UNA APROXIMACIÓN AL APRENDIZAJE DE LA SEMEJANZA DE *TRIÁNGULOS* EN GEOGEBRA

JUAN CARLOS LLANTÉN MONTENEGRO

MIGUEL ARMANDO BERMUDEZ SERRATO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI

Octubre de 2014

UNA APROXIMACIÓN AL APRENDIZAJE DE LA SEMEJANZA DE *TRIÁNGULOS* EN GEOGEBRA

JUAN CARLOS LLANTÉN MONTENEGRO
CÓDIGO 200535327
MIGUEL ARMANDO BERMUDEZ SERRATO
CÓDIGO 200642833

LÍNEA DE FORMACIÓN:
Tecnologías de la Información y la Comunicación y Educación Matemática (TICEM)

Trabajo de grado para optar el título de:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

DIRECTORA:
MARITZA PEDREROS PUENTE

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
Octubre de 2014

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

Título del Trabajo:	Una aproximación al aprendizaje de la semejanza de triángulos en Geogebra.						
Se trata de:	Proyecto [ ]			Informe Final [X]			
Director:	MARITZA PEDREROS						
1er Evaluador:	CRISTHIAN HURTADO						
2do Evaluador:							
Fecha y Hora	Año: 2014	Mes: 10		Día: 10		Hora: 3:00 PM	

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
JUAN CARLOS LLANTEN MONTENEGRO	200535327	3487
MIGUEL ARMANDO BERMUDEZ SERRATO	200642833	3487

Evaluación

Aprobado	X	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:		Mes:		Día:		Hora:	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas:

Maritza Pedreros P	[signature]	
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Una aproximación al aprendizaje de la semejanza de triángulos en geogebra

Autores:

Nombre: Juan Carlos Llantén Montenegro Firma: C.C. 1.130.615.639

Nombre: Miguel Bermúdez Serrato Firma: C.C. 1130638452

Nombre: Firma: C.C.

Fecha: 14-octubre-2014

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE IMÁGENES

AGRADECIMIENTOS

En primera instancia le damos gracias a Dios, por fortalecer nuestra voluntad en los momentos más difíciles de la vida, y en aquellos donde solo él podría darnos esperanza para continuar, por permitirnos culminar este trabajo de grado y darnos la paciencia para ello. También manifestamos una enorme gratitud a nuestros padres y familiares, sin los cuales no hubiéramos podido culminar nuestra carrera universitaria.

Damos el reconocimiento a nuestra Directora del trabajo, Maritza Pedreros Puente, por su voluntad, paciencia y compromiso en el desarrollo del trabajo. También agradecemos a los evaluadores del proyecto y del informe final, y en general a todos nuestros profesores a lo largo de la carrera y en especial a aquellos que con sus sabios consejos nos brindaron su apoyo para ser mejores.

Juan Carlos y Miguel Armando

RESUMEN

Este trabajo de grado muestra la adaptación, implementación y análisis de una *secuencia didáctica* en *GeoGebra* para el estudio de la *semejanza de triángulos*, con estudiantes de grado octavo de la Educación Básica del colegio Mayor Santiago de Cali.

Para ello, se toma como referentes teóricos algunos elementos de la *Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)* para el diseño y análisis de la *secuencia didáctica* y de la O*rquestación Instrumental* para dar cuenta de cómo el medio, en este caso Geogebra, logra que el estudiante a través del arrastre tenga un aprendizaje significativo y hacer explícito el tipo de relación que se establece entre el medio y el estudiante.

En la parte metodológica se tendrá en cuenta un *estudio de caso*, de tipo cualitativo, estructurado a partir de tres fases: la *fase preactiva*, en la cual se construye el marco teórico y se adapta la secuencia; la *fase interactiva*, en la cual se realiza la experimentación y/o implementación de la secuencia; y la *fase postactiva,* en la que se analizan los datos recogidos en la fase interactiva. Para ello se toma como eje central las fases de acción, formulación y validación planteadas desde la TSD y se resalta la gestión didáctica del profesor en el desarrollo de la secuencia didáctica.

Palabras clave: Semejanza de *triángulos*, Situación Didáctica, Orquestación Instrumental, Ambientes de Geometría Dinámica, Geogebra.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado se inscribe en la línea de Tecnología de la Información y la Comunicación y Educación Matemática (TICEM) del programa Licenciatura en Matemáticas y Física, del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

El trabajo de grado tendrá como objetivo adaptar, implementar y analizar los alcances y limitaciones de una *Secuencia Didáctica (SD)* para el estudio de la *semejanza de triángulos* en un *Ambiente de Geometría Dinámico (AGD*) como GeoGebra, con estudiantes de grado octavo de la educación básica secundaria. Para ello, se toma en consideración algunos elementos de *la Teoría de Situaciones Didácticas* y la *Orquestación instrumental* como referentes teóricos para abordar el estudio de la *semejanza de triángulos*.

La *Teoría de Situaciones Didácticas* permitirá establecer el tipo de situaciones que se formulan y las fases de construcción del conocimiento que se hacen explícitas al interactuar con un *AGD*.

La *Orquestación Instrumental* permite explicitar la configuración experimental al definir el rol del profesor, del estudiante, sus conocimientos previos, propósitos y organización del tiempo de la secuencia a implementar.

Para el desarrollo de este trabajo de grado vamos a tener en cuenta la interacción de un estudiante con el medio creado en GeoGebra en el diseño y/o adaptación de la secuencia didáctica, de tal manera que a partir del arrastre el estudiante pueda identificar propiedades de los *triángulos*, conjeturar y llegar a formular algunos criterios de semejanza. Además, en este diseño experimental interesa identificar la gestión didáctica del profesor, el tipo de razonamientos y las conclusiones a las que pueden llegar los estudiantes.

Es importante poder dar cuenta de la interacción entre sujeto-instrumento-objeto y cómo la gestión del profesor es fundamental para la orientación de las posibilidades, condiciones y restricciones que tiene la secuencia hacia el estudiante al interactuar con un *AGD* para la construcción de un conocimiento matemático.

Finalmente, como metodología para el trabajo se tendrá como referente el estudio de caso, el cual permite hacer un análisis de tipo *didáctico, cognitivo y curricular* a la noción matemática en la fase preactiva, lo que fundamenta la adaptación y la puesta en escena de la respectiva secuencia, lo cual corresponde a la fase interactiva y finalmente en la fase postactiva se da cuenta de los resultados alcanzados.

A continuación se presenta la estructura que se tiene en cuenta a lo largo del trabajo, en el cual se encuentran todos los aspectos que se consideran para su desarrollo.

En el ***primer capítulo***, se presenta la contextualización del problema, se aborda la pregunta central del trabajo, se justifica la necesidad de crear nuevas estrategias para la enseñanza de *semejanza de triángulos* mediante una *secuencia didáctica* que integra un *AGD*, se menciona la intencionalidad y los propósitos del trabajo teniendo en cuenta la interacción saber-estudiante-profesor en una *configuración didáctica*.

En el ***segundo capítulo***, se consideran las nociones geométricas que determinan el concepto de *semejanza de triángulos*, donde se trabaja con magnitudes proporcionales que se ubican en dos campos, el geométrico y el numérico. Además, se considera *la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)* desarrollada por Brousseau (1986) y Margolinas (2009), quien determinan que esposible modelar y contrastar experimentalmente nuevas formas de enseñanza, que surgen al implementar una secuencia didáctica, que para este caso es diseñada en *GeoGebra* y para el análisis de su gestión didáctica se toman elementos de *la orquestación instrumental.*

En el ***tercer capítulo*** se fundamenta el estudio de caso, considerando tres fases: preactiva, interactiva y postactiva. Se realiza la adaptación de una secuencia didáctica en la que se describirá cada una de las situaciones y se realizará una predicción de las posibles respuestas que se pueden encontrar en la fase interactiva.

En el ***cuarto capítulo*** se dará cuenta de la fase interactiva y posactiva al presentar el análisis de los resultados de la experimentación, y contrastarlos con la descripción y predicción de cada situación presentada en el capítulo anterior.

Finalmente se presentan las conclusiones y anexos del trabajo realizado.

CAPÍTULO I. ASPECTOS GENERALES

En este capítulo se presenta una contextualización del problema a partir de las dificultades en la enseñanza del concepto de semejanza reportada por algunos autores, se plantea la pregunta de investigación y su justificación, además se presenta el objetivo general y los objetivos específicos que guían el presente trabajo.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Diferentes trabajos de investigación tales como los de Bermeo y Rivas (2012) Cortés, C. C. C., Guevara, N. Y. C., & Navarro, L. M. E. (2009). realizados en el campo de la Educación Matemática han mostrado que existen dificultades en la comprensión del concepto de la *semejanza*. Gualdrón É. &. Gutiérrez, A. (2006). afirma que para abordar el concepto de semejanza los estudiantes utilizan diferentes estrategias, las cuales pueden ser correctas o incorrectas según lo propuesto en cada situación. En este trabajo se retoman las *estrategias erróneas significativas* que sustentan la necesidad de buscar o crear otros medios de enseñanza para la interiorización del concepto de *semejanza de triángulos*, Las estrategias que Gualdrón É. &. Gutiérrez, A. (2006). implementa en las situaciones se desarrollan a lápiz – papel, sin embargo algunas *estrategias erróneas* identificadas por él se consideran un punto de partida para el análisis de las situaciones a desarrollar en este trabajo, a continuación se presentan las estrategias erróneas seleccionadas:

- *La doble mitad:* Al pedir a los estudiantes que a partir de un segmento de recta dado y su ampliación, completen la figura rectilínea abierta, utilizan la siguiente estrategia: crean un segmento con doble dimensión al dado, ver figura 1. Esta estrategia es correcta en el caso en que la razón sea 2:1, pero si la razón difiere a esta, pasa a ser una estrategia errónea. En algunos estudiantes, cuando se les pide ampliar el segmento, lo duplican y cuando se les pide reducir el segmento, lo “parten” en la mitad.

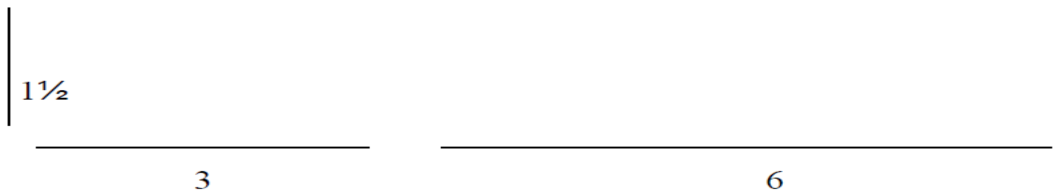


Figura 1. Estrategia de la doble mitad.

- *Estrategia multiplicativa:* cuando los estudiantes deben decidir la semejanza de figuras presentes en un problema *(Figura 2)*, de inmediato afirman la semejanza entre los *triángulos*, si los lados de una de las figuras son múltiplos enteros de la otra.

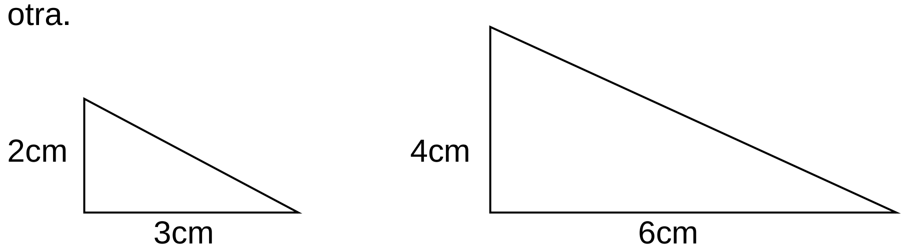


Figura 2. *Triángulos* semejantes.

Esta estrategia es correcta en el caso de la *Figura 2*, pero es errónea en el caso de la F*igura 3*, ya que los lados de un rectángulo no son múltiplos enteros del otro rectángulo.

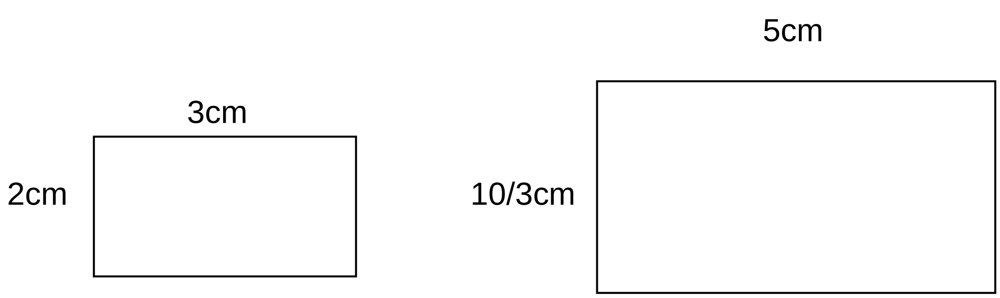


Figura 3. Rectángulos semejantes.

- *Métodos ingenuos:* en el caso de la condición de construir una nueva figura a partir de una dada, según una razón, los estudiantes aun sabiendo lo que implica la condición dada, crean una figura parecida más grande, sin guardar ninguna razón.

- *Estrategia aditiva o de la diferencia constante:* otra estrategia errónea es la relacionada con la ampliación, donde los estudiantes se concentran en la diferencia a-b y no en la razón a/b. Esto se visualiza en el momento de que se les pide a los estudiantes que amplíen el rectángulo con base de 12cm.

Figura 4. Ampliación de rectángulos semejantes.

Ellos determinan que la altura del nuevo rectángulo es 10cm, porque utilizan la diferencia a-b, dicen que $12-5=7$, luego adicionan este resultado con la altura tres, $7+3=10$, así obtienen $10cm$. De igual forma hacen la diferencia en uno de los rectángulo de la Figura 4, $5-3=2$, luego este valor se lo restan a 12, $12-2=10$, de lo cual se obtiene el $10cm$. Gualdrón (2006) considera que esta estrategia es por evitar la multiplicación de fracciones, que en este caso en particular, es multiplicar el factor de ampliación 12/5 por la altura a ampliar de 3cm, $\frac{12}{5}=\frac{x}{3}$. $x=\left(\frac{12}{5}\right)(3)$

- *Omisión de parte de los datos del problema*: esta estrategia se considera errónea porque los estudiantes ignoran o dejan pasar por alto datos del problema. En caso de que en el enunciado se plantee una comparación de razones, los estudiantes intentan resolverlo por los consecuentes o los antecedentes de las dos razones, se evidencia en la situación que se le pregunta a los estudiantes, ¿en cuál espacio se van a encontrar más estrechos los estudiantes, cuando se encuentran en un lugar de 12 metros cuadrados con 6 niños jugando o cuando se encuentran en un lugar de 16 metros cuadrados 8 niños jugando?, ellos responden que en el lugar de 16 metros cuadrados, porque hay más niños jugando.

Considerando estas *estrategias erróneas* que Gualdrón (2006) encuentra al solucionar cada situación, se podría mencionar que una de las causas de las dificultades encontradas es que el medio sea estático, por tanto resulta interesante movilizar el estudio de la semejanza de *triángulos* al utilizar un *AGD*, medio en el cual la visualización, el arrastre, el dinamismo de las figuras y la retroacción del medio puede aportar a la comprensión del concepto de semejanza.

Para dar cuenta de lo anterior se toma en consideración algunos elementos de la *Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)* desarrollada por Brousseau (1986), quien asume el aprendizaje como la respuesta a contradicciones para la adaptación a un *medio*, además considera que al desarrollar la *secuencia didáctica* se presentan ciertas situaciones generales: *de acción, de formulación y de validación*. Considerando que la situación es el conjunto completo de la interacción entre un sujeto y un *medio* determinado, la palabra situación caracteriza un nivel de descripción en términos de determinación o limitación.

Sin embargo, en este trabajo interesa dar cuenta de la interacción del estudiante con el medio al implementar cada situación, por lo cual es mucho más pertinente considerar el término fase que describe los momentos de la interacción de los actores en la clase, se describe las acciones de los actores y puede evidenciar el proceso, así "fase significa cada uno de los estados sucesivos de una cosa en evolución" (Diccionario Petit Robert, 1978, citado por Margolinas 2009), una fase se analiza después del desarrollo de una situación para determinar cuál fue su naturaleza, aunque se puede hacer un análisis *a priori* para identificar condiciones y posibilidades, no se establecen garantías de los resultados.

Además de considerar las situaciones y fases para movilizar el conocimiento del estudiante, se va a utilizar *GeoGebra* como medio para la implementación de una *Secuencia Didáctica* que le permita al estudiante construir de manera simultánea esquemas de uso y esquemas de acción instrumentada del conocimiento matemático.

Al respecto, Moreno (2001) considera que los *AGD*, juegan un papel importante en relación con el aprendizaje de las matemáticas, debido a que el impacto de la *mediación de instrumentos* es de carácter doble: *epistemológico y cognitivo*. Así mismo, considera que los objetos virtuales que aparecen sobre la pantalla del computador, se podrán manipular de tal forma que se genera una sensación de existencia casi material, para, de este modo, poder llegar a dar una identificación de los procesos que se están poniendo en juego en la *secuencia didáctica,* produciendo así un impacto cognitivo.

El impacto cognitivo solo se puede dar si existen unas limitaciones de los *AGD*, pues como bien se sabe ofrecen diferentes formas de exploración. En este sentido, Rabardel (2001) enfatiza que el impacto de los *instrumentos* en la actividad cognitiva del sujeto está relacionado con las limitaciones específicas de los *artefactos* y las *acciones* que son posibles con ellos. Es por ello que los *AGD* se conciben como un micromundo matemático, los cuales le permiten al estudiante explorar simultáneamente con una serie de condiciones, además de ofrecer mundos abiertos, en los cuales se puede explorar libremente situaciones problemas. La exploración no garantiza que existirá el aprendizaje específico, por ello la situación planteada debe tener como objeto que el estudiante interactué con el saber, es decir, formule, pruebe y construya modelos, conceptos y teorías para intercambiar.

Lo anterior aporta a la búsqueda de nuevas formas de enseñar una determinada noción matemática destacando al estudiante como principal protagonista de esa enseñanza y considerando que las devoluciones podrán ser parte fundamental de la *orquestación instrumental*, pues a través de las interacciones entre el profesor y estudiante, se puedan lograr una gestión de clase diferente que permita un aprendizaje significativo de la *semejanza de triángulos* a desarrollar.

Por lo cual, se considera la siguiente pregunta de investigación para el desarrollo del trabajo:

¿Qué caracteriza el aprendizaje de la semejanza de triángulos, al implementar una secuencia didáctica en GeoGebra con un estudiante de grado octavo de la educación básica?

De igual manera se plantea una hipótesis que servirá como carta de navegación del trabajo de grado:

- Es posible que una *secuencia didáctica* en *GeoGebra* se convierta en un medio apropiado para el aprendizaje de la *semejanza de triángulos* en estudiantes de grado octavo de la educación básica.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Este trabajo de grado parte de la importancia de involucrar *GeoGebra* en el aula de clases, pues cada vez son más los proyectos que han validado *secuencias didácticas* para la enseñanza de distintos conceptos matemáticos en estos ambientes de aprendizaje, así estos recursos en las aulas de clase están formando parte de un constructo social que exige que los estudiante día a día estén más familiarizados con las TIC.

De igual manera, es necesario contribuir con trabajos que ayuden a cambiar la enseñanza de los profesores en geometría, pues como señala Pabón (2006), todavía existe el escepticismo por parte de estos a la hora de abordar situaciones de aprendizaje que integren ambientes de aprendizaje informático.

Desde los Estándares Básicos de competencia en Matemáticas (MEN, 2006), se plantea que se debe aprovechar la variedad y eficacia de los recursos didácticos como los ambientes informáticos, pues estos perfectamente ayudan a integrar diferentes representaciones para el tratamiento de conocimientos matemáticos y proporcionan a los estudiantes procesos de razonamientos geométricos.

Por otro lado, teniendo en cuenta la perspectiva curricular vigente en Colombia, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN,1998), este trabajo busca integrar el pensamiento geométrico con el pensamiento variacional, pues tiene como propósito construir distintos caminos o acercamientos significativos en torno a la comprensión de razones y proporciones, identificar lo que cambia y lo que permanece constante, lo cual es fundamental para comprender el concepto de *semejanza de triángulos*.

Para dar cuenta de lo anterior, se retoman algunos aspectos de la *Teoría de Situaciones Didácticas y de la Orquestación Instrumental* que permitan la adaptación e implementación de una *Secuencia Didáctica* en *GeoGebra* con el fin de crear un ambiente de aprendizaje que propicie un acercamiento a las propiedades de la *semejanza de triángulos* y se constituya en un verdadero *instrumento* para el estudiante.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

Caracterizar el aprendizaje de un estudiante de grado octavo de la Educación Básica, al desarrollar una *Secuencia Didáctica* propuesta en *GeoGebra* para el estudio de la *semejanza de triángulos*.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Fundamentar desde la *Teoría de Situaciones Didácticas* (TSD) y la *orquestación instrumental* la adaptación e implementación de una *secuencia didáctica* al integrar *GeoGebra*.
- Adaptar una *secuencia didáctica* en *GeoGebra* para el estudio de la *semejanza de triángulos.*
- Implementar y analizar una *secuencia didáctica* en *GeoGebra* para el estudio de la *semejanza de triángulos* con un estudiante de grado octavo del Colegio Mayor Santiago de Cali.

Con el fin de responder a los objetivos propuestos, en el siguiente capítulo se precisan los aspectos teóricos que fundamentan el diseño de la propuesta a implementar.

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan los referentes teóricos que sustentan el trabajo, como marco general se considera la fundamentación matemática del concepto de semejanza de *triángulos*, se retoman algunos aspectos básicos de la TSD para describir las situaciones y fases que se generan en el desarrollo de cada situación didáctica, se abordan elementos de la dimensión instrumental para dar cuenta de la gestión didáctica del profesor al considerar la orquestación instrumental, y finalmente se presentan los aspectos curriculares que se encuentran ligados a la propuesta de estudio de la *semejanza de triángulos*.

2.1 DIMENSIÓN MATEMÁTICA.

Para el desarrollo de este apartado se toma como referente lo presentado por Moise (1986) en cuanto a las definiciones de razón y proporcionalidad para finalmente llegar al concepto de semejanza de *triángulos*:

2.1.1 Proporcionalidad

Sean dos secuencias:

$$a, b, c, \ldots; \ a`, b`, c`, \ldots$$

Suponiendo que son números positivos. Si es cierto que

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Entonces decimos que las dos secuencias son *proporcionales,* y escribimos

$$a, b, c, \ldots \sim a`, b`, c`, \ldots$$

La razón constante, denotada por k

$$k = \frac{a`}{a} = \frac{b`}{b} = \ldots,$$

Se llama la constante de proporcionalidad. Note que la proporcionalidad es una relación simétrica. Esto es, si

a, b, c,… ~ a`, b`, c`,…,

Entonces

a`, b`, c`,… ~ a, b, c,…,

Y viceversa si

a`, b`, c`,… ~ a, b, c,…,

Entonces

a, b, c,… ~ a`, b`, c`,…,

Note, sin embargo, que la constante de proporcionalidad depende del orden en que se inscriben las secuencias.

$$k = \frac{a`}{a} = \frac{b`}{b} = \ldots,$$

Si invertimos el orden, obtenemos una nueva constante que es reciproca a la anterior.

$$K' = \frac{a}{a`} = \frac{b}{b`} = \ldots,$$

Teorema 1: si a, b ~ c, d, entonces a, c ~ b, d, y viceversa.

La primera proporcionalidad significa que

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b},$$

Y la segunda que

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

Entonces se tiene que estas razones son equivalentes.

Si se consideran un par de *triángulos* semejantes como los siguientes (ver figura 5):

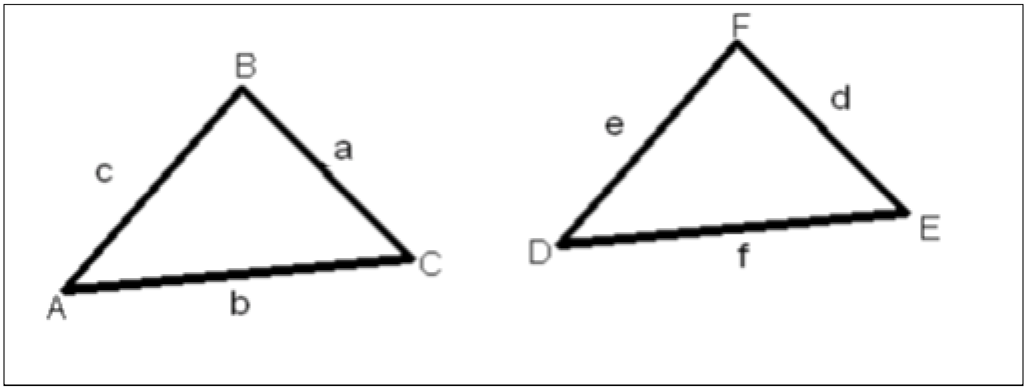


Figura 5: *Triángulos* semejantes

Escribiendo las longitudes de los lados en el orden apropiado, obtenemos la proporcionalidad

a, c, b, ~ d, e, f.

Se puede proceder a trabajar con las razones expresadas como fracciones, asi:

$$\frac{e}{c} = \frac{d}{a} = \frac{f}{b}$$

Luengo, R., & Beta, G (1990), define que dos figuras cuyos puntos puedan establecer una aplicación biyectiva, son semejantes si cumple con las siguientes condiciones:

1. A puntos alineados en la figura original corresponden puntos en igual orden en la figura homotética.
2. Los segmentos homólogos son proporcionales.
3. Los ángulos homólogos son congruentes.

