



**LAS INECUACIONES LINEALES EN LA ESCUELA: ALGUNAS REFLEXIONES
SOBRE SU ENSEÑANZA A PARTIR DE LA IDENTIFICACIÓN DE DIFICULTADES Y
ERRORES EN SU APRENDIZAJE**

MONICA HEREDIA AGUIRRE

Código 200839438

MAIRA ALEJANDRA PALACIOS ARCE

Código 200841336

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
AREA DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
Santiago de Cali, Octubre 2014



**LAS INECUACIONES LINEALES EN LA ESCUELA: ALGUNAS REFLEXIONES
SOBRE SU ENSEÑANZA A PARTIR DE LA IDENTIFICACIÓN DE DIFICULTADES Y
ERRORES EN SU APRENDIZAJE**

MONICA HEREDIA AGUIRRE

Código 200839438

MAIRA ALEJANDRA PALACIOS ARCE

Código 200841336

Requisito parcial para optar el título de licenciadas en Matemáticas y Física

Asesora

MG. LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO

Profesora del Área de Educación Matemática

Instituto de Educación y Pedagogía

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

AREA DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Santiago de Cali, Octubre 2014



Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

- Tenga en cuenta:
1. Marque con una X la opción escogida.
 2. diligencie el formato con una letra legible.

Título del Trabajo:	Las innovaciones lineales en la Escuela: Algunas Reflexiones sobre el aprendizaje a partir de la identificación de dificultades y errores en el aprendizaje					
Se trata de:	Proyecto <input type="checkbox"/>	Informe Final <input checked="" type="checkbox"/>				
Director:	Ligia Amparo Torres R.					
1er Evaluador:	Maizeta Pedraza					
2do Evaluador:	Fabian Porras Torres					
Fecha y Hora	Año: 2014	Mes: 10	Día: 14	Hora: 5 p.m.		
Estudiantes						
Nombres y Apellidos completos		Código		Programa Académico		
Mónica Heredia Aguirre		200839438		3487		
Mayra Alejandra Palacio		200841336		3487		

Evaluación					
Aprobado	<input checked="" type="checkbox"/>	Meritorio	<input type="checkbox"/>	Laureado	<input type="checkbox"/>
Aprobado con recomendaciones	<input type="checkbox"/>	No Aprobado	<input type="checkbox"/>	Incompleto	<input type="checkbox"/>
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de _____ (máximo un mes) ante:					
Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	
En el caso que el Informe Final se considere Incompleto , se da un plazo de máximo de _____ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:					
Año:	Mes:	Día:	Hora:		
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).					

Firmas:		
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador



Observaciones: Recomendaciones: Razón del Desacuerdo - Alternativas:

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

- * El trabajo muestra una reflexión didáctica, curricular y matemática del estudio de las inecuaciones lineales en grado noveno, que responde a los elementos básicos de un Trabajo Investigativo en términos del planteamiento de un problema, unos objetivos, la aplicación de una prueba diagnóstica y un análisis de los resultados en términos de dificultades y errores encontrados.
- * Establecen una metodología adecuada para cumplir con cada uno de los tres objetivos que se proponen desarrollar en su trabajo de Grado, se aplica adecuadamente y se exponen muy bien los resultados.
- * Se deben aportar algunos aspectos relacionados con la redacción del planteamiento del problema, los antecedentes y la justificación, algunos citas y referencias.
- * Enumerar los axiomas de orden y referenciar los aspectos de algunos estudiantes que se exponen en el Trabajo.
- * Las conclusiones y reflexiones, aunque buenas, se quedan cortas en cantidad. Podría concluirse más, incluso ^{se} considera que se pueden desarrollar otros análisis para producir un buen artículo para posible publicación.

Director del Trabajo de Grado

1er Evaluador

2do Evaluador



LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo No autorizo

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la **Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia** cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/> y que admite conocer.

Si autorizo No autorizo

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala¹:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Las inecuaciones lineales en la escuela: Algunas reflexiones sobre su enseñanza a partir de la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje

Autores:

Nombre: Monica Heredia Aguirre Firma: Monica Heredia
C.C.

Nombre: Maira Alejandra Palacios Arce Firma: Maira Palacios
C.C. 1144.055.591

Fecha: 16 / octubre / 2014

¹ Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

AGRADECIMIENTOS

Empezaré por dar gracias a Dios antes que nada, por haberme dado la fortaleza y sabiduría para culminar con éxito esta etapa de mi vida.

A mi madre Ángela por el amor, por ser el apoyo más grande durante toda mi vida y creer en mí y en mis sueños. Gracias a sus enseñanzas y dedicación he crecido como una persona íntegra y me siento afortunada por tener la mejor madre del mundo.

A mi esposo Macgguiver por su paciencia, comprensión y bondad me inspira a ser mejor para él, le agradezco por estar siempre a mi lado incondicionalmente y compartir tantos momentos llenos de amor al lado de nuestra hija Sara Valentina.

A nuestra tutora Ligia Amparo Torres por hacer posible la realización de este trabajo, por su paciencia tiempo y dedicación.

A mi familia por apoyarme y animarme a lograr este sueño que se está haciendo realidad.

Monica Heredia Aguirre

Agradezco a Dios por cada nuevo amanecer, por la fortaleza que me ha dado en cada una de las circunstancias, y ayudarme a alcanzar este logro de mi vida.

Ante todo, quiero agradecer a mis padres Gonzalo y Mari por apoyarme, ellos son la base de la persona que soy, porque gracias a su cariño y compañía he llegado a realizar uno de los anhelos más grandes de mi vida, terminar mis estudios profesionales.

A nuestra tutora Ligia Amparo Torres, le agradezco infinitamente por su paciencia, por su dedicación y por brindarme la oportunidad de aprender de su experiencia.

A Andrés Taborda por ofrecerme su amor incondicional, que con el devenir del tiempo se ha convertido en alguien muy especial en mi vida, espero poder seguir compartiendo sueños y luchas a su lado.

A toda mi familia, gracias por su apoyo y ánimo en el transcurso de toda mi carrera.

Maira Alejandra Palacios Arce

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	5
INTRODUCCIÓN.....	7
CAPITULO I:.....	8
ASPECTOS GENERALES DEL TRABAJO.....	8
1.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.....	8
1.2. OBJETIVOS.....	11
1.2.1. Objetivo general.....	11
1.2.2. Objetivos específicos.....	11
1.3. JUSTIFICACIÓN.....	12
1.4. ANTECEDENTES.....	14
CAPITULO II:.....	18
MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA.....	18
2.1. PERSPECTIVA CURRICULAR.....	18
2.2. PERSPECTIVA DIDÁCTICA.....	22
2.2.1. Errores y dificultades en el Álgebra.....	23
2.2.2. Errores y dificultades en el aprendizaje de las inecuaciones.....	26
2.2.3. Prueba diagnóstica.....	28
2.3. PERSPECTIVA MATEMÁTICA.....	29
2.3.1. Axiomas de orden.....	29
2.3.2. Inecuación.....	31
CAPITULO III:.....	34
LAS INECUACIONES LINEALES EN LA ESCUELA.....	34
3.1. SOBRE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA.....	35
3.1.1. Diseño.....	35
3.1.2. La prueba.....	36
3.1.3. Análisis preliminar.....	41
3.2. IMPLEMENTACIÓN DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA.....	46
3.2.1. Metodología de la implementación.....	46
3.2.2. Población.....	46
3.3. RESULTADOS Y ANALISIS DE RESULTADOS: Prueba I y Prueba II.....	48

