que a veces esos problemas de anotación los bloquea a ellos entonces yo trato de buscar una cosa que sea más general en el sentido de que en toda la bibliografía que se está presentando se respete eso, esa notación, esa forma de escribir.</p> <p>2. Pues a ellos no, nunca les sugerí hacerlo, obviamente si ayuda bastante en esta parte pero decirles así en el curso de Cálculo I, no me gusta que ellos sean como tan dependientes de eso en el sentido de que yo quiero que ellos empiecen a escribir y empiecen a sacar todas esas cosas, más bien me gusta decirles “miren en este examen usted ni siquiera tiene que usar calculadora para responder las preguntas” en este curso si me parece una cosa así.</p>	<p>escritura y optar por los de carácter general ya que así no se confundirán con otra bibliografía que los estudiantes pueden mirar.</p> <p>Respecto a los programas para la observación de las gráficas matemáticas no cree que sean convenientes debido a la dependencia que pueda generarse debido a estos.</p>	<p>asegurar las definiciones que provea el concepto que este enseñando.</p> <p>No cree necesario la utilización de las herramientas tecnológicas para la visualización del concepto, se centra en lo analítico.</p>

#### 4.4.1.3. Rejilla de análisis: entrevista docente - categoría c3- VD. visualización didáctica

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
<p>¿Cómo se enseña el concepto de derivada?</p> <p>¿Por ejemplo ha utilizado alguna herramienta tecnológica en el aula?</p> <p>¿En su experiencia en algún momento utilizó?</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. ¿Cómo se enseña?, esa pregunta es, uno dice ¿cómo se enseña? Uno no está diciendo que ellos ya van a aprender por lo que uno ha presentado, es una cosa complicada, para mí es esa parte, tengo que construir esas bases, mostrar qué es lo que yo necesito como bases y mostrar ejemplos de situaciones en donde tiene sentido hablar de la derivada que de verdad ellos vean que tiene sentido toda esa parte que tengo como teoría, situaciones con las que yo tengo relación porque con todo eso yo me puedo enfrentar a ciertas situaciones y puedo dar respuesta a esas situaciones, entonces cómo se enseña, ir mostrando todos los elementos e ir mostrando situaciones en donde ella tiene sentido.</li> <li>2. No, en este no.</li> <li>3. Sí, para el curso que di de Cálculo Multivariable si se dio el escenario porque allá nosotros las gráficas que estamos realizando son en R3 y allá interesa mucho empezar a mirar “está gráfica me está mostrando unas superficies, y así tengo una característica y cual puedo obtener de ella,” allá se hace necesario esa parte gráfica y porque allá se tiene una teoría más pesada y más fuerte porque allá estamos extendiéndonos más, a otra dimensión, entonces usábamos el vídeo beam, a veces en la parte de los gráficos algunos en los que podíamos observar los movimientos para ver lo de la parte de los volúmenes, toda esa parte, ese era mi objetivo, pero aquí en el curso no utilicé eso, también pensando en que uno de los objetivos es que ellos puedan hacer buenas gráficas de las funciones entonces mi idea era acá en la parte de derivadas hay unos resultados que le permiten a usted hacer la caracterización de sus funciones en el sentido digamos de “yo puedo ver de dónde vienen las funciones crecientes, decrecientes” si es el caso, ver si ella van a alcanzar los mínimos o máximos, cómo se comportan sus concavidades, tiene unos puntos de inflexión, todas esas</li> </ol>	<p>Construir un argumento teórico que haga accesible el concepto de derivada y presentar ejemplos que hagan que el concepto en sí tome alguna especie de sentido, mostrar todos los elementos anteriormente mencionados de una manera clara y concisa.</p> <p>La docente argumenta que en el curso de Cálculo I no se vio tan necesario la ayuda tecnológica por que no la creía tan conveniente y argumenta que si la uso para un curso que presento (Cálculo multivariable), donde reconoce que la representación gráfica hace más accesible la comprensión de los conceptos ya que la teoría causa mucha dificultad y esto debido a la dimensión que se involucra en el curso.</p> <p>No es conveniente (argumenta la docente) que se utilicen las herramientas tecnológicas en la concepción de la derivada, ya que ella argumenta que el objetivo mismo del programa que ella presenta es aprender a realizar dichas graficas (hablando específicamente de las funciones creciente y</p>	<p>La construcción ordenada plantea el modelo didáctico tradicionalista y curricular.</p> <p>Considera importante (o al menos así lo manifiesta) la representación gráfica en la concepción de conceptos con teoría extensa y pesada. Se ve un manejo débil de las representaciones, no para el curso, pero si pareciese que inconscientemente considerara la visualización para algunos casos (no para el curso).</p> <p>En el curso parece predominar la representación analítica, ya que ella menciona las características de los ejercicios omitiendo la representación como guía fundamental en el curso. No deja entrever el uso de la visualización en la</p>

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	<p>características las puede dar esa parte de conocer la derivada, toda esa parte fundamental puede llevar a eso y puedo hacer buenas gráficas de funciones, obviamente que es una parte también tiene que entrar la parte de la función como tal, dominio y rango, como puedo hallar los cortes con los ejes asíntotas, ahí entra la parte de límites, ahí está toda esa parte, no sé digamos ningún video beam para mostrar gráficas porque mi idea era que ellos pudieran a partir de todas esas características ellos pudieran dibujarlas obviamente ellos están en la libertad de que cuando estén estudiando para el examen corroborar qué es lo que está sucediendo a la hora de decir “yo tengo esta función hice toda la caracterización y tengo esta gráfica será que si está buena o no” eso sucede en esta parte, ellos podrán si están interesados utilizar esas herramientas pero no motive yo el uso de ellas.</p>	<p>decreciente, máximos y mínimos, etc.). A parte de fundamentarse en lo gráfico, la docente argumenta que su objetivo es que ellos puedan llegar a dicha “gráfica” a partir de las diferentes características que se den del ejercicio, aunque también dice que ella no impidió la utilización de los programas para que los estudiantes corroboren los ejercicios que estuvieran desarrollando.</p>	<p>concepción del concepto. Aunque manifiesta que el hacer gráfico va después de la parte analítica.</p>
<p><b>¿Considera usted que el uso de algunas herramientas tecnológicas potencia el aprendizaje de los estudiantes? ¿Por qué?</b></p>	<p>Sí pero dependiendo de cómo se usen no pueden generar una dependencia sino para, digamos en el caso de las gráficas cuando yo quiero revisar si lo que yo tengo aquí es correcto, si yo lo puedo observar usando un software de esos si yo coloqué mi función y él me muestra la gráfica y si es correcto y yo miro las características que alguno de esos software tiene de mayor valor, de menor valor, tiene un punto de inflexión, digamos que ahí puede corroborar eso pero en esa parte si el estudiante ha hecho el ejercicio y lo usa para revisar me parece genial pero si lo hace y coloca el dato y le sale la gráfica y va a copiarlos, la verdad el uso de eso no tiene ninguna ganancia para la persona, desde mi punto de vista porque no está practicando y es una parte básica que es fundamental en este curso de Cálculo I.</p>	<p>La representación gráfica son importante en la concepción de un concepto debido a que esta sirve como “una herramienta refutadora” que hace accesible lo bueno de un problema.</p>	<p>La visualización se da a partir del cambio de representaciones y del manejo de estas en ambientes dinámicos y tecnológicos.</p>
<p><b>¿Considera que lo geométrico es importante para la comprensión de la derivada?</b></p>	<p>Sí, pues es que va ligado a eso porque uno de los objetivos del curso es ver cómo se aplica esa derivada, qué tiene sentido hablar de derivada entonces la parte geométrica juega un papel importante porque con eso muchas veces hay situaciones que están descritas en párrafos muy extensos usted dice “cómo puedo interpretar eso en un lenguaje matemático pero además me dio cuenta que esa situación la puedo encontrar en la vida real y además observando ciertas cosas sé que puedo tomar de allí un gráfico, puedo tomar ciertas características geométricas de las funciones con las que puedo relacionar variables allí y eso me</p>	<p>La noción geométrica del concepto reduce la dificultad en la comprensión del concepto de derivada, ya que esta representación la hace más fácil de entender, además de ser un claro ejemplo de la representación de lo que la docente cataloga VIDA REAL.</p>	<p>Se puede ver como el manejo entre las representaciones desglosa el concepto y lo hace más accesible.</p>

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	sirve para enfrentarme a la situación”, allí siempre es un componente importante.		
<p><b>¿En qué momento considera conveniente que el estudiante use una representación geométrica para la solución de algún problema relacionado con la derivada?</b></p>	<p>Pues yo pienso que ahí si hay como libertad pues porque digamos que en planteamientos de problemas a mí me gusta que ellos si pueden observar relaciones geométricas entre las variables que de lo que estén viendo en los problemas genial, hágalo, eso le ayuda, pero hay muchos otros estudiantes que como que no logran encontrar muy fácilmente esa relación, es más pedirles eso es bastante problemático, a veces como que no, les molesta, digamos en esa parte yo les sugeriría “intente hacer una relación, cree una situación allí, dese cuenta que no es tan abstracta, no está tan lejos de lo que usted ha visto en su vida”, a mí me parece un buen momento, en esa parte del planteamiento y enfocamos el sentido, eso le va ayudar a usted a tener un entendimiento de pronto un poco mejor de la situación.</p>		
<p><b>¿Cree que los diferentes tipos de representación que se hagan de un concepto matemático, en este caso de la derivada, afianza el concepto en el estudiante?</b></p> <p><b>¿Entonces si es conveniente esa relación entre lo geométrico, lo gráfico, lo simbólico?</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Pues bueno, usted puede presentarles un tema de esta forma y ahí está el tema pero a veces usted puede mostrarles que ese mismo concepto puede venir de tales partes, de otras situaciones se pueden obtener conceptos relacionados con lo que se está trabajando y digamos en esa variedad a veces yo diría que eso genera que el estudiante diga “bueno, eso no está como tan encasillado en un solo camino sino que se puede ver en otras partes y yo puedo empezarlo a adquirir por esta parte o por la otra”, digamos la persona puede encontrar una vía para acercarse y empezar a darle como sentido a todas las cosas que se han trabajado.</li> <li>2. Sí porque digamos que esa es la parte que uno busca cuando les empieza a hablar del concepto de función, uno quiere que ellos no se queden con una sola forma de observar la función, no se puede decir “solo quiero conocer la expresión algebraica”, no, uno busca esa variedad, entonces digamos que desde allá cuando uno empieza el curso a mí me gusta decirles “nos vamos a enfocar en que vamos a poder enfocar en todas esas representaciones” y eso se tiene a lo largo del curso y esa es una forma en la que yo intento construir los ejemplos, “este ejemplo lo encontré en tal parte, bueno en otro coloquemos esta otra y las relacionó”, eso es bueno para construir ejemplos.</li> </ol>		

#### 4.4.2. Rejillas entrevista estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Física

##### 4.4.2.1. Rejilla de análisis: entrevista estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Física - categoría C1. Sobre el concepto de derivada

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
¿Qué conocimientos previos deben tener los estudiantes para derivar?	Antes de derivar el primer concepto básico es entender qué es una función y entender las propiedades de la potenciación, después de que tengan ese concepto básico ya hacerlos entender qué son las funciones lineales qué significa una pendiente, para qué están, darle el uso en esa parte matemática, después de que el estudiante entiende para qué sirve se va a hacer más fácil entender cómo resolverla o depende del tipo de preguntas que le estén haciendo aplicar la derivada. Entonces el conocimiento previo que me parece a mí primero conocer las funciones y principalmente en este caso la función lineal, después de la función lineal mirar lo que es la pendiente porque la derivada tiene mucho que ver con la pendiente de una ecuación lineal entonces hacerlo entender el uso de la pendiente en una función.	Los conocimientos previos necesarios son el manejo de funciones y principalmente el de las funciones lineales mostrando la relación de la pendiente de una recta con la derivada de una función lineal.	La derivada tiene más fuerza en funciones lineales que en funciones no lineales para la estudiante, concluyendo que para este tipo de funciones toca ser mecánico y buscarle el sentido de estas.  Para la estudiante la diferencia principal es que el concepto se centra en la definición formal (limite) y la derivación se queda en proceso rutinarios.
¿Un estudiante sabe derivar cuándo?	Generalmente piensan que saben derivar cuando simplemente bajo el exponente y le resto 1, entonces ya supuestamente sabe derivar cuando en realidad lo que está aplicando es un método mecánico, entonces él va a saber derivar es cuando entienda a donde va a aplicar esa derivada, como se dice las aplicaciones, cuando él tenga las aplicaciones, cuando usted sepa hacer un problema de aplicación, ahí es donde usted realmente sabe derivar, antes de eso usted simplemente está haciendo pura mecánica, mecánica de los métodos de derivación pero ya cuando aplique la derivada allí es cuando realmente sabe derivar.	No se puede decir que un estudiante sabe derivar si resuelve muchas derivadas de funciones que al final terminan en un proceso mecánico, realmente alguien sabe derivar cuando de verdad sabe aplicar la derivada en la solución de problemas, en donde es necesario usar la derivada y las aplicaciones de esta, en ese punto él saben derivar.	La estudiante menciona que alguien sabe derivar cuando sabe cuándo y dónde aplicar las derivadas para la solución de problemas.
¿En el caso de que usted decía la función lineal pero en el caso de que sean derivadas no polinómicas?	Esa otra parte de las derivadas de las funciones que no son polinómicas, bueno sí, estaba no más en la de lineal, ya en otras derivadas tendría que entender para qué sirven en esos casos, o sea, si tienen que aprenderse obviamente, mucha parte mecánica entra allí, aprenderse la derivada de las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas	En la derivada de funciones no lineales el estudiante si tiene que aprenderse muchos procedimientos mecánicas y estudiar a fondo para que sirven estas estas derivadas.	Dice que es conveniente usar las aplicaciones de la derivada cuando se estudia las funciones y