2.1.2 Semejanza de *triángulos*

Sean los ΔABC, ΔDEF y una correspondencia

$$ABC \leftrightarrow DEF$$

Se usa la convención común, bajo la cual "*a*" es la longitud del lado opuesto a ∠A, y así sucesivamente. Si

$$a, b, c, \sim d, e, f,$$

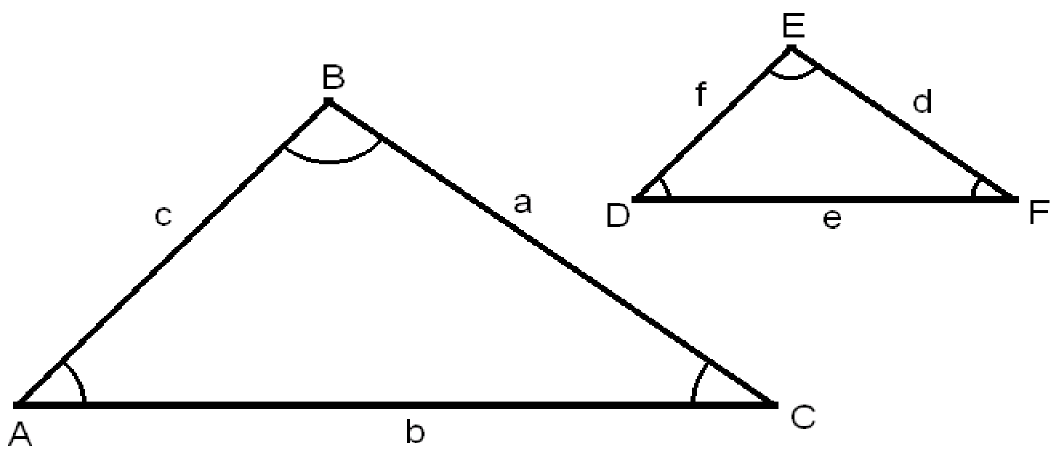


Figura 6: *Triángulos* semejantes de lados correspondientes

Decimos entonces que los *lados correspondientes son proporcionales.* Si los lados correspondientes son proporcionales, y cada par de ángulos correspondientes son congruentes, decimos entonces que la correspondencia es una *semejanza,* y escribimos

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Si existe una semejante entre dos *triángulos*, decimos entonces que los *triángulos* son *semejantes.*

Recordemos que, de la expresión

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Podríamos leer – sin referirnos a una figura – tres congruencias entre ángulos

$$\angle A \cong \angle D,\ \ \angle B \cong \angle E,\ \ \angle C \cong \angle F$$

Y tres congruencias entre segmentos

$$\overline{AB} \cong \overline{DE},\ \overline{AC} \cong \overline{DF},\ \overline{BC} \cong \overline{EF}.$$

En el mismo modo, de la expresión

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Podemos leer las mismas tres congruencias entre ángulos, y la proporcionalidad

$$AB, AC, BC \sim DE, DF, EF.$$

Para obtener el miembro derecho de esta expresión, remplazamos cada letra A, B o C de la izquierda por la letra correspondiente D, E o F.

Hablando de un modo intuitivo, dos *triángulos* son semejantes si tienen la misma forma, aunque no necesariamente el mismo tamaño. Parece como si la forma debiera estar determinada por los ángulos únicamente, y esto es verdad.

2.1.2.1 *El teorema de semejanza ángulo-ángulo-ángulo (AAA).* Sea una correspondencia entre dos *triángulos*. Si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

Sean ΔABC, ΔDEF y una correspondencia,

$$ABC \leftrightarrow DEF.$$

Si $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$, entonces

$$\Delta ABC \sim \Delta DF$$

Demostración: Sean E\` y F\` puntos de $\overline{AB}$ Y $\overline{AC}$, tales que AE\` = f y AF\` = e, según se muestra en la figura 7; por LAL, tenemos

ΔAE`F`≅ ΔDEF

Por lo tanto ∠ AE`F` ≅∠E. puesto que ∠ E ≅∠ B, tenemos ∠ AE`F’ ≅∠ B; así $\overline{E`F`}\parallel\overline{BC}$, y A, F`, y C corresponden a A, E`, y B bajo una proyección paralela. Puesto que las proyecciones paralelas conservan razones, tenemos

$$\frac{f}{AB} = \frac{e}{AC}$$

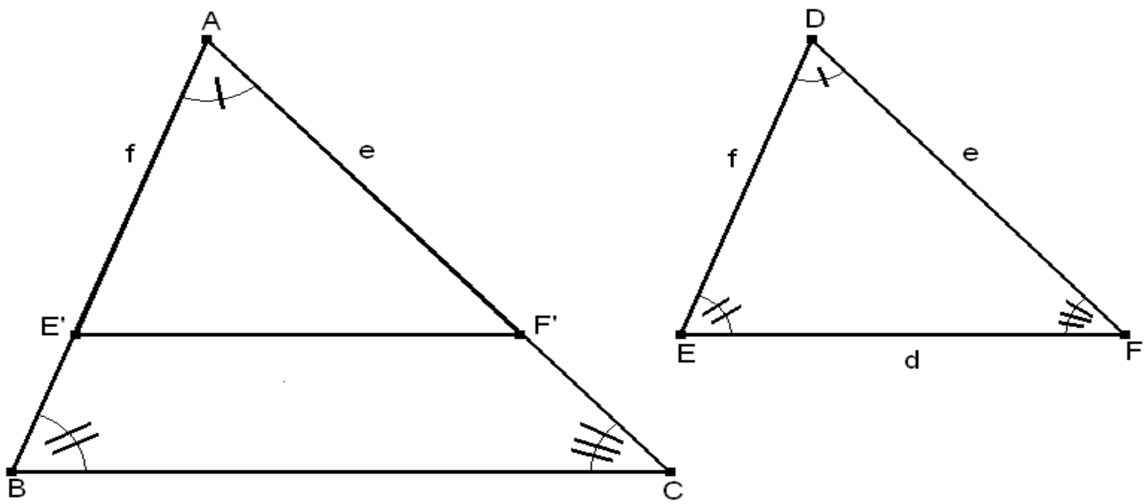


Figura 7. El teorema de semejanza AAA

Del mismo modo y mediante un simple cambio de notación, podemos demostrar que

$$\frac{e}{AC} = \frac{d}{BC}$$

Por lo tanto

d, e, f ~ BC, AC, AB,

Y

d, e, f ~ a, b, c,

De donde se obtiene que los lados correspondientes son proporcionales, y la correspondencia ABC ↔ DEF es una similaridad, lo que se quería demostrar.

Por supuesto, se sigue de nuestro teorema de suma de ángulos que si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, también lo es el tercer par. Tenemos, por lo tanto, el siguiente teorema.

2.1.2.2 *El teorema de semejanza ángulo-ángulo (AA).* Sea una correspondencia entre dos *triángulos*. Si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

2.1.2.3 *El teorema de semejanza lado-lado-lado (LLL)*. Sean dos *triángulos* y una correspondencia entre ellos. Si los lados correspondientes son proporcionales, entonces los ángulos correspondientes son congruentes y la correspondencia es una semejanza.

Sean ΔABC, ΔDEF, y una correspondencia ABC ↔ DEF. Si

$$a, b, c \sim d, e, f,$$

Entonces

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Demostración: Sea E\` el punto de $\overline{AB}$ para el que AE\` = f (ver figura 8). Sea L la línea que pasa por E\`, paralela a $\overline{BC}$. Si $L \parallel \overline{AC}$, entonces $\overline{BC} \parallel \overline{AC}$, lo que es falso. Por lo tanto $L$ intercepta $\overline{AC}$, en un punto F\`.

Ahora, ∠ AE\`F\` ≅∠ B, porque éstos son ángulos correspondientes; y ∠ A ≅∠ A. por lo tanto

$$\Delta AE`F` \sim \Delta ABC$$

Por lo tanto

$$f, AF`, E`F` \sim c, b, a.$$

Por lo tanto

$$\frac{c}{f} = \frac{b}{AF`} = \frac{a}{E`F`}\ ,\quad \text{Y AF` } = \frac{bf}{c}\ ,\quad \text{E`F`} = \frac{af}{c}.$$

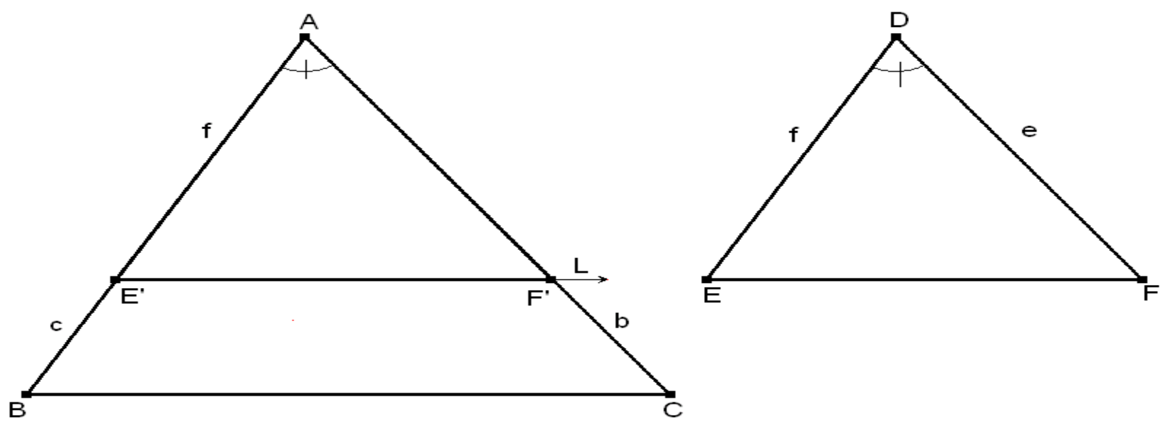


Figura 8. El teorema de semejanza LLL

Pero

f, e, d ~ c, b, a.

Entonces

$$\frac{c}{f} = \frac{b}{e} = \frac{a}{d}\ ,\quad \text{y } e = \frac{bf}{c},\quad d = \frac{af}{c}$$

Por el teorema *LLL*, tenemos

ΔAE`F`≅ ΔDEF

Por lo tanto

ΔDEF ~ ΔABC,

Lo que se quería demostrar.

A continuación tenemos un análogo de *LAL*.

2.1.2.4 *El teorema de semejanza lado-ángulo-lado (LAL*). Sea una correspondencia entre dos *triángulos*. Si dos pares de ángulos correspondientes son proporcionales y los ángulos incluidos son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

SEGUNDO ENUNCIADO: sean ΔABC, ΔDEF, y la correspondencia ABC ↔ DEF. Si ∠ A ≅∠ D. y b, c ∼ e, f, entonces ΔABC ~ ΔDEF.

Demostración: sea E` el punto de $\overrightarrow{AB}$ para el que AE` = f. Sea L la línea que pasa por E`, paralela a $\overline{BC}$. Entonces L intersecta $\overline{AC}$ en

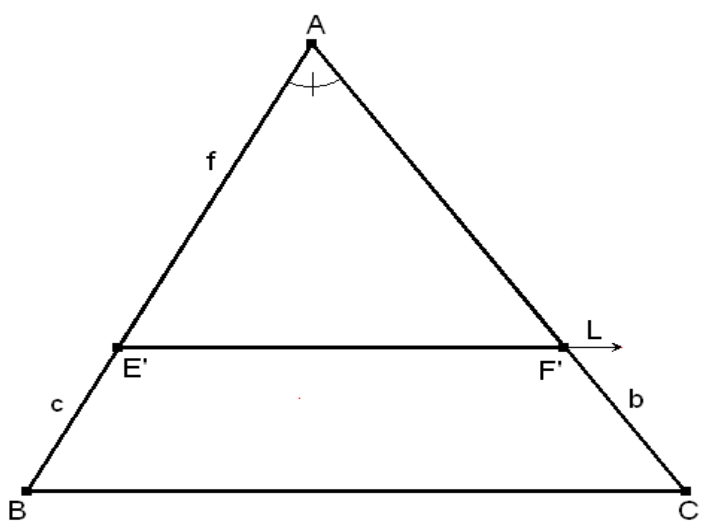


Figura 9. El teorema de semejanza LAL

Un punto F`. Los pasos principales en la demostración, de aquí en adelante, son como sigue. El lector debe ser capaz de dar las razones en cada caso.

(1)ΔAE`F’ ~ ΔABC

(2) b, c ∼ AF`, f

(3) AF` = e

(4) ΔAE`F`≅ ΔDEF

(5) ΔABC ~ ΔDEF

2.1.3 Teorema de Thales

El teorema de Thales se explica a partir de lo presentado por Sánchez & et.al (1.999), el cual se ilustrar por medio de la figura 10. En donde se pueden apreciar dos lineas rectas paralelas L_1 y L_2, que se simbolizan así: L_1 II L_2 y una recta transversal o secante a las dos rectas paralelas, llamada T, en la figura 10 se señalan dos ángulos correspondientes que se denotarán así: angulos 1 ($\sphericalangle 1$) y 2 ($\sphericalangle 2$), ellos tiene una caracteristica muy especial y es que son congruentes, el ángulo 1 es congruente con el 2 ($\sphericalangle 1 \cong \sphericalangle 2$), es decir tienen la misma medida por ser correspondientes comprendidos entre paralelas. Se llaman ángulos correspondientes cuando uno está en la zona exterior de las paralelas y el otro está en la zona interior y están del mismo lado de la transversal o secante y son ángulos que no hacen contacto entre sí.

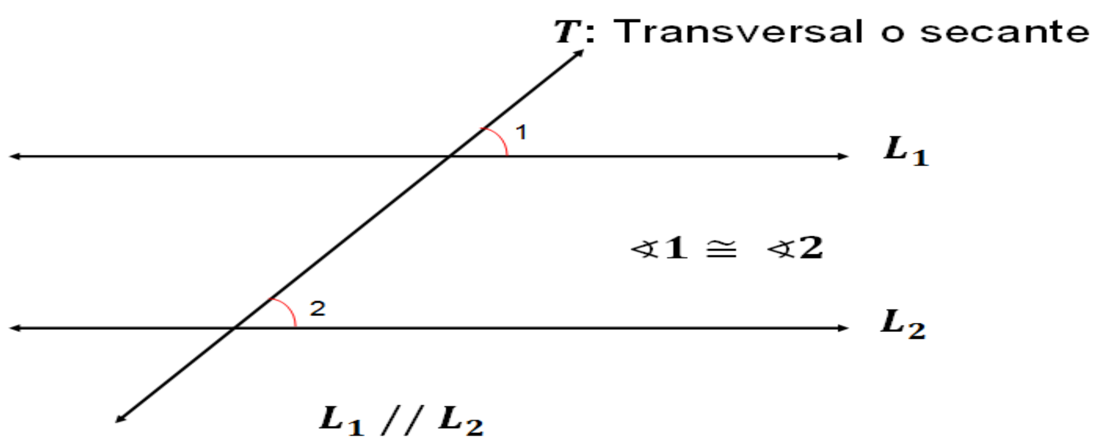


Figura 10. Ángulos correspondientes entre paralelas

Se considera ahora la figura 11, en ella se observa un triángulo (ΔACE), con un $\overline{BD}$ II al $\overline{CE}$ para indicar que estos dos segmentos son paralelos podemos colocar estas marquitas como unas flechitas (ver figura 11) que nos indican que los dos segmentos llevan la misma dirección, es decir, que son paralelos.

Si consideramos el $\overline{AC}$ como si fuera una secante o transversal que corta esas dos paralelas $\overline{BD}$II$\overline{CE}$, entonces se puede decir que estos ángulos son correspondientes entre paralelas y por lo tanto son congruentes $\sphericalangle B \cong \sphericalangle C$, lo mismo sucede al otro lado;

si se considera el $\overline{AE}$ como una secante o transversal que corta las dos paralelas $\overline{BD}$II$\overline{CE}$, entonces tenemos que estos ángulos son congruentes $\sphericalangle D \cong \sphericalangle E$ por ser correspondientes entre paralelas. El ángulo que se forma en el vértice A $\sphericalangle A$ será común para el ∆ABD y para el ∆ACE porque pertenece a los dos.

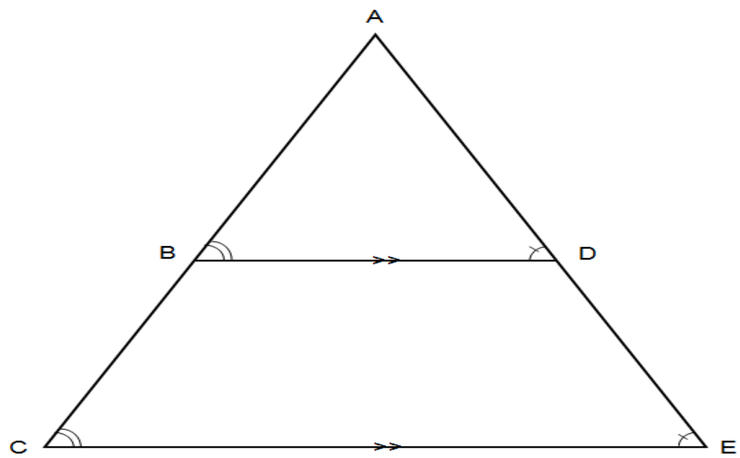


Figura 11. Semejanza del ∆ACE y el ∆ABD

Al separar los dos *triángulos* como se muestra en la figura 12 se observa que tienen exactamente los mismos ángulos, por lo tanto estos dos *triángulos* son semejantes, se denotan así ∆ABD~∆ACE y la justificación es el criterio o postulado llamado ángulo-ángulo-ángulo (AAA), que dice que si dos *triángulos* tienen exactamente los mismos ángulos, entonces son semejantes.

Como los *triángulos* son semejantes (∆ABD ~ ∆ACE), entonces podemos establecer una proporción comparando lados correspondientes, por ejemplo, decimos que el $\overline{AB}$ es al $\overline{AC}$ como el $\overline{AD}$ es al $\overline{AE}$. Recordemos que la proporción es la igualdad de dos razones, y la razón es la comparación de dos cantidades, de ahí que al comparar los lados correspondientes se encuentre que están a la misma razón, así:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$$

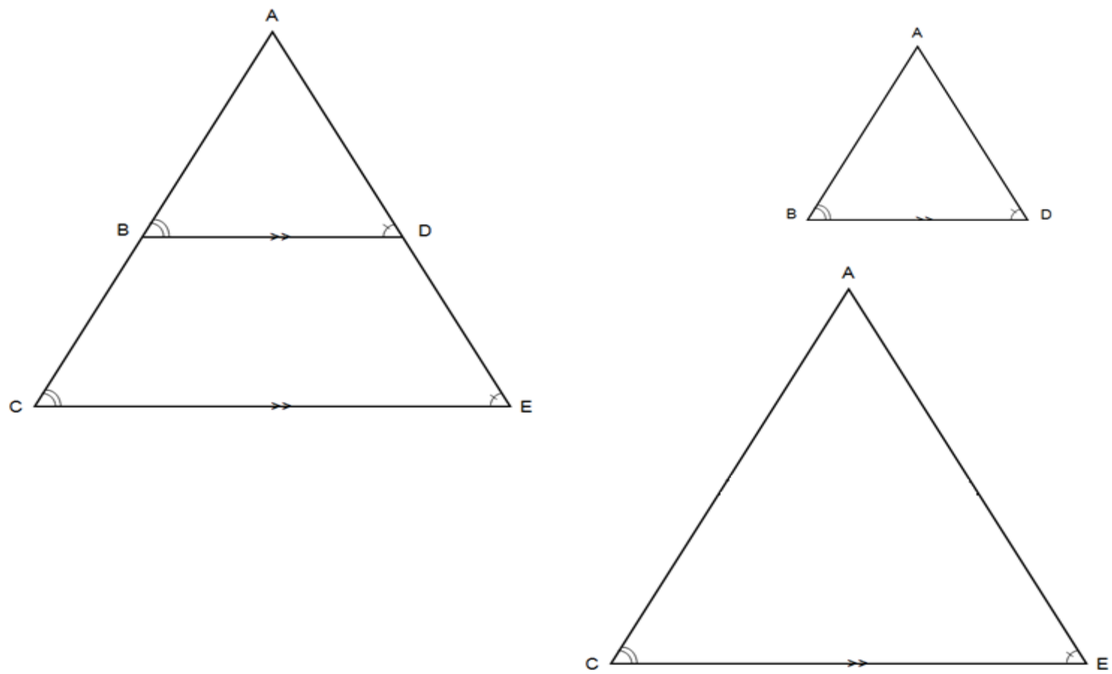


Figura 12. Descomposición de la Semejanza del ∆ACE y ∆ABD

En una proporción los términos del numerador se llaman antecedentes y los del denominador se llaman consecuentes; una propiedad de las proporciones dice que podemos invertir las dos razones, es decir, trasladar los consecuentes al numerador y los antecedentes al denominador y la igualdad se sigue conservando, así:

$$\frac{\overline{\overline{AB}}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{\overline{AD}}}{\overline{AE}}$$

$$\frac{\overline{\overline{AC}}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{\overline{AE}}}{\overline{AD}}$$

Para demostrar esta proporción se expresa el $\overline{AC}$, como la suma del $\overline{AB}$ más el $\overline{BC}$, entonces $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ y el consecuente queda igual, es decir, el $\overline{AB}$. Para el $\overline{AE}$ se realiza algo similar, $\overline{AE}$ se expresa como la suma del $\overline{AD}$ más el $\overline{DE}$, así $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE}$ y el consecuente queda igual, es decir, el $\overline{AD}$ (ver figura 11), de esta manera:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$$

$$\frac{\overline{AB+BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD\ +DE}}{\overline{AD}}$$

La suma de las razones se pueden expresar de la siguiente manera por tener el mismo consecuente:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$

Cuando el antecedente es igual al consecuente, las razones equivalen a la unidad, es decir, a uno, así, la igualdad queda expresada:

$$1 + \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = 1 + \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$

Por inverso aditivo, el uno podemos eliminarlo y se obtiene:

$$1 + (-1) + \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = 1 + (-1) + \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$

Finalmente, se invierten nuevamente ambas razones así:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$$

De esta manera se llega a una propiedad que es bastante útil para lo que se quiere demostrar, el teorema de Thales.

De esta manera podemos concluir que:

Dado un ∆ACE, como se muestra en la figura 12 si se traza un segmento paralelo $\overline{BD}$ al $\overline{CE}$, se obtiene otro ∆ABD, cuyos lados son proporcionales a los del triángulo ∆ACE.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{BD}}$$

Luego por medio de la figura 13. Dadas tres rectas paralelas entre sí llamadas L_1, L_2 y L_3 y dos rectas que son secantes o transversales llamadas T_1 y T_2, la intersección de T_1 con L_1, L_2 y L_3 determinan los puntos A, B, C, respectivamente, y la intersección de T_2 con L_1, L_2 y L_3 determinan los puntos D, E y F, respectivamente. Al trazar el $\overline{AF}$ se genera el punto P que es la intersección del $\overline{AF}$ corta la recta L_2.

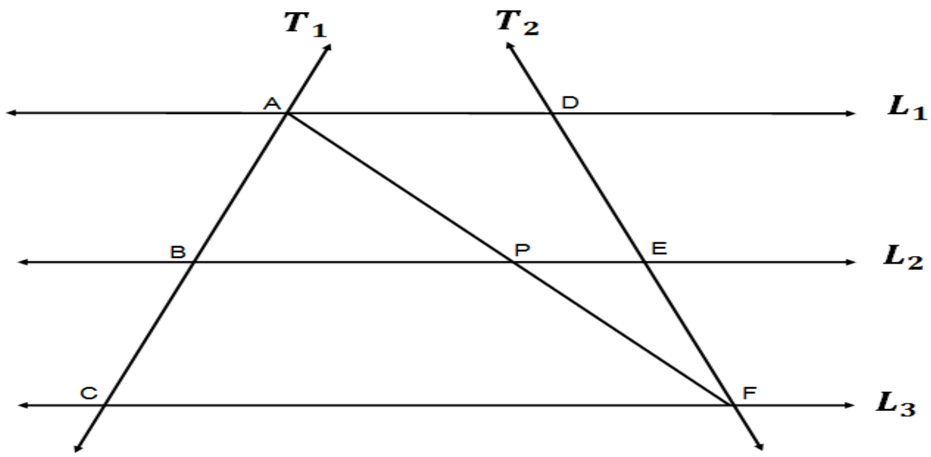


Figura 13. Teorema de Thales I.

De acuerdo a la demostración presentada en el apartado anterior se tiene que el ∆ACF, con un $\overline{BP}$ paralelo al $\overline{CF}$ por lo tanto se hace uso de la proporción que se demostró, así:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PF}}$$

Una situación similar se presenta para el ∆ADF donde el $\overline{PE}$ es paralelo al $\overline{AD}$ por lo tanto también se puede hacer uso de la relación que ya se demostró así:

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{ED}}$$

Entonces al cambiar el orden de las letras en esta última proporción, se obtiene:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DE}}$$

También se puede invertir los elementos de esta proporción, al pasar los consecuentes al numerador y antecedentes al denominador de la siguiente manera:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

Se puede observar una relación entre las proporciones:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PF}} \text{ y } \frac{\overline{AP}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

Por propiedad transitiva se tiene que:.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

Así el $\overline{AB}$ es al $\overline{BC}$, como el $\overline{DE}$ es al $\overline{EF}$ y esa es la relación que se tiene del teorema de Thales.

Ahora, se enuncia el teorema de la siguiente manera:

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos secantes, entonces los segmentos determinados sobre las secantes son proporcionales como se muestra en la figura 14.

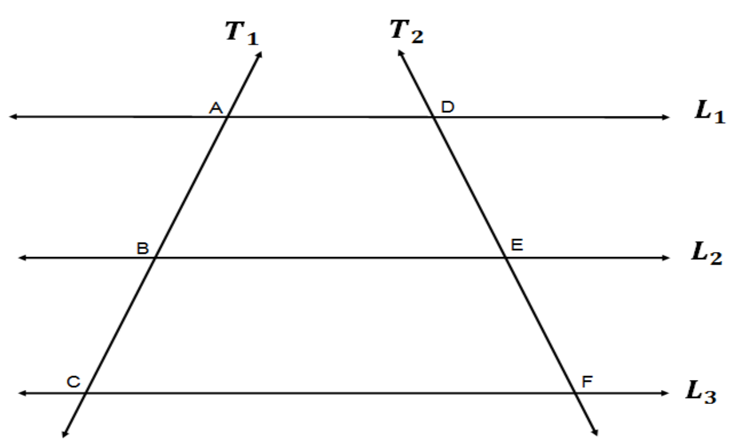


Figura 14. Teorema de Thales II

Los fundamentos matemáticos presentados anteriormente sirven de base para el diseño y/o adaptación de una secuencia didáctica en GeoGebra. A continuación se presentan los fundamentos de la dimensión didáctica.