3.3.1. Prueba I.....	48
3.3.2. Prueba II.....	66
3.4. ALGUNAS CONCLUSIONES: PRUEBAS I y II.....	76
CAPITULO IV:	78
CONCLUSIONES GENERALES Y ALGUNAS REFLEXIONES DIDÁCTICAS	78
4.1. CONCLUSIONES GENERALES.....	79
4.2. ALGUNAS REFLEXIONES.....	82
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Notación de intervalo	32
Tabla 2. Análisis a preliminar, Prueba I	44
Tabla 3. Análisis a preliminar, Prueba II	45
Tabla 4. Tipos de respuesta Pregunta 1, Prueba I	48
Tabla 5. Tipos de respuesta Pregunta 2 ítem a, Prueba I	50
Tabla 6. Tipos de respuesta Pregunta 2 ítem b, Prueba I	51
Tabla 7. Tipos de respuesta Pregunta 3 ítem a, Prueba I	52
Tabla 8. Tipos de respuesta Pregunta 3 ítem b, Prueba I	53
Tabla 9. Tipos de respuesta Pregunta 4, Prueba I	55
Tabla 10. Tipos de respuesta Pregunta 5, Prueba I	56
Tabla 11. Tipos de respuesta Pregunta 6, Prueba I	57
Tabla 12. Tipos de respuesta Pregunta 7, prueba I.....	58
Tabla 13. Tipos de respuesta Pregunta 8.....	61
Tabla 14. Tipos de respuesta Pregunta 9.....	63
Tabla 15. Tipos de respuesta Pregunta 10, Prueba I	64
Tabla 16. Tipos de respuestas Pregunta 1 ítem a, Prueba II.....	66
Tabla 17. Tipos de respuesta Pregunta 1 ítem b, Prueba II	66
Tabla 18. Tipos de respuesta Pregunta 1 ítem c, Prueba II	67
Tabla 19. Tipos de respuesta Pregunta 1 ítem d, prueba II.....	67
Tabla 20. Tipos de respuesta Pregunta 2, Prueba II	69
Tabla 21. Tipos de respuesta Pregunta 3, Prueba II	70
Tabla 22. Tipos de respuesta Pregunta 4, Prueba II	72
Tabla 23. Tipos de respuesta Pregunta 5, Prueba II	73
Tabla 24. Tipos de respuesta Pregunta 6, ítem a, Prueba II	74
Tabla 25. Tipos de respuesta Pregunta 6, ítem b, Prueba II	75

INDICE DE ILUSTACIONES

Ilustración 1. Coherencia vertical y horizontal	22
Ilustración 2. Ejemplo de respuesta, pregunta 2 ítem b.	51
Ilustración 3. Ejemplo de respuesta, pregunta 7.....	59
Ilustración 4. Ejemplo de respuesta, pregunta 9.....	63
Ilustración 5. Ejemplo de respuesta, pregunta 2.....	70
Ilustración 6. Ejemplo de respuesta, pregunta 3.....	71

RESUMEN

Este trabajo presenta algunas reflexiones y elementos conceptuales y metodológicos para posibles propuestas didácticas hacia maestros en formación y en ejercicio, en relación a la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales.

Para ello y con el propósito de dar cuenta de ciertas dificultades y errores en la enseñanza y aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales presentes en los estudiantes de grado 9° de la fundación educativa Santa Isabel de Hungría de la ciudad de Santiago de Cali, se diseñó una prueba diagnóstica que articula aspectos curriculares, didácticos y principalmente matemáticos, a través de la cual se trata de caracterizar las dificultades y errores más comunes en ellos, teniendo como referente las diferentes perspectivas que se exponen en el marco teórico, de autores como Santos(2010), Rico(1995), Socas(1997), entre otros.

En el análisis de los resultados de la prueba se evidenciaron dificultades en el proceso de solución de las inecuaciones lineales, puesto que no se manifiestan explícitamente las propiedades de las desigualdades, resolviendo éstas de una manera escolarizada haciendo uso de la trasposición de términos, también se evidencia que la mayoría de los estudiantes se limitan a despejar la variable usando las mismas técnicas de las ecuaciones, poniendo de manifiesto que el signo tiene poco contenido semántico, además en el paso de enunciados en lenguaje natural a una representación algebraica en lenguaje simbólico se presentaron dificultades comunes en los estudiantes; sin embargo se observó la facilidad para interpretar los conjunto solución de las inecuaciones y su representación en diferentes registros.

En esta dirección, este trabajo hace aportes a la reflexión de la educación matemática en Colombia, sobre el desarrollo del pensamiento variacional y numérico, para potencializar el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales además se muestra la importancia de incluir explícitamente dicho contenido matemático en el currículo de la educación matemática.

Palabras claves: Inecuaciones lineales, desigualdades, dificultades, errores, prueba diagnóstica, conversión, tratamiento.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se enmarca en el campo de la educación matemática el cual se centraliza en la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales. Para ello se parte de distintas investigaciones realizadas en la problemáticas en mención, se encontraron fuertes dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión del concepto de desigualdades e inecuaciones lineales, tales como: los cambios de registro de representación, la comprensión y el tratamiento que se les da a las inecuaciones lineales y a los conjuntos de solución. Por lo anterior se propone como objetivo fundamental de este trabajo aportar algunas reflexiones didácticas y elementos conceptuales y metodológicos para propuestas didácticas para la enseñanza y aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales en la escuela.

En el CAPÍTULO 1 se exponen los aspectos generales, como lo son: la presentación y justificación del problema, los objetivos y antecedentes involucrados en el presente trabajo. En el CAPÍTULO 2 se establecen los referentes teóricos, de tipo matemático, curricular y didáctica que encamina dicha problemática.

El CAPÍTULO 3 se centra en la presentación de la prueba diagnóstica realizada a estudiantes de la Fundación Educativas Santa Isabel de Hungría de la ciudad de Cali. También se exponen la implementación de dicha prueba junto con el análisis de los resultados obtenidos. Finalmente se dan algunas conclusiones entorno a la aplicación de la prueba diagnóstica.

Por último en el CAPÍTULO 4, se mencionan algunas reflexiones didácticas sobre la enseñanza de las desigualdades e inecuaciones lineales a partir de la identificación de las dificultades y errores en su aprendizaje, y finalmente se presenta la bibliografía, donde se encuentran las referencias de todos los autores y textos que han servido como fundamentación teórica para la realización del presente trabajo.

CAPITULO I:

ASPECTOS GENERALES DEL TRABAJO

En este capítulo se presenta como punto de partida la problemática en el aprendizaje de las Inecuaciones Lineales, la cual, valida y conforma un amplio campo de estudio en la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar. También se muestra el objetivo general y objetivos específicos, la justificación de la problemática, y los antecedentes de la misma, los cuales determinan los aspectos de importancia para el desarrollo del trabajo.

1.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En la Educación Matemática como campo de investigación, es objeto de estudio los fenómenos y problemas asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general y del álgebra en particular. Algunas de éstas investigaciones y estudios centran la atención en la caracterización y el origen de las dificultades y errores que presentan los estudiantes a la hora de aprender y usar ciertos objetos matemáticos. Al respecto, Socas (1997) presenta diferentes orígenes de dificultades, abordándolas desde varias perspectivas: el estudiante, el saber, el docente y la institución. Además considera el error más allá de la ausencia de conocimiento, como la presencia en el estudiante de un esquema cognitivo incorrecto y los clasifica en tres ejes como, los errores que tienen su origen en el obstáculo, errores que tienen su origen en ausencia de sentido, errores que tienen origen en actitudes afectivas y emocionales. De otra parte especifica los errores que presentan los estudiantes en álgebra. En este último aspecto este trabajo centrará su atención.

Con relación a los errores que tienen su origen en la ausencia de sentido describe los errores del álgebra que tiene origen en la aritmética, errores de procedimiento y los errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. En éstas dos últimas etapas se pueden ubicar los errores que cometen los estudiantes al resolver inecuaciones lineales en la escuela, aspecto que interesa trabajar en esta propuesta de trabajo.

Otros autores redimensionan el papel que juega los errores en la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Por ejemplo, Rico (1995) plantea los errores como datos objetivos que hacen parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, además los considera como un organizador y componente de la propuesta didáctica para la enseñanza del álgebra, al igual los expone como parte del conocimiento. Para esto realiza el análisis de las causas y la clasificación de errores, con base a la categorización de autores como Davis, Radatz, y otros. En este sentido, dicho estudio es una referencia importante para abordar el trabajo a realizar, pues aquí se pretende identificar y caracterizar las dificultades y errores que se evidencian en el aprendizaje del Álgebra, para el caso de las inecuaciones lineales, con el fin de enriquecer y contribuir al aprendizaje de éstas.