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	entonces ahí si tiene que usar un poco como de mecánica y estudiar más afondo para qué sirven esas derivadas, ahí si no sabría cómo decirte en ese punto ya cuándo sabe derivar el estudiante o cómo quien dice saber para qué se pueden aplicar otro tipo de derivadas. No tengo como la respuesta más concreta.		su comportamiento, también a la hora de ver la razón de cambio.
<b>¿Esa parte gráfica funcionaría o ahí no sería tan potente?</b>	Sí, igual la parte gráfica funcionaría porque igual hay que conocer los gráficos de los logaritmos, de los exponenciales, de las funciones trigonométricas también para entender lo que significa la derivada para estas funciones entonces ahí igual empezaría por la parte gráfica.		La interpretación para la estudiante que se debe tener de derivada es la de cambio de variables con respecto a otra y el estudio de crecimiento decrecimiento de funciones.
<b>¿Hay alguna diferencia entre conocer el concepto de derivada y saber derivar?</b>	Pues si usted me dice el concepto de derivada uno se va al límite, a la función, etc. Y es saber derivar, pero hay muchos estudiantes que pueden saber derivar por los métodos que les dan después del concepto de derivada, de la definición y no saber el concepto, entonces cuál es la diferencia entre eso que el concepto de derivada como ya se puede representar, ya se puede explicar como de una forma más condensada entonces a veces no es tan útil que el estudiante sepa el concepto, obviamente tiene que conocer el concepto de derivada para poder definir a dónde la va a aplicar, o sea, donde va aplicar todas las derivadas pero un estudiante puede saber derivar sin necesariamente saber el concepto, eso no sería lo ideal o no estaría yo de acuerdo con eso porque para uno saber digamos las derivadas en este caso eso tiene que venir desde abajo, desde saber qué significa eso.	La diferencia entre los dos es que el concepto de derivada está relacionado con la definición de derivada (límite) y la derivación está más cercanas a procesos posteriores ya usando propiedades demostradas que se usan para resolver problemas.	
<b>¿Se centra en eso?</b>	El concepto de derivada sí, se centra en el límite.	El concepto de derivada se centra en la definición del mismo.	
<b>¿En qué momento es conveniente usar</b>	Aplicaciones de la derivada cuando vamos a maximizar o minimizar alguna función, pues yo lo veo principalmente en eso o cómo es el cambio de las curvas en las gráficas, si son	Cuando se está abordando el estudio de máximos y mínimos de una función, al igual que con la razón de cambio se puede	

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
aplicaciones de la derivada y en qué casos?	crecientes o si son decrecientes, otra aplicación está la razón de cambio, cómo es el cambio de alguna variable con respecto a otra, o sea más que todo como que la aplicación se puede ver en la relación de los eventos o de las variables con respecto al tiempo, o sea, saber el cambio de una variable con respecto a otra.	empezar con el estudio de las aplicaciones.	
¿Qué interpretación deben tener los estudiantes de la derivada?	Pues de acuerdo con lo que dije en la pregunta anterior la interpretación de crecimiento y decrecimiento, lo que dije en la anterior cómo cambian las variables respecto a otra.	La interpretación que deben tener los estudiantes tiene que ver con la interpretación de crecimiento y decrecimiento y el cambio de variables con respecto a otras.	

#### 4.4.2.2 Rejillas de análisis: entrevista estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Física- categoría C2. Formación fundamental del docente

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
¿Prepara sus clases de Cálculo I con ayuda de alguna herramienta tecnológica?	Pues para las clases de Cálculo I la única herramienta tecnológica yo creo que vería como útil para dictarla sería en la parte de gráficas, o sea programas donde me puedan especificar gráficas, me puedan dar detalles de algunas gráficas, en este momento no recuerdo programas, está Cabri creo que está, hay otros programas donde me ayudan a facilidad de yo entender algunas gráficas que no se pueden hacer en el tablero, en las otras partes de las ecuaciones, las funciones y las aplicaciones de la parte de derivadas, límites ahí como la parte de tecnología o mostrar diapositivas o algo así no me parece útil porque hay que explicar paso a paso lo que se está haciendo ya en la parte de razón de cambio por decirlo así si sería muy útil lo que es la parte de gráficos, o	Dentro de las herramientas tecnológicas que se pueden encontrar para la enseñanza del cálculo son las de representación gráfica, las que tiene mayor importancia, ya que son muy útiles a la hora de hacer graficas que son complejas en el tablero, además el uso de lo grafico a la hora de estudiar la razón de cambio, el movimientos y funciones resultan útiles.  El uso de herramienta tecnológica de tener una intención precisa, usarlo para mostrar el paso a paso de un proceso no es muy útil en el aula.	La estudiante a ser profesora da importancia al uso de herramientas tecnológicas (uso gráfico) para la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada.  Se marca importancia en la introducción del concepto de derivada mediante el uso de las representaciones gráficas.  Propone usar en la preparación de clases no solo el texto guía sino también otros libros y documentos de internet.  La estudiante señala que las diferencia de los estudiantes del área con los demás estudiantes son los curso



PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	<p>sea gráficos en cuanto a ver cómo cambia un movimiento, mirar la función que se maneja en esos cambios de función, otra tecnología que se podría utilizar en la parte de Cálculo I, tal vez comunicarse mucho con los estudiantes por la parte de talleres, internet, mandárselos todos ya que los estudiantes están más metidos en la parte tecnológica que en la parte de papel entonces se las va a hacer mucho más fácil y más agradable trabajar en un computador, ver los talleres en un computador, ver algunas cosas en el computador que verlas en el papel entonces por ese lado yo me metería en la parte tecnológica para llamar la atención del estudiante.</p>	<p>En el desarrollo de la tecnología debe también considerarse el uso de esta para mantener una comunicación más fluida con los estudiantes por parte del profesor, sumado a esto que pueden tener a su disposición en un mismo lugar todos los trabajados y sugeridos por el docente.</p>	<p>iniciales que tiene que ver los del área además propone que el curso de Cálculo I debería ser obligatorio con los estudiantes matemáticas ya que con estos se estudian los concepto a mayor profundidad.</p>
<p><b>¿Prepara usted sus clases con ejemplos y ejercicios o diferentes propuestas del aula o algún texto guía, usted de dónde saca esos ejercicios, usted como futura profesora qué haría?</b></p>	<p>Bueno ahí complementando un poco la primera pregunta, cuando yo preparo una clase de Cálculo si manejo mucha información de internet ya casi libros, ya casi libros no utilizo para preparar los talleres más que todo sino ejemplos y ejercicios que están en internet pues con toda la facilidad, o sea es más fácil conseguirlos en internet que usted colocarse a buscar en un libro entonces es más fácil hacerlo en un computador, entonces cuando yo preparo clases lo hago más que todo con la parte tecnológica, usar el internet, el libro lo utilizo principalmente es para definiciones, para prepararme para recordar lo que voy a enseñar.</p>	<p>Los ejercicios y ejemplos propuestos en clase se buscan en internet por la facilidad que se tiene para encontrar una amplia gama de los mismo, se usan libros para tener las definiciones que se van a usar y para preparar la clase.</p>	
<p><b>¿Entonces no utiliza un texto?</b></p>	<p>Guía no, un solo texto guía no, se toma de varias partes.</p>	<p>No se usa una sola fuente para la preparación de las clases y la creación de ejemplos.</p>	

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
<p><b>¿Ha propuesto alguna actividad en el aula con algún sistema de representación simbólico o gráfico</b></p>	<p>Ya te entendí, o sea cuando explico o se da la explicación de las definiciones y todo eso si se utiliza representación gráfica, principalmente gráfico porque la parte gráfica pienso yo que se dan mejor a entender ciertos conceptos más que todo en Cálculo porque se ven funciones, ecuaciones, diferentes tipos de ecuaciones, entonces me parece mejor utilizar la parte gráfica y a partir de esa parte gráfica como darle a entender a los estudiantes los símbolos y las representaciones que se dan en las matemáticas puesto que así como uno lo explica frente al salón una parte es lo que uno dice y otra parte son los símbolos que se utilizan en las matemáticas, entonces primero hacer la parte gráfica para introducir el tema y ya luego a partir de eso ya explicarle a los estudiantes los símbolos que se van a utilizar en las diferentes definiciones por ejemplo un <i>para todo</i> entonces explicarles entonces usted tiene que explicarles que un símbolo que es digamos así al revés entonces significa un <i>para todo</i> que si usted se lo da de una al estudiante él no va a entender eso pero entonces primero lo gráfico para introducir las definiciones, para dar las explicaciones y luego ya hacerle entender a los estudiantes que se utilizan símbolo como para reducir palabras o frases en la parte matemáticas</p>	<p>El uso de los grafico en el cálculo tiene mucha utilidad para la comprensión de las definiciones sobre todo en la introducción de las mismas.</p>	
<p><b>¿Primero lo propone desde lo gráfico?</b></p>	<p>Sí</p>	<p>Para introducir la derivada se propone primero desde lo gráfico</p>	
<p><b>¿Ha notado usted alguna diferencia entre los estudiantes del Área de</b></p>	<p>Pues yo sé que a nosotros nos dan una materia cuando entramos que es</p>	<p>La diferencia entre unos y otros es que los del área matriculan un</p>	

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
<p><b>Educación Matemáticas, entre ellos están los de la media y los de la básica con otros programas, ese curso es genérico entonces hay estudiantes de Ingeniería o Ciencias Naturales, cuáles serían las diferencias?</b></p>	<p>Matemáticas Fundamental en general ahí nos están dando la introducción al Cálculo yo que sepa sé que en las ingenierías no lo hacen, usted entra a primer semestre a ver Cálculo I y ya si no supo lo otro se rajó entonces esa es una de las diferencias, por ejemplo en el curso éramos 32 y ganamos 9 entonces no sé, seguro no llegaban con buenas bases porque la profesora si explicaba con plastilina, la verdad, no me puedo quejar, explicaba con plastilina pero de pronto porque son estudiantes de primer semestre y de una Cálculo I entonces llegan y hay una mortalidad tenaz.</p>	<p>curso antes y los ingeniería deben enfrentare al curso en primer semestre.</p> <p>De 32 en el curso aprobaron 9 entre estudiantes del área e ingeniería.</p>	
<p><b>¿Pero con los estudiantes que son del Área usted ve que ellos comparados con los otros les puede ir mejor?</b></p>	<p>No, pues la verdad es no te puedo responder claramente esa pregunta porque en el curso, yo sé que yo estaba en el curso y soy de la Licenciatura sé que uno que otro al final me di cuenta que era de la básica y sé que habían muchos que estaban repitiendo de la Licenciatura entonces no sé quiénes eran de Ingeniería</p>		
<p><b>Entonces usted ya saben que hay unos que sí son del Área y unos que no, la mayoría no eran de la Licenciatura, eran poquitos</b></p>	<p>Entonces qué diferencia, que de pronto no entendían muy bien los conceptos, yo me imagino que es eso, como nosotros si vemos una materia antes de Cálculo I que es Matemáticas Fundamental entonces llegamos con unos conceptos más claros sobre funciones que es lo principal entonces había otros estudiantes del área que no tenían esos conceptos tan claros, así lo hayan visto en el colegio porque en realidad muchas de las cosas que se ven en Cálculo I se ven en el colegio desde noveno hasta once, o sea eso si es verdad pero llegan y no tienen conceptos claros</p>	<p>Los conceptos previos adquirido por los estudiantes del área podrían ser una diferencia a la hora de abordar el curso.</p>	