2.2 DIMENSIÓN DIDÁCTICA

En este apartado se presentan los elementos que se toman en cuenta para la estructuración de una secuencia didáctica desde la TSD.

2.2.1 Teoría de situaciones didácticas

Según Brousseau (1986) a través de las situaciones didácticas es posible modelar y contrastar experimentalmente nuevas formas de enseñanza que surgen en el ámbito de un sistema didáctico a partir de una problematización y un cuestionamiento de un conocimiento matemático.

En primera instancia, es necesario definir una *situación* como un modelo de interacción de un conocimiento determinado por un sujeto en un medio, teniendo en cuenta el recurso que el sujeto hace para tener un conocimiento preciso, que es instrumento para controlar la situación.

Para considerar la importancia de la puesta en escena de una *situación*, Brousseau (1986) parte de un modelo general del conocimiento matemático el cual se resume en los siguientes términos:

“Saber matemáticas no es solamente saber definiciones y teoremas, reconocer la ocasión de utilizarlos y de aplicarlos, es ocuparse de problemas en un sentido amplio que incluye encontrar buenas preguntas tanto como encontrar soluciones”. pp.35

En este sentido enseñar matemáticas es lograr que los estudiantes interactúen con la situación en la clase. Para ello, el profesor debe imaginar y proponer a los estudiantes *situaciones* que ellos las puedan evidenciar, de igual manera que promueva preguntas matemáticas en las cuales el conocimiento movilizado sea una solución óptima a dicha situación.

Este autor afirma que la noción de situación matemática puede ser modelada mediante un juego formal, en el cual se cumplen dos condiciones:

- *Es comunicable sin utilizar dicho conocimiento*

- *La estrategia óptima del juego formal asociado a la situación matemática se obtiene a partir de la estrategia de base (que consiste en jugar al azar, aunque respetando las reglas del juego) utilizando el conocimiento en cuestión.*

Por otra parte, dentro de la situación matemática vamos a encontrar una situación a-didáctica o didáctica, en este trabajo el interés se centra en la situación didáctica.

Una *situación es a-didáctica* cuando por sí misma, sin hacer uso de la didáctica y en ausencia de toda indicación intencional, va a provocar un cambio de estrategia en ese jugador (estudiante). Este cambio debe ser, relativamente, estable en el tiempo y a las variables didácticas establecidas en la situación. En este sentido, las variables didácticas de una *situación* matemática son aquellos elementos del juego formal aptos para tomar diferentes valores y que al tomarlos provocan cambios en el juego que hacen variar la estrategia ganadora.

La *situación didáctica* comprende las relaciones establecidas, explícita o implícitamente, entre los estudiantes, en un cierto medio en el cual se encuentran diferentes instrumentos, y el profesor, con el objetivo de que los estudiantes construyan el conocimiento matemático.

Se define el medio como un “ambiente” artificial constituido intencionalmente con el objeto de generar retroacciones a la actividad del estudiante – jugador. La intención didáctica del medio está fundamentalmente relacionada con la naturaleza de las selecciones y las variables movilizadas en el diseño mismo de la situación a-didáctica.

La situación didáctica comprende una serie de intervenciones del profesor con el estudiante – medio, destinado a hacer funcionar las situaciones a-didácticas y los aprendizajes que ellas provoquen. Estas intervenciones son principalmente devoluciones e institucionalizaciones[1]. La evolución de una situación didáctica requiere, por tanto, de la intervención constante, la acción mantenida, la vigilancia del profesor y la orientación, la cual genéricamente se denomina: *gestión didáctica del profesor*.

Como se había mencionado anteriormente si la situación didáctica se interpreta en términos de juego, puede decirse que en esta por lo menos juegan dos personas: el estudiante y el profesor, aquí la gestión del profesor es buscar que el estudiante se ajuste a unas reglas, se responsabilice o haga suya una situación a-didáctica, este aspecto central de la gestión del profesor lo conocemos como *actos de devolución*.

La *devolución de una situación* consiste, no solo en presentarle al estudiante las reglas del juego sino, además, en hacer que el estudiante se sienta responsable del resultado que debe buscar. En este sentido, las devoluciones en el transcurso de desarrollo de las situaciones son importantes para el aprendizaje, en tanto que permite aceptar la responsabilidad y asumir las consecuencias de una situación de aprendizaje o un problema.

La finalidad de este trabajo es caracterizar el aprendizaje a partir de las fases desarrolladas por un estudiante de grado octavo en una situación, al implementar una secuencia didáctica. Por eso, se va a considerar una caracterización general de la clasificación de las situaciones didácticas que hace Brousseau (1986) y la clasificación de las fases en una situación didáctica que hace Margolinas (2009), las cuales se presentan a continuación:

[1] Fenómeno socialmente importante y fase esencial del profesor en la cual da a conocer el conocimiento culturalmente construido.

- *Situación de acción.*

Corresponde a tomar acciones a medida que se desarrolla la situación didáctica, los estudiantes actúan en momentos determinados, al cabo de un tiempo de realizar una serie de acciones, donde se determina el premio o la sanción, si se tomaron las decisiones correctas o erróneas.

Cuando el estudiante actúa ante los estados del medio, este le propicia con regularidad información y el estudiante relaciona la información con sus acciones (retroalimentación), para tenerlo en cuanta en las próximas acciones Una estrategia se adopta rechazando intuitivamente o racionalmente una estrategia anterior. Una estrategia nueva se somete a la experiencia y puede ser aceptada o rechazada según la apreciación que tenga el alumno sobre su eficacia Brousseau (1986), en la figura 15 muestra que el aprendizaje es el proceso por el cual se modifican los procedimientos, donde las estrategias implementadas movilizan el aprendizaje.

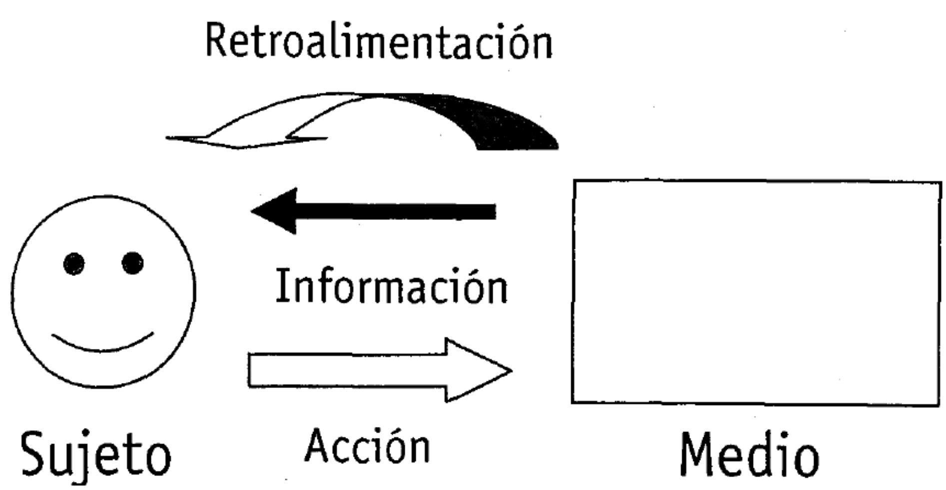


Figura 15. Esquema general de situación de acción, (Brousseau 1986, pp. 25)

En la figura 15, se muestra la acción del sujeto sobre el medio y este le devuelve una información, que es reinterpretada por el sujeto según sus acciones, lo cual se convierte en una retroalimentación.

- *Situación de formulación.*

En esta segunda situación se deben de considerar dos momentos diferentes: cuando el alumno se encuentra desarrollando la situación didáctica, la socialización y discusión las estrategias implementadas.

En el momento que el alumno desarrolla la situación simplemente está en situación de acción, mientras que los alumnos que están fuera recogen toda la información que se presenta, sin tener acción directa ni intervenir.

Luego en el momento de socializar y discutir las estrategias implementadas, se debe tener en cuenta que para el estudiante el medio se constituye en cada una de las acciones de solución de la *situación didáctica*, el estudiante está en la potestad de saber la estrategia correcta de solución y comunicar en un sistema lingüístico ante los demás compañeros, esta es la única manera que tiene de actuar sobre la situación. ¨La formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico) ¨ Brousseau (1986, pp. 25). Es el medio que exige al estudiante después de hacer la interacción, realizar una formulación y es indispensable involucrar a otro sujeto (estudiante o profesor), a quien deberá establecer información como se muestra en la figura 16.

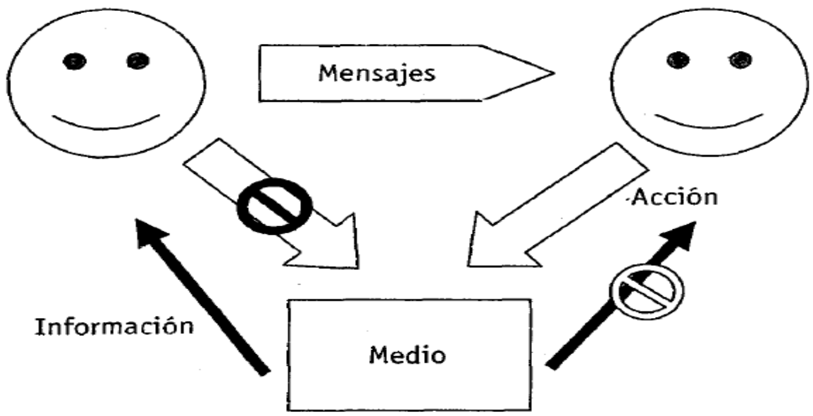


Figura 16. Esquema general de situación de formulación (Brousseau 1986 pp. 26)

- *Situación de validación*

En esta situación los estudiantes organizan enunciados en demostración de la posible solución de la *secuencia didáctica*, se establece la falsedad del argumento del resto de estudiantes, se construyen teorías, se aprende a convencer a los demás en cuanto a enunciados de referencia y no dejarse convencer desde unos argumentos teóricos o al ejercer la autoridad, la intimidación, seducción etc., son importantes las razones que se implemente para el pleno convencimiento, pero no solo es trasmitir la información, sino que también, debe afirmar cosas verdaderas y convincentes en un sistema determinado, se considera la imagen que expone (Brousseau ,1986, pp. 27) (ver figura 17).

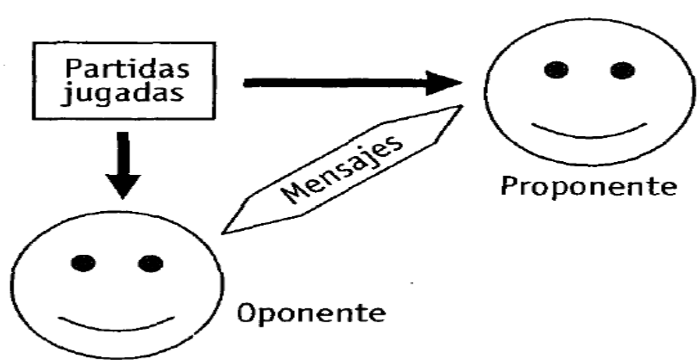


Figura 17. Esquema general de situación de validación, (Brousseau 1986, pp. 27)

Es importante diferenciar los conceptos de *situación* y *fase*. Partiendo de lo que propone Margolinas (2009), la *fase* es el desarrollo efectivo en un momento determinado de las acciones del estudiante y el profesor, mientras que Brousseau (1986) determina que la *situación* es un nivel completo de descripción y determinaciones y/o limitaciones que el profesor o el investigador puede controlar a partir de la interacción entre un medio y un sujeto determinado.

En la didáctica de las matemáticas se utiliza la palabra fase cuando se quiere describir los momentos observados, explicables, pero no necesariamente previstos en una situación de clase así:

La ***fase de formulación*** se trata de un momento en el que se formulan efectivamente los conocimientos en juego en la interacción didáctica.

Se llama ***fase de validación*** a esas discusiones espontáneas sobre la validez de las estrategias. Aparecen aquí como medios de acción. Los estudiantes las utilizan como un medio para convencer de la acción y los resultados logrados.

La ***fase de acción*** se encuentra ligada los actos observables por parte de los estudiantes y generalmente va de la mano a los procesos de formulación y validación.

2.3 DIMENSIÓN INSTRUMENTAL

En el campo de la educación matemática han mostrado que la tecnología cada vez ocupa un lugar muy importante en el desarrollo de diferentes disciplinas, es decir, el estudiante con la ayuda de las *TIC* puede construir un conocimiento de una manera más dinámica y significativa.

Como acontecimiento social se ve la emergencia de una concepción diferente de las relaciones de los profesores con los artefactos y tener una concepción clara de su funcionalidad y el propósito de su uso.

Es claro que existe la necesidad de la intervención del profesor en el campo de la educación pues las máquinas solas no pueden potenciar los conocimientos de los estudiantes, se considera la concepción de Rabardel (2001) quien afirma *“que la tecnología como ciencia de las técnicas nos permite comprender las técnicas, pero cuando se trata de efectuar actos técnicos en un medio técnico, una ciencia de las técnicas no basta, pues bajo las técnicas, está el hombre actor con su saber-hacer, saber-ser y su afectividad”* pp 211.

Podemos notar que este enfoque resalta la importancia que tiene el artefacto en la evolución del conocimiento e implícitamente resalta la medicación instrumental en la actividad humana. Aquí, es importante reconocer que la *orquestación instrumental* es uno de los conceptos centrales para pensar y analizar las formas en las que los instrumentos influyen en la construcción del conocimiento.

Por otra parte, Moreno (2001) señala que cuando un estudiante se auxilia de un artefacto, como por ejemplo de una calculadora para realizar ciertos cálculos dentro de un problema cuya solución ya ha encontrado, esa calculadora puede verse como un auxiliar de su cognición. Se dice entonces, que la calculadora es un instrumento pues complementa el pensamiento del estudiante.

Es posible que el continuo uso de un sistema técnico induzca cambios a nivel de las estrategias de las situaciones didácticas, de la manera estructural y en el planteamiento. En este caso cuando hablamos de GeoGebra, diremos que este software no es un instrumento por sí solo, se convierte en un instrumento cuando el usuario se apropia de él para el desarrollo de un tipo de situaciones.

En este sentido el instrumento debe ser desarrollado por el sujeto durante un proceso de génesis instrumental, la cual se construye a partir de un proceso doble de instrumentación e instrumentalización:

- *proceso de instrumentación centrado en el sujeto.*
- *proceso de instrumentalización dirigido al artefacto.*

La Instrumentalización está dirigido hacia el artefacto, en términos del descubrimiento y selección de comandos y una personalización y/o transformación del artefacto de acuerdo a las necesidades del usuario. Mientras que la instrumentación está dirigida al sujeto se refiere a la apropiación que tiene el estudiante del artefacto para solucionar una tarea a partir de los esquemas de uso y de acción instrumentadas construidos.

Los esquemas de uso son importantes en el desarrollo de las acciones directamente vinculadas al artefacto, pues se deben concebir una serie de restricciones y condiciones para trabajar con él. Aquí el uso continuo de los artefactos garantiza los esquemas de uso, los cuales contribuyen a un significado de las nociones matemáticas. Luego de haber trabajado con las condiciones y restricciones, estos artefactos se llaman instrumentos de conocimiento.

Rabardel (2001), enfatiza que los instrumentos presentan una fuerte influencia en la construcción del saber y en sus modos de construcción, pero al mismo tiempo, se nota la complejidad del instrumento como variable importante en una situación didáctica, haciendo viable la posibilidad que tiene el profesor de anticipar las acciones de los estudiantes en los desarrollos instrumentales. Por ello, es indispensable que el docente considere los procesos mediante los cuales se puedan construir diferentes instrumentos de aprendizaje haciendo uso de un mismo artefacto.

2.3.1 Orquestación instrumental

Para este trabajo vamos a tener en cuenta a Trouche (2003) quien define la *orquestación instrumental* como un tipo de configuración experimental con cuatro componentes fundamentales:

- *Un conjunto de individuos.*
- *Un conjunto de objetivos (relacionados con el comportamiento del tipo de tareas o el acomodamiento de un trabajo- en el ambiente).*
- *Una configuración didáctica (es decir una estructura general o el plan de acción).*
- *Un conjunto de aprovechamiento de esta configuración.*

Es decir, la orquestación instrumental constituye un dispositivo experimental, propio de ambientes informáticos de aprendizaje, en el cual el diseño de las tareas, su puesta en escena, o gestión, son aspectos fundamentales.

El conjunto de individuos en este caso son los estudiantes que participan en el desarrollo de la secuencia didáctica. En las cuales se tiene en cuenta una configuración didáctica para lograr un aprendizaje.

Trouche (2003) afirma que la *orquestación instrumental* puede actuar en varios niveles:

- *En el nivel de un artefacto*
- *En el nivel de un instrumento o un conjunto de instrumentos*
- *En el nivel de la relación de un sujeto con un instrumento o conjunto de instrumentos.*

Para este trabajo de grado se tendrá en cuenta el primer nivel de *Orquestación Instrumental*, pues aquí se puede evidenciar cómo el artefacto media en la construcción del conocimiento matemático, por tanto tiene que ver con las propiedades con las que se ha pensado el diseño de las situaciones en un contexto geométrico.

Así como la interacción de cada individuo con el artefacto para la construcción de esquemas de uso y esquemas de acción instrumentada, que aporten al desarrollo cognitivo, puesto que de esta manera el podrá asimilar el conocimiento matemático inmerso en las situaciones y reflejar a partir de sus acciones el conocimiento construido.

Por ser un diseño experimental piloto, aplicado a un sólo estudiante, en la organización de la secuencia se podrá:

- Permitir que la génesis instrumental avance a su propio ritmo
- Desarrollar interacciones directas con el artefacto y el profesor.
- Favorecer el establecimiento de relaciones entre diversas herramientas GeoGebra y lápiz/papel, que le permitan al estudiante conjeturar, probar, solucionar y comprobar.
- Evidenciar la interacción de los estudiantes cuando se enfrentan a un diseño experimental en GeoGebra y determinar la reacción que tiene frente a las retroalimentaciones, el tipo de razonamientos que hace, qué técnicas utiliza y a qué conclusiones llega.

De esta manera analizar como el estudiante se apropia de ese instrumento para lograr el desarrollo de la secuencia didáctica, puesto que la orquestación instrumental integra partes del sistema didáctico que permiten que el estudiante construya ciertos conocimientos.

En este sentido, la orquestación instrumental favorece el manejo de los procesos de instrumentación e instrumentalización que hace un estudiante con el artefacto, pues a través de las diferentes técnicas instrumentadas se puede obtener información acerca de dichos procesos.

Por otra parte, la gestión didáctica del profesor no se presenta sólo en la fase interactiva en la que se implementa la situación, en la fase preactiva de diseño y/o adaptación de las situaciones didácticas, el profesor debe preveer una organización de los tiempos y propósitos de cada situación, establecer los mecanismos de participación o roles asignados y determinar los conocimientos previos que deben tener los estudiantes.

A continuación se describen las características del artefacto que se utiliza como medio para movilizar el conocimiento en la secuencia didáctica.

2.3.2 GeoGebra

Este AGD fue desarrollado por el profesor Markus Hohenwarter de la universidad de Saizburgo. Este es un micromundo con un conjunto de objetos primitivos (puntos, rectas, segmentos, ángulos, polígonos, entre otros), operaciones elementales(suma, resta, multiplicación, división, derivadas, integrales, entre otras) sobre esos objetos, y reglas que expresan las formas en que las operaciones pueden ser realizadas y asociadas, el cual es la estructura usual de un sistema formal en el sentido matemático.

GeoGebra tiene algunas características de los sistemas algebraicos computacionales (CAS), en los cuales se ofrecen posibilidades para visualizar el efecto dinámico de los parámetros, fortaleciendo la relación entre la expresión algebraica y gráfica, haciendo la expresión algebraica algo más significativo para los estudiantes.

Como lo mencionan Garzón y Fernández (2006), GeoGebra cumple con la caracterización de los ambientes de Geometría Dinámica y se considera que:

- Permiten construir figuras con cierta propiedad y además transformar construcciones en tiempo real.

- El dragging o arrastre, permite modificar la figura sin cambiar las propiedades que la caracterizan, en este sentido el trabajo con AGD hace posible un proceso de validación de una solución ´´test de arrastre´´.

Al reunir aspectos de CAS y de AGD se tiene un universo más grande de posibilidades para promover la visualización y el manejo de diferentes representaciones matemáticas lo cual aporta a la comprensión de los conceptos matemáticos (Garzón & Fernández 2006).

Por otro lado, es importante resaltar que GeoGebra fue desarrollado en una plataforma con un lenguaje JAVA, permite la elaboración de applets, estas son aplicaciones que se ejecutan en un navegador web, la ventaja de tener los archivos como applets es que se encuentran disponibles en la web y pueden ser visualizados desde cualquier equipo con conexión a internet.

2.4 DIMENSIÓN CURRICULAR

En los lineamientos curriculares que emite el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) se reconoció que la enseñanza de las matemáticas debe involucrar los aspectos sociales, culturales y políticos que influyen en los procesos educativos de las diferentes regiones del país.

Por otro lado es importante mencionar que las matemáticas son una disciplina que constantemente está evolucionando, dando respuesta de esta manera a diferentes necesidades socioculturales comunes a toda la humanidad. Por tal razón podemos observar que las necesidades del momento no son las mismas que se presentaban años atrás.

El MEN (1998), busca por medio de la educación matemática que los centros educativos puedan promover y orientar los diferentes procesos curriculares, puesto que las matemáticas deben ser un medio propicio para que las personas puedan integrarla a su realidad y con las diferentes áreas de estudio.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se hace la propuesta de una estructura curricular basándose en que las matemáticas ayudan a que las personas comprendan de una forma más sencilla el mundo que los rodea, y de esta manera tener una mejor apropiación del conocimiento que otras personas han construido, es por esta razón que se plantea organizar el currículo desde tres aspectos: conocimientos básicos, procesos y contextos. Se mencionan los conocimientos básicos que tienen que ver con los diferentes pensamientos y sistemas propios de las matemáticas.

Según el MEN (1998) los sistemas son aquéllos propuestos desde la Renovación Curricular: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos, sistemas algebraicos y analíticos; ahora, estos sistemas se desarrollan los siguientes pensamientos:

- Pensamiento numérico
- Pensamiento espacial
- pensamiento métrico pensamiento aleatorio
- pensamiento variacional

Sin embargo, cabe mencionar que los sistemas corresponden a cada pensamiento, pero ellos no son ni deben ser el medio exclusivo para desarrollarlo, en la mayoría de las situaciones se permite la articulación de sistemas para ampliar su campo de desarrollo y contribuir a la integración del conocimiento.

A su vez los pensamientos deben ser desarrollados a partir de unos procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje, tales como: el razonamiento; la resolución y el planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Finalmente el contexto, es otro elemento importante a considerar, este tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas que se aprenden. Variables como las condiciones sociales y culturales, tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas (MEN, 1998).

En este trabajo se le va a dar más relevancia a los siguientes conocimientos básicos: Pensamiento espacial, sistemas geométricos y el pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos. El pensamiento espacial por el interés de estudiar las propiedades de algunas figuras geométricas, tales como los *triángulos*, y porque además, el pensamiento espacial tiene como propósito construir distintos caminos o acercamientos significativos en torno a la comprensión de razones y proporciones, utilizando cantidades numéricas lo cual tiene una relación directa con el pensamiento variacional. Por otro lado, el desarrollo de la *secuencia didáctica* en *GeoGebra* permite el cambio y la variación de cantidades y magnitudes para la organización y modelación de la *semejanza de triángulos*.

Los Sistemas geométricos: La propuesta de Renovación Curricular avanzó en este proceso enfatizando la geometría activa como una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio.

En los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales.

Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo y en movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipular objetos, localizar situaciones en el entorno y efectuar desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto, relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionar y razonar sobre propiedades geométricas abstractas, al tomar sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales.

Este proceso de construcción del espacio está condicionado e influenciado tanto por las características cognitivas individuales como por la influencia del entorno físico, cultural, social e histórico. Por tanto, el estudio de la geometría en la escuela debe favorecer estas interacciones. Se trata de actuar y argumentar sobre el espacio ayudándose con modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario, con gestos y movimientos corporales (MEN, 1998,).

Pensamiento variacional: Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados, que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas.

Un primer acercamiento en la búsqueda de las interrelaciones permite identificar algunos de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación:

La proporcionalidad cobra especial significado. En los contextos de la vida práctica y en los científicos, la variación se encuentra en contextos de dependencia entre variables o en contextos donde una misma cantidad varía (conocida como medición de la variación absoluta o relativa). Estos conceptos promueven en el estudiante actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático.

Desde esta perspectiva, en el desarrollo del pensamiento variacional se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que nuevas situaciones problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas.

En las matemáticas los escenarios geométricos o numéricos también deben ser utilizados para reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones. Estas exploraciones permiten, en una primera instancia, hacer una descripción verbal de la relación que existe entre las cantidades (el argumento y el producto terminado que se lee primero) que intervienen en la transformación.

“El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica” (MEN, 1998, pp. 73).

De esta forma se ve la importancia de innovar a la hora de transmitir un conocimiento matemático y de esta manera surgen las tecnologías como herramientas de aprendizaje como se menciona en el MEN (1999).

Cabe mencionar que en las últimas dos a tres décadas se ha visto una preocupación por parte del MEN, por tratar de incorporar a las aulas de clase la tecnología debido a que ya se considera una necesidad social. Desde finales de 1996 el MEN inició un proceso de construcción participativa y de formulación de Lineamientos Curriculares para orientar la Educación Matemática en el país (MEN, 1999). Por ende podemos notar cómo la educación va en una constante evolución, no siendo ajena de esta manera a los cambios que se están dando en nuestro planeta, donde la tecnología hace un aporte positivo para la educación matemática puesto que se puede tener una mayor facilidad para asimilar los diferentes conocimientos como se menciona en MEN (1999):
:

Las nuevas tecnologías, no sólo han hecho más fáciles los cálculos y la elaboración de gráficas, sino que han cambiado la naturaleza misma de los problemas que interesan a las matemáticas y los métodos que usan los matemáticos para investigarlos. Estas reflexiones plantean una nueva visión del conocimiento y de la actividad matemática en la escuela que señala como aspecto fundamental el reconocimiento de las nuevas tecnologías, tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones, y muestra la necesidad de profundizar sobre el papel de la tecnología en el Currículo de Matemáticas. MEN (1999 pp. 19).