También se reporta algunas investigaciones como la de Blanco (2004), Barbosa (2003), Borello (2010), Moraleda (2010), entre otros, en las cuales se describen y analizan algunos errores y dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales. Dificultades en el proceso de convertir un enunciado verbal a una expresión matemática; dificultades en los procedimientos propios de la aritmética; dificultades para establecer diferencias entre las ecuaciones e inecuaciones, y el tratamiento que se les hace a las mismas; dificultades en la interpretación de la solución de las inecuaciones y dificultades en comprender y ayudarse de la representación gráfica de dichas soluciones.

De lo anterior se puede afirmar que son notables las dificultades en este contenido matemático, pues intervienen saberes matemáticos previos, que al no estar interiorizados correctamente dificultan el aprendizaje del nuevo saber. Tal es el caso de los procesos aritméticos o algebraicos elementales, las propiedades y relaciones de orden de los números reales, entre otros, que repercutirán en la conceptualización y solución de las inecuaciones lineales.

Además se encuentran errores frecuentemente en la resolución de inecuaciones, ya que el tratamiento que se les da a estas, es asimilado con los métodos de solución de

las ecuaciones; es decir, realizan los mismos procedimientos, no establecen diferencias entre ambos conceptos. Esto debido a que interpretan de manera superficial el concepto de inecuación y no distinguen las reglas que rigen las desigualdades.

Atendiendo a esta problemática, en éste trabajo se pretende identificar las dificultades y errores en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales para aportar propuestas y reflexiones didácticas al mejoramiento del aprendizaje de las mismas. Por lo tanto este trabajo interesa responder a la siguiente pregunta:

¿Qué reflexiones didácticas, elementos conceptuales y metodológicos se pueden aportar a la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales en la escuela a partir de la aplicación de una prueba diagnóstica que permita la identificación de dificultades y errores que presentan los estudiantes de grado noveno de Educación Básica?

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo general

Aportar algunas reflexiones didácticas, elementos conceptuales y metodológicos para la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales en la escuela, a partir de la aplicación de una prueba diagnóstica que permita la identificación de dificultades y errores que presentan los estudiantes de grado noveno de Educación Básica, con relación a la solución de desigualdades e inecuaciones lineales.

1.2.2. Objetivos específicos

- Articular en una prueba diagnóstica enfoques documentados sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales en la escuela.
- Caracterizar dificultades y errores en estudiantes de grado noveno de Educación Básica sobre las desigualdades e inecuaciones lineales a través de una prueba diagnóstica.
- Aportar algunas reflexiones y propuestas didácticas a maestros en formación y en ejercicio a través del análisis de las dificultades y errores en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales.

1.3. JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo indaga sobre las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales, por medio de una prueba diagnóstica con el fin de aportar reflexiones y propuestas didácticas en torno a la enseñanza y aprendizaje de estos objetos matemáticos.

Se espera que este trabajo avance en la reflexión que investigaciones como las de Blanco (2004), Velasco (2011) han realizado a nivel nacional e internacional sobre esta problemática, pues podría considerarse como validación de aspectos importantes que estos han mostrado en relación a las dificultades y errores en la enseñanza y aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales.

Otro aspecto importante, tiene que ver con la pertinencia de esta temática en la escuela, pues, aunque no es explícita en las propuestas curriculares colombianas, si aparece implícita en el trabajo que se propone de las ecuaciones. Es decir que las ecuaciones como relaciones de equivalencia y las inecuaciones como relaciones de orden son objeto en el trabajo para el desarrollo del pensamiento numérico y variacional. Además, dentro del campo numérico se evidencia en la resolución y formulación de problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las distintas formas de la desigualdad, en la estructura de orden de los números reales y desde el pensamiento variacional, permite al estudiante realizar el estudio de patrones, la noción, el uso comprensivo y los diferentes significados de la variable, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas.

De otra parte las desigualdades e inecuaciones tienen gran aplicación en varias áreas relacionadas con las Matemáticas, como la Economía, Análisis Matemático, entre otras, también son necesarias para la comprensión y desarrollo de dos operaciones cognitivas como la visualización y la interpretación gráfica.

De acuerdo con lo anterior este trabajo aportaría a dilucidar algunos aspectos de la enseñanza de las desigualdades e inecuaciones lineales, ya que esta se hace compleja al relacionar aspectos numéricos, algebraicos y analíticos. De esta manera lograr generar en los estudiantes el desarrollo y apropiación del pensamiento numérico y variacional, orientado hacia las desigualdades e inecuaciones lineales.

Igualmente, es importante resaltar que este trabajo aporta a la formación investigativa de las autoras, porque se realizará una indagación a estudiantes de grado noveno, a través de una prueba diagnóstica que se formula a partir de la documentación de investigaciones realizadas al respecto, además se analizarán los resultados obtenidos y de acuerdo a esto se plantearán algunas alternativas de solución frente a las dificultades que se identifiquen en el análisis. Convirtiéndose así en una práctica investigativa.

Con base en lo expuesto anteriormente se pretende realizar algunos aportes para maestros en formación y ejercicio, que contribuyan con elementos para la construcción de las prácticas de enseñanza con relación a las desigualdades e inecuaciones lineales.

1.4. ANTECEDENTES

En la realización de este trabajo se encontraron investigaciones que caracterizan los problemas en la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales. Dentro de estas investigaciones se encuentra las de Rico (1995) y Socas (1997) quienes muestran a nivel general las dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas, y en particular, en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales se encuentran las investigaciones de Blanco (2004), Barbosa (2003), Boero (1998), Santos (2010), Borello (2012), Moraleda (2010), y Velasco (2011) que se expondrán a continuación:

- Tal como lo menciona Rico (1995) los errores se consideran como las respuestas incorrectas a cuestiones matemáticas planteados a los estudiantes, es por esto que los errores hacen parte del aprendizaje de las Matemáticas. Debido a que los errores aparecen inmersos en el aprendizaje de las matemáticas y a su preocupación por superarlos, estos han sido objeto de estudio en la Educación Matemática, proponiendo teorías que ayuden a la justificación del origen y las causas de tales errores. Frente a esto Rico (1995) presenta la clasificación de errores que realizan diferentes autores, como Radazt, quien realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales:
 - » *Errores debido a dificultades de lenguaje*
 - » *Errores debidos a la dificultad de obtener información espacial*
 - » *Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos*
 - » *Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento*
 - » *Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.*

- Esta clasificación de errores se articula con la presentación realizada por Socas (1997), quien muestra la clasificación de las causas principales de los errores en el aprendizaje del álgebra:
 - » Errores que tienen su origen en un obstáculo, tales como la falta de clausura, es decir, los estudiantes ven las expresiones algebraicas como enunciados que son algunas veces incompletos.
 - » Errores que tienen su origen en una ausencia de significado; estos pueden tener dos procedencias distintas: Complejidad de los objetos y de los procesos de pensamiento algebraico, tales como: Errores en el álgebra que tienen su origen en la aritmética. Errores de procedimiento. Errores en álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra; son de naturaleza diversa tales como: falta de concentración, bloqueos, olvidos, omisiones, creencias, etc.

- Blanco (2004) en su investigación muestra por medio de un cuestionario describe y analiza algunos errores y dificultades en el aprendizaje de las inecuaciones y con ellos mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las mismas. Es de notar que dicha investigación es de carácter descriptivo. El artículo en mención se titula dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. La problemática fundamental caracterizada por ésta investigación, se asocia con la incapacidad que tienen los estudiantes al momento de estudiar el concepto de desigualdad e inecuación lineal, ya que los estudiantes caen en errores de diferentes tipos, ya sean algorítmicos, relaciones entre propiedades indebidas, etc.