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	digamos de función, de las gráficas entonces como que no los tenían claros entonces como llegan de primerazo al curso con deficiencias en esos conceptos claros, entonces esa es como la diferencia, que no tienen conceptos claros y por eso les queda como más duro entenderlos.		
<p><b>¿Considera que los estudiantes del Área de Educación Matemáticas deberían tener un curso de Cálculo exclusivo para ellos?</b></p>	<p>No, la verdad no porque nosotros si vamos a ser docentes en unos años antes me parecería muy bueno que el Cálculo que vemos nosotros fuera el mismo Cálculo pero no que ven los ingenieros sino de los matemáticos porque aunque para nosotros es importante saber para qué sirve y todo eso digamos que le falta más como la parte, o sea como meterse más en las matemáticas, entonces en el Cálculo que ven los matemáticos tengo entendido, es un Cálculo más profundo, con conceptos más profundos en cambio el Cálculo que ven los ingenieros que es el mismo Cálculo que vemos nosotros es como más digamos por encima, entonces me parecería genial que el Cálculo que vemos nosotros los licenciados fuera el mismo Cálculo de los matemáticos puros aunque sé que se pueden matricular pero como no es obligatorio uno que se va a poner en esa, uno más adelante si va a decir “lo hubiera matriculado con los matemáticos”, pero uno entra a primer semestre y se matriculó y ya, pero si me parecería, no solo para nosotros pero si verlo con los matemáticos puros.</p>	<p>No debería de haber un curso exclusivo para estudiantes del área lo que debería de pasar es que los estudiantes del área se les exija matricular los cursos con los estudiantes de matemáticas ya que en estos curso se estudia a más profundidad los conceptos</p>	
<p><b>¿Quiere agregar algo más, alguna pregunta que vio en el curso?</b></p>	<p>En verdad de agregar algo más porque el curso me pareció muy bueno, la profesora</p>		

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	<p>me pareció que enseñó muy bien aunque si me dio como sorpresa cuando perdieron tantos y más que todo repitentes de Cálculo I, de los repitentes me di cuenta que no más pasó uno de resto todos como que la volvieron a perder, entonces eso si me pareció, no sé si hay que, cambiar la materia no, eso no se puede pero como presionarlos más o, no de parte de la profesora porque no estamos en el colegio pero como hacerlos entender que, crear como más conciencia, igual el que está aquí es porque quiere no porque lo obligan y, ya que estamos aquí, he escuchado que “que los estudiantes, que cuando entran”, digamos que consentir más a los estudiantes para que no haya tanta mortalidad, yo lo entiendo como así, pues en realidad yo no estoy mucho con eso porque el que está aquí es porque quiere y va a ponerse las pilas, estudiar por aparte, buscar monitorias, etc. Pero si se le da la facilidad al estudiante de que “hay pobrecitos, están perdiendo muchos entonces vamos a crear el programa para tal cosa y entre preparado”, entonces en realidad no le estamos formando el carácter sino que estamos simplemente llevándolo y cualquiera se puede graduar y en realidad es que tiene que tener no digamos la inteligencia porque todos somos inteligentes sino crear consciencia de lo que estamos haciendo porque si no todos se pueden graduar de la Licenciatura sino que como todo es tan fácil “me llevan por el caminito y me gradúe” aunque obviamente así lo lleven</p>		

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	por el caminito uno tiene que esforzarse pero en realidad no estoy de acuerdo con que se hagan esas facilidades porque no crearía como carácter en el estudiante así haya toda la mortalidad que haya, así le toque recuperar Cálculo I diez mil veces pero que lo haga porque pudo no porque le dieron la facilidad de hacerlo.		

#### 4.4.2.3. Rejilla de análisis: entrevista estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Física - categoría C3. La visualización en el concepto de derivada

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
¿Cómo se enseña el concepto de derivada?	Bueno pues para enseñar el concepto de derivada empezaría primero introduciendo qué significa crecimiento y decrecimiento y qué son las curvas en una función, por decirlo así, empezar a ver de que en una función o en alguna curva usted puede plantear diferentes pendientes en diferentes puntos y empezar a definir la derivada de una función como la pendiente en ese punto.	Para la enseñanza del concepto inicio con las curvas de las funciones introduciendo el crecimiento y decrecimiento de estas, después indagar sobre las pendientes de la recta tangente a esa curva en diferentes puntos.	Muestra las representaciones gráficas y geométricas como fundamental a la hora de trabajar en problemas y en la enseñanza del concepto, además afirma que gran parte de lo que una aprende es visual y esto ayuda a la hora estudiar el concepto de derivada.
¿Utiliza alguna herramienta tecnológica para estudiar cálculo, cuáles herramientas, usted como estudiante utilizó alguna herramienta?	Pues en realidad sería útil hacerlo pero en realidad no utilice ninguna herramienta.	No se utiliza ninguna herramienta tecnológica como ayuda para estudiar el curso de cálculo I.	
¿Considera usted que el uso de algunas herramientas tecnológicas potencian el aprendizaje en los estudiantes?	Aunque no lo utilicé pero sí potenciaría el aprendizaje de los estudiantes para, digamos si yo lo hubiera hecho hubiera tenido más claro la respuesta en la primer pregunta de cómo yo enseñaría el concepto pero pues como no lo hice no tengo como muy claro eso entonces sí	A pesar de no usar ninguna de estas herramientas para el curso, si son importantes a la hora comprender mejor el concepto y como enseñarlo	

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	sería bueno y si consideraría que lo debería de hacer, es más lo tengo que hacer así ya haya pasado lo curso, lo tengo que manejar porque ya de aquí salen otros cursos de Cálculo entonces si tengo algo que no sé responder de Cálculo I pues me va a traer más problemas para las demás materias.		
<b>¿Considera que lo geométrico es importante en la comprensión de la derivada?</b>	Sí, si lo considero importante la parte geométrica puesto que todo o la gran mayoría de lo que uno aprende entra de forma visual y expresar la derivada como algo geométrico digamos desde ese punto de vista me va ayudar a entender mejor donde lo aplico o cómo lo aplica, cuándo se vuelve importante la derivada.	Cuando se esté trabajando máximos y mínimos el grafico de la función ayudara a entender el uno y el otro.	
<b>¿En qué momento considera conveniente que el estudiante use una representación geométrica para solucionar algún problema relacionado con la derivada?</b>	Cuando va a resolver por ejemplo problemas de máximos y mínimos es importante porque ahí si usted plantea la función de forma geométrica va a entender por qué en ese punto es algo máximo o por qué en ese punto es algo mínimo.	Cuando se esté trabajando máximos y mínimos el grafico de la función ayudara a entender el uno y el otro.	
<b>¿Cree que los diferentes tipos de representación que se hagan de un concepto, en este caso de derivada, afianza el concepto en los estudiantes?</b>	Sí, eso es lo que venimos hablando yo hago de cuenta lo de representaciones a lo gráfico, entonces según lo que respondí anteriormente eso va a ayudar a que el estudiante conozca más el concepto y lo entiendan.	Llevar las distintas representaciones a lo grafico ayudara a que el estudiante conozca y entienda el concepto.	
<b>Y pasar de lo analítico a lo geométrico, a lo gráfico</b>	Eso va hacer que entienda mejor lo que está haciendo no que simplemente lo haga de forma mecánica que eso es lo que se práctica mucho, que eso es lo que hacen los profesores que tratan de meterle al estudiante solamente lo mecánico y “hágalo así, de esta forma” y no dejan que	Esto ayuda a que el estudiante comprenda lo que está haciendo y no termine haciendo un proceso mecánico.	

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	él resuelva algo de otra forma porque lo entendió así sino que tiene que hacerlo como él lo explicó y punto, si no le ponen malo, entonces yo no estoy de acuerdo con eso entonces lo geométrico o las representaciones ayudan a que el estudiante resuelva el problema con el mismo concepto pero no que lo haga de forma mecánica como se lo enseñó el profesor sino que entienda lo y resuelva.		

#### 4.4.3. Rejillas de entrevista: estudiante de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

##### 4.4.3.1. Rejilla de análisis: entrevista estudiante de Educación Básica con Énfasis en Matemáticas categoría C1. Sobre el concepto de derivada

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
¿Qué conocimientos previos deben saber los estudiantes para derivar?	Tener algunos conocimientos de las funciones por ejemplo a mí me parece que el curso estuvo muy bien porque al principio a uno siempre le dan lo que ve en el colegio, le hacen un refuerzo antes de entrar al tema de límites o derivada, entonces me parece que así como está bien		La representación que perdura en el estudiante sobre la derivada es la definición tradicional (límite).
¿Un estudiante sabe derivar cuándo?	Pues después de los límites uno como que va tratando de mirar qué es lo que sigue porque hay una parte donde le dicen a uno del límite cuando $h$ tiende a 0 (cero) que le dan la función que es $f(x) + h - f(x)/h$ entonces uno va más que todo relacionando con eso.	La estudiante argumenta el saber derivar cuando se conoce la definición de la derivada a partir de sus límites.	
¿Hay alguna diferencia entre conocer el concepto de derivada y saber derivar?	Sí porque pues el concepto pues para uno saber llegar tiene que saber bien el concepto pero en cambio si usted sabe el concepto y no lo sabe utilizar pues ahí no está haciendo nada.	Se puede evidenciar lo que parece ser la diferencia entre derivar y saber derivar ya que se ve en lo que ella denomina el concepto y el saber	Marca una diferencia entre saber derivar y derivar, derivar se refiere al concepto y saber derivar significa utilizar ese concepto.



PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
<p><b>¿En qué momento es conveniente usar aplicaciones de la deriva y en qué casos?</b></p>	<p>Pues yo pienso que en los ejercicios que la profesora nos dejaba de optimización y todo eso Las aplicaciones me parece que es más conveniente usarlo en las funciones, las gráficas de las funciones, cuando dicen que la gráfica de la curva porque más que todo con eso se pueden mirar los máximos, los mínimos, se puede mirar si es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, entonces la derivada da mucha información sobre la gráfica de una función no como antes que con la que hallaba X y los puntos de ahí entonces es más que todo como el bosquejo pero eso ya tiene más información a parte de esa.</p>	<p>derivar a lo cual ella denomina el saber utilizar el concepto. Es conveniente ver las aplicaciones en lo referente a la teoría (funciones, graficas de funciones, etc.) ya que a partir de estas nociones anteriormente mencionadas es más factible evidenciar lo enunciado por el profesor.</p>	<p>Se evidencia una relación entre las aplicaciones de la derivada y el uso teórico-práctico del concepto, con esto mejorar lo enseñado por el profesor.</p>
<p><b>¿Qué interpretaciones deben tener los estudiantes de la derivada?</b></p>	<p>Pues es que a mí me parece que a veces uno llega pensando en que eso únicamente le sirve a uno para eso pero uno ve que no porque por ejemplo eso nos sirve también para, por ejemplo en el caso de la optimización que uno quería hacer una caja y que tenía tantos, entonces que de cuánto serían las dimensiones entonces eso sirve mucho porque son casos que uno puede ver que si se presentan, porque por ejemplo si a uno le dan una hoja y ve que la hoja y necesita hacer una caja que más o menos mida tanto, entonces que cuánto se le va, entonces uno puede mirar eso, entonces yo creo que no</p>	<p>La optimización es importante ya que de ahí es posible desprender la teoría y ligarla a la vida real, es ahí donde se puede ver lo enriquecedor de las aplicaciones y la importancia del curso en si.</p>	<p>Se da importancia las aplicaciones de la derivada entre ella el de optimización, ya que por medio de este se da mejor la relación del concepto y la vida real.</p>

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	piensen que solamente va a ser como para el curso y solamente por pasarla y ya sino que eso sirve para muchas otras cosas.		

**4.4.3.2. Rejilla de análisis: entrevista estudiante de Educación Básica con Énfasis en Matemáticas - categoría C2-FFD. Formación fundamental del docente**

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
¿Prepara sus clases de Cálculo I con ayuda de alguna herramienta tecnológica?"	Pues sí porque por ejemplo al momento cuando voy a resolver un problema y todo eso y entonces que por lo menos no tenía la gráfica entonces utilizaba Geogebra para mirar las gráficas y por medio de eso mirar si estaba bien lo que estaba realizando o no.	Se puede ver como la estudiante argumenta la importancia de las Tic's donde hace especial alusión a Geogebra donde corrobora los gráficos que esta ha desarrollado.	La corroboración de las gráficas por parte de un programa hace pensar la importancia de las Tics's como un medio didáctico que permite estimular el pensamiento y generarlo.
¿Prepara usted sus clases con ejemplos y ejercicios o diferentes propuestas del aula o algún texto guía, usted de dónde saca esos ejercicios, usted como futura profesora qué haría?	Pues así que prepararme no, pues si mucho los ejercicios que la profesora dejaba y eso que casi no los realizaba, solamente algunos ahí como por matar tiempo porque a mí no me ha gustado como ponerme a estudiar que para ganar no.		
¿O sea que según eso no veas otro texto diferente al propuesto en la clase?	No, al de la clase no.		
¿Ha propuesto alguna, como tú nos contaste de mirar la gráfica en un programa entonces, ha propuesto alguna actividad en algún sistema de representación simbólico o gráfico con respecto al curso? ¿Cuál? ¿Por qué?	Si, Geogebra, Porque pues es el más accesible que hay porque Cabri necesita licencia, y con ese programa vengo trabajando desde el curso de las TICs, entonces es el programa con el que más me he integrado.		