Como se menciona en el MEN (1999), podemos ver la importancia de utilizar un software que permita tener una mayor facilidad de entender o asimilar un conocimiento, puesto que a la hora de utilizar un medio, este puede ser: medios estáticos o medios dinámicos. Los medios estáticos son aquellos en los cuales se movilizan conocimientos por herramientas tangibles o físicas, mientras que los medios dinámicos están soportados en una herramienta ´´software´´, en el cual las figuras son construidos de tal forma que a partir del arrastre o la animación de las objetos que la componen se pueda identificar o asimilar sus propiedades o axiomática de una manera más significativa.

Por ejemplo, el estudio de la geometría antes se hacía de manera estática con objetos abstractos y sus representaciones en el papel. Ahora se dispone de ambientes de geometría dinámicos, en los cuales se crea un micromundo de experimentación que propicia la interacción concreta del alumno con los objetos geométricos, y facilita la construcción del conocimiento. Estos programas de geometría dinámica suministran un ambiente en el cual los estudiantes se animan a realizar conjeturas, crear imágenes, argumentar y justificar. También les permite usar los errores constructivamente para dinamizar su proceso de aprendizaje como se muestra del MEN (1999).

Un aspecto fundamental que subyace a los cambios curriculares en matemáticas provocados por el uso de las nuevas tecnologías es la emergencia de una nueva relación entre profesores, estudiantes y saberes matemáticos. La presencia de calculadoras o computadores para demostraciones, práctica, resolución de problemas y evaluación, crea una nueva dinámica en el aula, en la cual, profesores y estudiantes son compañeros naturales en la búsqueda de la comprensión de ideas matemáticas y la solución de problemas. Si los profesores están preparados para asumir estos nuevos retos se podrá cambiar la educación.

Con el advenimiento de las calculadoras gráficas y los computadores se presenta una nueva herramienta para desarrollar la capacidad de visualización. Los programas comerciales desarrollados especialmente para graficar tienen muchas ventajas sobre el tablero o el lápiz y el papel ya que desarrollan gráficas complejas con gran velocidad y precisión. El efecto de la visualización dinámica e interactiva sobre la formación de imágenes conceptuales y la transición de representaciones gráficas geométricas a simbólicas - algebraicas es innegable. Por ejemplo, el uso de computadores para manipular diagramas dinámicamente capacita a los estudiantes para visualizar la geometría de manera activa, tal como ellos generan sus propias imágenes mentales a partir de la interacción con el medio, como se afirma en los lineamientos curriculares del MEN (1999).

De este modo es importante la geometría de las transformaciones a la hora de mencionar un software de geometría, puesto que tiene que ver con el movimiento por lo que es muy apropiado trabajar con programas informáticos dinámicos. Estos permiten mover objetos alrededor de la pantalla con el mouse y ver la reflexión, o alguna otra transformación, moviéndose simultáneamente como se muestra en la figura 18 MEN (1999).

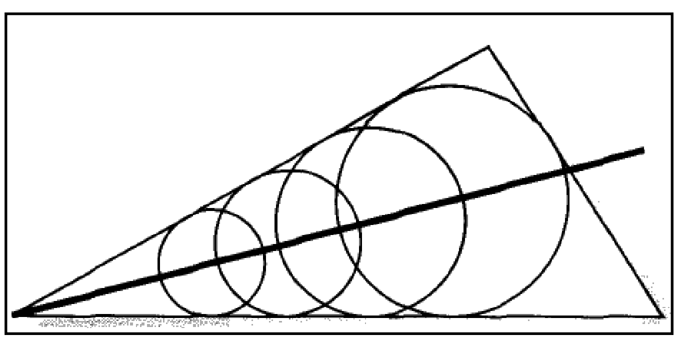


Figura 18. Visualización modelo 1

La naturaleza dinámica del software también simula imágenes mentales de otras ideas geométricas, por ejemplo, si a un estudiante que esté familiarizado con un software se le pregunta acerca de los círculos inscritos en un triángulo, puede hacer ensayos para visualizarlos encogiendo y expandiendo el triángulo desde uno de sus vértices. Esto, junto con la simetría, puede sugerir que el centro del círculo yace sobre las bisectrices de los ángulos como se puede ver en la figura 18.

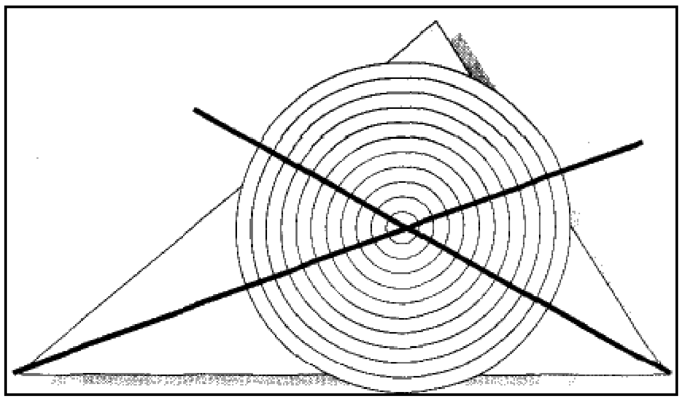


Figura 19. Visualización modelo 2

Así mismo, el software se puede usar para construir dos de las bisectrices de los ángulos del triángulo y lentamente ensanchar un círculo centrado en la intersección como se muestra en la figura 19. Esto confirmaría que el círculo toca todos los tres lados del triángulo, o sea que su centro yace en la intersección de las bisectrices, pero estas confirmaciones no remplazan las demostraciones llevando a deformar una figura que se ha producido a través de una construcción geométrica genera muchos ejemplos, y el vínculo dinámico entre ellas facilita la formulación y comprobación de conjeturas como lo muestra los lineamientos curriculares del MEN (1999)

A diferencia del trabajo en lápiz y papel, el empleo de software especializado en gráficas en tercera dimensión permite el desarrollo de la espacialidad y la orientación. Al poder explorar muchas figuras en tres dimensiones, rotarlas, cortarlas, estudiar sus ejes de simetría, etc. sin el problema de las dificultades físicas de la construcción de los modelos, se desarrolla no solo la capacidad espacial, sino el razonamiento geométrico.

Todos los elementos presentados en este capítulo se integran en el diseño y/o adaptación de la secuencia didáctica a implementar. En el siguiente capítulo se describe la metodología que permite lograr la articulación de los marcos a partir de una rejilla de análisis y de los análisis *a priori* presentados.

CAPÍTULO III. REFERENTES METODOLÓGICOS

En este capítulo se presenta la metodología utilizada para la realización del trabajo y la adaptación de una secuencia didáctica a partir de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la orquestación instrumental como fundamento para los respectivos análisis *a priori* de las situaciones utilizadas en la experimentación.

3.1 METODOLOGÍA DE TRABAJO

Para el presente trabajo se seleccionó como metodología los *estudios de caso*, centrado en las relaciones y las interacciones que un estudiante tiene con los elementos del sistema didáctico, que al integrar GeoGebra, se ve modificado, aquí el análisis se centrará en la relación estudiante-profesor, estudiante-conocimiento, estudiante-GeoGebra, aunque en la adaptación de la situación se refleja la relación entre profesor-conocimiento y profesor-GeoGebra, así mismo es importante resaltar que la participación del profesor, que en este caso es uno de los investigadores, se da en las diferentes fases empleadas en esta metodología y no solamente en la fase activa.

Las fuentes de datos utilizadas para el análisis de la secuencia didáctica son las filmaciones y los registros escritos de las guías resueltas a lápiz y papel, así como el conocimiento previo del investigador de las características del estudiante seleccionado.

Por ser un estudio de tipo cualitativo, interesa caracterizar las interacciones que un estudiante hace con cada elemento del sistema didáctico, en especial con GeoGebra, con el fin de establecer el tipo de retroalimentación que ofrece y lo que aporta a la construcción de su conocimiento matemático.

La metodología de estudio de caso es apropiada por la complejidad que se presenta al analizar la integración de tecnología en el aula de clase, en particular para el estudio de la semejanza de *triángulos* y la relación entre los diferentes elementos del sistema didáctico.

Se decidió adaptar algunas de las situaciones de una secuencia propuesta por Martínez (s.f), en el marco del Seminario de Resolución de Problemas, para ello se crearon nuevamente los applets[2] en GeoGebra utilizando deslizadores y una ficha con preguntas que guían su exploración. Se pretende que a partir de dicha exploración, el estudiante corrobore si los triángulos son semejantes e identifique el criterio de semejanza utilizado para comprobar dicha semejanza.

Los estudios de casos siguen unas fases generales ampliamente aceptadas en la investigación educativa. Según Pérez Serrano (1994) y Martínez Bonafé (1990) se distinguen:

Fase 1: Preactiva

Dentro de los análisis se destaca principalmente los contenidos contemplados en la enseñanza tradicional, su efecto, y el análisis de las concepciones de los estudiantes; se define la teoría que fundamentará el estudio de caso, a partir de la Teoría de Situaciones Didáctica, la Orquestación Instrumental y la evolución del conocimiento matemático, los cuales han sido presentados en el capítulo 1, en el cual se presenta los aspectos generales del trabajo, la pregunta y los objetivos de investigación; en el capítulo 2 se presenta el marco teórico que servirá de referencia para definir las unidades de análisis que se utilizaran en los análisis *a priori* de las situaciones que se implementaran, el análisis comprenderá una parte descriptiva y una predictiva.

Fase 2: Interactiva:

Hace referencia a la implementación o experimentación de *la secuencia didáctica*, enfocándose en una serie de condiciones estrictamente planificadas por el investigador con el objetivo de recoger evidencias que puedan ser contrastadas con los análisis *a priori*. En esta fase es fundamental los procedimientos utilizados para recoger, reducir y

[2] Un applet es un componente de una aplicación que se ejecuta en el contexto de otro programa, por ejemplo en un navegador web.

relacionar la información recogida a través de filmaciones y registros escritos, los cuales serán utilizados para los análisis al combinar el modo teórico y descriptivo, el cual irá acompañado por una rejilla de análisis, esta fase se desarrolla en el capítulo 4.

Fase 3: Postactiva

Es el informe final en el que se detallan las reflexiones sobre la experimentación al considerar las unidades de análisis seleccionadas, se contrastan los análisis *a priori* con lo ocurrido en la experimentación, se responde la pregunta y se da cuenta de los objetivos planteados al inicio del trabajo, esta fase se desarrolla en el capítulo 4, en el cual se presentan los análisis y resultados.

3.2 ANÁLISIS A PRIORI DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA.

La *secuencia didáctica* movilizará situaciones de *semejanza de triángulos* y se va aplicar a un estudiante de grado octavo de educación básica secundaria, teniendo en cuenta algunos aspectos de la *TSD y la orquestación instrumental*. Para cada uno de los momentos se tendrán cuatro aspectos importantes.

- Descripción de las fases.
- Retroacción del medio.
- Gestión del profesor.
- Posibles respuestas.

Esta *secuencia didáctica* está compuesta por cuatro situaciones las cuales se van a enumerar de manera consecutiva así: situación 1, situación 2, situación 3 y situación 4, se tiene proyectado implementarlas en tres horas reloj.

En la secuencia didáctica a medida que se desarrollan las fases se estructura un conocimiento de tal manera que contribuya al aprendizaje de la semejanza de *triángulos*. En el desarrollo de las situaciones lo que se quiere es que los estudiantes lleguen a un acercamiento, no necesariamente formal y riguroso de la semejanza de *triángulos*, sino que a partir de la manipulación de las construcciones realizadas en GeoGebra, se realice una exploración de los *triángulos* que le permita al estudiante hacer una aproximación de conceptos y propiedades de una manera informal a partir de la visualización, la manipulación y el arrastre.

3.2.1 Descripción de las Fases.

En cada situación de la secuencia didáctica se presentan diferentes fases, es importante retomar que una fase es el desarrollo efectivo en un momento determinado, de las acciones del estudiante y el medio, que en este caso se presenta en cada pregunta que se propone en las situaciones, mientras que la situación determina un nivel completo de descripción y determinaciones a partir de la interacción entre un medio y un sujeto determinado, es decir se conforma por diferentes fases.

En este trabajo el medio es construido de manera artificial para movilizar los conocimientos, cuando se presentan las situaciones cada una se estructura a partir de las fases de acción, de formulación y de validación. Las cuáles se describen a continuación:

- La fase de acción se da cuando el estudiante mediante la manipulación y el arrastre interactúa con el medio realizando una acción, pero es el medio quien le da una retroacción que le permite al estudiante conjeturar y construir su conocimiento, se establece así una experiencia.

- La fase de formulación se presenta cuando el estudiante ya ha interactuado con el medio y contesta la pregunta que tiene la intencionalidad de hacer que el estudiante explique mediante un texto o aplicando un procedimiento y a partir de un análisis los conocimientos que se adquiere al enfrentarse al medio.
- La fase de validación se presenta cuando el estudiante, después de pasar por las fases anteriores, está en la obligación de poder determinar una estrategia final que comúnmente se considera ganadora y es la única manera en que el

estudiante esté por encima del medio, donde ya adquirió unos conocimientos y está en la necesidad de comunicarlos.

3.2.2 Retroacción del medio.

La idea de las cuatro situaciones para el aprendizaje de la semejanza de *triángulos*, se fundamenta en la organización y secuencia de una serie de intenciones que fueron creadas en el medio para que potencie al máximo el aprendizaje significativo. El fundamento de esta idea nace en la orquestación instrumental y la teoría de situaciones didácticas, que básicamente nos dice, cómo es la interacción del estudiante con el medio, en qué momento el medio da la retroalimentación al estudiante para adquirir el concepto esperado.

En el desarrollo de las situaciones se espera favorecer el trabajo individual y que sea el estudiante quien se enfrente al medio y sea el medio quien le de la información que se necesita para establecer razones, reconocer propiedades de los lados y ángulos de los *triángulos* y poder relacionarlos con la semejanza de las figuras generadas y poder así acercarse al conocimiento que se desea construir.

Cabe resaltar que el medio es artificial, es creado bajo una serie de intenciones y con unos propósitos claros que son los que establecen el aprendizaje de la semejanza de *triángulos* a partir de la secuencia didáctica, este medio está conformado por GeoGebra y por las situaciones ahí presentes.

3.2.3 Gestión del profesor

Al considerar que el profesor es el mismo investigador su gestión se da a lo largo de toda la metodología, desde la *fase preactiva* en la cual se planifica la secuencia didáctica, a continuación se explicitan los criterios que se tuvieron en cuenta para el diseño y gestión de la secuencia:

- *Orquestación Instrumental*

La secuencia ha sido pensada para que el estudiante interactúe con el medio, en este caso GeoGebra, y a partir de la exploración encuentre respuestas a las preguntas planteadas, sin embargo, es importante la gestión del profesor al orientar la solución a partir de nuevas preguntas.

- *Organización de los tiempos y propósitos de cada situación propuesta.*

Se tiene estimado un tiempo de 45 minutos para cada situación, el propósito de cada situación se plantea en el análisis *a priori* que se realiza a continuación.

- *Mecanismos de participación*

Las situaciones se realizan de manera individual, se entrega la guía de trabajo impresa y el estudiante dispone de un computador para la experimentación con los applets creados en Geogebra, los cuales se encuentran en el escritorio del computador asignado.

- *Conocimientos previos del estudiante*

El estudiante ya ha trabajado en clase el concepto de razón y proporción, diferencia cuándo dos figur*as* son congruentes y semejantes, así mismo, conocen los criterios de semejanza. Por otro lado, han trabajo en GeoGebra en la representación de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas, por lo que ya tienen un grado de familiaridad con el software que se emplea, se espera que los estudiantes utilicen estos conocimientos en un contexto diferente al lápiz y papel.

- *Rol del estudiante*

  Se espera una participación activa del estudiante en el desarrollo de las situaciones propuestas por el profesor, interesa el tipo de justificaciones que dé a las respuestas halladas y la validación a partir del medio y de socialización que se establece con el profesor.

3.2.4. Posibles Respuestas

3.2.4.1. Descripción de la situación 1.

En esta primera situación lo que se quiere es que el estudiante interactúe con el software y reconozca las propiedades, las utilidades y las funciones que él ofrece.

Se potencializa el proceso de la génesis instrumental y va estrechamente unido a las restricciones y las condiciones que ofrece GeoGebra, donde el estudiante se apropia del manejo del software y convierte un artefacto en un instrumento para hacerlo útil, se debe recordar que:

“El instrumento no existe en sí mismo, este inicia a ser instrumento cuando el sujeto ha estado dispuesto a apropiarse este para sí mismo y lo ha integrado en sus actividades” Verillon & Rabardel (1995).

En esta situación es probable que surjan preguntas referidas a la construcción del deslizador y las figuras semejantes (homotecia), estas preguntas pueden dar debido a que los estudiantes han manipulado el software graficando funciones, lineales, cuadradas y cúbicas, sentirán curiosidad en la elaboración de actividades que movilicen conocimientos de esa manera.

Al enfrentar la situación lo que se quiere es que los estudiantes manipulen el deslizador y observen que hay una figura fija y otra semejante a ella y que reconozcan que la razón entre las figuras es el valor numérico del deslizador (ver figura 21).

Un aspecto importante en esta situación y que es de resaltar, es que el medio es quien le determina al estudiante toda la información para comprender cuando dos figuras son semejantes a partir de la razón entre ellas, así el medio y la gestión del profesor ayuda a que el estudiante realice un análisis y pueda responder las preguntas planteadas en las situaciones (ver figura 20).

Para esta situación hay 6 preguntas que dirigen al estudiante a llegar al concepto de la razón a partir de dos figuras semejantes, ya que a medida que mueve el deslizador la figura semejante se hace cada vez más grande según el valor que tome el deslizador que es la razón entre las figuras, y así se familiariza con propiedades aritméticas y geométricas que ya ha trabajado anteriormente en contexto de lápiz y papel.

Es de suma importancia que el estudiante registre los procedimientos y las respuestas de cada una de las preguntas para tener un soporte de lo que observa el estudiante, de sus interpretaciones y conjeturas.

A continuación se presenta la ficha de la situación 1.

Situación 1

1. Explora el entorno e identifica que objetos se pueden mover.

2. ¿Qué sucede al mover el deslizador ``$a$``?

3. ¿Qué relación existe entre las figuras y el valor numérico del deslizador ``$a$``?

4. Encuentra dos razones entre la figura inicial y la figura final al mover el deslizador ``$a$``.

5. Compare las dos razones halladas, con el valor del deslizador ``$a$``.

6. ¿Qué propiedad deben tener las figuras en GeoGebra para que sean de la misma forma pero de diferente tamaño?

Figura 20. Ficha del estudiante. Situación 1.

Con esta ficha se presenta la construcción en GeoGebra, la cual es una figura de la copa del mundo que está construida con propiedades geométricas y un deslizador. La figura de la copa del mundo tiene el valor de la altura y el deslizador tiene el valor de la razón entre la altura de la figura semejante que se ve al empezar a mover el deslizador (ver figura 21).

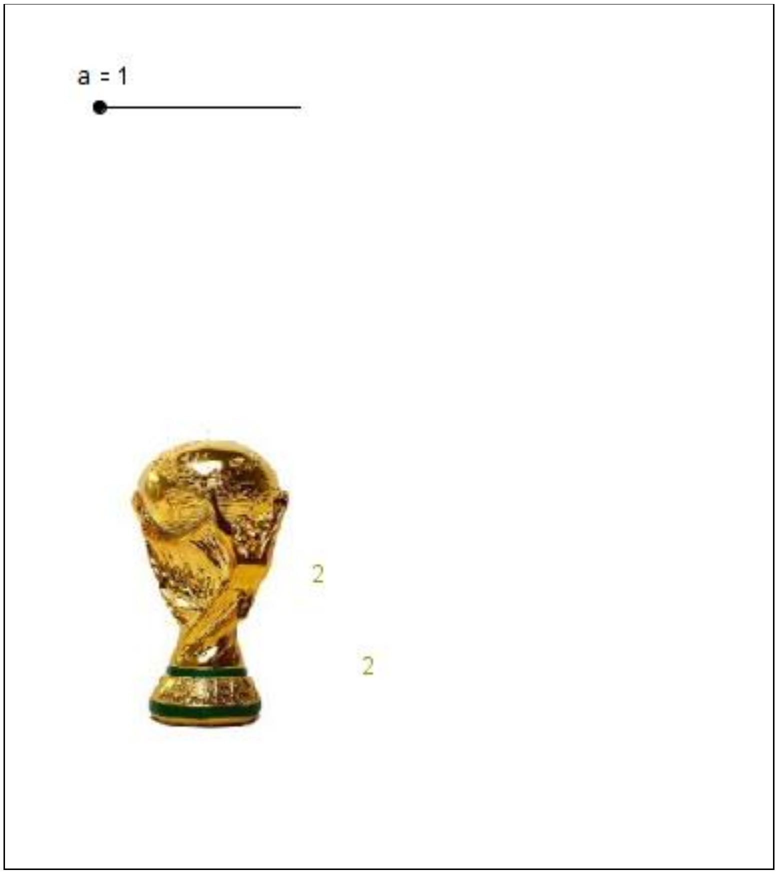


Figura 21. Configuración en pantalla. Situación 1

La estructura de la situación da cuenta de cada una de las fases así:

- ***Fase de acción.***

En las preguntas 1 y 2 se presenta esta fase porque el estudiante manipula el software, mueve el deslizador y observa que se genera una nueva figura, reconoce las limitantes que le da el medio y la potencialidad que él le ofrece. Con eso se pretende que el estudiante inspeccione lo que el medio le ofrece y lo convierte en un instrumento para movilizar el conocimiento.

1. Explora el entorno e identifica que objetos se pueden mover.

2. ¿Qué sucede al mover el deslizador ``$a$``?

Posibles respuestas.

El estudiante debe responder que sólo se mueve el deslizador a y las figuras permanecen fijas, además, que al mover el deslizador a genera una figura de igual forma pero diferente tamaño que empieza a cambiar, a medida que sigue moviendo el deslizador a hacia la parte derecha, va creciendo la figura que se genera y aumenta el valor del deslizador a. En el momento que mueva el deslizador a hacia el lado izquierdo, empieza a disminuir el tamaño de la figura y el valor del deslizador empieza a disminuir.

- ***Fase de formulación.***

En las preguntas 3, 4 y 5 se presenta la fase de formulación, porque cuando el estudiante enfrenta el medio, este le ofrece una retroacción que le permite establecer la relación entre el deslizador y las figuras para establecer razones entre ellas y compararlas, así, el estudiante organiza sus ideas, las expresa y puede llegar a una conclusión.

3. ¿Qué relación existe entre las figuras y el valor numérico del deslizador `` $a$ ``?

Posibles respuestas.

El estudiante debe reconocer que hay una figura que se mantiene fija y otra que cambia, y que la relación que hay entre el valor numérico del deslizador y las figuras es que la figura cambiante incrementa o disminuye de acuerdo al valor numérico que tiene el deslizador a. Ej: si el deslizador $a = 2$ es porque la figura cambiante es el doble de la inicial, si el deslizador $a = 3$ es porque la figura cambiante es el triple de la figura inicial.

4. Encuentra dos razones entre la figura inicial y la figura final al mover el deslizador `` $a$ ``.

Posibles respuestas.

El estudiante debe formular dos razones donde el antecedente debe ser el valor numérico de la altura de figura que incrementa y el consecuente debe ser el valor de la altura de la figura que mantiene fija. Ejemplo:

$$Razón_1 = \frac{4}{2} = 2 \quad , \quad Razón_2 = \frac{6}{2} = 3$$

5. Compare las dos razones halladas, con el valor del deslizador ``***a***``.

Posibles respuestas.

El estudiante debe contestar que cuando resuelven el cociente de las dos razones (numero entero) efectivamente el valor numérico del cociente es el mismo del valor numérico del deslizador a.

Ejemplo: si la razón $Razón_1 = \frac{4}{2} = 2$, entonces el deslizador $a = 2$ y si la razón $Razón_2 = \frac{6}{2} = 3$, *entonces* $a = 3$, se ve que el valor de los cocientes es el mismo del deslizador y se concluye que el valor del deslizador a es la razón entre las figuras.

- ***Fase de Validación.***

En esta pregunta se presenta la fase de validación, ya que después de manipulada y analizada la situación, el estudiante ha hallado la razón y a partir de la retroalimentación del medio, el estudiante está en la necesidad de dar o determinar un conocimiento estructurado.

6. ¿Qué propiedad deben tener las figuras en GeoGebra para que sean de la misma forma pero de diferente tamaño?

Posibles respuestas.

El estudiante debe concluir que para que dos figuras sean de la misma forma pero de diferente tamaño (semejantes), el valor de la altura de la figura fija al multiplicarlo por el valor del deslizador debe de dar el valor de la altura de la figura que cambia, esa propiedad matemática se conoce como la razón, no necesariamente deben de saber que se llama razón, solamente basta con que tenga el razonamiento matemático.

3.2.4.2. Descripción de la situación 2.

En la primera situación la intención fue que el estudiante se familiarizara con GeoGebra y más aún, con la funcionalidad del deslizador, en este sentido se quiere que comprenda la semejanza de *triángulos* a partir de la razón entre las dos figuras. Ahora bien, en la situación 2 lo que se quiere es establecer la relación geométrica y aritmética entre la semejanza de dos *triángulos* utilizando GeoGebra (ver figura 24), pero el estudiante en primera instancia no lo sabe. En esta situación se quiere que el estudiante determine la semejanza de *triángulos* a partir del criterio ángulo- lado - ángulo (*ALA*) que se define: dos *triángulos* son semejantes si dos de sus ángulos correspondientes son congruentes y los lados comprendidos entre ellos están a una razón dada.