- Además, Barbosa (2003), manifiesta que la enseñanza de las inecuaciones debe hacerse teniendo en cuenta diferentes perspectivas, no solo se debe involucrar la interpretación y la resolución algebraica sino procesos de resoluciones graficas que favorezcan el desarrollo de dicho concepto. Pues el manejo de

diversos sistemas de representación destacan diferentes características o elementos del objeto matemático que son más evidentes en un registro que en otro, logran que el conocimiento de éste objeto sea más completo. Además expone los prerrequisitos básicos para el entendimiento del concepto de inecuación.

- Por otro lado, Boero (1998) expone que las enseñanzas de las inecuaciones desde las técnicas tradicionales no aportan al desarrollo de tal concepto, además los docentes no proporcionan la importancia a las desigualdades e inecuaciones dentro de la enseñanza de las matemáticas.
- Además, Santos (2010) se cuestiona acerca de la enseñanza de las inecuaciones, pues éstas solo se desarrollan en términos teóricos y mecánicos desfavoreciendo el uso de las inecuaciones en la comprensión de problemas de la vida cotidiana.

Con respecto a las investigaciones a nivel local, se encuentran los trabajos realizados por:

- Velasco (2011), en donde se estudia la problemática de las unidades cognitivas pertinentes en el aprendizaje de las inecuaciones lineales con valor absoluto desde una perspectiva plurirregistro. Esta problemática surge al observar el porcentaje tan alto de reprobación que existe a nivel universitario en la región, en los dos primeros cursos de matemáticas, aquí se diseña un conjunto de situaciones, las cuales tuvieron como propósito la identificación y puesta en correspondencia de las variables visuales y las variables simbólicas.
- Otra investigación encontrada a nivel local, es el trabajo realizado por Montenegro & Cruz (2010), en donde realizan una aproximación didáctica al tratamiento escolar de las inecuaciones lineales, a partir de la caracterización de las concepciones y creencias de estudiantes de noveno grado de la Educación Básica.

Es por esto que se considera pertinente abordar esta problemática, haciendo una prueba diagnóstica que permita la identificación y caracterización de las dificultades y errores presentes en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. En este sentido se aportan elementos que favorezcan el aprendizaje de las mismas.

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

En ese apartado se exhiben los elementos teóricos que sustentan el desarrollo de éste trabajo sobre las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje y enseñanza de las desigualdades e inecuaciones lineales, para ello se exponen tres perspectivas: la perspectiva curricular, la perspectiva didáctica y la perspectiva matemática.

2.1. PERSPECTIVA CURRICULAR

En esta dimensión se toman como referencia los aportes de los documentos oficiales que rigen los aspectos curriculares en las Instituciones Educativas de Colombia, estos son, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). Los Lineamientos Curriculares son una propuesta del Ministerio de Educación Nacional que plantean criterios para orientar el currículo y los enfoques que debería tener la enseñanza de las matemáticas, en las Instituciones Educativas y en el aula de matemáticas, estas propuestas se articulan en tres ejes fundamentales del currículo que son: los Conocimientos Básicos, los Procesos Generales, y los Contextos.

Los Conocimientos Básicos como primer eje articulador son considerados como los conceptos teóricos que conforman el contenido matemático en la escuela, los cuales se asocian con el qué hay que enseñar y por qué, además se relacionan con el desarrollo de los procedimientos lógicos de las matemáticas. Por otro lado se refiere a los aspectos que desarrolla el pensamiento matemático mediante el uso de los sistemas y estructuras matemáticas. Entre las expresiones del pensamiento matemático se encuentran el pensamiento numérico, el pensamiento espacial, el pensamiento métrico, el pensamiento aleatorio y el pensamiento variacional.

Para efectos del presente trabajo y teniendo en cuenta los diferentes tipos de pensamiento mencionados anteriormente, las desigualdades e inecuaciones lineales se enmarcan dentro del pensamiento numérico y el pensamiento variacional. Debido a que el primero permite la comprensión de las relaciones entre los números, sus diferentes representaciones, el uso de los números y las operaciones en la resolución de problemas, y el segundo puesto que promueve la descripción de fenómenos de cambio, procedimientos asociados a la variación lineal, entre otros.

Por una parte el pensamiento numérico, es la comprensión y habilidad que tiene los estudiantes en el manejo de los números y las operaciones. Éste se obtiene progresivamente y se va desarrollando a medida que los estudiantes se enfrentan al uso de los números en contextos significativos, particularmente es fundamental la manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo. Además, el uso de las operaciones y de los números en la formulación y resolución de problemas, ayuda a determinar si la solución debe ser exacta o aproximada y también si los resultados de los datos del problema son o no razonables.

Por otro lado, el pensamiento variacional corresponde a la facultad para estudiar fenómenos de cambio y variación, la identificación y caracterización de estos en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos. Éste centra su estudio en la variación y existe una relación con los demás pensamientos, pues la variación se logra observar en diferentes contextos, ya sean numéricos, espaciales, métricos. En el desarrollo del pensamiento variacional se encuentra inmerso diversos contenidos algebraicos tales como: las expresiones algebraicas que se componen entre igualdades y desigualdades, las cuales a su vez se componen de identidades y ecuaciones por un lado, y por el otro de inecuaciones.

De otra parte, los Procesos Generales, son los procesos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas, estos son: la resolución y planteamiento de problemas, el

razonamiento, la comunicación, la modelación, comparación y ejercitación de procedimientos.

Teniendo en cuenta que el presente trabajo pretende observar la manera en que los estudiantes entienden y manipulan las relaciones de orden en los ejercicios y problemas que involucran de desigualdades e inecuaciones lineales, se determina la resolución y planteamiento de problemas como eje para el análisis de las respuestas de algunos estudiantes frente a una prueba diagnóstica pues este es considerado como eje central de currículo de matemáticas, y como objeto inicial de la enseñanza, pues el desarrollo de éste da a los estudiantes confianza en el uso de las matemáticas. Sin embargo para que los estudiantes intenten resolver problemas, es necesario discutirlos en diferentes contextos. Éste es uno de los aspectos en donde se enfocará la prueba diagnóstica a realizar, pues en la prueba se presentaran actividades en las que se deban resolver problemas a través del planteamiento y tratamiento de inecuaciones lineales.

A su vez, la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos es el hacer cálculos correctamente, seguir instrucciones, utilizar correctamente la calculadora para efectuar operaciones, transformar expresiones algebraicas desde una forma a otra, es decir hacer tareas matemáticas que implican el manejo de procedimientos que faciliten aplicaciones de las matemáticas en la vida diaria. Para efectos de este trabajo se tendrán en cuenta los procedimientos analíticos, que tienen que ver con el álgebra, específicamente los procedimientos para resolver inecuaciones, tales como la identificación y aplicación de un método apropiado para llegar al resultado, y la transformación a través de manipulaciones algebraicas.

Teniendo en cuenta los diferentes procesos generales mencionados anteriormente, la caracterización de los errores y dificultades de las desigualdades e inecuaciones lineales se enmarcan dentro de los procesos de resolución y planteamiento de problemas y la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, pues, para el tratamiento del contenido matemático en cuestión, es necesario que los estudiantes

logren utilizar correctamente los procedimientos matemáticos, de manera que deben saber cuándo utilizarlos, cómo funcionan e interpretar de forma adecuada los resultados.

De acuerdo a lo expuesto en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), los contextos son considerados como los lugares del aprendizaje de las matemáticas en donde se construye y se le da sentido a algún contenido matemático, además a través de los contextos se relacionan los objetos matemáticos con actividades de la vida cotidiana, la institución educativa y otras ciencias. Así los contextos se pueden clasificar en tres grupos: El contexto inmediato, el contexto escolar y el contexto extraescolar.

Por lo anterior y teniendo en cuenta la investigación a realizar, los contextos que están involucradas en las situaciones de aprendizaje del concepto matemático tratado serán, el contexto escolar y el contexto extraescolar, ya que en las actividades propuestas en la prueba diagnóstica se ve implicada situaciones del entorno científico, particularmente en el contexto matemático.