4.4.3.3. Rejilla de análisis: entrevista estudiante de Educación Básica con Énfasis en Matemáticas - categoría C3- VD. visualización didáctica

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
¿Cómo se enseña el concepto de derivada?	Pues, cómo enseñaría yo el concepto de derivada, pues para explicarle a alguien sería algo muy fácil porque ya tendría el concepto solamente sería como explicarle, para enseñarle uno tendría que tener muy claro el concepto para enseñarle a alguien y pues más que todo aplicando las formulas, entonces primero dándoles las fórmulas y diciéndole cuál es la forma de aplicarlas, en qué casos puede utilizar la derivada y así.	Para la enseñanza de un concepto se debe tener muy claro el mismo, después se deben dar las formular y decirles en que momento es conveniente utilizarlas.	Se da prioridad a la memorización de fórmulas como un elemento crucial a la hora de enseñar.  Las herramientas tecnológicas resultan utilices a la hora de relazar gráficos y ayudarse de estas.
¿Utiliza herramientas tecnológicas para estudiar Cálculo y cuáles y por qué?	Pues, Geogebra, aunque no estudie mucho Cálculo así que digamos pero fue la que más he usado a lo largo de lo que he llevado aquí en la Universidad y la que más estoy acostumbrada a utilizar, pues con esta herramienta se facilita más que todo las gráficas entonces por eso	Se utiliza Geogebra para apoyarse de lo gráfico.	El uso de representaciones graficas se utiliza en algunos momentos pero tiene más prioridad el uso de representaciones algebraicas.
¿Considera usted que el uso de algunas herramientas tecnológicas potencia el aprendizaje de los estudiantes? ¿Porque?	Sí porque hay muchos estudiantes que son muy distraídos por ejemplo en los colegios entonces muchos estudiantes son distraídos y todo eso entonces la forma de llamar la atención puede que a ellos les llame más la atención lo tecnológico entonces implementando eso ya ellos pueden ver que, van a llamarle más la atención eso, entonces ya pueden prestar más atención a lo que se habla de eso	El uso de tecnología puede ser utilizado para llamar mejor la atención de los estudiantes a la hora abordar algún concepto.	
¿Considera que lo geométrico es importante en la comprensión de la derivada?	Sí, Porque uno al momento solamente números como que no en cambio si usted ve y hace la gráfica entonces ve que lo que está haciendo tiene una	La gráfica ayuda mucho en la comprensión.	

PREGUNTA	DESCRIPCIÓN	ARGUMENTOS	TENDENCIA
	representación aunque sea y que puede hallarlo también de otra forma y usted puede utilizar eso para otras cosas entonces usted ya tiene la gráfica y usted puede mirar a ver en la gráfica ver lo que está haciendo y cómo lo que usted tiene numéricamente puede ser representado en una gráfica entonces pues yo pienso que sí, sí ayuda mucho.		
<b>¿En qué momento considera conveniente que el estudiante use una representación geométrica para la solución de algún problema relacionado con la derivada?</b>	Pues yo creo que más que todo sería en cuanto a, pues para lo de las gráficas en la derivada, pues al momento de hallar la derivada puede utilizar las gráficas, ahí si no sé aunque Muchas veces no, en algunas ocasiones pero no todas las veces siempre es como más necesario lo matemático, o sea, los números.	Las gráficas podrían ayudar en el momento de encontrar la derivada, pero en la mayoría de las ocasiones es mejor utilizar el método algebraico.	
<b>¿Cree que los diferentes tipos de representación que se hagan de un concepto matemático, en este caso la derivada afianza el concepto en el estudiante?</b>	Pues sí porque por medio de lo geométrico entonces el estudiante va a comprender mejor a qué se quiere llegar entonces me parece que sí.		

#### 4.4.4. Rejilla de análisis: documentos institucionales y texto guía

Argumento	Tendencia
<p>El curso de Cálculo I tiene los siguientes objetivos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Capacitar al estudiante para manejar con destreza las técnicas propias del Cálculo diferencial y sus aplicaciones a la resolución de problemas.</li> <li>-Ampliar y mejorar la capacidad para plantear, manejar e interpretar argumentos matemáticos, contribuyendo así al desarrollo de la disciplina mental y de trabajo de los estudiantes.</li> </ul> <p>El programa del curso de cálculo I tiene bien definido un listado de temáticas a abordar en el transcurso del semestre distribuido en unidades.</p> <p>La modalidad del curso puede ser con clase magistral con un docente y un tallerista una vez a la semana o clase con un profesor fijo para el grupo que puede tomar la misma modalidad de usar un día para realizar taller.</p> <p>Los estudiantes del Área que matriculan el curso de Cálculo I en el Departamento de Matemáticas deben pasar primero por una serie de cursos de los cuales algunos de ellos son prerrequisitos para dicho curso.</p> <p>Dentro de los cursos que deben matricular se encuentran cursos de geometría, precálculo y lógica.</p> <p>El texto guía es diseñado por profesores del departamento de matemáticas que dictan el curso en su mayoría a estudiantes de ingenierías.</p> <p>El texto guía está muy relacionado con el programa del curso en sus contenidos, además los ejercicios propuestos en el libros son tomados encuentra como referencia para la prepara con de exámenes.</p> <p>El curso de Cálculo tiene un libro guía del mismo pero esto no deja de lado alguno que otro libro adicional.</p>	<p>El curso tiene como objetivos que los estudiantes tengan una buena destreza en la utilización del Cálculo con sus aplicaciones para la solución de problemas, puede estar mediado por la alta presencia de estudiantes de ingeniería.</p> <p>El curso considera contenido y metodologías “genéricas” esto quiere decir que no se considera los estudiantes presentes en el curso y las particularidades de cada uno según su programa académico.</p> <p>El curso está diseñado como una lista de contenidos que poco muestran una reflexión Didáctica sobre lo que se quiere enseñar.</p> <p>No se evidencia en el programa del curso la importancia del uso de la visualización como una elemento a considerar a la hora de la enseñanza al igual que no pareciese tener una prioridad fundamental el cambio entre los sistemas de representación.</p> <p>El programa del curso y el texto guía tienen una estrecha relación y se puede ver en ambos un listado de contenidos temáticos que poca relación con elementos visuales, se da más prioridad a las representaciones algebraicas.</p> <p>No se evidencia claramente que los cursos anteriores potencien la visualización en los estudiantes del área, se puede percibir muy indirectamente en los curso de geometría haciendo un revisión al programa del curso de resto es relegado este papel.</p> <p>El uso de herramientas tecnológicas en el aula de clase no se evidencia en ninguno de estos documentos.</p>

#### 4.4.5. Rejilla de análisis: observación

Descripción	Argumento	Tendencia
<p><b>P:</b> antes de definir formalmente la derivada vamos hacer primero una motivación la cual consiste en consideración de un problema y enfocándonos en la interpretación geométrica de lo que va hacer la derivada.</p> <p><b>P:</b> el problema es el siguiente “hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función F en el punto p”.</p> <p><b>O:</b> la profesora hace la gráfica de una función en el tablero para mostrar el problema, además trazar una recta tangente a un punto.</p> <p><b>P:</b> como en el curso ya se han avanzado en algunos conceptos como es el de funciones y rectas vamos a pensar en que se necesita para hallar la pendiente de una recta.</p> <p><b>P:</b> como ya tenemos un punto de la recta tangente vamos a considerar otro punto sobre la función.</p> <p><b>P:</b> ¿pasa con esa recta que se genera por esos dos puntos? ¿Es la recta secante cierto?</p> <p><b>O:</b> traza dos puntos sobre la función graficada en el tablero y traza la recta secante.</p> <p><b>P:</b> le damos como nombre L1 a la recta tangente y L2 a la recta secante, ahora vamos a pensar que vamos a mover la recta L2 para que coincida con L1 con esto encontrando la pendiente de la recta tangente.</p> <p><b>O:</b> escribe en el tablero la pendiente de la recta secante y muestra cómo se acercan los puntos de la recta secante para encontrar la pendiente de la recta tangente.</p> <p><b>P:</b> la pendiente de la recta secante se acerca a pendiente de la recta tangente.</p> <p><b>P:</b> escribimos esta interpretación geométrica en términos de limite</p> $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$	<p>En la presentación del concepto no hay una interacción entre el profesor y los estudiantes.</p> <p>En la presentación del concepto se usa lo geométrico como ayuda.</p> <p>Para la presentación del problema de la recta tangente a una curva en un punto debe haber un muy buen manejo del concepto de límite.</p> <p>Hace uso de la definición de derivada.</p>	<p>En la presentación del problema la modalidad empleada por el profesor es de carácter expositivo.</p> <p>Utilización de conceptos previos por parte de los estudiantes.</p> <p>Se apoya en lo geométrico para la presentación del concepto.</p> <p>El papel de los estudiantes es más pasivo que activo a pesar de que en la solución de ejercicios el profesor pregunta en desarrollo del procedimiento.</p> <p>La metodología usada por el profesor es de carácter tradicional. En el procedimiento consulta pasos a los estudiantes los cuales algunas veces responden y muchas otras no, al final el profesor termina respondiendo.</p> <p>Los ejemplos propuestos por el profesor dan más importancia a lo</p>

Descripción	Argumento	Tendencia
<p><b>P:</b> ahora miremos a la definición de derivada.</p> <p><b>O:</b> después de mostrar en el tablero el problema y darle solución a través del límite, escribe en el tablero la definición formal de derivada.</p> <p><b>P:</b> En cuanto a la notación que se va a usar más frecuentemente en esta parte es “<math>f'(c) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}</math>”.</p>		<p>algebraico y no se toma en cuenta lo geométrico y visual.</p>
<p><b>P:</b> ahora vamos aplicar lo que acabamos de ver, encontremos la derivada de <math>f(x) = k</math></p> <p><b>O:</b> la profesora escribe la derivada por definición en el tablero de la función anteriormente dicha preguntando a los estudiantes quien es <math>f(x + h)</math></p> <p><b>P:</b> ¿cuánto me da el límite de esta función? como ya hicimos la derivada de una constante por la definición ya después no es necesario usar esto para saber que la derivada de una constante es cero.</p> <p><b>O:</b> el profesor va preguntando mientras va haciendo el procedimiento en el tablero pero solo dos estudiantes participan.</p> <p><b>P:</b> ahora hagamos otro ejemplo <math>g(x) = x^3 + 2x</math> hallemos la derivada.</p> <p><b>O:</b> el profesor resuelve la derivada en el tablero y sigue preguntando a los estudiantes el proceso.</p> <p><b>O:</b> el profesor resuelve de la misma forma la derivada de la función raíz y de algunas potencias ya sin usar la definición de derivada.</p> <p><b>P:</b> ahora vamos a ver algunas propiedades de la derivada “suma de derivada, producto división, entro otras”</p> <p><b>P:</b> demostremos la derivada del producto y el cociente por medio de la definición de derivada.</p> <p><b>O:</b> resuelve en el tablero las dos propiedades.</p> <p><b>P:</b> ahora hagamos dos ejemplos unos con potencias y cociente y otro solo con potencias.</p> <p><b>O:</b> en la solución de estos dos ejemplos igual son resueltos por el profesor pero sigue preguntando a los estudiantes en el procedimiento.</p>	<p>Usa la definición de derivada para resolver algunos ejercicios.</p> <p>Hechas las derivadas de algunas funciones por medio de la definición usa la derivada como un algoritmo.</p> <p>Usa conocimientos previos para el procedimiento.</p>	<p>El uso de lengua algebraico predomina en la construcción del concepto.</p> <p>Lo algorítmico juega un papel fundamental.</p> <p>En la solución de ejemplos se evidencia una buena participación de algunos estudiantes impulsados por preguntas del profesor.</p> <p>Se deja de un lado lo geométrico en situaciones donde podría aportar.</p>

Descripción	Argumento	Tendencia
<p><b>P:</b> ahora hagamos el siguiente ejemplos hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica <math>f(t) = \sqrt[3]{t^2} - \sqrt[3]{t} + 4</math> en <math>t = 1</math></p> <p><b>P:</b> como la pendiente se define como la derivada evaluada en el punto.</p> <p><b>O:</b> el profesor escribe en el tablero el problema y escribe que la pendiente de la tangente es igual a la derivada de la función en un punto.</p> <p><b>P:</b> ¿Cuál es la derivada de f? en este caso es útil reescribir as raíces en potencias para luego derivar.</p> <p><b>O:</b> el profesor resuelve la derivada en el tablero con la misma metodología empleada en este problema ni en los anteriores usa lo geométrico solo hace uso de la representación simbólica.</p>		
<p><b>P:</b> vamos a ver derivada y continuidad</p> <p><b>P:</b> recordemos entonces sea f una función derivable en “a” esto quiere decir que <math>f'(a)</math> existe lo que quiere decir que el limite existe.</p> <p><b>P:</b> si el limite existe cuando “h” tiende a cero existe entonces los limites laterales existen.</p> <p><b>O:</b> el profesor escribe en el tablero la definición de derivadas laterales.</p> <p><b>P:</b> se demuestra la otra definición de derivada.</p> <p><b>P:</b> ahora miremos el teorema de continuidad. Si f es derivable en “a” entonces f es continua en “a”.</p> <p><b>O:</b> el profesor demuestra en el tablero el teorema anteriormente mencionado.</p> <p><b>P:</b> ahora hagamos la derivada de valor absoluto de x, recordemos como se escribe esta función.</p> <p><b>P:</b> ¿Qué va a suceder aquí?, ¿Por qué será que esta función no es derivable? Pensemos entonces en el teorema anterior, f es continua ¿Qué es lo que falla entonces?</p> <p><b>P:</b> ¿recuerde como es la gráfica de esta función? Las formas son importantes, mire que en <math>x=0</math> la función tiene un pico, ¿si a usted le preguntan cuántas rectas tangentes pasan por ese punto? Infinitas.</p>	<p>Demuestra teorema sobre continuidad de funciones derivables y niega el reciproco por medio un ejemplo.</p> <p>El profesor muestra cómo funcionan los teoremas en la solución de ejercicios.</p> <p>El profesor se apoya de la representación gráfica de la función valor absoluto para mostrar la no derivabilidad en cero.</p>	<p>Para la construcción del concepto persiste la realización repetitiva de ejercicios de carácter algebraico.</p> <p>Predomina una metodología tradicional por parte del profesor.</p> <p>En algunas situaciones el profesor se apoya de lo geométrico para reforzar la teoría.</p>