Para ello se espera que los estudiantes evidencien propiedades y conceptos inherentes a la semejanza de *triángulos*, no necesariamente que estos posean una escritura rigurosa y teóricamente sustentada, sino que haya un acercamiento experimental del conocimiento por medio del criterio de semejanza ángulo-lado-ángulo. Los deslizadores son de gran utilidad para visualizar que por más que cambien los ángulos y la razón, los *triángulos* permanecen semejantes y esto se ve en la congruencia entre los ángulos de la figura 23 $\angle ADB$, $\angle A'D'B'$ y los ángulos $\angle DBA$ y $\angle D'B'A'$, además, existe la razón de semejanza entre los *triángulos* y se visualiza en la semejanza entre los lados $\overline{DB}$ y $\overline{D'B'}$ de los *triángulos*.

A continuación se presenta la ficha de la situación 2.

Situación 2.

1. Explora el entorno e identifica qué objetos se pueden mover.

2. Observa qué sucede al mover el deslizador ``a``.

2.1 Encuentra una de las razones entre los lados $\overline{DB}$ y $\overline{D'B'}$.

3. Al mover el deslizador Ө, observa:

3.1 Cómo son los ángulos $\angle ADB$ y $\angle A'D'B'$.

3.2 Cómo son los ángulos $\angle DBA$ y $\angle D'B'A'$.

3.3 Encuentras cambios en la razón obtenida entre los lados $\overline{DB}$ y $\overline{D'B'}$.

4. Realiza el mismo procedimiento al mover el deslizador ``α``. ¿Qué propiedades siguen compartiendo los *triángulos*?

5. De acuerdo a lo anterior ¿Qué puedes concluir de la forma y tamaño de los *triángulos* al mover los deslizadores?

6. Según lo observado ¿Cómo le explicarías a un compañero que dos *triángulos* son semejantes?

Figura 22. Ficha del estudiante. Situación 2.

En GeoGebra se presenta una construcción que tiene tres deslizadores θ, α y a, los deslizadores θ y α hacen que varíe la medida de los ángulos, uno para cada ángulo y el deslizador a varía la razón entre los *triángulos* semejantes, por ende al moverlo lo que hace es que la figura cambiante se incrementa y disminuye a partir del valor de la razón. De acuerdo a la configuración del software no es permitido que los estudiantes muevan los vértices de los *triángulos*, se ocultan las herramientas para evitar distracciones, esta construcción se hace de manera intencional para movilizar de mejor manera el conocimiento.

Hay que identificar que el triángulo que cambia tiene un factor de dependencia del triángulo fijo, donde se conserva una figura igual pero de diferente tamaño preservando sus propiedades (homotecia) y conservando la idea de ser *triángulos*, tal como se muestra en la figura 23.

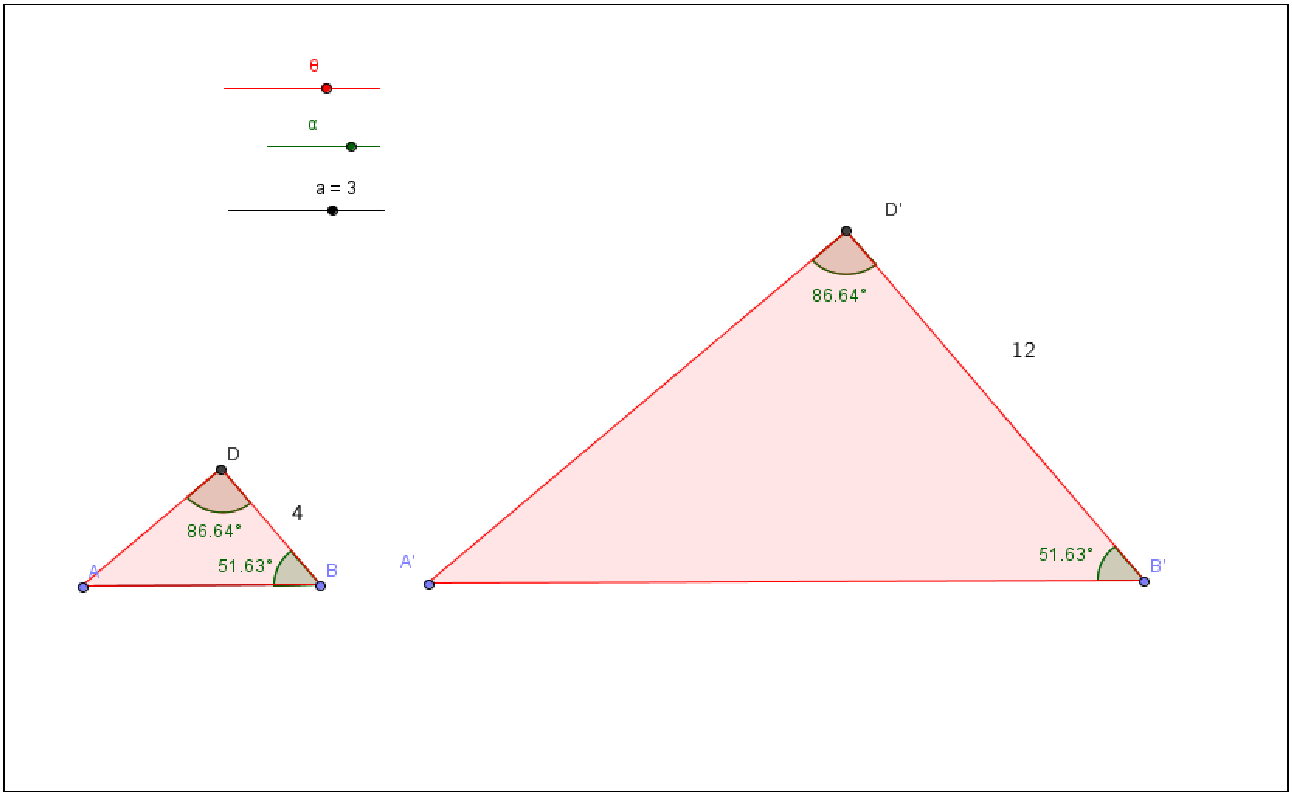


Figura 23. Configuración en pantalla. Situación 2.

Es fácil poder determinar este concepto debido a que el medio estructura el conocimiento de tal manera que visualice los elementos que son necesarios para determinar la semejanza entre los *triángulos* a partir del criterio *ALA* y las fases que se presentan:

- ***Fase de acción y formulación.***

En las preguntas 1 y 2 se presenta una articulación entre la fase de acción y formulación porque el medio le ofrece al estudiante la exploración de los objetos construidos y puede identificar que se puede mover, así como la dependencia de las figuras a partir de los deslizadores generando conocimiento a partir de la interpretación y análisis de esta interacción, pero también se evidencia la fase de formulación cuando el estudiante debe expresar mediante un texto qué sucede al mover el deslizador a y cuándo mediante un proceso matemático encuentra la razón entre los lados $\overline{DB}$ y $\overline{D'B'}$ de los *triángulos*.

1. Explora el entorno e identifica qué objetos se pueden mover.

2. Observa qué sucede al mover el deslizador a.

2.1 Encuentra una de las razones entre los lados $\overline{DB}$ y $\overline{D'B'}$.

Posibles respuestas.

El estudiante debe reconocer que hay dos *triángulos*, uno permanece fijo y otro que cambia de acuerdo al valor numérico del deslizador a que es la razón entre las figuras, esto se considera debido a que el valor del deslizador es el múltiplo de la distancia del segmento $\overline{DB}$ de la figura fija, para que dé el valor numérico del segmento $\overline{D`B`}$. Además debe reconocer que los vértices de las figuras no se pueden mover, lo que hace que sean fijas y que el valor numérico de los ángulos son iguales entre los dos *triángulos* y no dependen del deslizador a.

Una de las razones halladas puede ser la siguiente:

$$Razón = \frac{\overline{D'B'}}{\overline{DB}} = \frac{12}{4} = 3$$

Es importante saber que no es la única razón.

- ***Fase de Formulación.***

Mediante las preguntas 3 y 4 se evidencia la fase de formulación porque es la consecuencia al haber explorado el medio, de observar la actividad y mirar las limitaciones que él le ofrece, luego se crea estos momentos donde el estudiante debe crear un escrito donde expresa lo que ha visto y ha manipulado, explicar la relación de los ángulos entre las figuras semejantes al mover los deslizadores θ y α, además de encontrar la razón de los lados comprendidos entre los ángulos.

3. Al mover el deslizador θ, observa:
3.1 ¿Cómo son los ángulos $\angle ADB$ y $\angle A'D'B'$?
3.2 ¿Cómo son los ángulos $\angle DBA$ y $\angle D'B'A'$?
3.3 Encuentra la razón entre los lados $\overline{DB}$ y $\overline{D'B'}$.

Posibles Respuestas.

El estudiante debe contestar que al mover el deslizador θ los *triángulos* cambian su forma debido a que varía el ángulo $\angle ADB$ y $\angle A'D'B'$, hay una dependencia de estos ángulos con el deslizador, pero también debe observar que los otros ángulos $\angle DBA$ y $\angle D'B'A'$ también varían (la suma de los ángulos internos es de 180º), además debe reconocer que no hay dependencia del deslizador con el lado comprendido entre los ángulos.

El estudiante debe determinar que la relación entre los ángulos $\angle ADB$ y $\angle A'D'B'$ es que son iguales (congruentes), igualmente pasa con los ángulos $\angle DBA$ y $\angle D'B'A'$, independiente de cómo mueva el deslizador, la relación se conserva.

Una de las razones halladas puede ser la siguiente

$$Razón = \frac{\overline{D'B'}}{\overline{DB}} = \frac{12}{4} = 3$$

Que es exactamente la misma que ya realizo en la pregunta anterior, aunque puede encontrar otra y eso depende del valor numérico que tenga los lados del triangulo $\overline{DB}$ y $\overline{D'B'}$.

4. Realiza el mismo procedimiento al mover el deslizador ``$\alpha$``. ¿Qué propiedades siguen compartiendo los *triángulos*?

Posibles respuestas.

El estudiante debe notar que pasa algo similar a las preguntas anteriores, y difiere es debido a que se mueve el deslizador α. A partir de este hecho los *triángulos* cambian su forma debido a que varía el ángulo $\angle DBA$ y $\angle D'B'A'$, igualmente se ve una dependencia de estos ángulos con el deslizador α , pero también debe observar que los otros ángulos $\angle ADB$ y $\angle A'D'B'$ también varían (la suma de los ángulos internos es de 180º), además debe reconocer que no hay dependencia del deslizador con el lado comprendido entre los ángulos.

El estudiante también debe determinar que la relación entre los ángulos $\angle DBA$ y $\angle D'B'A'$ es que son iguales (congruentes), igualmente pasa con los ángulos $\angle ADB$ y $\angle A'D'B'$, independiente de cómo yo mueva el deslizador, la relación se conserva.

Al encontrar una de las razones puede ser la misma que ya ha encontrado anteriormente.

Los estudiantes como ya están familiarizados con el proceso anterior deben contestar que los la relación que cumplen los *triángulos* es que los ángulos $\angle ADB$ y $\angle A'D'B'$ son iguales (congruentes), igualmente los ángulos $\angle DBA$ y $\angle D'B'A'$ también son iguales (congruentes) y los lados comprendidos entre estos ángulos se encuentran a una razón.

- ***Fase de validación.***

En las preguntas 5 y 6 se presenta la fase de validación porque después de los estudiantes realizar un análisis lógico y una interpretación de las preguntas anteriores deben concluir o determinar la estructura del conocimiento que se desea construir, lo cual se explicita así.

5. De acuerdo a lo anterior ¿Qué puedes concluir de la forma y tamaño de los triángulos al mover los deslizadores?

Posible respuesta.

El estudiante debe concluir que la forma entre los dos triángulos es la misma, independiente de cómo yo muevo los deslizadores α y θ, y el tamaño del $\Delta D'B'A'$ varía con respecto al ΔDBA de acuerdo al valor de la razón, que es el valor que tome el deslizador a.

7. Según lo observado ¿Cómo le explicarías a un compañero que dos *triángulos* son semejantes?

Posible Respuesta.

El estudiante debería explicar de la siguiente manera:

Según lo observado dos *triángulos* son semejantes si dos de sus ángulos correspondientes son congruentes y el lado comprendido entre ellos es semejante”, es decir si los ángulos $\angle ADB$ y $\angle A'D'B'$ son congruentes al igual que los ángulos $\angle DBA$ y $\angle D'B'A'$ también son congruentes; existe la razón de semejanza entre los *triángulos* y se visualiza en la semejanza entre los lados de los *triángulos* $\overline{DB}$ y $\overline{D'B'}$.

3.2.4.3. Descripción de la situación 3.

En esta situación es necesario que haya más profundidad y sentido común por parte de los estudiantes, ya que, se proponen preguntas generales de exploración de las propiedades que comparten los triángulos, teniendo en cuenta que hay unos procesos y conocimientos obtenidos en las situaciones anteriores, que les permitirá llegar al objetivo propuesto.

La intención de la situación es que los estudiantes determinen la semejanza de *triángulos* a partir la identificación de propiedades y conceptos matemáticos que le permitan establecer el criterio lado-ángulo-lado (*LAL*). Es el medio quien nuevamente determina la estructura del conocimiento para llegar a esta idea y le presenta dos *triángulos* y un ángulo congruente comprendido entre lados que son proporcionales.

El conocimiento se estructura con cada una de las preguntas. Los deslizadores varían la longitud de los lados y la razón entre los *triángulos*; los *triángulos* generados son semejantes y se visualiza en los ángulos congruentes $\angle BAC \ y \ \angle B'A'C'$ que están comprendidos entre lados que son proporcionales.

Estas preguntas no son dirigidas como en las situaciones anteriores, se pretende que el estudiante aplique conceptos matemáticos tales como: determinar la razón entre dos segmentos y mirar la congruencia de ángulos, lo nuevo es que debe comparar dos razones determinando una proporcionalidad y así poder validar la semejanza entre los *triángulos* a partir del criterio *LAL*.

A continuación se presenta la ficha de la situación 3 en la figura 24.

Situación 3.

1. Explora el entorno e identifica qué objetos se pueden mover.
2. Después de hacer la exploración que propiedades comparten los *triángulos*.
3. ¿Qué puedes concluir de la forma y tamaño de los *triángulos* al mover los deslizadores?
4. Escribe un texto en el que justifiques si los dos *triángulos* son semejantes o no son semejantes de acuerdo a esta situación.

Figura 24. Ficha del estudiante. Situación 3.

La construcción se da a partir de tres deslizadores a, c y g. Los deslizadores a y c hacen que varíe la medida de los lados de los *triángulos*, uno para cada lado y el tercer deslizador es el que varía la razón entre los *triángulos* semejantes, lo que hace es que la figura cambiante se incrementa y disminuye a partir del valor de la razón. La construcción solo permite que los estudiantes varíen el punto C, produciendo la variación en el ángulo $\angle BAC$ (ver figura 25).

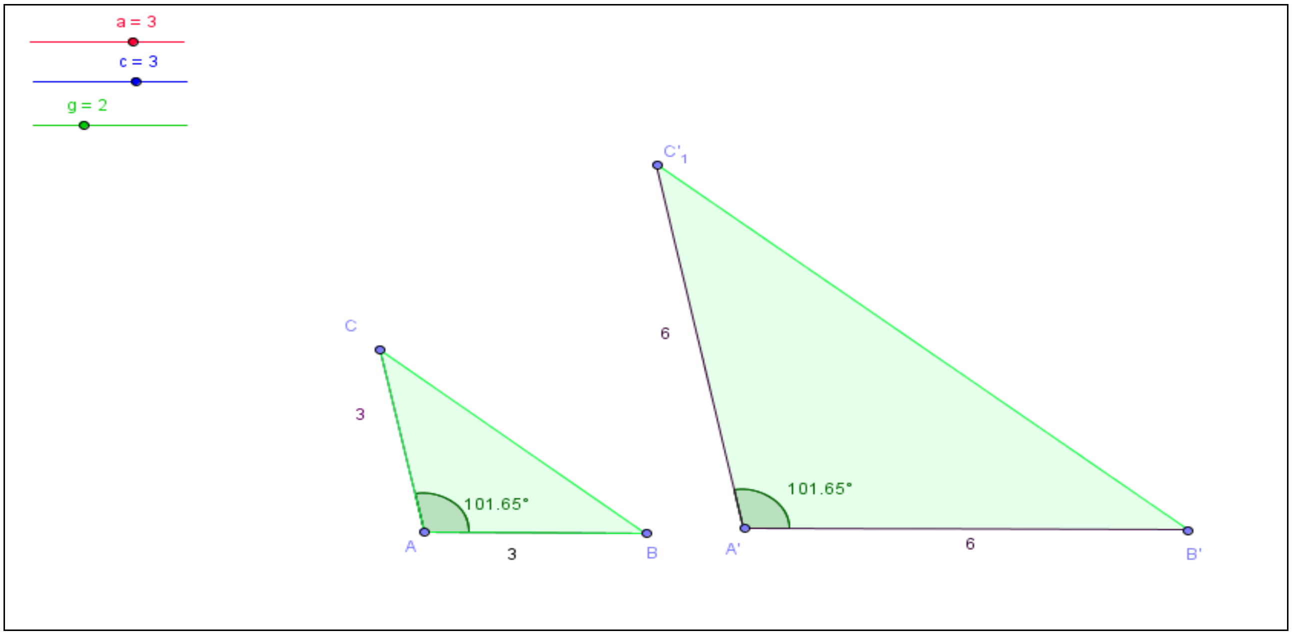


Figura 25. Configuración en pantalla. Situación 3.

A continuación se presenta cada una de las fases:

- ***Fase de acción.***

En la pregunta 1 se presenta la fase de acción porque al estudiante explorar la construcción dada en GeoGebra y puede visualizar lo que la aplicación le ofrece y las limitaciones que tiene para adquirir unos conocimientos que se obtienen a partir de la retroacción del medio.

1. Explora el entorno e identifica qué objetos se pueden mover.

Posible respuesta.

El estudiante debe visualizar que hay tres deslizadores a, c y g, de los cuales el *deslizador* a varía la longitud de los segmentos de los *triángulos* $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, el deslizador c varía la longitud de los segmentos de los *triángulos* $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, mientras que el deslizador g varía la razón entre los *triángulos* semejantes. Además el vértice C se puede mover variando la amplitud del ángulo $\angle BAC$, $\angle B'A'C'$ y el vértice C' se mueve simultáneo al mover el vértice C. Los vértices A, B y A', B' no se pueden mover.

- **Fase de formulación.**

En la pregunta 2 se presenta la fase de formulación debido a que después de que el estudiante hace su interacción con el medio debe de formular de manera escrita los conocimientos que en las situaciones anteriores ya realizo, como determinar la razón entre dos magnitudes y determinar la congruencia entre ángulos que en esta actividad están presentes.

2. Después de hacer la exploración qué propiedades comparten los *triángulos*.

Posible respuesta.

El estudiante debe reconocer que al mover el deslizador a varían los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ y sin importar el valor de la longitud de los segmentos y la razón $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ siempre toma el valor del deslizador g. De igual manera al mover el deslizador c varían los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$ e independiente del valor que tome la longitud de los segmentos la razón $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$ toma el valor del deslizador g, existiendo la proporcionalidad entre las razones $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ y $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$, es decir $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{AC}$.

Por otro lado, si mueve el vértice C, simultáneamente se mueve el vértice C' y varia la amplitud entre los ángulos $\angle BAC$ *y* $\angle B'A'C'$, siendo estos exactamente iguales (congruentes).

- **Fase de validación.**

Luego de hacer las respectivas formulaciones matemáticas, de hallar respectivas las razones y determinar la congruencia entre ángulos, el estudiante debe de concluir que al mover los deslizadores la semejanza entre los *triángulos* se conserva, así como exponer su pensamiento de acuerdo a las situaciones que ha realizado, ratificando los conocimientos adquiridos.

3. ¿Qué puedes concluir de la forma y tamaño de los *triángulos* al mover los deslizadores?

Posible respuesta.

El estudiante debe contestar que al mover los deslizadores a, c y g los *triángulos* conservan la misma forma pero son de diferente tamaño y que la dependencia del tamaño se da a partir del deslizador g que determina la razón entre los *triángulos*.

4. Escribe un texto en el que justifiques si los dos *triángulos* son semejantes o no son semejantes de acuerdo a esta situación.

Posible Respuesta.

El estudiante debe de escribir que los *triángulos* sí son semejantes, porque tienen igual forma pero diferente tamaño, además, se determinan semejantes porque cumple el criterio de semejanza de *triángulos LAL*, ya que hay dos ángulos congruentes comprendidos entre lados que son proporcionales.

3.2.4.4. Descripción de la situación 4.

Esta situación es la última de la secuencia didáctica, por ende se quiere retomar lo estudiado en las situaciones anteriores y los conocimientos movilizados para estructurar y dar paso a otros conocimientos que se dan a partir de las construcciones movilizadas en GeoGebra.

En esta situación se requiere un poco más de atención en la visualización de la construcción dada, pues debe analizarse muy bien lo que sucede cuando se manipulan los vértices D, A y C por medio del arrastre, además se debe reconocer que los vértices B y E son inmóviles.

Siendo esta situación la última de las cuatro, se quiere integrar las situaciones anteriores movilizando el conocimiento matemático que se necesita para comprender el teorema de Thales y notar que se crea una familia de *triángulos* que son semejantes al triángulo de mayor área, esta semejanza se puede verificar a partir del criterio de semejanza *ALA* y *LAL* que se trabajaron en la situación 2 y 3 respectivamente para determinar la semejanza de la familia de *triángulos* ΔBDE y ΔBAC.

La idea es estructurar este conocimiento a partir de cuatro preguntas. En esta situación no se presentan deslizadores, para mover los *triángulos* se hace a partir del arrastre de los vértices D, A y C mientras los vértices B y E permanecen fijos. Al hacer el arrastre del vértice D varía el ΔBDE y es quien determina la posición de la recta paralela al lado $\overline{AC}$ del ΔBAC, en esta variación del ΔBDE se presenta una familia de *triángulos* que serán siempre semejantes al ΔBAC.

Cuando los estudiantes miran la actividad en GeoGebra visualizan dos *triángulos* semejantes que comparte un ángulo en común, en estos *triángulos* se puede observar que los ángulos correspondientes son congruentes y además los lados son proporcionales, observación que los llevara a determinar que los *triángulos* son semejantes, pero es necesario que el estudiante aplique los criterios trabajados *ALA* y *LAL* para que haya secuencia de conocimientos en esta situación didáctica.

A continuación se presenta la ficha de la situación 4.

Situación 4.

1. Explora el entorno e identifica qué objetos se pueden mover, que cambia y que permanece constante en las figura.

2. ¿Cuántos *triángulos* identificas en la figura?
3. ¿Qué observas con las razones entre los segmentos de los lados de los *triángulos*?

4. ¿Teniendo en cuenta los ángulos de los *triángulos* qué propiedades vez entre ellos?

5. Son semejantes los *triángulos* identificados, justifica su respuesta.

Figura 26. Ficha del estudiante. Situación 4.

En la construcción dada en GeoGebra es importante que se reconozcan los *triángulos* ΔBDE y ΔBAC, para poder movilizar el conocimiento al cual se quiere llegar, que es, el de interpretar el teorema de Thales "Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado¨, teniendo en cuenta la semejanza entre estos dos *triángulos* a partir de los criterios de semejanza *ALA* y *LAL* trabajados en las situaciones anteriores. Es importante reconocer que al mover el vértice D varía el triángulo ΔBDE y es quien determina la posición de la recta paralela al lado $\overline{AC}$ del triángulo ΔBAC, en esta variación del triángulo ΔBDE se presenta una familia de *triángulos* que serán siempre semejantes al triangulo ΔBAC (ver figura 27).

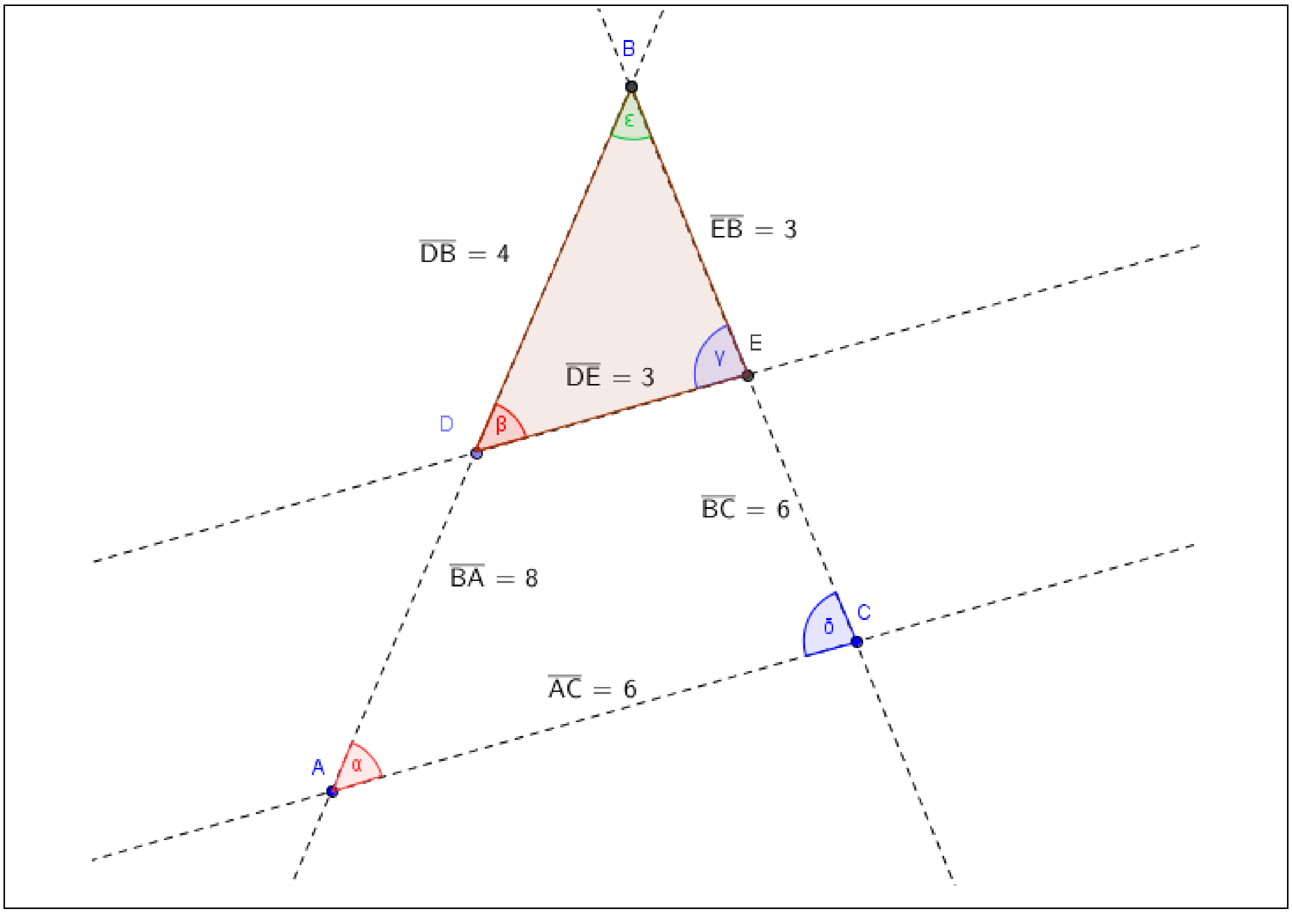


Figura 27. Configuración en pantalla. Situación 4.