Debido a la complejidad conceptual y la gradualidad del aprendizaje de las matemáticas se hace necesaria una organización de coherencia tanto vertical como horizontal. La coherencia vertical se da como la relación de un estándar con los estándares de otros grados en el mismo pensamiento, la coherencia horizontal es la relación de un estándar con estándares de otros pensamientos en el mismo grado. Frente a esto se ha escogido un estándar de grado 8° - 9° considerando el objeto de estudio (desigualdades e inecuaciones lineales), y se han seleccionado los estándares que hacen parte de la coherencia vertical y horizontal, como se muestra a continuación.

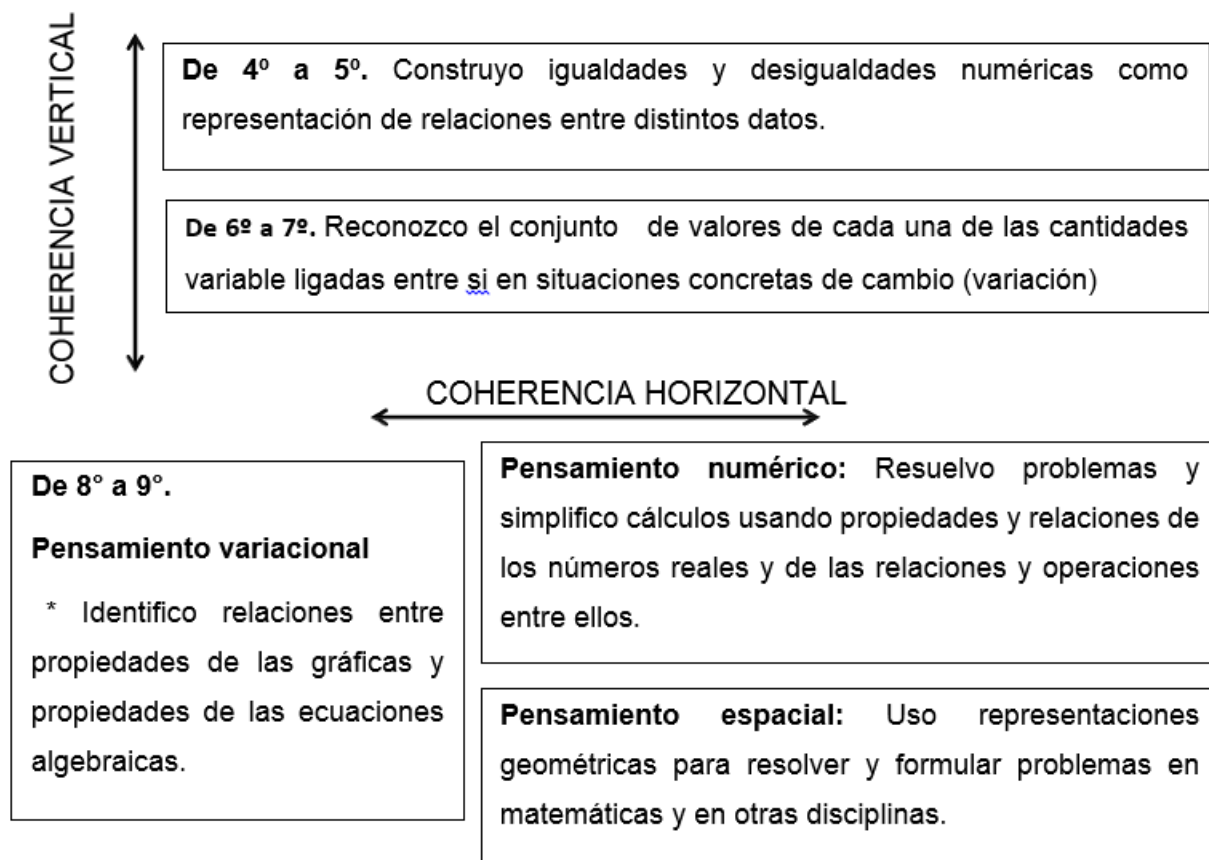


Ilustración 1. Coherencia vertical y horizontal

2.2. PERSPECTIVA DIDÁCTICA

Una investigación didáctica es fundamental para identificar aspectos relacionados al aprendizaje y enseñanza de un contenido matemático en el aula. Estos aspectos pueden plantearse como dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. Por lo anterior se tomaran como referencia las investigaciones realizadas por Socas (1997), Rico (1995) en cuanto a las dificultades y errores en el álgebra y Blanco (2004), Velasco (2011), Moraleda (2010), estos últimos exponen las dificultades y errores entorno a las desigualdades e inecuaciones lineales.

La presente propuesta surge a partir de las investigaciones realizadas por los autores mencionados anteriormente, en las cuales se logra observar la serie de dificultades y

errores que tienen los estudiantes al momento de enfrentarse al álgebra y particularmente de las desigualdades e inecuaciones lineales.

2.2.1. Errores y dificultades en el Álgebra

En el documento de Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria por Socas (1997) se clasifican las dificultades en el aprendizaje del álgebra de la siguiente manera:

Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas, dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, dificultades asociadas a los procesos de enseñanza, dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Inicialmente las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas se presentan debido a que los objetos matemáticos se comunican a través de los signos matemáticos y se comprenden por el lenguaje habitual, pero esto mismo tiende a confundir al estudiante ante conceptos que tienen diferentes significados en el contexto habitual y el contexto matemático.

Dentro de estas dificultades se pueden enmarcar los siguientes errores, clasificadas por Radatz y Movshovitz-Hadar, Zaslavsky O. & Inbar S. (citado en Rico, 1995):

- Errores debidos a dificultades de lenguaje, es decir la falta de comprensión de los textos matemáticos es causante de errores.
- Interpretación incorrecta del lenguaje, particularmente cuando se realiza un cambio de registro de representación, es decir pasar de lenguaje natural a una expresión matemática.

Continuando con dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático se puede decir, que el aspecto que ocasiona estas dificultades se centra en lo deductivo formal, pues el abandono de las demostraciones en la educación secundaria hace que el estudiante pierda la capacidad de seguir un argumento lógico.

Esta dificultad se traduce en los siguientes errores, presentados por Socas (1997):

- Errores que tienen su origen en una ausencia de significado; éstos se pueden diferenciar en tres etapas:
 - » Errores en el álgebra que tienen su origen en la aritmética, es decir, estos errores son consecuencia las dificultades que se presentan a la hora de llevar a cabo procesos algorítmicos.
 - » Errores de procedimiento, éstos se deben al mal uso de fórmulas o reglas conocidas que tratan de adaptarlas a alguna situación nueva; es decir, los alumnos generalizan procedimientos que son verdaderos en algunos casos.
 - » Errores de álgebra debidos a las caracterizaciones propias del lenguaje algebraico. Estos errores son propios del álgebra y más aún en el paso de la aritmética al álgebra.
- Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento, es decir, algunos estudiantes asocian de manera incorrecta procedimientos que no tiene relación con el contenido a tratar. Radatz (citado en Rico, 1995),
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes, éste tipo de errores es frecuente por aplicar incorrectamente estrategias de otra áreas.
- Inferencia no validas lógicamente. Aquí se incluyen errores producidos por un mal razonamiento.

- Teoremas o definiciones deformados. Esto se debe al mal uso y deformación de reglas o definiciones. Movshovitz-Hadar, Zaslavsky O. & Inbar S (como se citó en Rico, 1995)

Por otro lado, las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza, hace referencia a la institución educativa, al igual que con el currículo y con la forma de enseñar.

En cuanto a las dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los estudiantes, es fundamental que el docente conozca los estadios de desarrollo intelectual de éste y así asumir de la manera más adecuada las dificultades que presenten, diseñando material específico para superar dichas dificultades. En las cuales se incluyen los siguientes errores citados por Radatz y Movshovitz-Hadar, Zaslavsky O. & Inbar S (como se citó en Rico, 1995) respectivamente

- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial, para algunos estudiantes es difícil crear imágenes mentales de algunos contenidos matemáticos.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. Esto se relaciona con la mala utilización de los algoritmos y del mal aprendizaje de los conceptos básicos.
- Datos mal utilizados, hace referencia al mal uso, olvido, o inclusión de datos que no están asignados al problema.