Descripción	Argumento	Tendencia
<p><b>P:</b> si queremos hallar la derivada de valor absoluto de x para valores mayores a cero entonces la derivada va a ser uno y para los valores menores que cero es menos uno.</p> <p><b>P:</b> el problema es en cero lo cual indica que una función continua no siempre es derivable.</p> <p><b>O:</b> se apoya de la gráfica de la función valor absoluto para mostrar que en los picos o esquinas existen infinitas rectas tangentes al igual que si una función es continua esto no garantiza derivabilidad.</p> <p><b>P:</b> mire algunos ejemplos sea la función a trozos buscando los valores de a y b donde la función sea derivable en un x.</p> <p><b>P:</b> si yo quiere que sea derivable entonces vamos a mirar las derivadas laterales y si es derivable en ese punto entonces es continua en el mismo.</p> <p><b>O:</b> el profesor empieza a resolver el problema usando las derivadas laterales e igualando, para después despejar, mientras el profesor va escribiendo pregunta a sus estudiantes pasos del procedimiento.</p> <p><b>O:</b> el profesor llena el tablero en la solución de este ejercicio.</p> <p><b>P:</b> hacer los ejercicios de la 154 a la 155 del texto guía para estudiar lo visto hasta el momento.</p>		
<p><b>P:</b> Aplicación de la derivada como razón de cambio como por ejemplo – movimiento de un objeto, la velocidad promedio y velocidad instantánea del mismo.</p> $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ <p>La expresión razón de cambio se refiere a la derivada.</p> <p><b>O:</b> presenta la razón de cambio en su expresión analítica, menciona algunos ejemplos de razón de cambio y propone hallar la velocidad promedio indagando con el significado que tienen los estudiantes de la</p>	<p>El profesor muestra algunos casos de aplicación de la razón de cambio.</p> <p>No se apoya de lo visual para la presentación de la velocidad promedio.</p> <p>El profesor constantemente está</p>	

Descripción	Argumento	Tendencia
<p>misma, el profesor no usa ninguna representación geométrica para presentar esto.</p> <p><b>P:</b> ahora se hacen algunos ejemplos para calcular la velocidad promedio para después terminar definiendo la velocidad instantánea.</p> <p><b>O:</b> resuelve algunos ejemplos en el tablero pero no es tan riguroso en la presentación de la velocidad instantánea pero tenía mostrando la relación con la pendiente de la recta tangente.</p> <p><b>P:</b> resolvemos ejemplos con la velocidad instantánea, hallemos la velocidad instantánea de la siguiente función en un tiempo determinado.</p> <p><b>O:</b> siempre pregunta a los estudiantes para tener esa comunicación constante con ellos mientras desarrolla el ejemplo en el tablero.</p> <p><b>O:</b> el profesor responde la inquietud sobre si es posible hallar el tiempo para el cual la velocidad es cero, con el ejercicio que estaba resolviendo.</p> <p><b>P:</b> ¿para qué valores la derivada de esa función es cero? Un estudiante responde.</p> <p><b>P:</b> sabemos que la derivada corresponde a la pendiente de la recta tangente que pasa por un punto, ¿yo que puedo decir de una pendiente que tiene pendiente cero? Una horizontal.</p> <p><b>O:</b> se detiene en el ejercicio para dejar claro lo que significa que la pendiente sea cero.</p> <p><b>P:</b> demostremos que la razón de cambio del volumen de la esfera con respecto al radio corresponde al área superficial.</p> <p><b>P:</b> ¿Qué debo conocer?, el volumen de la esfera y el área superficial.</p> <p><b>O:</b> pregunta a los estudiantes constantemente en la solución de ejemplos para ver si se entiende en proceso.</p> <p><b>P:</b> lo que le están preguntado es si la derivada del volumen corresponde a su área superficial.</p>	<p>preguntando a los estudiantes el paso a paso en la solución de ejemplos.</p> <p>El profesor menciona la relación entre velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente.</p> <p>El profesor menciona el significado geométrico de que implica la derivada igualada a cero o velocidad igual a cero.</p> <p>El profesor va más prioridad o lo algebraico que lo grafico o geométrico.</p> <p>La derivada de las funciones trigonométricas se convierten en un algoritmo para resolver no se muestra el contenido visual de</p>	

Descripción	Argumento	Tendencia
<p><b>O:</b> el profesor termina el ejemplo en el tablero.</p> <p><b>P:</b> ahora miremos la derivada de las funciones trigonométricas, empecemos con la función seno.</p> <p><b>P:</b> para hacer esta derivada es necesario hacerlo por medio de la definición de derivada.</p> <p><b>P:</b> recordemos la gráfica de la función seno, miren que ella es una curva periódica y suave entonces se ve que tiene un buen comportamiento eso quiere decir que va a ser derivable en todo su dominio.</p> <p><b>O:</b> el profesor usa algunas identidades trigonométricas para hallar la derivada y constantemente está preguntando a los estudiantes.</p> <p><b>P:</b> ya resuelto esta derivada ya no es necesario hacer todo este proceso para conocer la derivada de seno, de forma análoga vamos hacer la derivada de coseno.</p> <p><b>O:</b> el profesor termina de hacer la derivada en el tablero, además menciona que las demás funciones trigonométricas son cocientes por lo tanto se debe resolver con la derivada del cociente.</p> <p><b>P:</b> ahora vamos hacer la derivada de las demás funciones trigonométricas.</p> <p><b>O:</b> termina de hacer la derivada de las demás funciones trigonométricas pero ya no con la definición de derivada sino con las propiedades.</p> <p><b>P:</b> se va a trabajar en la derivada de la función exponencial.</p> <p><b>O:</b> el profesor presenta la derivada de la función exponencial y realiza algunos ejemplos de la deriva con función exponencial.</p> <p><b>O:</b> el profesor empieza el tema de la diferencial y muestra la relación que tiene este con la pendiente mediante una gráfico.</p> <p><b>P:</b> miremos un ejemplo se <math>y = \frac{x}{x+1}</math> hallemos el diferencial de “y” y compare el <math>dy</math> con <math>\Delta x</math> en <math>x = 1</math> y <math>dx = \Delta x = 0,1</math>.</p>	<p>estas, solo con la función seno se puso a pensar en los estudiantes como sería el grafico.</p> <p>Da prioridad a la ejercitación para la</p>	

Descripción	Argumento	Tendencia
<p><b>O:</b> la misma metodología de trabajo en la solución de ejemplos pregunta a los estudiantes mientras realiza el ejemplo en el tablero.</p> <p><b>P:</b> en el estudio de razones relacionadas es importante saber que siempre está pensando el cambio con respecto a una variable.</p> <p><b>P:</b> para comenzar vamos a pensar en un ejemplo sea el un recipiente con forma de cono invertido del cual sale agua a una cierta velocidad.</p> <p><b>O:</b> se hace un dibujo del problema y se pregunta a los estudiantes cual es el volumen del cono</p> $v = \frac{1}{3}r^2h$ <p><b>P:</b> ¿Cuántas variables se tienen?, tres las cuales generan un cambio en el volumen.</p> <p><b>P:</b> ¿halledmos la derivada con respecto a quién? A “r”, usamos la regla del producto y la regla de la cadena.</p> <p><b>O:</b> realiza la derivada implícita en el tablero y va indagando los conocimiento previos en el estudiante, recomienda que tengan presente que detrás de todo ese proceso esta derivar, lo que deben tener presente es el interpretar los problemas para tomar bien los datos.</p> <p><b>P:</b> hagamos un nuevo ejemplo, en estos casos siempre es bueno hacer un esquema.</p> <p><b>O:</b> el profesor da importancia en la solución de este tipo de problemas con el uso de diagramas y figuras.</p> <p><b>O:</b> la solución de los ejemplos en clase que se centran el desarrollo de procesos algebraicos pero con la diferencia que primero se debe hacer una interpretación del problema.</p> <p><b>P:</b> se proponen unos ejercicios obligados para hacer del texto guía son los de las páginas 197 a 199.</p>	<p>comprensión del concepto.</p> <p>La participación del estudiante depende de que tanto este presionando el profesor con las preguntas.</p> <p>Con los conceptos previos de los estudiantes son importantes para la solución de problemas.</p> <p>El uso de diagrama empieza a tomar importancia en la solución de este tipo de problemas, el profesor proponen para este tipo ejercicios realizar diagramas y figuras como ayuda.</p> <p>Se da mucha importancia al proceso algebraico pero también la</p>	

Descripción	Argumento	Tendencia
	interpretación inicial de los problemas entra a jugar un papel importante.	
<p><b>O:</b> se usa el grafico de una función que tiene máximos y mínimos después explica lo que significan estos seguido de la definición analítica.</p> <p><b>O:</b> el profesor deja de un lado la derivada y define máximos y mínimos solo con funciones e intervalos, después de esto vuelve de nuevo a las rectas tangentes mostrando que hay máximos o mínimos si la pendiente es igual a cero, pero se debe tener en cuenta que no solo hay cuando <math>f(x)</math> es derivable sino que también se encuentran máximos y mínimos cuando la derivada de la función no existe para esto de apoya de un gráfico.</p> $g(x) =  x $ <p>Propone también como ejemplo el grafico de <math>\frac{1}{x}</math> y trata con esto mostrar el dominio y las asíntotas de esta.</p> <p>La profesora pregunta si la función tiene máximos y mínimos pero el salón se queda en silencio y no responde la preguntas con lo cual termina respondiendo la profesora con la definición que dio.</p> <p>Después se apoya del gráfico de una parábola y hace la misma pregunta a la cual responden algunos a hora ponen la definición analítica de máximos y mínimos llamados a hora puntos críticos.</p> <p>A hora proponen algunos ejemplos que se resuelven algebraicamente.</p> $h(x) = x^{\frac{1}{3}}(1 - x) \text{ en } [-1,1]$	La definición formal de los elementos a estudiar es de gran importancia en el desarrollo del concepto.	

## 4.5. REJILLAS DE ANÁLISIS MOMENTO 2: SUBCATEGORÍAS

### 4.5.1. Rejilla de análisis sobre el concepto de derivada – subcategorías: introducción y consolidación del concepto en los estudiantes

SUBCATEGORÍAS	ENTREVISTAS	DOCUMENTOS Y TEXTO GUÍA	OBSERVACIONES	TENDENCIAS
Introducción y consolidación del concepto de derivada en los estudiantes	<p>La noción de derivada de la docente es la definición tradicional encontrada en los libros de Cálculo (por medio de límites).</p> <p>La representación que perdura en el estudiante sobre la derivada es la definición tradicional (límite).</p> <p>Se marca importancia en la introducción del concepto de derivada mediante el uso de las representaciones gráficas.</p> <p>La docente alude al saber derivar como los procedimientos que se contrasta con el saber de un concepto que en este caso es el de derivación.</p> <p>Para el estudiante la diferencia principal es que el concepto se centra en la definición formal (límite) y la derivación se queda en procesos rutinarios.</p> <p>La estudiante dice que una persona sabe derivar cuando conoce cuándo y dónde aplicar las derivadas para la solución de problemas.</p> <p>Derivar se refiere al concepto y saber derivar significa utilizar ese concepto.</p> <p>Se da importancia a las aplicaciones de la derivada entre ellas el de optimización, ya que por medio de este se da mejor la relación del concepto y la vida real.</p> <p>La derivada tiene más fuerza en funciones lineales que en funciones no lineales para el estudiante, concluyendo que para este tipo de funciones toca ser mecánico y buscarle el sentido de estas.</p>	<p>El programa del curso y el texto guía tienen una estrecha relación y se puede ver en ambos un listado de contenidos temáticos que poca relación con elementos visuales, se da más prioridad a las representaciones algebraicas.</p> <p>El curso tiene como objetivos que los estudiantes tengan una buena destreza en la utilización del Cálculo con sus aplicaciones para la solución de problemas, puede estar mediado por la alta presencia de estudiantes de ingeniería.</p>	<p>Utilización de conceptos previos por parte de los estudiantes.</p> <p>Se apoya en lo geométrico para la presentación del concepto.</p> <p>El uso de lengua algebraica predomina en la construcción del concepto.</p> <p>Los ejemplos propuestos por el profesor dan más importancia a lo algebraico y no se toma en cuenta lo geométrico y visual.</p> <p>Para la construcción del concepto persiste la realización repetitiva de ejercicios de carácter algebraico.</p> <p>En algunas situaciones el profesor se apoya de lo geométrico para reforzar la teoría.</p>	<p>La definición de derivada que predomina es la algebraica, dejando de un lado otros elementos visuales.</p> <p>Se apoya de lo geométrico en ocasiones para la presentación del concepto pero se resalta este registro como importante a la hora de introducir el concepto.</p> <p>Predomina el uso de lo algebraico en el desarrollo del curso.</p> <p>Saber derivar es identificar cuándo y dónde aplicar las derivadas para la solución de problemas.</p> <p>Se debe hacer en repetidas ocasiones ejercicios algebraicos para la comprensión de estos, es el caso de la derivada de funciones no polinómicas.</p>