A continuación se presentan cada una de las fases que estructuran la situación:

- ***Fase de acción.***

En las preguntas 1 y 2 se evidencia la fase de acción porque el estudiante debe enfrentarse al medio, manipular y reconocer lo que el medio le ofrece, los elementos matemáticos con los que cuenta y los posibles cambios que él le puede hacer a la construcción.

1. Explora el entorno e identifica qué objetos se pueden mover, que cambia y que permanece constante en las figura.

Posible Respuesta.

El estudiante después de hacer la exploración debe reconocer que puede mover los vértices D, A y C , los vértices B y E no es posible moverlos. Al mover el vértice D varía la posición de la recta paralela al lado $\overline{AC}$ del *triángulo* ΔBAC, y por ende varia el triángulo ΔBDE. Si se mueve el vértice A o C varia de manera simultánea el tamaño y la forma de los *triángulos* ΔBDE y ΔBAC, variando la longitud de los lados y la amplitud de los ángulos.

2. ¿Cuántos *triángulos* identificas en la figura?

Posible Respuesta.

El estudiante debe contestar, que hay dos *triángulos*, que son ΔBDE y ΔBAC.

- ***Fase de formulación.***

En las preguntas 3 y 4 se presenta la fase de formulación porque después de manipular la actividad en el software se establece la necesidad de poder formular las razones entre los segmentos correspondientes y compararlas entre sí, así como también debe determinar cómo son los ángulos de los *triángulos*, formulando su conocimiento.

3. ¿Qué observas con las razones entre los segmentos de los lados de los *triángulos*?

Posible Respuesta.

El estudiante debe contestar que al calcular las razones $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$ y $\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ son iguales entre sí, pero es de tener en cuenta que en la construcción de la actividad se visualizan la longitud de los lados del triángulo en números enteros y verdaderamente la longitud de los segmentos tiene parte decimal, por ende al hallar las razones puede que la parte decimal no de exacta, pero se sobreentiende que es por este hecho.

Por ejemplo, el estudiante puede realizar esta validación:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{DB}}} = \frac{8}{4} = 2 \ , \ \frac{\overline{BC}}{\overline{\overline{EC}}} = \frac{6}{3} = 2 \quad , \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{\overline{BE}}} = \frac{6}{3} = 2$$

Y ver claramente que las razones son iguales. Por otro lado puede determinar las siguientes razones:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{DB}}} = \frac{9}{5} = 1.8 \quad , \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{\overline{EC}}} = \frac{7}{4} = 1{,}75 \ , \ \frac{\overline{BC}}{\overline{\overline{BE}}} = \frac{6}{3} = 2$$

En este caso, vemos que no son iguales las razones, esto se debe a que la construcción se hizo con números enteros y verdaderamente la longitud de los segmentos tiene parte decimal, esto no deja ver la exactitud entre las razones, por ende se le hará la aclaración al estudiante.

4. ¿Teniendo en cuenta los ángulos de los *triángulos* qué propiedades vez entre ellos?

Posible Respuesta.

El estudiante debe contestar, que teniendo en cuenta el ΔBDE y el ΔBAC los ángulos respectivos son congruentes, es decir:

$\angle BDE \cong \angle BAC$

$\angle DBE \cong \angle ABC$

$\angle DEB \cong \angle ACB$.

- ***Fase de validación***

En la pregunta 5 se presenta esta fase porque el estudiante está en la necesidad de validar el conocimiento, de expresar la estructuración de los conocimientos adquiridos a partir de esta y las situaciones anteriores.

5. Son semejantes los *triángulos* identificados, justifica su respuesta.

Posible Respuesta.

El estudiante debe identificar que el ΔBDE y el ΔBAC son semejantes. El estudiante puede identificar esta semejanza aplicando el teorema *ALA* y *LAL*. Estos dos teoremas los puede aplicar teniendo en cuenta las propiedades que los caracterizan y cualquiera de los lados y ángulos respectivos de los triángulos.

Este puede ser uno de los ejemplo que los estudiantes pueden realizar, mas no es el único, debido a que pueden tomar distintas posiciones de los *triángulos*, donde varia la longitud de los lados y la amplitud de los ángulos.

EJEMPLO:

- Son semejantes porque se cumple el criterio *LAL.*

Si consideramos el $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ del ΔBAC y el $\overline{DB}$, $\overline{BE}$ del ΔBDE, además hayamos las razones

$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{8}{4} = 2$ $\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{6}{3} = 2$, suponiendo que estos son los valores (ver figura 27)

Vemos que se establece la relación de proporcionalidad $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$. Por otro lado como el $\angle DBE \cong \angle ABC$ porque se comparte el mismo ángulo para el ΔBDE y el ΔBAC, estableciendo la semejanza de los *triángulos* a partir del criterio *LAL*, ya que hay dos ángulos congruentes comprendidos entre lados que son proporcionales.

Cabe anotar que este mismo razonamiento el estudiante lo puede hacer con los otros lados de los *triángulos* y teniendo en cuenta los otros dos ángulos

Ejemplo de la acción que puede hacer el estudiante:

- Son semejantes porque se cumple el criterio *ALA*.

Al considerar los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ACB$ del ΔBAC y el $\angle EDB$ y el $\angle DBE$ del ΔBDE, se observa que existe la congruencia entre ángulos correspondientes de los *triángulos* y los lados comprendidos entre estos ángulos, están a una razón que es la que determina la proporción con las razones de los lados restantes.

Como tenemos las congruencias

$\angle BDE \cong \angle BAC$

$\angle DBE \cong \angle ABC$

Y los segmentos $\overline{AB}$ del triángulo ΔBAC, $\overline{DB}$ del triángulo ΔBDE y al considerar la razón entre estos dos segmentos $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{8}{4} = 2$, razón que es igual a las razones restantes entre los lados correspondientes de los *triángulos*, $\frac{\overline{CB}}{\overline{BE}} = \frac{6}{3} = 2$ y $\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{6}{3} = 2$, considerando la proporcionalidad $\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}}$. (ver figura 27)

Estableciendo la semejanza los *triángulos* a partir del criterio *ALA*, “dos *triángulos* son semejantes si dos de sus ángulos correspondientes son congruentes y los lados comprendidos entre ellos están a una razón dada”.

De acuerdo al análisis a priori realizado de cada situación se realiza la experimentación y el respetivo análisis a posteriori, con el fin de corroborar la hipótesis de investigación. En el siguiente capítulo se presentan los análisis y resultados hallados.

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados de la experimentación de la secuencia didáctica implementada, al confrontar los análisis a priori y lo observado en la experimentación.

4.1. Descripción De La Experimentación

La experimentación de la secuencia didáctica se realizó en grado octavo de la educación básica secundaria en el colegio Santiago Mayor de Cali, entidad privada, de carácter mixto, ubicada en la calle 35 No. 10-20, Barrio El Troncal, comuna 8, de la ciudad Santiago de Cali, la cual presta sus servicios en jornada única de 7:00 a.m. a 2:50 p.m. de lunes a viernes.

Los estudiantes que acuden al colegio Santiago Mayor de Cali obtienen un título de bachiller académico, el colegio maneja la pedagogía conceptual, que desde su práctica busca un desarrollo lecto-escritural avanzado y eficiente en la vida de los estudiantes, reciben una formación religiosa, basada en la fe católica y en el ejercicio de los valores que posibilitan la vida en sociedad. En términos generales, se fomenta una educación en el fortalecimiento espiritual y en los valores que requiere un buen cristiano para desarrollar una vida sana y productiva.

El colegio fue seleccionado porque uno de los investigadores trabaja allí enseñando álgebra y geometría en grado octavo, lo cual facilitaba la aplicación de las situaciones y porque además se aprovechó el conocimiento que tiene el investigador del contexto y del desempeño de los estudiantes para poder seleccionar uno y caracterizar su participación en el desarrollo de las situaciones.

De esta manera, para la experimentación se seleccionó un estudiante que durante el desarrollo de las clases de matemáticas se destaca por su participación, aportes y buen manejo del software Geogebra, las situaciones se implementaron por fuera del horario de clase de 10:00 a.m. a 1:00 p.m. en el aula de sistemas.

La institución abrió el espacio para la implementación, observación y análisis de la información obtenida, para ello se realizó un registro de audio y video y respuestas del estudiante descritas en la ficha. Cada situación fue leída de manera individual por el estudiante y el profesor orientaba su desarrollo a partir de preguntas, explicaciones, comentarios, etc., sin llegar a dar las respuestas.

En cada situación, se resalta la utilización del arrastre como elemento principal para observar las invariantes y poder determinar las propiedades geométricas de las figuras construidas en GeoGebra.

En la situación 1, el estudiante a partir del arrastre y la visualización de las figuras generadas, logra reconocer las figuras semejantes e identificar la dependencia de la figura generada con el deslizador al establecer la razón.

En la situación 2, el estudiante al mover cada uno de los deslizadores determina lo que varía y lo permanece constante. Reconoce la semejanza de los *triángulos* generados y formula el criterio de ángulo-lado-ángulo.

En la situación 3, el estudiante explora el entorno y requiere de la mediación constante del profesor para identificar las propiedades de los *triángulos* que debe considerar para determinar la semejanza de los *triángulos* generados en GeoGebra al aplicar el criterio lado-ángulo-lado.

Finalmente en la situación 4, el estudiante formula las razones seleccionando valores cuyos resultados sean enteros, para los demás casos se debe hacer una aproximación de las cantidades porque las razones no son exactas, a pesar de ello se espera que se logren identificar diferentes propiedades de los triángulos para determinar su semejanza, al hacer uso de los criterios de la situación 2 y 3.

Para el análisis de los resultados obtenidos en la experimentación de la secuencia, se toman en cuenta tres aspectos como ***criterios de análisis*** para la observación de la experimentación de las situaciones, que permitan resaltar los aportes de la mediación de un software como GeoGebra, la importancia de la gestión didáctica del profesor y la participación de los estudiante, igualmente se toman en consideración los análisis *a priori* realizados en el capítulo 3 como un referente en el que se puedan contrastar lo experimentan para obtener los resultados.

A continuación se describe cada criterio de análisis utilizado al realizar la experimentación.

- ***Estrategias del estudiante***: es la manera como el estudiante formula y valida las propiedades matemáticas que logra identificar al desarrollar cada una de las situaciones, empleando su conocimiento y utilizando lápiz-papel o GeoGebra.

- ***Aportes de GeoGebra***: Es el análisis de la interacción del estudiante con GeoGebra, la interpretación que le da a las retroacciones del medio para identificar las propiedades de los *triángulos* presentes en cada una de las situaciones.
- ***Gestión didáctica del profesor***: Es la intervención que hace el profesor en el desarrollo de la *secuencia didáctica* para orientar a los estudiantes en los conocimientos que se movilizan en las situaciones.

De esta manera los hallazgos describen los procesos encontrados tanto en los escritos como en los videos de cada situación, los videos tienen una duración promedio de 35 minutos, de los cuales se seleccionaron los diálogos que evidencian la gestión del profesor para resolver las inquietudes y/o escuchar las conjeturas o conclusiones a las que llegan el estudiante durante el desarrollo de la secuencia didáctica. La ficha de cada situación, las respuestas dadas por el estudiante y la transcripción de los videos se pueden ver en los anexos.

4.2. Análisis de los resultados.

En la secuencia didáctica se espera que el estudiante evidencie las propiedades y conceptos inherentes a la semejanza, a partir de una exploración en GeoGebra, sin exigir una rigurosidad en la escritura por parte del estudiante al plantear sus argumentos y/o conjeturas. Durante los análisis en los protocolos de los videos presentados se nombra al estudiante con la letra E y al profesor con la letra P.

- **SITUACIÓN 1**

Esta situación pretende familiarizar al estudiante con el manejo de los deslizadores en GeoGebra, que reconozca el concepto de razón a partir de dos figuras semejantes generadas por los deslizadores, de tal forma que pueda identificar que tiene una dependencia directa con el deslizador.

Al explorar el entorno se presenta la ***fase de acción*** debido a que el estudiante interactúa con el medio y reconoce las potencialidades que el medio le ofrece, logra determinar lo que puede mover y la dependencia del deslizador con las figuras (aparecen dos figuras semejantes). Se presentó dificultad cuando el estudiante no comprendió el término "entorno" y deslizador, para lo cual fue indispensable la intervención del profesor. Lo anterior se puede evidenciar en el siguiente diálogo:

E: [este es el entorno, señala la figura]
P: el entorno es todo lo que le presenta el software en la pantalla y que además se puede manipular con el mouse.
E: [mueve el deslizador y analiza que pasa con la figura y contesta la pregunta dos]
P: ¿qué se puede mover?
E: ¿Cuál la dos?
P:no, la primera, estamos en la primera
P: usted que puede mover de esa figura, de ahí usted que puede mover
E: [esto y señala el deslizador]
P:esto se llama un deslizador
E: [mueve el deslizador]
P: veo que tiene dificultades, cuando usted lo tiene presionado puede moverlo continuamente
E: [mueve el deslizador]

Aunque el estudiante ya conocía el software GeoeGebra, no había trabajado con los deslizadores, por tanto el profesor socializa el esquema de uso referido a la manera de manipularlo y el nombre que recibe.

Se evidencia la ***fase de formulación*** cuando el estudiante responde la pregunta 3 al establecer la relación entre las figuras y el valor numérico del deslizador ´´ a´´ así:

3. El deslizador "a", maneja y controla la razon, entre las dos figuras.

En este momento el estudiante expresa su pensamiento en lenguaje natural, por tanto se hace explícita la interpretación que este realiza de la retroacción que le ofrece el medio a partir de su interacción con GeoGebra. Igualmente el estudiante identifica que el valor numérico que toma el deslizador es el valor de la razón, es decir la figura cambiante incrementa o disminuye de acuerdo al valor numérico que tiene el deslizador ´´ a´´.

Así mismo en la pregunta 4, se evidencia la fase de formulación debido a que el estudiante al mover los deslizadores debe establecer dos razones a partir de las alturas de las figuras. Se presenta el obstáculo al hallar las razones, ya que la estudiante calcula la razón 2 es a 4, al hacer el cociente el resultado es $0{,}5$. Se considera un obstáculo porque esta razón propuesta, no determina el valor del deslizador que es la razón de semejanza entre las figuras, aunque es un resultado válido no aplica en la situación propuesta, por tanto debe hacer uso de su recíproco, aquí fue fundamental la gestión del profesor para orientar y formular la razón correcta, la razón es: 4 es a 2, y encontrar el cociente equivalente al valor que toma el deslizador $a = 2$. Lo anterior se evidencia en el procedimiento matemático realizado por el estudiante al responder la pregunta 4:

4. $\frac{2}{4} = \begin{array}{l|l} 20 & 4 \\ \hline +2 & 0{,}5 \\ \hline 1{,}0 & \end{array}$ $\quad \boxed{\frac{4}{2}} = \begin{array}{l|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & \boxed{2} \end{array}$ $\quad \boxed{\frac{6}{2}} = \begin{array}{l|l} 6 & 2 \\ \hline 0 & \boxed{3} \end{array}$

Otro momento importante en la fase de formulación se presentó cuando el estudiante relaciona el valor del deslizador con el tamaño de la figura, se le debe insistir para que establezca la relación que existe entre las razones halladas y el valor del deslizador, se evidencia dificultad en el estudiante al comprender la pregunta, debido a qué relaciona las dos razones halladas $\frac{4}{2} = \frac{6}{2}$ y no el resultado de estas razones con el deslizador, hace mayor énfasis en lo que observa en pantalla al mover el deslizador y los cambios que sufre la figura y no en el valor numérico de la razón. Fue importante la intervención del profesor en el desarrollo de esta pregunta. De ahí que su respuesta se presente de la siguiente manera:

> 5 Si el valor de la razon es Menor se inclina a la izquierda, y si es un número más grande se inclina a la derecha.
> El deslizador tiene el número exactode la razón.

Finalmente la ***fase de validación*** se presenta en la última pregunta donde se hace necesario que se exprese de manera estructurada el conocimiento construido en cada una de las preguntas anteriores. Se presentó dificultad en la redacción del estudiante yaqué no entiende su intencionalidad, además se le dificultad reconocer la razón como una propiedad matemática que establece la semejanza entre las dos figuras.

En conclusión se pudo evidenciar que:

CRITERIOS DE ANÁLISIS	***HALLAZGOS***
Estrategias del estudiante	El estudiante logra formular la razón entre las alturas de las dos figuras. Logra establecer la igualdad entre el cociente de la razón con el valor del deslizador.

	El estudiante ve la necesidad de hallar la razón entre las alturas para determinan que las figuras son semejantes.
Aporte de GeoGebra	El estudiante por medio de la manipulación de deslizador y el arrastre logra describir los hechos que ocurren en la pantalla de su computador, identifica que se puede mover y que permanece fijo. Logra identificar que al mover el deslizador aparece otra figura de igual forma y diferente tamaño. El estudiante identifica la dependencia del valor que tome el deslizador con la razón y el tamaño entre las dos figuras.
Gestión didáctica del profesor:	El profesor utiliza la pregunta para darse cuenta de la percepción y lo que entiende el estudiante frente a lo planteado en la situación o a la retroacción del medio. El profesor explica al estudiante lo que es el ¨entorno¨ contextualizado a lo que le presenta la pantalla y que además puede ser manipulado con el mouse. El profesor explica al estudiante la necesidad de plantear la razón, cuyo numerador debe ir la mayor altura y en denominador la menor altura, para que el cociente de la razón tome el valor del deslizador. Es necesaria la claridad del profesor para que el estudiante compare los cocientes de razones obtenidas con el valor del deslizador en un determinado instante y no igualar las dos razones obtenidas en instantes distintos ya que las razones no serán iguales.

Tabla 1. Hallazgos. Situación 1

- **SITUACIÓN 2**

Al realizar la experimentación con esta situación se pretenden que el estudiante identifique las propiedades invariantes en los *triángulos* al mover cada uno de los deslizadores y logre formular el criterio ángulo-lado-ángulo (ALA) para determinar la semejanza de dos *triángulos*.

Inicialmente el estudiante debe explorar el entorno, en este momento se evidencia la ***fase de acción*** en la cual el estudiante mueve cada uno de los deslizadores y los *triángulos* identificando que las variaciones en estos se dan sólo a partir de los deslizadores, esto demuestra cierto grado de apropiación del esquema de uso de identificación y arrastre de los deslizadores, tal como se muestra en la siguiente respuesta:

1. Se mueven los tres deslizadores, θ, a, α
las figuras no se mueven.

La ***fase de formulación*** se evidencia en las preguntas 2.1, 3 y 4, cuando el estudiante realiza el proceso matemático para encontrar la razón entre los lados de los triángulos y luego interpretarla como cociente para establecer la relación entre el valor obtenido y el deslizador, procedimiento que se muestra a continuación:

2.1 $\overline{D'B'} = 12$ $\quad \frac{12}{4} = \begin{array}{r|l} 12 & 4 \\ \hline 0 & \boxed{3} \end{array}$ → la razon.
$\overline{DB} = 4$

De igual forma cuando el estudiante interpreta de manera directa la retroacción del medio al establecer la dependencia del deslizador con la amplitud del ángulo en la pregunta 3, sin embargo presenta dificultad para identificar que en cada posición del deslizador se obtiene un mismo valor para su amplitud; por tanto el profesor debe orientar la identificación de esta propiedad. Finalmente a partir de la exploración y la gestión del profesor, el estudiante concluye que aunque el valor de los ángulos varía, son congruentes, y la razón permanece constante. Lo anterior se puede evidenciar en el siguiente diálogo:

E: el deslizador θ maneja la amplitud de los ángulos
P: en la pregunta 3 se explora no debes contestar, ahora contesta la pregunta 3.1
E: son semejantes
P: ¿semejantes?, que valores tiene $\angle ADB$ y $\angle A'D'B'$
E: $93{,}26$ y $93{,}26$
P: en caso de que varíe el deslizador θ que valor toman esos ángulos y qué valor tiene en un instante
E: $83{,}08$ y $83{,}08$
P: entonces que podemos decir de los ángulos $\angle ADB$ y $\angle A'D'B'$
E: son iguales
P: ahora es la misma pregunta para los ángulos $\angle DBA$ y $\angle D'B'A'$.
P: ya identifico ¿quién es $\angle DBA$? ¿Qué valor tiene?
E: el valor es $47{,}14$
P: y el valor de $\angle DBA$
E: es el mismo
P: ¿se cumple el caso de que se mueva el deslizador? Verifique
E: [el estudiante realiza exploración]
P: ¿siguen siendo congruentes?
E: sí
P: tenga en cuenta que esto se debe responder al mover el deslizador Ɵ, ¿observa cambio en la razón?
E: sigue igual

P: ¿qué valor tiene la razón allí?

E: 3

P: ¿Qué puedes concluir?

E: que los ángulos son congruentes y la razón no cambia

Por otro lado se observa el manejo de la notación de los ángulos de un triángulo y se logra establecer una comparación entre ellos con el fin de determinar que al mover el deslizador θ, toman siempre el mismo valor concluyendo así que son ángulos congruentes. Igualmente logra identificar que aunque los ángulos varían la razón permanece constante.

4, los triangulos son semejantes.
$\angle ADB$ y $\angle A'D'B$, son congruentes
$< DBA$ y $\angle D'B'A'$, tambien son congruentes
y la razon tampoco varia.

En la pregunta 5, se presenta la ***fase de validación***, después de realizada la exploración y de las conclusiones obtenidas, el estudiante identificó la familia de *triángulos* semejantes que se obtienen al mover los deslizadores, lo cual se puede evidenciar en la siguiente afirmación:

5. siempre, sin importar la ubicación de un deslizador, los triangulos serán semejantes.

Así mismo se presenta la fase de validación cuando el estudiante logra aplicar el criterio de semejanza ALA para determinar la semejanza entre estos dos *triángulos*.

6. Utilizando el criterio, Ángulo-lado-Ángulo.
Este criterio explica que debe tener dos ángulos congruentes, y el lado comprendido entre ellos debe ser semejante.

Sin embargo se presenta un obstáculo debido a que la estudiante considera que los lados comprendidos entre los ángulos congruentes son semejantes y no se puede hablar de segmentos semejantes, de ahí que la intervención del docente fue pertinente para explicar que los segmentos están a una misma proporción y para eso solo falta hallar una razón de los otros lados de los *triángulos* para tener la proporción, esto se puede evidenciar en el siguiente diálogo:

P: cómo le explicarías a un amigo que los *triángulos* tienen la misma forma y diferente tamaño

E: que siempre los ángulos tienen que ser congruentes

P: que otra cosa observas además de los ángulos

E: la razón

P: la razón entre cuales lados

E: el lado que comprende la medida entre los dos ángulos

P: cómo explicarías lo que acabamos de decir

E: el criterio *ALA*, dos *triángulos* son semejantes si tiene dos ángulos congruentes y el lado entre ellos es semejante

P: no es que los lados sean semejantes, no se puede hablar de que los segmentos son semejantes, se dice que los segmentos están a una misma proporción.

E: que es la razón

P: la proporción dice que hay dos razones que son iguales, para ello se debería establecer la razón entre los otros lados de los *triángulos* para afirmar que tienen la misma proporción.

En conclusión:

CRITERIOS DE ANÁLISIS	***HALLAZGOS***
Estrategias del estudiante	El estudiante logra hallar el coeficiente de la razón entre los segmentos de los *triángulos*. Establece la igualdad entre los ángulos de los *triángulos* y determinar la congruencia entre los ángulos correspondientes para así aplicar el criterio *ALA*. Escribe de manera simbólica los ángulos que va a considerar para aplicar el criterio de semejanza en mayúsculas e identifica la letra que va en la mitad qes el vértice del ángulo. Logra identificar que los *triángulos* son de igual forma pero diferente tamaño (son semejantes). Aplica el criterio de semejanza *ALA* para determinar que los *triángulos* son semejantes.
Aporte de GeoGebra	El estudiante por medio de la manipulación de deslizador y el arrastre, identifica que se puede mover y que permanece fijo en la actividad. Identifica la dependencia de la amplitud de los ángulos con los deslizadores. El estudiante Identifica la dependencia del valor que tome el deslizador con la razón entre los lados de los *triángulos*. El estudiante logra identificar la familia de *triángulos* semejantes que se forman, al hacer el arrastre del deslizador a.
Gestión didáctica del profesor:	El profesor acompaña el proceso haciendo devoluciones, lo cual explicita las dudas y dificultades del estudiante. El profesor intervine para orientar y centrar el análisis del estudiante en la necesidad de considerar la razón entre los segmentos de los lados de los *triángulos*,

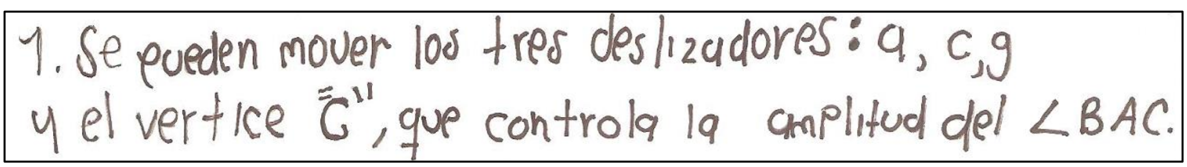
	así como los ángulos correspondientes congruentes para poder aplicar el criterio de semejanza *ALA.* El profesor orienta al estudiante al explicar que para cada amplitud del deslizador los ángulos correspondientes de los *triángulos* toman el mismo valor y así poder determinar que los ángulos son congruentes.