Finalmente las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales, son ocasionadas por los sentimientos de miedo y tensión que tienen algunos estudiantes hacia las matemáticas, este sentimiento ocasiona bloqueos que afectan en la actividad matemática. Estas dificultades se asocian a los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra; son de naturaleza diversa tales

como: falta de concentración, bloqueos, olvidos, omisiones, creencias, etc. Socas (1997)

2.2.2. Errores y dificultades en el aprendizaje de las inecuaciones.

En el apartado anterior se ha enfocado en las dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra, ahora se centraran en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales, y para ello, se tomara como referencia, la investigación realizada por Blanco (2004), Velasco (2011), Barbosa (2003), Borrello (2012), Santos (2010), Moraleda (2010). Las dificultades más relevantes en los estudios de los autores mencionados anteriormente, se expondrán a continuación:

- Cambios de registro de representación; es decir pasar de un enunciado verbal a una expresión algebraica.

Al respecto, Duval (2006) presenta el proceso de conversión, el cual hace referencia a la transformación de un enunciado de lenguaje verbal al lenguaje algebraico. En este proceso se ven involucradas dos operaciones: primero, la escogencia de la incógnita y segundo la escritura de la ecuación, que en este caso se hablaría de inecuaciones.

En la primera fase, la escogencia de la incógnita lo que se pretende inicialmente es mediante un símbolo representar algunos de los objetos que ya estén designados en el enunciado y posteriormente redesignar los otros objetos en relación con la representación inicial; es decir, que el enunciado se logre “traducir” en términos de una sola variable; en esta primera fase, los estudiantes presentan una serie de dificultades:

Los errores concernientes a la «escogencia de la incógnita» son los que con mayor frecuencia captan la atención, en el orden lineal de las etapas de resolución clásicamente repetidas en los libros de texto.

Es importante tener presente que al momento de escoger la incógnita algunos estudiantes deben inicialmente realizar una buena comprensión del enunciado matemático.

La segunda operación es escribir la ecuación, la cual consiste en, después de haber encontrado una relación entre las cantidades conocidas y desconocidas, hacer una relación entre estas cantidades con respecto al enunciado dado; en ocasiones viene explícita la relación a utilizar; al igual que la primera operación, en ésta también se presentan dificultades en los estudiantes como las dificultades ligadas a las operaciones y a las de desplazamiento de términos que serán tratadas más adelante.

En el trabajo realizado por Moraleda (2010), se presentan las dificultades o errores presentes en la conversión de enunciados a desigualdades e inecuaciones, clasificando ésta como una dificultad de lenguaje: *Dificultad para expresar algebraicamente un enunciado del lenguaje natural*. Al respecto Blanco (2004), muestra en los resultados de su estudio que al pedir la conversión de un enunciado verbal al lenguaje algebraico, fueron bastantes los alumnos que llegaron a la inecuación esperada, más cuando se involucraron dobles desigualdades fueron serias las dificultades presentes en la conversión.

- La comprensión y el tratamiento que se les da a las inecuaciones lineales, ya que algunos estudiantes no establecen diferencias entre las ecuaciones lineales y las inecuaciones lineales.

Considerando esta dificultad que se ha encontrado frecuentemente en la resolución de inecuaciones, es que el tratamiento que se les da a las inecuaciones es como el de las ecuaciones, pues asimilan los métodos de solución de las inecuaciones como los de las ecuaciones, realizan los mismos procedimientos, no establecen diferencias entre ambos conceptos. Esto debido a que interpretan de manera superficial el concepto de inecuación, no distingue las reglas que rigen las desigualdades. En éste caso Borello (2010) menciona se debe colocar atención a la confusión que se presentan entre los

conceptos de ecuaciones y desigualdades pues se establecen analogías incorrectas. Al igual que Blanco (2004) menciona que muchos estudiantes no establecen diferencias entre los conceptos de ecuación e inecuación, tales como el signo de igualdad y desigualdad. Moraleda (2010) argumenta que la representación es fundamental para reconocer y diferenciar el nexo que hay entre las ecuaciones e inecuaciones lineales.

- La comprensión en los conjuntos de solución, es decir la interpretación que se le da al resultado de una inecuación lineal.

Esto representa dificultad para comprender el significado de la variable como intervalo, o en el caso de las dobles desigualdades como intervalos, aun cuando se ha realizado el tratamiento adecuado a la inecuación. Moraleda (2010) manifiesta la gran dificultad que tienen los estudiantes para expresar un mismo conjunto solución en sus distintas formas, también argumenta que los estudiantes no distinguen la región solución de una ecuación. Sin embargo Santos (2010) dice que el estudiantes logra reconocer la desigualdad estableciendo un intervalo para su solución pero se le dificultad la caracterización de abiertos y cerrados. Por otra parte Blanco (2004) menciona que la gran mayoría de los estudiantes dan correctamente la expresión pedida de una inecuación, pero no comprenden el significado de su solución, es decir el significado de intervalo.

2.2.3. Prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica o evaluación diagnóstica es un conjunto de situaciones de aprendizaje las cuales son planteadas para reconocer y estudiar las dificultades específicas del aprendizaje, que trata de determinar la naturaleza de las mismas. La prueba diagnóstica se debe realizar al inicio de cada unidad didáctica, sin embargo para analizar los errores y dificultades se hace necesario hacerla en el desarrollo o transcurso de la unidad didáctica (Socas, 1997).

Con respecto a lo anterior y teniendo en cuenta la presente propuesta, la prueba diagnóstica se toma como herramienta didáctica para la recolección de datos, la cual se entrega a 36 estudiantes de la Educación Media, con conocimientos previos entorno al contenido matemático en cuestión.

El presente trabajo se enmarca entre la investigación cualitativa y cuantitativa, puesto que no se pretende hacer un estudio estadístico exhaustivo de la prueba utilizada, ni tampoco un completo análisis cualitativo de la misma. Lo que se pretende es una descripción, caracterización y análisis de algunos de los principales errores y dificultades de los estudiantes, así como las causas de las cuales ellos se derivan.

La prueba diagnóstica está conformada por 16 preguntas tomando como referencia el cuestionario realizado por Blanco (2004) en su investigación, es decir, se replanteará dicho cuestionario y se enmarcarán aspectos relevantes en ésta propuesta.

2.3. PERSPECTIVA MATEMÁTICA

Para establecer la interpretación del objeto matemático, se presentan las definiciones y propiedades que fundamentan las desigualdades e inecuaciones lineales tomadas de diferentes textos, tales como: texto de Apóstol (1965), Zill (1992), entre otros.

2.3.1. Axiomas de orden

Este grupo de axiomas permiten la ordenación de los números reales, decidiendo si un número real es mayor o menor que otro. Se introducen aquí las propiedades de orden como un conjunto de axiomas, que definen a partir del concepto de número positivo los conceptos de mayor que o menor que.

Entre todos los números reales hay una colección de ellos que se denominan números reales positivos que satisfacen los tres axiomas siguientes:

Axioma 1: Si x y y son positivos, también lo son $x + y$ y xy

Axioma 2: Para cada número real $x \neq 0$, o x es positivo, o $-x$ es positivo, pero no ambos.

Axioma 3: El número cero no es positivo.

Ahora se pueden definir los símbolos $<$, $>$, \leq y \geq llamados respectivamente, menor que, mayor que, menor o igual que y mayor o igual que, de la manera siguiente:

- $x < y$ Significa que $y - x$ es positivo.
- $y > x$ Significa que $x < y$.
- $x \leq y$ Significa que $x < y$ o $x = y$
- $y \geq x$ Significa que $x \leq y$

Por lo tanto, se tiene que $x > 0$ si y solo si x es positivo. Si $x < 0$ se dice que x es negativo; si $x \geq 0$ se dice que x es no negativo. El par de desigualdades simultáneas $x < y$, $y < z$ se escriben frecuentemente en la forma más breve $x < y < z$; interpretaciones análogas se dan a las desigualdades compuestas.