#### 4.5.2. Rejilla de análisis formación fundamental del docente– subcategorías: modelos didácticos

SUBCATEGORÍAS	ENTREVISTAS	TEXTO GUÍA	OBSERVACIONES	TENDENCIAS
Modelos didácticos	<p>Con respecto a los conocimientos previos esta menciona la definición analítica de la derivada (en términos de límites), además de especificar la importancia de conocer el concepto de función (dominio, rango, etc.).</p> <p>Se deben de construir bases y mostrar qué es lo que yo necesito como bases y mostrar ejemplos de situaciones en donde tiene sentido hablar de la derivada que de verdad ellos vean que tiene sentido toda esa parte que tengo como teoría, situaciones con las que yo tengo relación porque con todo eso yo me puedo enfrentar a ciertas situaciones y puedo dar respuesta a esas situaciones, entonces cómo se enseña, ir mostrando todos los elementos e ir mostrando situaciones en donde ella tiene sentido</p>	El programa del curso de Cálculo I tiene bien definido un listado de temáticas a abordar en el transcurso del semestre distribuido en unidades.	El texto guía está muy relacionado con el programa del curso en sus contenidos, además los ejercicios propuestos en el libros son tomados encuentra como referencia para la preparación de los exámenes.	El modelo que principalmente perdura es el tradicional y el transmisionita en la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada, se puede entender como los componentes principales del curso de Cálculo I enfocados principalmente en el concepto de derivada

**4.5.3. Rejilla de análisis visualización didáctica – subcategorías: cambios de registro de representación para potenciar la visualización y uso de herramientas tecnológicas con el fin de promover el uso de la visualización**

SUBCATEGORÍAS	ENTREVISTAS	TEXTO GUÍA	OBSERVACIONES	TENDENCIAS
<p>Cambios de registro de representación para potenciar la visualización</p>	<p>En el curso parece predominar la representación analítica, ya que ella menciona las características de los ejercicios omitiendo la representación como guía fundamental en el curso Se manifiesta que el hacer gráfico va después de la parte analítica. Se puede ver como el manejo entre las representaciones desglosa el concepto y lo hace más accesible. Se marca importancia en la introducción del concepto de derivada mediante el uso de las representaciones gráficas. Muestra las representaciones gráficas y geométricas como fundamental a la hora de trabajar en problemas y en la enseñanza del concepto, además afirma que gran parte de lo que una aprende es visual y esto ayuda a la hora estudiar el concepto de derivada. Se da importancia las aplicaciones de la derivada entre ella el de optimización, ya que por medio de este se da mejor la relación del concepto y la vida real.</p>	<p>El curso y el texto tienen una estrecha relación y se puede ver en ambos un listado de contenidos temáticos que poca relación con elementos visuales, se da más prioridad a las representaciones algebraicas.</p>	<p>Para la construcción del concepto persiste la realización repetitiva de ejercicios de carácter algebraico. Se apoya en lo geométrico para la presentación del concepto. Los ejemplos propuestos por el profesor dan más importancia a lo algebraico y no se toma en cuenta lo geométrico y visual. El uso de lengua algebraica predomina en la construcción del concepto. Se deja de un lado lo geométrico en situaciones donde podría aportar. En algunas situaciones el profesor se apoya de lo geométrico para reforzar la teoría.</p>	<p>El registro de representación que predomina es el algebraico. El gráfico o geométrico se usa en algunos momentos por parte del docente y en algunas ocasiones después de hacer su representación analítica. Por parte del estudiante se resalta el papel de lo geométrico o gráfico a la hora de abordar el concepto. El programa y el texto están relacionados pero esta relación no aporta en el cambio de registro. Se deja de un lado lo geométrico en situaciones o problemas donde podría ser potente su uso.</p>



SUBCATEGORÍAS	ENTREVISTAS	TEXTO GUÍA	OBSERVACIONES	TENDENCIAS
	El uso de representaciones gráficas se utiliza en algunos momentos pero tiene más prioridad el uso de representaciones algebraicas.			
Uso de herramientas tecnológicas con el fin de promover el uso de la visualización	Se ve en primera instancia que por parte del docente No se cree necesario la utilización de las herramientas tecnológicas para la visualización del concepto, está es muy arraigada a lo analítico. Para los estudiantes parece importante dentro de las herramientas tecnológicas que se pueden encontrar en la enseñanza del Cálculo son las de representación gráfica las que tiene mayor importancia, ya que son muy utilices a la hora de hacer graficas que son complejas en el tablero, además el uso de lo grafico a la hora de estudiar la razón de cambio, el movimientos y funciones resultan útiles	El uso de herramientas tecnológicas en el aula de clase no se evidencia en ninguno de estos documentos.		Aunque los estudiantes ven necesario el uso de tecnologías para la comprensión del concepto de derivada la docente, el programa curricular y el libro de texto no evidencian la importancia de la misma

## 5. CONCLUSIONES

El propósito principal del trabajo era identificar el papel que se le asigna a la visualización didáctica y el modelo didáctico por el cual se abordan los procesos de enseñanza y aprendizaje en los cursos de Cálculo I que se ofrece a los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y Física y de la Universidad del Valle.

En el desarrollo de este trabajo se hallaron elementos que no fueron considerados en su formulación, estos tiene mucho valor para nuestra formación como futuros Licenciados en Matemáticas y Física, el observar el medio en que se desarrollan las clases (en este caso Cálculo I en la sección de derivada), los documentos que están detrás de esas clases y la preparación tanto de los estudiantes como el docente para el desarrollo de la misma, fue formativo para nuestro futuro desempeño profesional.

### **Sobre la Visualización Didáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje**

Después de realizar los análisis respectivos con ayuda del Análisis Didáctico, se obtienen unos resultados de los cuales se generan algunas conclusiones referidas a los objetivos. Con relación al objetivo uno se concluye que la visualización está presente en el aula de clase pero no en todo momento, en las entrevistas se pudo identificar la manera en que los estudiantes y el docente dan importancia al uso de representaciones geométricas y gráficas, pero se evidencia que es de mayor importancia el uso de representaciones algebraicas y la repetición de los ejercicios. En las entrevistas se puede observar que el uso de una única representación no es recomendable a la hora de enseñar y aprender el concepto, pero en la práctica los entrevistados solo usan un único tipo de representación (representación analítica-algebraica).

En los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada la definición que prima es la tradicional (normalmente aparece en todos los libros de Cálculo) que al principio se apoya de representaciones gráfico-geométrico y en su desarrollo fenomenológico, pero que termina siendo una representación algebraica (Limite analítico a partir de la recta pendiente de la curva en un punto, ver análisis de contenido de la derivada) al final, después de la introducción del concepto de derivada se hace un fuerte trabajo en procesos mecánicos

que consisten en aplicaciones de la derivada sin ninguna especie de contexto en su representación algebraica, en las aplicaciones de la derivada (en el contexto real, razón de cambio, entre otros) se puede encontrar cómo se utilizan diagramas para la interpretación de los problemas y se motiva por parte de la docente en el uso de estos, pero después de sacar los datos necesarios del diagrama, se olvidan de este y de cualquier otra representación, el trabajo se dedica a ser algebraico y repetitivo.

### **Sobre Visualización Didáctica en el texto guía**

Con relación al objetivo dos y mediante el Análisis Didáctico fue posible identificar los patrones del discurso encontrados en cada una de las entrevistas mencionadas en el anexo 6, con este se pudo verificar lo relacionado concretamente con la visualización didáctica y a partir de las representaciones que se tenían en el aula fue posible determinar el accionar de la misma en el contexto mencionado (clase de Cálculo I para estudiantes del Área de Educación Matemática, concretamente en el concepto de derivada), además fue favorable a la hora de encontrar los diversos elementos que predominaban en el libro de texto e inferir las representaciones que prevalecían en relación al concepto de derivada que este abordaba.

Así a partir de la rejilla 7 que se muestran en el anexo 6 y por lo que se puede ver en el análisis de resultados, fue posible establecer el objetivo específico respecto a la manera de cómo el texto implementa y aborda la visualización didáctica. Con relación a las representaciones que se abordan en el libro de texto se pudo que es de carácter analítico y corresponde principalmente a la rigurosidad que la docente pretende instaurar en el curso, en el concepto de derivada se puede observar que la representación para el entendimiento del concepto mismo es del tipo algebraica, sin embargo no es posible encontrar en el manejo de las representaciones analítica y algebraica de los ejercicios propuestos el uso plausible de la visualización didáctica.

Así mismo al contrastar un libro de carácter matemático (*Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático* de Courant & Fritz (1999) ) y el texto guía de la Universidad, se pudo determinar cómo en este libro se involucran diversidad de representaciones y además como el manejo constante entre las mismas podrían facilitar la aparición de la visualización didáctica en el concepto de derivada (ver análisis de contenido), aunque no se involucra la tecnología, es posible ver como en los ejercicios del texto se relacionan la diversidad de las representaciones, incluso involucra una de tipo fenomenológico (derivada como razón de

cambio; velocidad) y la relación que esta tiene con la definición formal (como pendiente de la recta tangente a un punto de una curva).

### **Sobre el Modelo Didáctico de los profesores del curso de Cálculo I**

De la misma forma se pudo identificar en el objetivo tres mediante las rejillas de análisis de categorías y subcategorías (anexos 6 y 7) que el modelo didáctico que se logra identificar en el aula de clase es de tipo Tradicional-Conductista, ya que mediante estas rejillas muestra cómo el docente es el centro de atención de los procesos de formación del concepto de derivada, además se pudo observar como el docente sigue un esquema establecido para dar su clase, el cual consiste en primero exponer un contenido que en la mayoría de las ocasiones se centran en representaciones algebraicas y analíticas formales, seguido de esto se hacen una serie de ejemplos en clase que también son de carácter algebraico y por último propone algunos ejercicios, en la mayoría de las secciones observadas la participación de los estudiantes es mínima y se reduce a preguntas hechas por el docentes.

En los análisis realizados, se muestra como el texto guía y el programa del curso (Cálculo I) influyen en el desarrollo de la clase ya que estos se pueden ver como un listado de contenidos que poco aportan en los procesos de aprendizaje de la derivada, con relación a lo anterior se puede ver centrando el curso en el desarrollo de unos contenidos que dejan de una lado elementos a considerar que podrían ser fundamentales en los futuros profesores de matemáticas.

Se puede evidenciar como se genera a partir de la problemática planteada al inicio del trabajo, circunstancias ligadas estructuralmente a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo que no son del todo favorables, la investigación permitió verificar los problemas presentes; que según investigadores (Bishop, 1989; Zimmermann y Cunningham, 1991; Tall, 1992; entre otros) son comunes, en el caso de la visualización didáctica del concepto de derivada; el énfasis principal y quizás la mayor problemática se encamina en el modelo didáctico que el docente utiliza en el aula de clase, en la investigación se pudo constatar a partir de las rejillas de categorías y subcategorías que es de carácter Tradicional-Conductista; este estudio además identificó que el problema también gira alrededor de las representaciones y del manejo que se le da de estas en el aula de clase.

En la obtención del conocimiento, Duval (2002) establece que un adecuado uso de las representaciones hace factible la concepción del mismo, en la investigación se pudo constatar

que si bien hay un uso de múltiples representaciones (con mayor presencia las representaciones algebraicas), estas se crean fuera de un contexto específico y sin ninguna relación entre las mismas, lo cual genera dificultades en el estudiante que son evidenciadas en los resultados de las pruebas que estos realizan, en la entrevista a la docente se manifiesta que los estudiantes muchas veces busca aprobar el curso sin importar si hay un verdadero aprendizaje.

Además también se pudo concretar que tanto en el aula de clase como en el texto guía se proponen una serie de ejercicios de carácter algebraico que consisten en la repetición de algoritmos, los ejercicios se presenta la mayoría de las veces de una forma descontextualizada y sin ningún tipo de sentido, además el proceso de formación está centrado únicamente en el docente, el cual se limita a dar unos contenidos orientados por un programa de curso y un texto guía, donde se desarrollan procesos algebraicos rutinarios (de una manera tradicional). Es posible concluir también que el docente al seguir el texto guía (que es de carácter Tradicional-Conductista), el modelo didáctico que tiene el docente en la clase de Cálculo también deber estar relacionado con el texto que dirige sus clases.