Tabla 2. Hallazgos Situación 2

- **SITUACIÓN 3**

En esta situación se pretende que el estudiante aplique los esquemas de uso construidos hasta el momento para realizar la exploración, la cual tiene como finalidad identificar el criterio de semejanza de *triángulos* lado-ángulo-lado (LAL) para la familia de *triángulos* generada en GeoGebra.

En la ***fase de acción*** se observa un esquema de uso construido por el estudiante al realizar la exploración del entorno al mover los tres deslizadores, el profesor debe orientar para que explore las figuras, se tiende a mover la figura en su conjunto y por tanto el profesor le explica que una forma es determinar si se puede modificar la posición de los vértices, este es un esquema en construcción, pues se debe reconocer la figura de manera puntual y no global. Finalmente el estudiante concluye que:


1. Se pueden mover los tres deslizadores: a, c, g y el vertice "C", que controla la amplitud del $\angle BAC$.

Por otro lado, la ***fase de formulación*** se observa a partir de la exploración del estudiante cuando aplica los conocimientos que ya fueron trabajados en situaciones anteriores como es hallar las razones entre segmentos y determinar la congruencia entre ángulos, así como una adecuada notación matemática, tal como se observa en la respuesta dada a la pregunta 2:

2. $\angle BAC = \angle B'A'C'$, son congruentes.

$\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, estan a la misma razon.

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Igualmente la ***fase de validación*** se presenta cuando el estudiante identifica la función de cada deslizador y que genera una familia de *triángulos* con diferente tamaño pero de igual forma. Lo cual es validado a partir de la retroalimentación del medio y le permite al estudiante afirmar que:

3-El deslizador "a", maneja la razo'n entre $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$

- El deslizador "c", maneja la razón entre $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$
- El deslizador "g", maneja la razo'n general del triangulo.

la conclusión es que al mover cualquier deslizador, estos triangulos seguiran siendo semejantes.

Y formular el criterio LAL así:

> 4. Según el criterio "lado-ángulo-lado", dos o más triángulos son semejantes, si tienen dos segmentos a igual proporción, y el ángulo comprendido entre estos es congruente, pero se debe tener en cuenta que ese ángulo, tiene que estar comprendido por dichos segmentos.

Sin embargo fue necesaria la intervención del profesor para que el estudiante definiera el ángulo que se debía considerar, lo cual se muestra en el siguiente diálogo:

> P: escriba un texto, como si le explicaras a un compañero
>
> E: [empieza a escribir]
>
> P: me da el $\angle BAC$ ¿cierto?
>
> E: si
>
> P: ¿es necesario que me den ese ángulo o me pueden dar otro?
>
> E: el ángulo debe estar comprendido entre estos dos segmentos
>
> E: [escribe]

En esta situación se pudo evidenciar:

CRITERIOS DE ANÁLISIS	***HALLAZGOS***
Estrategias del estudiante	El estudiante determina la congruencia entre los ángulos correspondientes de los *triángulos*. El estudiante logra plantear simbólicamente la razón entre los lados correspondientes de los *triángulos*. El estudiante iguala las razones de los lados correspondientes de los *triángulos* estableciendo la proporción. El estudiante aplica el criterio de semejanza *LAL* para determinar que los *triángulos* son semejantes.

Aporte de GeoGebra:	El estudiante por medio de la manipulación de deslizador y el arrastre del vértice C logra describir los hechos que ocurren en la pantalla de su computador, identifica que se puede mover y qué permanece fijo. El estudiante identifica la dependencia de los deslizadores con la longitud de los segmentos, que además controlan la razón entre los lados correspondientes de los *triángulos*. El estudiante identifica la dependencia de la razón general entre los dos *triángulos* con el valor numérico que tome el deslizador. El estudiante por medio del arrastre del vértice C identifica que varía la amplitud del ángulo $\angle BAC$ y $\angle B'A'C'$. Se evidencia que el estudiante reconoce la familia de *triángulos* semejantes al arrastra el deslizador g.
Gestión didáctica del profesor:	El profesor utiliza la pregunta para guiar al estudiante y así llegar al conocimiento que se moviliza en la situación. El profesor debe explicar al estudiante que se hablan de figuras semejantes más no de segmentos semejantes, ya que el estudiante afirma que si dos segmentos están a una razón dada por el deslizador son semejantes, en este caso se utiliza el término congruentes. Es pertinente la orientación del profesor para que el estudiante vea la importancia, que para aplicar el criterio *LAL* los ángulos correspondientes congruentes deben estar entre lados correspondientes proporcionales.

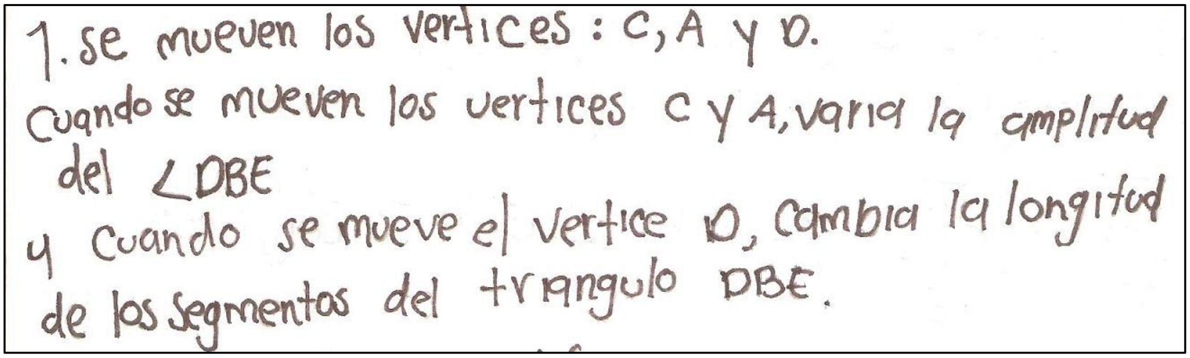
Tabla 3. Hallazgos Situación 3

- **SITUACIÓN 4**

En esta situación se espera que el estudiante aplique los criterios de semejanza ALA y LAL utilizados en la situación 2 y 3 para determinar que la familia de *triángulos* presentados en GeoGebra son semejantes.

Se evidencia la ***fase de acción*** cuando el estudiante interactúa con GeoGebra y logra identificar los vértices de los *triángulos* que se pueden mover y los que son fijos. Además cuando logra reconocer la dependencia de variación de la amplitud de los ángulos y la longitud de los lados a partir del movimiento de los vértices. Se presenta dificultad en el arrastre, ya que el punto D no se puede mover fácilmente porque solo se puede trasladar sobre la línea recta AB debido a la construcción. Como se muestra en el siguiente diálogo:

E: [la estudiante mueve los vértices de la figura]
P: ¿Qué pasa con el vértice D?
E: no se puede mover libremente
P: ¿Es posible moverlo?
E: sí
P: ¿Qué trayectoria describe?
E: el vértice D se mueve sobre esa línea [señala la línea]
P: listo entonces ¿cuáles no se mueven?
E: los vértices B y E
P: ¿y cuáles se mueven?
E: se mueven los vértices A, B y C.
E: [la estudiante escribe]


1. se mueven los vertices: C, A y D.
Cuando se mueven los vertices C y A, varia la amplitud del $\angle DBE$
y cuando se mueve el vertice D, cambia la longitud de los segmentos del triangulo DBE.

Para responder la pregunta 2, es importante el arrastre, puesto que en primera instancia el estudiante solo reconoce el ΔBDE que se encuentra coloreado, de ahí que la visualización también sea un aspecto importante para descomponer la figura, sin embargo al mover el vértice C logra visualizar los dos *triángulos* ΔBDE y ΔBAC, de ahí que concluya que:


2. Identifico dos triangulos.
El triangulo DBE y el ABC.

Se presenta la ***fase de formulación***, cuando después de manipular la construcción realizada en GeoGebra el estudiante logra establecer comparaciones entre las razones de segmentos correspondientes. Se presentan diferentes dificultades, en primera instancia el estudiante empieza a formular la razón, planteando la invertida, ya que de numerador puso el segmento más pequeño y de denominador el segmento más largo, pero se dio cuenta de inmediato pues este hecho ya había ocurrido en la situación 1.

Por otro lado cuando el estudiante calcula las tres razones en un instante, manipula los vértices a conveniencia para que le queden números enteros que pueda dividir fácilmente, pero cuando hay que calcular las otras tres razones en posición distinta a la anterior, se presenta la dificultad que la razón da un número decimal y que no coincide el valor de las tres razones, esto se da, porque en la construcción se pensó trabajar con longitudes cuyo valor fueran números enteros, aunque realmente la longitud puede tomar valores decimales, es por eso que al calcular las tres razones los resultados no son iguales, hay que hacer una aproximación de los números.

Se espera que estos ambienten potencien la utilización de este tipo de razones poco usuales, sin embargo no era objeto de estudio en este trabajo, a pesar de las restricciones señaladas con la gestión del docente el estudiante logra hallar las razones y compararlas entre sí, concluyendo que son iguales y que están a la misma proporción.

Esta situación aproxima al estudiante a la semejanza de *triángulos* cuando sus lados no son múltiplos enteros, y por tanto las razones son números decimales que se deben aproximar.

Es importante reconocer que gracias al arrastre del vértice D, el estudiante puede identificar, que independiente de la posición del vértice, se forma una familia de *triángulos* que están a la misma razón del triángulo ABC que en este momento es invariante.

Lo anterior se evidencia en los procedimientos realizados por el estudiante, los cuales se muestran a continuación:

3. $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{DB}} = \dfrac{8}{4}$ $\quad 8 \,\underline{|4}$, $0 \;\boxed{2} \rightarrow$ Razón. $\qquad \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EB}} = 8 \,\underline{|4}$, $0 \;\boxed{2} \rightarrow$ Razón

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \dfrac{6}{3}$ $\quad 6 \,\underline{|3}$, $0 \;\boxed{2} \rightarrow$ Razón.

$\frac{9}{5}$ $\quad 9 \div 5 = 1,8$

$\frac{8}{5}$ $\quad 8 \div 5 = 1,6$

$\frac{5}{3}$ $\quad 5 \div 3 = 1,\hat{6}$

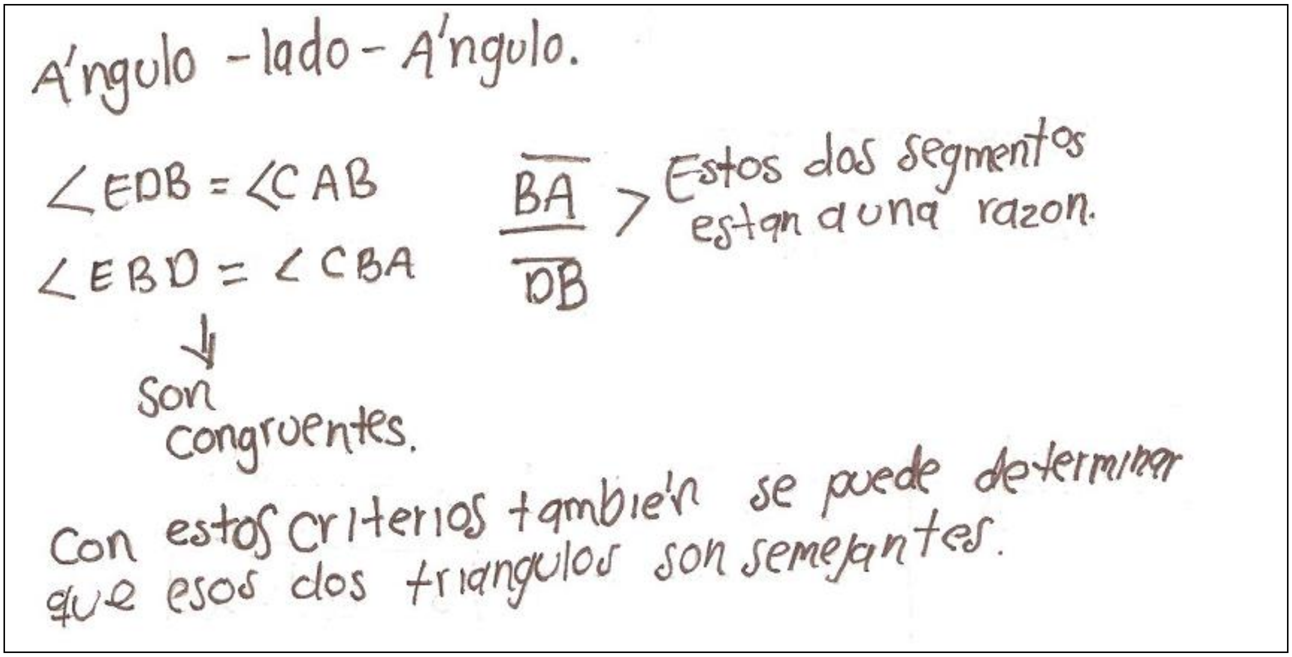
R// Todas las Razones, estan a una misma proporción

Igualmente se evidencia la fase de formulación, cuando el estudiante logra determinar que los ángulos respectivos de los *triángulos* son iguales y que hay un ángulo que se comparte para los dos *triángulos* y justificar la semejanza de los triángulos así:

5. Sí los triangulos son semejantes, porque sus ángulos son congruentes, y los segmentos estan a una razón.

También son semejantes porque cumple con el criterio Lado-ángulo-Lado

$\frac{\overline{BA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}}$ $\quad \angle CAB = \angle EDB \rightarrow$ son congruentes



Ángulo -lado- Ángulo.

$\angle EDB = \angle CAB$

$\angle EBD = \angle CBA$

son congruentes.

$\dfrac{\overline{BA}}{\overline{DB}}$ > Estos dos segmentos estan a una razon.

Con estos criterios también se puede determinar que esos dos triangulos son semejantes.

La ***fase de validación*** se evidencia en el momento de expresar el conocimiento, luego de haber hecho el análisis lógico y pertinente para determinar la semejanza de los triángulos a partir de lo trabajado en las situaciones 1, 2 y 3. El estudiante logra identificar que el ΔBDE y ΔBAC son semejantes, esta semejanza la hace en primera instancia, concluyendo, que por ser los ángulos correspondientes congruentes y los segmentos deben estar a la misma razón. La intervención del profesor, logra hacer caer en razón al estudiante de que esa semejanza entre los *triángulos* la podría sustentar aplicando los criterios de semejanza *ALA* y *LAL* aplicados en la situación 2 y 3 respectivamente. El estudiante logra visualizar los ángulos y los segmentos correspondientes para aplicar los criterios *ALA* y *LAL*, obteniendo con éxito la semejanza a partir de estos criterios.

En conclusión de obtuvo que:

CRITERIOS DE ANÁLISIS	***HALLAZGOS***
Estrategias del estudiante	El estudiante logra identificar a partir del arrastre y la visualización de la descomposición de figuras los dos *triángulos* que se presentan en la pantalla, uno siempre dentro del otro, a pesar de que solo el triángulo interno esta sombreado en su interior que facilita visualmente verlo. El estudiante formula las tres razones entre los lados correspondientes de los *triángulos* e identifica que están en proporción, hallando la constante de proporcionalidad. El estudiante determina la congruencia entre las tres parejas de ángulos correspondientes de los *triángulos*. El estudiante afirma que los *triángulos* son semejantes, debido a que las tres parejas de ángulos correspondientes son congruentes y todos los lados correspondientes de los *triángulos* están a la misma contante de proporcionalidad. El estudiante aplica los criterios de semejanza *LAL y ALA* para determinar que los *triángulos* son semejantes.
Aporte de GeoGebra	El estudiante a partir del arrastre de los vértices, identifica la cantidad de *triángulos* que se presentan en la pantalla. El estudiante identifica la amplitud del ángulo que se comparte para ambos *triángulos* con el arrastre de los vértices A y D. Se evidencia que el estudiante

	reconoce la familia de *triángulos* semejantes que se forman al arrastrar el vértice D, y logra identificar su trayectoria.
Gestión didáctica del profesor:	El profesor utiliza la estrategia del diálogo para discernir el conocimiento obtenido en las situaciones anteriores y así guiarlo para determinar la semejanza entre esta familia de *triángulos* semejantes. Es importante la orientación del docente para que el estudiante que puede determinar la semejanza de la familia de *triángulos* aplicando los criterios de semejanza *ALA* y *LAL.* El profesor debe retomar las ideas y conclusiones planteadas a lo largo de las situaciones para hacer correcciones con sus respectivas explicaciones.

Tabla 4. Hallazgos Situación 4

4.3. CONCLUSIONES

Las conclusiones surgen de los análisis de los resultados obtenidos al implementar la secuencia didáctica en una prueba piloto a un estudiante, con el fin de dar cuenta de los objetivos específicos del trabajo.

Respecto al primer objetivo específico en el cual se propone fundamentar la adaptación de una secuencia didáctica al integrar Geogebra, se puede concluir que:

- Se logra evidenciar el reconocimiento de algunos referentes teóricos fundamentales de la *Teoría de Situaciones Didácticas* tales como las diferentes situaciones de acción, formulación y validación, así como los distintos momentos que guían su desarrollo, esto es, la fase de acción, formulación y validación; dicho reconocimiento sirvió para la adaptación de las situaciones propuestas, puesto que las preguntan planteadas en cada situación respondían a cada una de las fases. Igualmente se reconoce GeoGebra como un medio que brinda una retroacción a la acción del estudiante y permite la identificación de variantes e invariantes en los diferentes applets presentados.

- La *orquestación instrumental*, se utilizó para dar cuenta de la planeación e implementación de la secuencia didáctica al considerar, la organización del tiempo, los materiales y/o recursos necesarios para su implementación, el rol del estudiante y del profesor, se resalta la gestión didáctica del profesor en la fundamentación e implementación de la secuencia didáctica.

- A manera de conclusión se puede afirmar que se logró adaptar e implementar una secuencia didáctica al articular la *Teoría de Situaciones Didácticas* y la *Orquestación Instrumental*, al considerar GeoGebra como un medio que permitió explorar y probar conjeturas acerca de la semejanza de *triángulos*, a partir de las tres fases y de la continua gestión didáctica del profesor para orientar el trabajo y las conjeturas del estudiante.

Con relación al segundo objetivo específico, el cual hace referencia a la adaptación de una secuencia didáctica en Geogebra para el estudio de la semejanza de triángulos se puede concluir que:

- Se logra adaptar la secuencia presentada por el profesor Martínez (s.f),, lo cual se evidenció en la creación los applets utilizando deslizadores, se tuvo dificultad para la construcción de los deslizadores sobre una circunferencia para la variación de los ángulos, lo cual generó dificultades en la visualización de los mismos por parte de los estudiantes. Se omitieron herramientas, textos y elementos que no permitían la formulación de conjeturas por parte de los estudiantes a partir de la exploración, sino que eran presentados de manera expositiva.

- El diseño de la ficha de cada situación facilitó el análisis de la experimentación realizada, puesto que ellas se estructuraron teniendo en cuenta las fases de acción, formulación y validación, de esta manera las preguntas formuladas en las fichas guiaban la exploración del estudiante en los applets presentados.

- La adaptación de la secuencia permitió la exploración de cada applet a partir del arrastre, la visualización de propiedades, de invariantes en las construcciones presentadas, con el fin de que el estudiante pudieran formular y validar sus conjeturas.

- Se puede concluir que la adaptación de la secuencia didáctica y la elaboración de la descripción de cada situación permitió poner en práctica la fundamentación teórica construida con el fin de dar cuenta de la retroacción del medio, las fases, la gestión didáctica del profesor y las posibles respuestas o dificultades que se podían encontrar en su implementación.

En cuanto al tercer objetivo específico que hace referencia a la implementación y análisis de una secuencia didáctica en Geogebra para el estudio de la semejanza de triángulos con un estudiante de grado octavo, se puede concluir que:

- En cada situación, de acuerdo a su intencionalidad y a partir del arrastre, el estudiante logra identificar los elementos que permanecen fijos y los que varían, esto se pudo evidenciar en las cuatro situaciones cuando el estudiante identifica que la figura varía su tamaño, que los ángulos varían su amplitud, que los segmentos varían su longitud al mover los deslizadores, que algunos vértices se pueden mover y las propiedades que se conservan como la razón, la proporción, la semejanza y la congruencia al hacer estos arrastres.

- El estudiante logra identificar la proporcionalidad entre dos pares de segmentos a partir de la constante de proporcionalidad (razón) lo cual se pudo evidenciar en la situación 2 y 4. Además logra identificar la congruencia entre ángulos al identificar cuándo son iguales, esto se evidencio en la situación 2, 3 y 4.

- Igualmente a partir del arrastre el estudiante también identifica figuras semejantes, esto es, figuras que conservan su forma y varían su tamaño y posición, esto se pudo evidenciar en las cuatro situaciones ya que en cada una de ellas se presentaron figuras semejantes.

- El estudiante en las cuatro situaciones logró plantear la razón entre los segmentos y establecer la dependencia del valor numérico del deslizador con la razón encontrada, aquí importa el orden en que se plantea la razón, el estudiante logra identificar que debe plantear la razón para que arroje el valor dado por el deslizador. Además en la última situación logra aplicar los criterios de semejanza identificados en las situaciones 2 y 3, lo cual permite validar sus conjeturas.

- En general se cumplieron las expectativas presentadas en la descripción de cada situación en la fase preactiva, ya que el estudiante logró identificar los criterios de semejanza de los triángulos ángulo-lado-ángulo, lado-ángulo-lado y logró determinar que en el teorema de Thales se crea una familia de triángulos semejantes al triangulo de mayor área, al trazar una línea recta interna y paralela a su base. Es importante mencionar que el estudiante llega a la formulación de estos criterios al tomar en cuenta los conceptos razón, proporción, congruencia y semejanza.

- Por otro lado, el aporte de este trabajo a nuestra formación, se enmarca por un lado en el manejo y diseño de situaciones con un software como GeoGebra, el cual permite tener experiencia en la gestión de este tipo de situaciones para identificar la forma de realizar las devoluciones o preguntas que guíen el desarrollo de la secuencia. Esta experiencia fue nueva en nuestra formación y motiva a continuar implementando algún tipo de tecnología en el aula de clase.

- Finalmente, se espera que este trabajo pueda ser retomado por otros profesores, se implemente en las aulas de clase y pueda evolucionar, en la medida que pueda ser sometida a cambios y arreglos.

REFERENCIAS

Bermeo y Rivas (2012). *Una secuencia didáctica alrededor de pruebas con la mediación de Cabri: el caso de la semejanza de triángulos*. [http://hdl.handle.net/10893/3882] Tesis

Boyer, C. *Historia de la Matemática* (1987). Madrid: Alianza Editorial S. A.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos de la didáctica de las matemáticas: En fundamentos metodológicos para la investigación en educación matemática*. Recherches en didactiques des mathematiques, 7(2), 33-115

Cortés, C. C. C., Guevara, N. Y. C., & Navarro, L. M. E. (2009). *CONCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO SOBRE EL CONCEPTO DE SEMEJANZA*. CUADERNOS DE LA MAESTRÍA EN DOCENCIA E INVESTIGACIÓN UNIVERSITARIA, 11.

Colombia. Ministerio De Educación Nacional. (1998). Matemáticas. *Lineamientos curriculares*. Bogotá.

Colombia. Ministerio De Educación Nacional. (1999). Matemáticas. *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas*. Bogotá.

Colombia. Ministerio De Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá.

Garzón, D. y Fernández, E. (2006). Módulo III de educación virtual: *pensamiento geométrico y métrico. Unidad 2: Los ambientes de Geometría Dinámica y las interacciones entre pensamiento Geométrico y métrico*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Gualdrón É. &. Gutiérrez, A. (2006). *Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza*. X Simposio SEIEM. Disponible en: www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXSimposio.pdf

Luengo, R., & Beta, G (1990). *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza*. España: Editorial Síntesis

Margolinas, C. (2009). La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas. Traducido por Martín Acosta Gelemper y Jorge Enrique Fiallo Leal (2.009). Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Martìnez, J. (s.f). Semejanza recuperado en: http://www.dmae.upct.es/~pepemar/mateprimero/trigonometria/angulos/ang_semeja.htm.

Moise (1986) *Elementos de Geometría Superior*. En: Addison-Wesley Publishing Company. 5 Edición.

Moreno, L. (2001). *Cognición, Mediación y Tecnología. Avance y Perspectiva*, vol. 20, 65-68.

Pabón, O. (2006). *Conocimientos, concepciones y creencias en torno a las TIC en las Educación*.

Rabardel, P. (2001). *Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. Actes de l´école d´été de didactique des mathématiques. 203-213*.

Trouche, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dan les apprentissages mathématiques* : nécessite des orchestrations.

LISTA DE ANEXOS

REGISTRO DOCUMENTALES

ANEXOS

1. FICHA SITUACIÓN 1

Situación 1

1. Explora el entorno e identifica que objetos se pueden mover.

2. ¿Qué sucede al mover el deslizador ``$a$``?

3. ¿Qué relación existe entre las figuras y el valor numérico del deslizador ``$a$``?

4. Encuentra dos razones entre la figura inicial y la figura final al mover el deslizador ``$a$``.

5. Compare las dos razones halladas, con el valor del deslizador ``$a$``.

6. ¿Qué propiedad deben tener las figuras en GeoGebra para que sean de la misma forma pero de diferente tamaño?