- $x \leq y < z$
- $x < y \leq z$
- $x \leq y \leq z$

De los axiomas de orden se pueden deducir todas las reglas usuales de cálculo con desigualdades, las más importantes de las cuales se dan a continuación como teoremas.

Teorema 1: *Propiedad de tricotomía.* Para a y b numero reales cualesquiera se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a < b$, $a > b$, $a = b$.

Teorema 2: *Propiedad transitiva.* Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

Teorema 3: *Propiedad de la adición.* Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$

Teorema 4: Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$

Teorema 5: Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

Teorema 6: Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$

Teorema 7: $1 > 0$

2.3.2. Inecuación

Los axiomas de orden presentados anteriormente se refieren al concepto de desigualdad, el cual hace posible la organización del conjunto de los números reales por medio de relaciones de orden. Estas relaciones de orden permiten comparar expresiones algebraicas, lo que se conoce como Inecuaciones.

La solución de una inecuación, puede verse como la unión de los números reales que se encuentran en el dominio de la variable y que al reemplazar estos valores en la variable de la inecuación hace que la desigualdad obtenida se cumpla. Las inecuaciones que son objeto de interés para este trabajo son las Inecuaciones lineales (inecuaciones de primer grado).

Los enunciados que incluyen relaciones de orden tales como $3x - 7 > 5$ se llaman **inecuaciones**. Una **solución** de una inecuación es cualquier número que, cuando se lo sustituye por la variable, hace que el enunciado sea verdadero. Resolver una inecuación significa encontrar el conjunto de todos los números reales para los cuales el enunciado es verdadero. Se dice que dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones. Para resolver una inecuación se encuentra una inecuación equivalente con solución. Las siguientes operaciones dan como resultado inecuaciones equivalentes.

2.3.2.1. Inecuación Lineal

Cualquier inecuación que pueda escribirse de la forma $ax + b < 0$, con $a \neq 0$ donde a y b son números reales, se llama inecuación lineal en x . Si el símbolo $<$ en la ecuación anterior se reemplaza por $\geq, >, \leq$ la inecuación resultante también se llama

inecuación lineal. Se utilizan las operaciones anteriores para encontrar la solución de una inecuación lineal.

2.3.2.2. Inecuaciones simultáneas

La inecuación simultánea es una inecuación con desigualdad doble; Si $a < x < b$ entonces $a < x$ y $x < b$. Es decir, el conjunto solución es la intersección de los dos conjuntos solución: $S = \{x|x > a\} \cap \{x|x < b\}$

Para graficar un conjunto de número reales se oscurece los puntos en la línea de números reales que correspondan al conjunto dado utilizando inecuaciones básicas e inecuaciones simultáneas. Se puede describir ciertos conjuntos de números reales llamados intervalos. A estos intervalos corresponden una notación y terminología de intervalos especiales que se muestran en el siguiente cuadro.


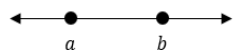
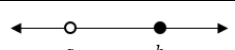
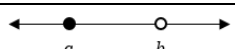
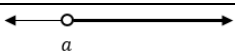
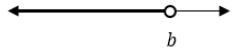
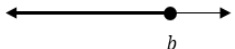
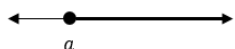
Intervalo	Notación de intervalo	Nombre	Gráfica
$\{x a < x < b\}$	(a, b)	Intervalo abierto	
$\{x a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	Intervalo cerrado	
$\{x a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Intervalo semiabierto	
$\{x a \leq x < b\}$	$[a, b)$	Intervalo semiabierto	
$\{x a < x\}$	(a, ∞)	Intervalo infinito	
$\{x x < b\}$	$(-\infty, b)$	Intervalo infinito	
$\{x x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	Intervalo infinito	
$\{x a \leq x\}$	$[a, \infty)$	Intervalo infinito	

Tabla 1. Notación de intervalo

En la tabla se utilizan los símbolos ∞ leído “infinito” y $-\infty$ leído “menos infinito”, para representar ciertos tipos de intervalos llamado **intervalos infinitos**. Estos símbolos no representan números reales. Nótese también que un círculo sin relleno indica que el punto final respectivo no se incluye en el intervalo, mientras que un círculo relleno indica que el punto final respectivo se incluye en el intervalo.

De acuerdo a todo lo anterior, esto permite el diseño de una prueba diagnóstica que indague desde diferentes perspectivas los aspectos involucrados en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales, para lograr evidenciar las dificultades y errores presentes en este proceso y aportar algunas reflexiones a partir del análisis de los resultados de la aplicación de la prueba.

CAPITULO III: LAS INECUACIONES LINEALES EN LA ESCUELA



En este capítulo se presentan aspectos fundamentales de la prueba diagnóstica, desde su diseño e implementación, hasta el análisis de los resultados obtenidos.

Inicialmente se realiza la descripción de los elementos que se tuvieron en cuenta para el diseño de la prueba, a partir de los enfoques documentados sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las Desigualdades e Inecuaciones Lineales en la escuela.

También se muestra el proceso de aplicación de ésta, los contenidos matemáticos y las expectativas de desempeño que se esperan por parte de los estudiantes frente a cada una de las situaciones planteadas. Además se exponen los resultados y el análisis de los resultados obtenidos.

3.1. SOBRE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

3.1.1. Diseño

El propósito de la prueba es indagar acerca las dificultades y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las Desigualdades e Inecuaciones Lineales. Para la elaboración de esta prueba diagnóstica se toma como referencia algunas dificultades y errores arrojadas por investigaciones como las de Socas (1997), Blanco (2004), entre otros, con el fin de evidenciar y validar los resultados obtenidos de éstas investigaciones. Los aspectos matemáticos que se involucran dentro de la prueba fueron seleccionados con base a lo descrito en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), y los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

Los aspectos matemáticos fundamentales que indaga la prueba son, la definición de desigualdad y la aplicación del concepto de desigualdad, la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico, la resolución de inecuaciones lineales con una incógnita aplicando la propiedad aditiva y multiplicativa de las desigualdades, solución de una inecuación lineal como desigualdad, intervalo o gráfica en la recta numérica. También se presentan situaciones en las que se debe plantear una inecuación que cumpla con una condición dada y la resolución de problemas a través de inecuaciones lineales.

La prueba diagnóstica se encuentra dividida en dos partes, a continuación se especifica el concepto al que alude cada una de las preguntas:

En la parte I de la prueba diagnóstica, las tres primeras preguntas involucran la definición de desigualdad, la aplicación del concepto de desigualdad y la traducción de enunciados en lenguaje común a expresiones simbólicas. La cuarta pregunta trata el concepto de inecuación lineal de primer grado a través de su solución.

En la quinta y sexta pregunta se indaga por el manejo de las propiedades de relación de orden, para la resolución de inecuaciones lineales. En la séptima pregunta se

presenta una inecuación lineal a la cual se le debe dar solución mediante procesos en los que se produzca una inecuación equivalente y así interpretar la solución como un intervalo.

En la octava pregunta se indaga acerca del manejo que se le da a la propiedad multiplicativa de las desigualdades: dados números reales cualesquiera a, b , si $a < b$ entonces, para todo real negativo c se cumple que $ac > bc$. En la novena y décima pregunta se busca que los estudiantes encuentren la inecuación correspondiente a la solución dada de una inecuación lineal.

En la parte II, de la prueba diagnóstica, la primera pregunta indaga acerca de las diferentes representaciones de las desigualdades tales como la representación en la recta numérica y la representación algebraica, en la segunda y tercera pregunta se debe encontrar cuáles de los intervalos ubicados en la recta numérica representa la solución de la inecuación lineal dada. En la cuarta y quinta pregunta se indaga acerca de la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico, así como la resolución de inecuaciones lineales con una incógnita aplicando la propiedad aditiva y multiplicativa de las desigualdades. En la sexta pregunta se presentan situaciones en las que se debe plantear una inecuación lineal que cumpla con una condición dada.