Para explicar un poco mejor otros elementos encontrado en el desarrollo de esta investigación, se realiza un diagrama (Figura 24) que posteriormente será explicado para su mejor comprensión.

- Investigaciones en Didáctica de las Matemáticas: Formación de profesores de matemáticas
- Problemas y necesidades actuales de la Educación Matemática a nivel Nacional

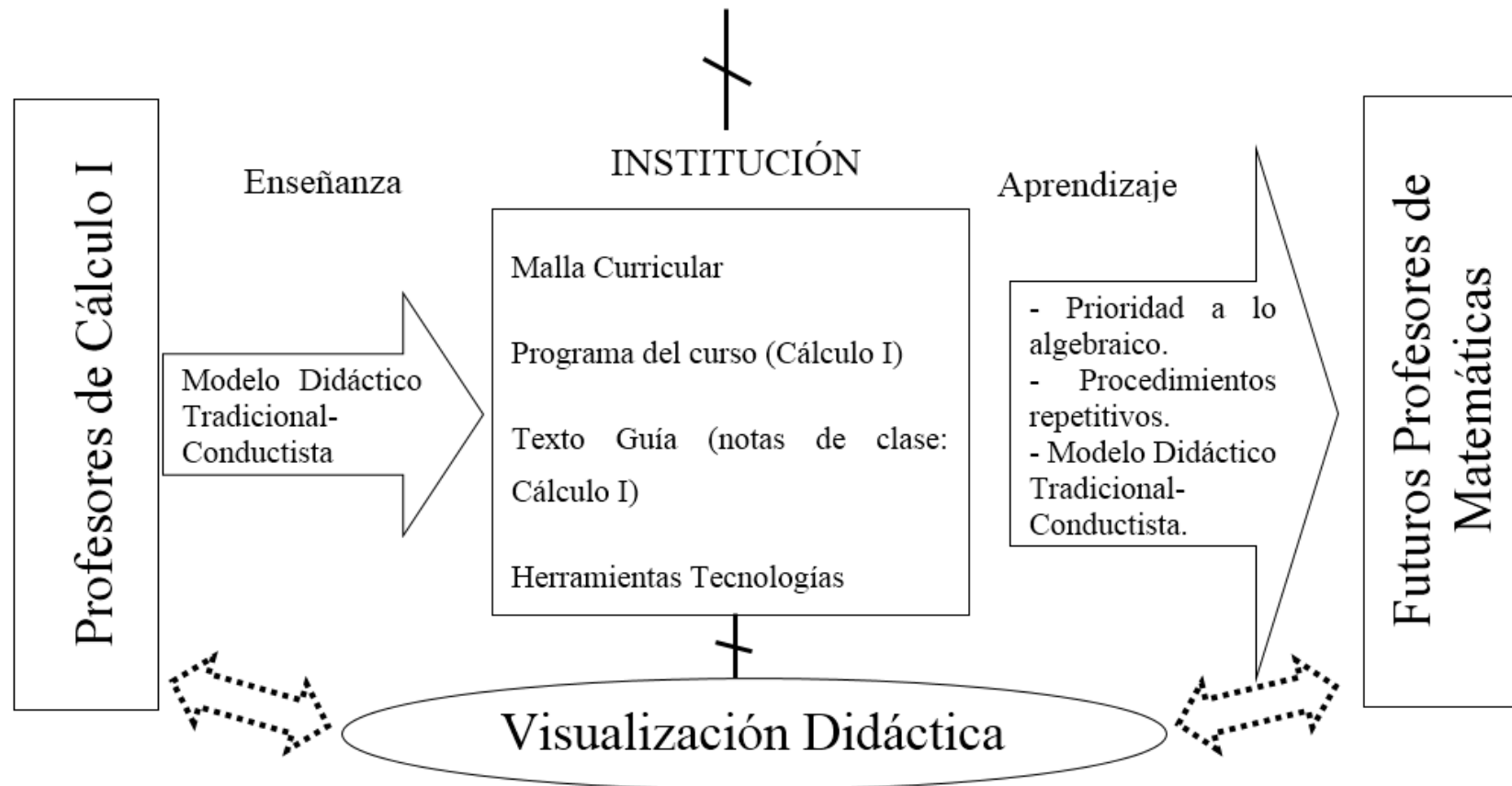


Figura 18 Procesos de enseñanza y aprendizaje: Visualización Didáctica.

Fuente: Autores

Con la figura 18 se quiere explicar las relaciones que encontramos alrededor de la investigación. En la parte superior se encuentran las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, problemas y necesidades actuales en Educación Matemática Nacional, las cuales se puede mostrar que estos no tiene una relación continua con la Institución de Educación Superior la cual es la encargada de reglamentar los currículos y programas de los Futuros Profesores de Matemáticas, con lo anterior se puede mostrar que esa falta de comunicación podría influir en no estar a la vanguardia en la formación ya que con un currículo del programa del curso (Cálculo I) es claro ver como no se tiene en su estructura la importancia de la Visualización Didáctica, también influye que ni el programa del curso ni el Texto guía están diseñados para futuros profesores de matemáticas.

Si la Universidad no tiene presentes las necesidades y los problemas actuales en la Educación Secundaria para adecuar la Formación de los Futuros Profesores de Matemáticas, estos muy difícilmente van a solucionar esas problemáticas sin una adecuada capacitación. El profesor de Cálculo I lleva consigo un modelo didáctico y unos conocimientos generales, estos se adecuan a los requerimientos de la Institución, para así continuar con los procesos de enseñanza y aprendizaje, los cuales terminan promoviendo un solo tipo de representación y a la repetición de ejercicios para la comprensión del concepto a enseñar (derivada).

La última parte de la figura muestra que la Visualización Didáctica tiene tres relaciones: la del centro tiene que ver con los documentos de la institución (programa del curso, currículo y texto guía) la cual está relacionada por una cruz lo cual indica que entre estas dos no se encontró ninguna relación, en las otras dos relaciones se marcan con dos flechas en doble dirección pero se resalta que estas flechas no son continuas, ya que se puede observar algunos elementos de visualización no sistematizados tanto en los estudiantes como en el profesor.

También se puede concluir con ese trabajo debería de ponerse a consideración que los que dirigen los cursos de formación de los futuros profesores de matemáticas debería de ser profesionales interesados y centrados en estos procesos de formación y no quedarse en un curso genérico que cumple con el objetivo de ser un curso de procedimientos mecánico, también se deja abierto el espacio para que se estudien los procesos de visualización presentes en la formación de futuros profesores en otros conceptos.

Finalmente se puede concluir que este tipo de investigación contribuye a identificar las diferentes dificultades en los procesos de enseñanza y las deficiencias presentes en la

formación docente; por lo que se considera necesario que se profundice en este tipo de investigaciones no solo enfocado (como este caso) en los cursos iniciales sino en todo el proceso formativo, lo cual permitiría una mirada más amplia de los principales problemáticas que se encuentran en la formación docente.



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Azcarate, C.; et al. (1996). Cálculo diferencial e integral. Madrid: Síntesis.
- Badillo, E.; (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia. Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.
- Bedoya, E.; Gutiérrez, J., & Rico, L. (2013). Sistemas de Representación y calculadoras gráficas en la Formación Inicial de Profesores de Educación Secundaria. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, & M. Molina (Edits), Análisis Didáctico en Educación Matemática (Pág. 488). Editorial Comares, S.L.
- Bedoya, E.; (2011). Didáctica de las matemáticas y formación de profesores de matemáticas: organizadores del currículo, conocimiento y análisis didáctico. Documento de trabajo, sin publicar. Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.
- Bedoya, E.; (2002). Formación inicial de profesores de matemáticas: Enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.
- Bishop, A.; (1989). Review of research in visualization in mathematics education. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1), 7-16.
- Burkhard, R.; (2005). Knowledge Visualization: The Use of Complementary Visual Representations for the Transfer of Knowledge. A Model, a Framework, and Four New Approaches. Tesis Doctoral. Zurich: Swiss Federal Institute of Technology Zurich. Suiza.
- Carvajal, A.; (2008). Elementos de investigación social aplicada. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Castillo, B. d.; González, Padin, Peral, Sánchez, & Tarín. (s.f). Estudio de Casos. Obtenido de Métodos de investigación educativa: [http://www.uam.es/personal\\_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Est\\_Casos\\_doc.pdf](http://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Est_Casos_doc.pdf). 15 de enero 2014.
- Castro, E. & Castro, E.; (1997). Representaciones y Modelización. En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M. M. (Eds.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 39-59). Madrid: ice - Horsori.
- Castro-Rodríguez, E.; Castro, E.y Torralbo, M. (2013). Análisis Fenomenológico en la Formación Inicial de Maestros. En L. Rico, J. Lupiáñez, & M. Molina (Edits), Análisis Didáctico en Educación Matemática (Pág. 1-22). Granada: Comares.
- Cazau, P.; (2006). Introducción a la Investigación en Ciencias Sociales. (Tercera ed.). Buenos Aires.
- Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico (Coord.). La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Barcelona: Horsori.
- Courant & Fritz; (1999). Introducción al cálculo y al análisis matemático. En Courant & Fritz, Funciones de varias variables y sus derivadas. México: Limusa.
- Duval, R.; (2003) Voir en mathematiques. En Filloy. (Ed.), Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México, 41-76.
- Duval, R.; (2002) Representation, vision and visualization: Cognitive Function in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In f. Hitt (editor), Representations and Mathematics Visualisations. International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. Mexico.

- Gallardo, J.; González, José L.; (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática. En Bolea, María Pilar; Moreno, Mar; González, María José (Eds.), Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 57-78). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.
- García, M.; Gavilan, J. & Llinares, S.; (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. Enseñanza de las ciencias. N. 30.
- Gómez, M. & Polania, N.; (2008). Estilos de enseñanza y modelos pedagógicos: Un estudio con profesores del Programa de Ingeniería Financiera de la Universidad Piloto de Colombia. Tesis Maestría. Bogotá: Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de La Salle.
- Gómez, P. & Rico, L.; (2001). Análisis Conceptual e investigación en Didáctica de las Matemáticas. En P. Gómez, & L. Rico (Edits.), Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. (Pág. 179-194). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Grupo Educación Matemática. (1990). El Problema del Bajo Aprovechamiento Estudiantil. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, I (1), 51-58.
- Guzmán, M.; (1996). El rincón de la pizarra: ensayo de Visualización en análisis matemático: elementos básicos del análisis. Madrid: Piramide.
- Harel, G. & Dubinsky, E.; (Eds.). (1992). The concept of function; aspects of epistemology and pedagogy. MAA Notes No. 28.
- Hitt, F.; (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico), pp. 81-108.
- Hitt F.; (1998). Visualización Matemática, Representación, Nuevas Tecnologías y Currículum. Revista Educación Matemática 10(2) p. 23-45.
- Hughes, D.; (1991). Visualization and Calculus Reform. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), Visualization in Teaching and Learning Mathematics, MAA Notes No. 19, 121-126.
- Knowledge Visualization. A dissertation submitted to the Swiss Federal Institute of Technology Zurich for the degree of Doctor of Sciences. Obtenido de: [http://www.ia.arch.ethz.ch/files/publications/remo\\_burkhard/2005\\_burkhard\\_knowledge\\_visualization\\_dissertation\\_remo\\_burkhard.pdf](http://www.ia.arch.ethz.ch/files/publications/remo_burkhard/2005_burkhard_knowledge_visualization_dissertation_remo_burkhard.pdf)
- Llinares, S.; (2013). Conocimiento de matemáticas y tareas en la formación de maestros. I CEMACYC, Santo Domingo. 6-8 noviembre.
- López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. XXI: Revista de educación, 4, 167- 179.
- Martínez, P. (2006). El método de estudio de casos: Estrategia metodológica de la investigación científica. Pensamiento y gestión, 165-193.
- Presmeg, N.; (2002). Beliefs about the nature of mathematics in the bridging of everyday and school mathematical practices. En: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) (2002). Beliefs: A hidden variable on mathematics education? (293-312). Dordrecht – Boston – Londres: Kluwer Ac. P.
- Ramírez, E.; (05 de 10 de 2010). El método observacional. Obtenido de la Universidad de la Jaén: <http://www4.ujaen.es/~eramirez/Descargas/tema4>

- Rico, L. Lupiáñez, J. & Molina, M. (Edits.). (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.
- Rico, L. & Fernandez-Cano, A. (2013). *Análisis Didáctico y Metodología de Investigación*. En L. Rico, J. Lupiáñez, & M. Molina (Edits.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (Pág. 1-22). Granada: Comares.
- Rico, L.; Cañadas, M.; Molina, M. & Segovia, I.; (2013). *Investigación en didáctica de la matemática: Homenaje a Encarnación Castro*. Granada: Colmenares.
- Rico, L.; (1997). *Los organizadores del currículo de matemáticas*. En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M. M. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Madrid: ice - Horsori.
- Rodríguez Gregorio y Otros (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. España: Aljibe.
- Roesken, B., & Rolka, K.; (2006). *A picture is worth a 1000 words - The role of visualization in mathematics learning*. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 441-448). Prague, Czech Republic: PME.
- Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. En L. Rico (Coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Tall, D.; (1992). *Students' Difficulties in Calculus, Plenary Address, Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7, Québec, Canada, 13-28*. ISBN 2 920916 23 8.
- Tall, D.; (1991). *Intuition and rigour: The role of visualization in the calculus*, en Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, PP. 105-119. Washington: Mathematical Association of America.
- Zimmermann, W., & Cunningham, S.; (1991): *Editor's introduction: What is mathematical visualization*. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, (pp. 1-8). Mathematical Association of America, Washington, DC.