1.2 RESPUESTAS SITUACIÓN 1

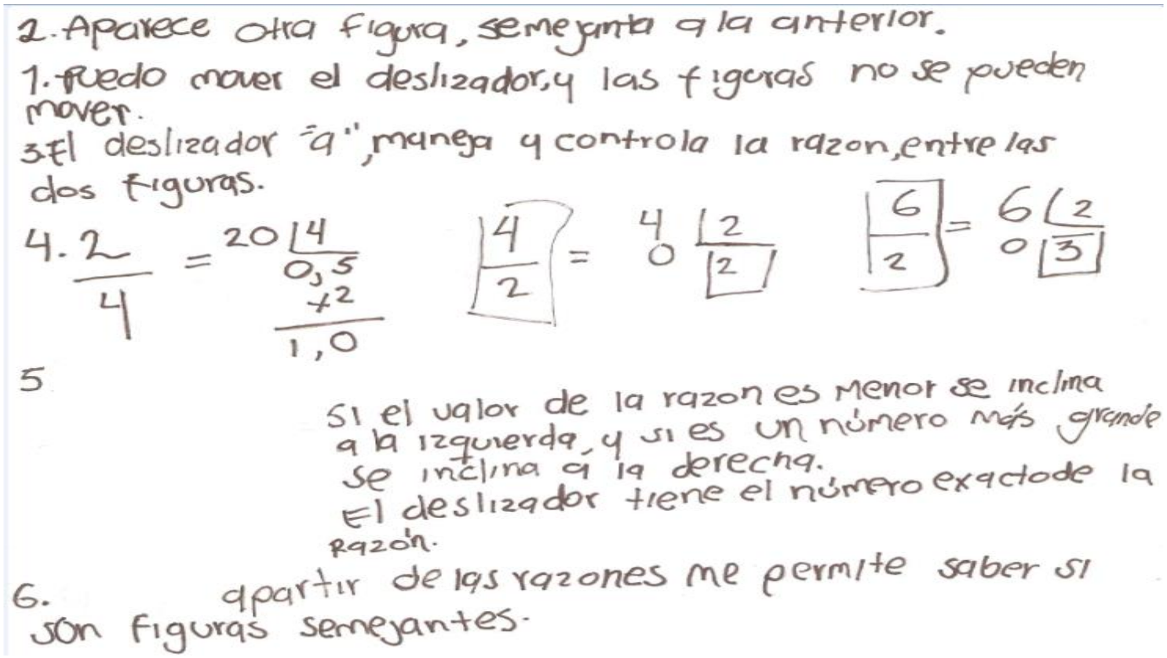

2. Aparece otra figura, semejanta a la anterior.
1. puedo mover el deslizador, y las figuras no se pueden mover.
3. El deslizador "a", manega y controla la razon, entre las dos figuras.
4. $\frac{2}{4}$ = 20 | 4 0,5 ... 1,0 $\frac{4}{2}$ = 4 0 | 2 | 2 | $\frac{6}{2}$ = 6 0 | 2 | 3 |
5. si el valor de la razon es menor se inclina a la izquierda, y si es un número más grande se inclina a la derecha. El deslizador tiene el número exactode la razón.
6. apartir de las razones me permite saber si son figuras semejantes.

Imagen 1

1.3 TRANSCRIPCIÓN DEL VIDEO SITUACIÓN 1

Pregunta 2.

E: [este es el entorno, señala la figura]

P: el entorno es todo lo que le presenta el software en la pantalla y que además se puede manipular con el mouse.

E: [mueve el deslizador y analiza qué pasa con la figura y contesta la pregunta dos]

Pregunta 1.

P: ¿identifica que se puede mover?

E: ¿Cuál la dos?

P: no la primera, estamos en la primera

P: Usted que puede mover de esa figura, de ahí usted que puede mover

E: [esto y señala el deslizador]

P: esto se llama un deslizador

E: [mueve el deslizador]

P: veo que tiene dificultades, cuando usted lo tiene presionado puede moverlo continuamente

E: [mueve el deslizador]

P: ¿y qué pasa con las figuras, si las puede mover?

E: [mueve el deslizador y se mueven las figuras]

P: [señala las figuras]

P: ¿pero acá las figuras se pueden mover?

E: [manipula la figura más grande]

P: ¿y la otra?

E: [manipula la más pequeña]

E: no

P: entonces conteste

Pregunta 3.

E:[lee la pregunta 3]

P: ¿Qué relación existe entre las figuras y el valor numérico del deslizador ´´a´´?

P: usted tiene el deslizador cierto, y tiene las dos figuras, y lo que le preguntan la relación entre el valor del deslizador y la figura

E: [señala el deslizador y la figura]

Pregunta 4.

E: ¿cómo así, me piden hallar los números exactos?

P: sí, pero obviamente haciendo el procedimiento matemático.

P: usted ve que esta figura pequeña tiene una altura de dos y la altura grande de cuatro, lo que te piden ahí es encontrar dos razones a partir de mover el deslizador

E: [señala el deslizador]

E: o sea que hago fracciones

E: [ella escribe]

E: ¿así?

P: lo que le preguntan es encontrar dos razones, y en ese instante puede encontrar una, al encontrar esa razón es la que determina que esas figuras sean semejantes

E: sí

P: ¿entonces usted como determina la razón entre la altura grande y la altura pequeña?

E: es que no me acuerdo

E: [señala las figuras]

E: este va arriba y este va abajo

P: pero plantéelo

E: [la estudiante empieza a realizar operaciones]

P: 0.5 listo

P: la razón entre 2 y 4 es 0.5

E: sí

P: ¿cuándo yo multiplico 2 por 0.5 me da 4?

E: no da uno

P: entonces vemos que esa razón no es la correcta, porque 2 por 0.5 no da 4

P: entonces cuando te dicen encuentra la razón, debes encontrar ese valor que sea múltiplo con la altura inicial para quede la otra altura

E: [hace la operación]

P: ¿Cuál es la razón?

E: 4 sobre 2

P: ¿y cuál es el valor numérico?

E: dos

P: entonces la razón de semejanza, en este instante es dos

E: ¿y hay otras?

P: puede encontrar otra moviendo el deslizador

E: [mueve el deslizador]

P: listo entonces en este caso que seria

E: [la estudiante realiza la operación]

Pregunta 5.

E: [Contesta la pregunta]

P: la pregunta es compare, no es hacer un proceso matemático, si no como una conclusión, expresar eso mediante palabras, que relación ve, comparar, comparar es ver la relación entre las razones que obtuvo y el valor del deslizador

E: [señala la pantalla]

P: entiéndame bien la pregunta

P: usted obtuvo dos razones y esas dos razones las va a comparar con el valor del deslizador

E: entre el número sea más grande el deslizador va para la derecha

P: listo usted ahí obtuvo que la razón es 3

P: ¿y qué pasa allá con el valor de ´´ a´´?

P: en ese caso la razón 6 es a 2 da 3, y ¿qué está pasando con ese deslizador de ahí?

E: si lo muevo

P: pero qué valor tiene, ¿usted tiene un valor numérico?

E: sí, 3

P: ahorita que usted hizo la otra razón, cuanto tendría que valer ese deslizador

E: 2

P: entonces que relación usted ve, entre las razones y el deslizador

E: que entre la razón sea más pequeña, la figura se hace más pequeña

P: ¿y si es más grande?

E: la figura es más grande

P: ¿pero qué relación en sí, hay entre las figuras y el deslizador?

E: que el deslizador tiene la razón

P: es el mismo valor

E: de la razón, ¿sí?

Pregunta 6.

E: que sean semejantes

P: ¿Que propiedades deben tener las figuras en GeoGebra para que sean de la misma forma pero de diferente tamaño?

P: con el proceso que usted acaba de hacer, ¿Qué relación ha encontrado para que esas dos figuras tengan la misma forma pero de diferente tamaño?

E: ¿propiedad?

P: cuando habla de propiedad, habla de un hecho matemático que usted está haciendo, que viene trabajando en esa situación y que determina o puede decir que debido a eso las dos figuras son semejantes

E: no entiendo

P: ¿usted como determina que esas dos figuras tienen la misma forma pero diferente tamaño?

E: sí…

P: que hecho matemático usted ve ahí, para que hace que eso pase

E: las razones

P: ¿usted porque considera que las razones?

E: por el procedimiento que acabo de hacer, es mirar la altura de esta figura y dividirla con esta, y ver que toma este valor

P: entonces a partir de este valor usted puede decir que son…

E: semejantes

2. FICHA SITUACIÓN 2

Situación 2.

1. Explora el entorno e identifica qué objetos se pueden mover.

2. Observa qué sucede al mover el deslizador ``a``.

2.1 Encuentra una de las razones entre los lados $\overline{DB}$ y $\overline{D'B'}$.

3. Al mover el deslizador Ɵ, observa:

3.1 Cómo son los ángulos $< ADB$ y $< A'D'B'$.
3.2 Cómo son los ángulos $< DBA$ y $< D'B'A'$.

3.3 Encuentras cambios en la razón obtenida entre los lados $\overline{DB}$ y $\overline{D'B'}$.

4. Realiza el mismo procedimiento al mover el deslizador ``α``. ¿Qué propiedades siguen compartiendo los *triángulos*?

5. De acuerdo a lo anterior ¿Qué puedes concluir de la forma y tamaño de los *triángulos* al mover los deslizadores?

6. Según lo observado ¿Cómo le explicarías a un compañero que dos *triángulos* son semejantes?

2.1 RESPUESTAS SITUACIÓN 2

1. Se mueven los tres deslizadores, θ, a, d
las figuras no se mueven.

2. El deslizador "d", maneja la razon existente en las dos figuras.

2.1 $\overline{D'B'} = 12$ $\quad \frac{12}{4} = 12 \div 4 = \boxed{3} \rightarrow$ la razon.
$\overline{DB} = 4$

3.1 Son ángulos congruentes.
3.2 Tambíen, son ángulos congruentes.
3.3. No, no hay cambios, la razon sigue siendo 3.

4, los triangulos son semejantes.
$\angle ADB$ y $\angle A'D'B$, son congruentes
$\angle DBA$ y $\angle D'B'A'$, tambien son congruentes
y la razon tampoco varia.

5. siempre, sin importar la ubicación de un deslizador, los triangulos serán semejantes.

6. Utilizando el criterio, Ángulo-lado-Ángulo.
Este criterio explica que debe tener dos ángulos congruentes y el lado comprendido entre ellos debe ser semejante.

Imagen 2

2.2 Transcripción del video situación 2

Pregunta 1.

P: ¿cuántos deslizadores hay?

E: tres

P: cada uno tiene un nombre [se señalan y mencionan]

P: ¿Qué sucede con las figuras? ¿Se pueden mover?

E: [realiza exploración intentando arrastrar vértices y lados de los *triángulos*. Copia la respuesta a la primer pregunta]

Pregunta 2.1

P: ¿Cuál es el valor del deslizador ´´ a ´´?

E: da tres (3)

P: identifica el valor de cada uno de los $\overline{DB}$ y $\overline{D'B'}$.

E: doce (12) y cuatro (4)

P: si quiere hallar la razón ¿que colocaría?

E: 12 sobre 4, y 12 dividido 4 es 3

P: tres (3) es entonces el valor de la razón

Pregunta 3.

P: primero hay que mover el deslizador

E: maneja la amplitud del ángulo

P: como se nombra

E: $\angle ADB$ y $\angle A'D'B'$

Pregunta 3.1

E: el deslizador θ maneja la amplitud de los ángulos

P: en la pregunta 3 se explora no debes contestar, ahora contesta la pregunta 3.1

E: son semejantes

Pregunta 3.2

P: ahora, es la misma pregunta para los ángulos $\angle DBA$ y $\angle D'B'A'$.

P: ya identifico ¿quién es $\angle DBA$? ¿Qué valor tiene?

E: el valor es $47{,}14$

P: y el valor de $\angle DBA$

E: es el mismo

P: ¿se cumple el caso de que se mueva el deslizador? Verifique

E: [el estudiante realiza exploración]

P: ¿siguen siendo congruentes?

E: sí

P: ¿semejantes?, que valores tiene $\angle ADB$ y $\angle A'D'B'$

E: $93{,}26$ y $93{,}26$

P: en caso de que varíe el deslizador θ que valor toman esos ángulos y qué valor tiene en un instante

E: $83{,}08$ y $83{,}08$

P: entonces que podemos decir de los ángulos $\angle ADB$ y $\angle A'D'B'$

E: son iguales

Pregunta 3.3

P: tenga en cuenta que esto se debe responder al mover el deslizador ϴ, ¿observa cambio en la razón?

E: sigue igual

P: ¿qué valor tiene la razón allí?

E: 3

Pregunta 4.

P: lo primero que hay que identificar son las propiedades al mover, no θ sino α

E: α maneja la amplitud de este ángulo [señala], son congruentes.

P: que puede concluir

E: los *triángulos* son congruentes

P: ¿los *triángulos* son exactamente iguales?

E: sí

P: ¿los *triángulos* son iguales?

E: [ah, no, no].

P: ¿qué es lo que es igual ahí?

E: los ángulos son congruentes, pero aquí me están preguntando por los *triángulos*

P: ¿qué propiedades comparten los *triángulos*?, tenga en cuenta que las propiedades son esos conceptos matemáticos y las condiciones que determinan esos dos *triángulos*. La afirmación que los ángulos son congruentes es cierta pero faltan la relación entre los segmentos

E: son semejantes entonces

P: los *triángulos* siguen siendo semejantes, pero que propiedades observa para que sean semejantes

E: los ángulos son exactamente iguales.

P: nombra los ángulos y determina como son, esa es una de las propiedades.

P: y que pasa con esa razón, ¿varíelo a ver qué pasa?

E: vario la razón

P: no varié el deslizador α a ver qué pasa

E: sigue igual

P: ¿cuánto vale?

E: tres (3)

P: que podemos concluir

E: que no varia

P: identificamos tres elementos importantes

E: ángulos congruentes y la razón

Pregunta 5.

E: dos deslizadores manejan la amplitud de los ángulos y este maneja la razón de los lados

P: ya identificaste la función de los deslizadores, pero la pregunta hace referencia a la forma y tamaño de los *triángulos* al mover los deslizadores

E: que siempre van a ser iguales

P: ¿iguales? Recuerda que estamos hablando de los *triángulos* y sus propiedades, ¿Qué pasa al mover cualquiera de los deslizadores?

E: [realiza la exploración al mover cada uno de los deslizadores]

Pregunta 6.

P: como le explicarías a un amigo que los *triángulos* tienen la misma forma y diferente tamaño

E: que siempre los ángulos tienen que ser congruentes

P: que otra cosa observas además de los ángulos

E: la razón

P: la razón entre cúales lados

E: el lado que comprende la medida entre los dos ángulos

P: cómo explicarías lo que acabamos de decir

E: el criterio *ALA*, dos *triángulos* son semejantes si tiene dos ángulos congruentes y el lado entre ellos es semejante

P: no es que los lados sean semejantes, no se puede hablar de que los segmentos son semejantes, se dice que los segmentos están a una misma proporción.

E: que es la razón

P: la proporción dice que hay dos razones que son iguales, para ello se debería establecer la razón entre los otros lados de los *triángulos* para afirmar que tienen la misma proporción.

3. FICHA SITUACIÓN 3

Situación 3.

1. Explora el entorno e identifica qué objetos se pueden mover.

2. Después de hacer la exploración que propiedades comparten los *triángulos*.

3. ¿Qué puedes concluir de la forma y tamaño de los *triángulos* al mover los deslizadores?

4. Escribe un texto en el que justifiques si los dos *triángulos* son semejantes o no son semejantes de acuerdo a esta situación.

3.1

RESUESTAS DE SITUACION 3:

1. Se pueden mover los tres deslizadores: a, c, g y el vertice "C", que controla la amplitud del $\angle BAC$.

2. $\angle BAC = \angle B'A'C'$, son congruentes.

$\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, estan a la misma razon.

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

3. - El deslizador "a", maneja la razo'n entre $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$
- El deslizador "c", maneja la razón entre $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$
- El deslizador "g", maneja la razo'n general del triangulo.

la conclusión es que al mover cualquier deslizador, estos triangulos seguiran siendo semejantes.

4. Según el criterio "lado-a'ngulo-lado", dos o más triangulos son semejantes, si tienen dos segmentos a igual proporción, y el ángulo comprendido entre estos es congruente, pero se debe tener en cuenta que ese ángulo, tiene que estar comprendido por dichos segmentos.

Imagen 3

3.2 TRANSCIPCIÓN DEL VIDEO SITUACIÓN 3

Pregunta 1.

E: [Explora moviendo los deslizadores]

P: ¿Qué se puede mover?

E: Los deslizadores a, c y g.

P: ¿Qué más se puede mover? Explora las figuras, ¿se pueden mover los vértices?

E: [Explora moviendo cada uno de los vértices]

P: ¿Qué sucede al mover el vértice?

E: Controla la amplitud del ángulo

P: Hasta donde se puede mover

E: [Explora que da un giro de $360º$]

P: ¿Qué se puede mover?

E: Los tres deslizadores y el vértice C.

Pregunta 2.

E: Son *triángulos* semejantes

P: ¿Qué propiedades comparten?

E: Tienen un ángulo congruente

P: Recuerde que puede mover los deslizadores como quiera para observar qué pasa.

E: [Explora el deslizador a]

P: Qué varía ese deslizador

E: La razón entre los segmentos.

P: ¿Cuáles segmentos?

E: Los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$.

P: El deslizador c ¿qué varía?

E: la razón entre los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$

P: Y el deslizador g ¿Qué varía?

E: La razón general del triángulo.

P: ¿Qué propiedades comparten los *triángulos* para que sean semejantes?

E: tienen un ángulo congruente y sus lados… son congruentes también.

P: ¿Qué pasa entre los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$?

E: Son…semejantes…congruentes también.

P: Los ángulos son congruentes, pero recuerda que dijimos que los segmentos no son semejantes…

E: están a una misma proporción.

P: En este caso $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$ ¿si están a una misma proporción?

E: sí, con $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$.

P: también se puede decir que están a una misma razón. ¿Cierto?

E: Sí

P: Recuerde que estar a la misma razón no significa que sean semejantes. Se pueden definir figuras semejantes más no segmentos.

E: Bueno…

P: Plantéa simbólicamente las razones que están ahí

E: es 6 y 3 y …

P: No pero simbólicamente

E: $\overline{AC}$ sobre $\overline{A'C'}$, la razón es seis tercios

P: Escríbelo como fracción, ¿Qué va en el numerador?

E: $\frac{6}{3}$

P: No numéricamente, el 6 a ¿qué segmento corresponde?

E: $\overline{A'C'}$

P: Ese va en el numerador o en el denominador

E: en el numerador

P: Escríbelo

E: [lo escribe]

P: ¿Qué va en el denominador?

E: 3..no,no..$\overline{AC}$

P: esta es una razón, ¿en este caso vale?

E: tres (3)

P: 3 por 3 le da 6

E: uuummm

P: Recuerde cuál deslizador varía.

E: [Explora moviendo el deslizador c]

P: ¿cuánto vale la razón de esos dos segmentos?

E: dos [escribe la igualdad de las razones de manera simbólica

P: eso es lo que se llama proporción

Pregunta 3.

E: [mueve los deslizadores]

P: ¿entonces que función hace cada deslizador ´´ a´´?

E: varia la razón entre $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$.

P: pero ¿Cómo son los *triángulos*?

E: son semejantes

P: ¿y al mover el otro deslizador (´´ c´´)?

E: varia la razón entre $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$

P: ¿y el otro?

E: varia la razón general de los *triángulos*

P: ¿Cómo siguen siendo los *triángulos*?

E: semejantes

P: listo¡ entonces explique qué pasa al mover los deslizadores

Pregunta 4.

P: escriba un texto, como si le explicaras a un compañero

E: [empieza a escribir]

P: me da el $\angle BAC$ ¿cierto?

E: sí

P: es necesario que me den ese ángulo o me pueden dar otro

E: el ángulo debe estar comprendido entre estos dos segmentos

E: [escribe]

4. **FICHA DE LA SITUACIÓN 4:**

Situación 4.

1. Explora el entorno e identifica qué objetos se pueden mover, que cambia y que permanece constante en las figura.
2. ¿Cuantos *triángulos* identificas en la figura?
3. ¿Qué observas con las razones entre los segmentos de los lados de los *triángulos*?
4. ¿Teniendo en cuenta los ángulos de los *triángulos* qué propiedades vez entre ellos?
5. ¿Son semejantes los *triángulos* identificados?, justifica su respuesta.

4.1 RESPUESTAS SITUACIÓN 4:

1. se mueven los vertices : C, A y D.
Cuando se mueven los vertices C y A, varia la amplitud del $\angle DBE$
y cuando se mueve el vertice D, cambia la longitud de los segmentos del triangulo DBE.
2. Identifico dos triangulos.
El triangulo DBE y el ABC.
3. $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{DB}} = \dfrac{8}{4}$ $8 \div 4 = \boxed{2} \rightarrow$ Razón. $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EB}} = 8 \div 4 = \boxed{2} \rightarrow$ Razón

$\dfrac{9}{5}$ $9 \div 5 = 1,8$ $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \dfrac{6}{3}$ $6 \div 3 = \boxed{2} \rightarrow$ Razón.

$\dfrac{8}{5}$ $8 \div 5 = 1,6$ $\dfrac{5}{3}$ $5 \div 3 = 1,\hat{6}$

R// Todas las Razones, estan a una misma proporción
4. Son ángulos congruentes, ya que son exactamente iguales.
5. Sí los triangulos son semejantes, porque sus ángulos son congruentes, y sos segmentos estan a una razón.

También son semejantes porque cumple con el criterio Lado-ángulo

$\dfrac{\overline{BA}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DE}}$ $\angle CAB = \angle EDB \rightarrow$ Son congruentes

Ángulo - lado - Ángulo.

$\angle EDB = \angle CAB$ $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{DB}}$ > Estos dos segmentos estan a una razon.
$\angle EBD = \angle CBA$
↓
Son congruentes.

Con estos criterios también se puede determinar que esos dos triangulos son semejantes.

Imagen 4

4.2 TRANSCRIPCIÓN DEL VIDEO SITUACIÓN 4:

Pregunta 1.

E: [la estudiante mueve los vértices de la figura]

P: la idea es que mueva el vértice D sobre la secuencia de esa línea

E: a¡

P: listo entonces ¿cuáles no se mueven?

E: los vértices B y E

P: ¿y cuáles se mueven?

E: se mueven los vértices A, B y C.

E: [la estudiante escribe]

P: la idea es empezar a mover y mirar qué varia

P: ¿cuándo usted mueve a mire que cambia?

E: entonces sería la amplitud de este ángulo y [señala el ángulo]

E: $\angle DBE$

E: [mueve el vértice C]

E: varía el mismo

P: ¿y cuando mueve D?

E: [señala]

E: la razón

P: ¿la razón?

E: no, la medida de los segmentos

Pregunta 2.

E: Uno

E: [mueve el vértice C]

P: ¿Cuántos *triángulos* sigue viendo ahí?

E: haaaaa….dos.

E: Los *triángulos* DBE Y ABC

Pregunta 3.

E: [mueve el vértice C]

P: Lo importante es identificar los segmentos de los *triángulos*.

P: ¿Del triángulo café cuales son los segmentos?

E: $\overline{DB}$, $\overline{EB}$ y $\overline{DE}$

P: ¿y le dan el valor numérico?

E: Si $3{,}2$ y 3.

P: ¿y del grande?

E: [mueve el vértice C y D]

E: $7{,}7$ y 5.

P: ¿Qué observas con las razones entre los segmentos de los lados de los *triángulos*?

E: Que son iguales.

P: Lo fundamental es determinar las razones.

P: ¿Quiere hacerlo de estas figuras o de otra?

P: Recuerde que usted puede mover eso y trabajar con los números que quiera.

E: [mueve el vértice C y D]

P: ¿Quiére hacerlo de ahí?

E: sí

E: hago la razón $\overline{DB}$ y $\overline{BA}$

P: ¿Qué va en el numerador?

E: $\overline{DB}$

P: Recuerde lo que paso en la situación anterior, pero listo hágalo.

E: [Empieza a escribir]

E: haaaaa…..no, no

E: $\overline{BA}$ sobre $\overline{DB}$, ocho sobre cuatro

P: ¿La razón es?

E: 2

P: listo aquí ya encontró una

E: [Empieza a escribir]

E: las razones son iguales, están a la misma proporción.

P: ¿Si tú mueves los vértices, sigue pasando lo mismo?

E: [mueve el vértice A y D]

E: yo creo

P: No es necesario que lo haga con todos, hágalo ahí.

E: [Empieza a escribir]

P: Comprobemos a ver si se cumple.

E: 9 sobre 5.

E: [Empieza a escribir]

E: 1.8

P. miremos el otro.

E: [Empieza a escribir]

E: 1.6

E: y 5 sobre 3.

E: [Empieza a escribir]

E: uno, punto seis periódicos.

P: ¿Las razones son iguales?

E: Le explíco, el software nosotros lo determinamos para trabajar las longitudes con números enteros, aunque realmente la longitud puede tomar valores decimales, es por eso que en este caso tenemos 1.8, 1.6 y 1.6. Por tanto aproximamos a un número.

P: ¿Qué puedes concluir?

E: Que las razones son iguale.

Pregunta 4.

E: [mueve el vértice A y D]

P: ¿Cuántos ángulos ves ahí?

E: Cinco y estos son iguales

E: [señala los ángulos iguales]

E: [Empieza a escribir]

Pregunta 5.

P: La idea es que usted a partir de las situaciones anteriores pueda determinar esto.

E: [Mueve el vértice A]

E: Si

P: ¿porqué dices que son semejantes teniendo en cuenta lo que se ha trabajado?

E: [Empieza a escribir]

E: porque son iguales, tienen diferente tamaño y están a una razón.

P. ¿Tú miraste los segmentos cierto?

E: si, están a la misma razón.

P: ¿y los ángulos?

E: Son congruentes.

P: Teniendo en cuenta lo que has hecho que puedes concluir.

E: Ha ya.

E: [Empieza a escribir]

P: listo pero de lo que se trabajó en las situaciones anteriores se puede aplicar ahí para determinar la semejanza.

E: Pero los criterios no los puedo aplicar.

E: [señala la pantalla]

E: bueno si, lado-ángulo-lado.

P: ¿En qué parte?

E: [señala la pantalla]

E: aquí, porque los ángulos congruentes están en los lados proporcionales.

P: Listo, hace ese y hace el otro criterio.

[Empieza a escribir]

P: Miremos el otro criterio.

E: ángulo- lado- ángulo.

P: ¿Que ángulos va a considerar como congruentes?

E: [señala la pantalla]

E: Estos dos ángulos.

P: ¿y el lado?

E: debe de estar comprendido entre ellos.

P: Listo entonces nombre los ángulos que va a considerar.

E: [Empieza a escribir]