# ANEXOS

# ANEXO 1

CUESTIONARIO ESTUDIOS DE CASO: DOCENTE

## Guía de entrevista

Dirigida a: profesor del curso

### Objetivos:

- Realizar un Análisis Didáctico que permita identificar el papel de la Visualización en la enseñanza y aprendizaje de nociones que estructuran el concepto de derivada mediante una sistematización de experiencias realizada a los estudiantes del Área de Educación Matemática que se encuentran en el curso de Cálculo I de la Universidad del Valle.
- Caracterizar el Modelo Didáctico entorno a la Visualización de los docentes de Cálculo I en el concepto de derivada en los cursos dirigidos a futuros Licenciados del Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle.

### Datos personales

Nombre completo, profesión, años en docencia y años en este curso.

### Preguntas

#### Construcción del programa y planificación de clase

- ¿Cómo se construye el programa del curso?
- ¿Cómo prepara usted las clases?
- ¿Usa alguna herramienta tecnológica en la preparación de sus clases?
- ¿Los ejercicios y ejemplos para los estudiantes de donde provienen?
- ¿El diseño del curso, ejemplos y ejercicios cambian dependiente del grupo de estudiantes o sigue con la modalidad de genérico?
- ¿Ha propuesto alguna actividad en algún sistema de representación simbólico o gráfico?

#### Concepto de derivada

- ¿Qué conocimientos previos deben saber los estudiantes para derivar?
- ¿Un estudiante sabe derivar cuándo?
- ¿Hay alguna diferencia entre conocer el concepto de derivada y saber derivar?
- ¿En qué momento es conveniente usar aplicaciones de la deriva y en qué casos?
- ¿Qué interpretaciones deben tener los estudiantes de la derivada?

## **La visualización en el concepto de derivada**

¿Cómo se enseña el concepto de derivada?

¿Utiliza herramientas tecnológicas en el aula?

¿Considera usted que el uso de algunas herramientas tecnológicas potencia el aprendizaje de los estudiantes?

¿Considera que lo geométrico es importante en la comprensión de la derivada?

¿En qué momento considera conveniente que el estudiante use una representación geométrica para la solución de algún problema relacionado con la derivada?

¿Cree que los diferentes tipos de representaciones que se hagan de un concepto matemático (en este caso la derivada) afianza el concepto en el estudiante?

Cierre y conclusiones

¿Ha notado alguna diferencia entre los estudiantes del Área de Educación Matemática y otros programas? ¿Cuáles?

¿Considera que los estudiantes del Área de Educación Matemática deberían de tener un curso de Cálculo exclusivo para ellos?, ¿Por qué?

¿Quiere agregar algo más?

# ANEXO 2

CUESTIONARIO ESTUDIOS DE CASO: ESTUDIANTES



## **Guía de entrevista**

Dirigida a: dos estudiantes del Área de Educación Matemática matriculados en el curso de Cálculo I

### **Objetivos:**

- Realizar un Análisis Didáctico que permita identificar el papel de la Visualización en la enseñanza y aprendizaje de nociones que estructuran el concepto de derivada mediante una sistematización de experiencias realizada a los estudiantes del Área de Educación Matemática que se encuentran en el curso de Cálculo I de la Universidad del Valle.
- Caracterizar el Modelo Didáctico entorno a la Visualización de los docentes de Cálculo I en el concepto de derivada en los cursos dirigidos a futuros Licenciados del Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle.

### **Datos personales**

Nombre completo, Programa en el que se encuentre matriculado, semestre en el que se encuentra matriculado y si tiene alguna experiencia como docente.

### **Preguntas**

#### **Construcción del programa y planificación de clase**

¿Cómo prepara usted las clases?

¿Ha propuesto alguna actividad en algún sistema de representación simbólico o gráfico?

¿Prepara usted sus clases con ejemplos y ejercicios diferentes a los propuestos en el aula y en el texto guía? ¿Qué texto diferente usa?

#### **Concepto de derivada**

¿Qué conocimientos previos deben saber los estudiantes para derivar?

¿Un estudiante sabe derivar cuándo?

¿Hay alguna diferencia entre conocer el concepto de derivada y saber derivar?

¿En qué momento es conveniente usar aplicaciones de la deriva y en qué casos?

¿Qué interpretaciones deben tener los estudiantes de la derivada?

#### **La visualización en el concepto de derivada**

¿Cómo se enseña el concepto de derivada?

¿En su labor como estudiante del curso utiliza herramientas tecnológicas para estudiar Cálculo? ¿Cuáles?

¿Considera usted que el uso de algunas herramientas tecnológicas potencia el aprendizaje de los estudiantes? ¿Por qué?

¿Considera que lo geométrico es importante en la comprensión de la derivada?

¿En qué momento considera conveniente que el estudiante use una representación geométrica para la solución de algún problema relacionado con la derivada?

¿Cree que los diferentes tipos de representaciones que se hagan de un concepto matemático (en este caso la derivada) afianza el concepto en el estudiante?

Cierre y conclusiones

¿Ha notado alguna diferencia entre los estudiantes del Área de Educación Matemática y otros programas? ¿Cuáles?

¿Considera que los estudiantes del Área de Educación Matemática deberían de tener un curso de Cálculo exclusivo para ellos?, ¿Por qué?

¿Quiere agregar algo más?

# ANEXO 3

PROGRAMA DEL CURSO DE CÁLCULO I (111050M)

MALLA CURRICULAR PROGRAMAS DEL ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**UNIVERSIDAD DEL VALLE**  
**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

Cálculo I (111050M) (4 créditos) (5 horas/semana) (Habilitable)

**Objetivos**

Capacitar al estudiante para manejar con destreza las técnicas propias del Cálculo diferencial y sus aplicaciones a la resolución de problemas.

Ampliar y mejorar la capacidad para plantear, manejar e interpretar argumentos matemáticos, contribuyendo así al desarrollo de la disciplina mental y de trabajo de los estudiantes.

Contenido

**Unidad 1. Números, funciones y gráficas (6 semanas).**

La recta real y el plano coordenado. Fórmula de distancia. Ecuación de la recta. El círculo. Funciones y sus gráficas. Operaciones con funciones. Composición de funciones. Función inversa. Funciones algebraicas. Funciones trigonométricas y sus inversas. Función exponencial y función logarítmica.

**Unidad 2. Derivada de una función (6 semanas).**

Definición de límite de una función. Límites laterales. Teoremas sobre límites. Límites infinitos y al infinito. Límites infinitos. Continuidad y discontinuidad de funciones. Álgebra de funciones continuas. Teorema de Bolzano y del valor intermedio. Definición de la velocidad y tasas de cambio. Derivada. Interpretación geométrica de la derivada. Reglas de derivación. Regla de la cadena. Derivación implícita. Derivación de función inversa. Derivación de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Derivadas de orden superior. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio.

**Unidad 3. Aplicaciones de la Derivada (3 semanas).**

Cálculo de derivadas. Incrementos diferenciales y aproximación lineal. Funciones crecientes y decrecientes. Máximos y mínimos relativos y absolutos. Criterio de la primera derivada. Concavidad y puntos de inflexión. Criterio de segunda derivada. Dibujo de gráficas. Razones relacionadas. Problemas de máximos y mínimos.

## **Texto Guía**

Edwards y Penney. Cálculo con geometría analítica. 4a Edición, Editorial Pearson, 1996.

## **Bibliografía:**

- Simmons, George F. Cálculo y Geometría Analítica. 1a Edición, McGraw-Hill, 2002.
- Stein, Sherman K, Barcellos, Anthony. Cálculo y Geometría Analítica Vol I. McGraw-Hill, 5a Edición, 1997.
- Leithold, Louis. Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Harla, 7a Edición, 1998.
- Larson, Hostetler, Edwards. Cálculo. Vol I. 6a Edición, McGraw-Hill, 1999.
- Unidades de Apoyo y Complementación. Cálculo I. Dpto de Matemáticas Univalle, 1995.
- Apóstol, Tom. Cálculo, Vol I. Editorial Reverté, 2a Edición.
- Thomas, Finney. Cálculo de una Variable. Vol I. Editorial Addison Wesley Longman.

### *Licenciatura en Matemáticas y Física*

Líneas de formación	Semestre I	Semestre II	Semestre III	Semestre IV	Semestre V	Semestre VI	Semestre VII	Semestre VIII	Semestre IX	Semestre X
<b>Matemáticas</b>	Matemáticas Fundamenta.  Fundamentos de Geometría	Lógica Teoría de Conjuntos  Cálculo (I) Diferencial  Geometría Analítica Vecto.	Álgebra Lineal  Cálculo (II) Integral	Ecuaciones Diferenciales  Cálculo (III) Avanzado	Análisis Exploratorio de Datos y Estadística	Álgebra Moderna  Métodos Matemáticos Para la Física	Inferencia Estadística  Elementos de Topología y Geometría Diferencial	Análisis (I) Matemático	PRÁCTICA PROFESIONAL I	PRÁCTICA PROFESIONAL II
<b>Física Fundamental</b>			Física Funda. I  Laboratorio F.F.I	Física Fund. II  Laboratorio F.F.II	Física Fund. III  Laboratorio F.F.III	Física Fund. IV  Laboratorio F.F.IV			SEMINARIO DE PRÁCTICA PROFESIONAL I	SEMINARIO DE PRÁCTICA PROFESIONAL II
<b>Didáctica de las Matemáticas</b>	Elementos de Educación Matemática			Problemas en Educación Matemática		Evaluación y Currículo en Educación Matemática		Didáctica de las Matemát.  Análisis de Textos Esc. de Mat.	TRABAJO DE GRADO I	TRABAJO DE GRADO II
<b>Histórico - Epistemológico</b>			Matemáticas y Experiencia					Historia Epistemología de las Mat.	SEMINARIO DE TRABAJO DE GRADO I	SEMINARIO DE TRABAJO DE GRADO II
<b>Razonamiento Y Lenguaje</b>	Conocimiento y Cultura	Conocimiento y Desarrollo			Lenguaje y Comunicación		Razonamiento Matemático			
<b>Nuevas Tecnologías</b>					NTIC I		NTIC II			
<b>Idiomas</b>	Ingles I	Ingles II								
<b>Electivas Complementarias y Profesionales</b>	COMPLEMENT.I	COMPLEMEN.II	COMPLEME. III	COMPLEMEN.IV	PROFESIONA. I	PROFESIO. II	PROFESIO. III	PROFESIO. IV	PROFESIO. V	PROFESIO. VI

⊗.

**Licenciatura en Educación Básica con Énfasis En Matemáticas**

Líneas de formación	Semestre I	Semestre II	Semestre III	Semestre IV	Semestre V	Semestre VI	Semestre VII	Semestre VIII	Semestre IX	Semestre X
<b>Matemáticas</b>	Elementos de Lógica Matemá.  Números y Operaciones	Iniciación al Álgebra  Geometría I	Teoría de Conjuntos  Geometría II	Álgebra Lineal  Cálculo (I) Diferencial	Álgebra Moderna  Cálculo (II) Integral	Análisis Exploratorio de Datos y Estadística	Inferencia Estadística			
<b>Didáctica de las Matemáticas</b>	Elementos de Educación Matemática			Aspectos Socioculturales de la Educaci. Matemática	Problemas en Educación Matemática	Evaluación en Educación Matemática	Resolución de Problemas	Currículo en Educa. Matema.  Didáctica de las Matemát  Análisis de Textos Esc. de Mat.	PRÁCTICA PROFESIONAL I  SEMINARIO DE PRÁCTICA PROFESIONAL I	PRÁCTICA PROFESIONAL II  SEMINARIO DE PRÁCTICA PROFESIONAL II
<b>Histórico - Epistemológico</b>		Historia de las Matemáticas Griegas			Historia del Número y la Magnitud	Elementos Filosóficos de las Matemátic.			TRABAJO DE GRADO I	TRABAJO DE GRADO II
<b>Razonamiento Y Lenguaje</b>	Conocimiento y Cultura	Conocimiento y Desarrollo	Lenguaje y Comunicación			Enunciación del Conocimiento Matemático	Lenguaje Natural y Leng. Formal	Razonamiento Matemático	SEMINARIO DE TRABAJO DE GRADO I	SEMINARIO DE TRABAJO DE GRADO II
<b>Nuevas Tecnologías</b>			NTIC I	NTIC II			NTIC III			
<b>Idiomas</b>	Inglés I	Inglés II								
<b>Electivas Complementarias y Profesionales</b>	COMPLEMENT. I	COMPLEMEN. II	COMPLEME. III	COMPLEMEN. IV	PROFESIONA. I	PROFESIO. II	PROFESIO. III	PROFESIO. IV	PROFESIO. V	PROFESIO. VI