La prueba en general es aplicada a estudiantes de noveno grado de la Fundación Educativa Santa Isabel de Hungría, el propósito de cada uno de los ítem expuestos en la prueba, se hacen explícitos en el análisis preliminar donde se presenta una descripción detallada del para qué se hace y lo que se espera encontrar con esta.

3.1.2. La prueba

La Prueba diagnóstica está compuesta por dos partes (prueba diagnóstica parte I y prueba diagnóstica parte II), la primera parte consta de diez preguntas, de las cuales siete son abiertas y tres son cerradas, contienen enunciados numéricos, inecuaciones

aritméticas e inecuaciones propiamente algebraicas, el campo numérico en la cual se enmarca son los números enteros.

La segunda parte, está conformada por seis preguntas, tres de ellas son abiertas y tres cerradas, las preguntas abarcan la resolución de inecuaciones lineales y su representación gráfica, la transformación de enunciados verbales en inecuaciones lineales y la creación de situaciones problemas que son resueltos con inecuaciones lineales.

PRUEBA DIAGNÓSTICA
PARTE I

1. Escriba falso o verdadero según el caso:

- a. $-7 < 7$ ()
- b. $4 - 3 > 2$ ()
- c. $-2 \geq -5 + 3$ ()
- d. $-2 < 10$ ()

2. Escriba en forma simbólica las siguientes expresiones:

- a. -3 es menor que la suma de 5 y -3
- b. 5 es mayor que la diferencia entre -10 y 11

3. Escriba en forma simbólica cada uno de los siguientes enunciados:

- a. Un número desconocido es mayor que 5
- b. n es mayor que -2 y menor o igual 11

4. Para la inecuación, $6x + 1 > 5x + 4$ se afirma que es cierta, si x toma valores mayores que tres ($x > 3$). Justifique esta afirmación.

5. Para todo a que pertenece a los reales, si $2a$ es mayor que $2 + a$, entonces

- a. $a < 2$
- b. $a > 2$
- c. $a \leq 2$
- d. $a = 2$

6. Para a y b números reales cualesquiera, si $a < b$, entonces la relación entre $-a$ y $-b$ es:

- a. $-a < -b$
- b. $b > -a$
- c. $-a > -b$
- d. $-a = -b$

7. El conjunto solución, en los reales, de la inecuación $7x + 21 \geq 0$ es:

- a. $[-3, \infty)$
- b. $(-3, \infty)$

- c. $(-\infty, -3]$
- d. $[-3, -\infty)$

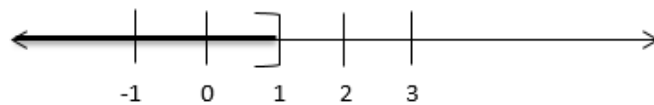
8. Indique el paso en el cual se comete un error en el proceso de solución de la inecuación $11 - (2 + 5x) > 4 - 3(1 + x)$

$11 - (2 + 5x) > 4 - 3(1 + x)$	
$11 - 2 - 5x > 4 - 3 - 3x$	Paso 1
$9 - 5x > 1 - 3x$	Paso 2
$-5x + 3x > 1 - 9$	Paso 3
$-2x > -8$	Paso 4
$x > 4$	Paso 5

- a. Paso 1
- b. Paso 2
- c. Paso 3
- d. Paso 4
- e. Paso 5

Justifique su respuesta:

9. La inecuación que tiene como solución el intervalo señalado en la figura es:



- a. $2x \geq -5 + 3$
- b. $8 - x \geq 2x + 14$
- c. $18 + 2x \geq 10(x + 1)$
- d. $-12 \geq 5x + 8$

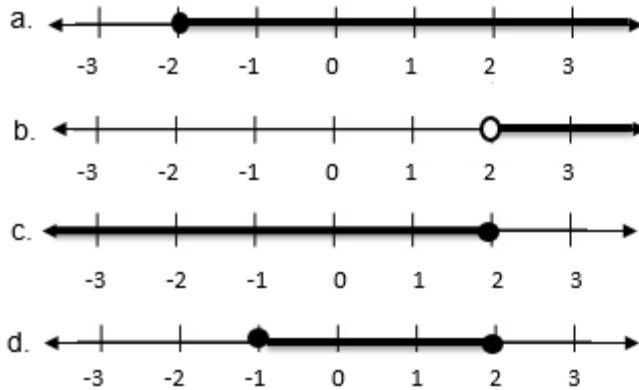
10. La inecuación que **NO** tiene como solución el intervalo $(-3, +\infty)$ es:

- a. $-24 + 2x < 10x$
- b. $-12 < 4x$
- c. $-20 + 4x < 12x + 4$
- d. $-9 > -3x$

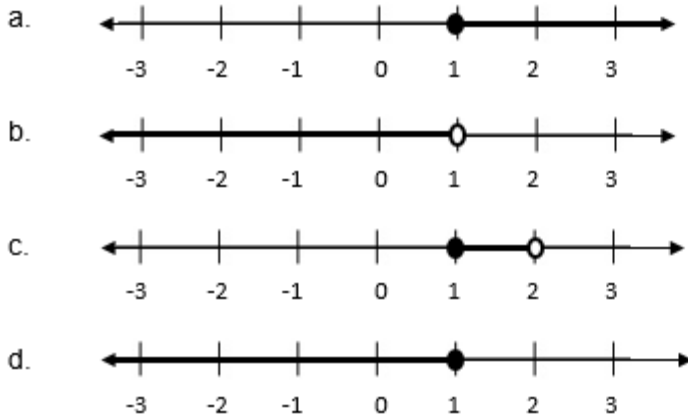
PRUEBA DIAGNÓSTICA

PARTE II

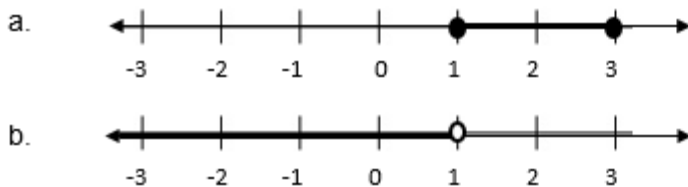
1. Al frente de cada recta numérica, represente **mediante desigualdades** los intervalos de números reales representados en cada una de ellas.

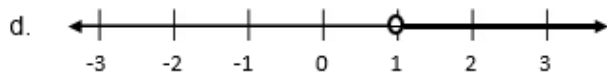
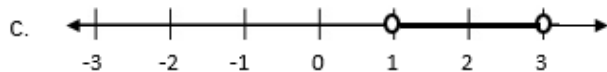


2. Seleccione el conjunto solución de la inecuación $9 + x \geq 5(x + 1)$, representado en una de las rectas numéricas.



3. Seleccione la gráfica en la recta numérica, que representa el conjunto solución de $4 < 2x + 2 < 8$.





4. Si el numerador de una fracción es $6x + 1$ y el denominador $21 - 4x$, para todo número que pertenece a los enteros entonces, seleccione los valores de x para los cuales el numerador es mayor que el denominador.

- a. $x > 0$
- b. $x > 2$
- c. $x < 2$
- d. $x = 2$

5. Si al triple de un número se le resta diez unidades, resulta mayor que si al doble de este número se le suma cuatro unidades. Escriba el conjunto de los números que verifican este enunciado.

6. Inventa en cada caso, un enunciado (un problema) que pueda ser solucionado por cada una de las desigualdades siguientes:

- a. $3x \leq 21$
- b. $2 - 5y \geq 12$

3.1.3. Análisis preliminar

Al diseñar la prueba diagnóstica se pensó en lo que se podía indagar y evidenciar en cada una de las preguntas, pues de esto dependen los resultados que se pueden obtener en la prueba diagnóstica y de este modo poder alcanzar algunos de los objetivos propuestos en el trabajo.

Este análisis preliminar se basa fundamentalmente en el contenido de la prueba, tales como; los componentes curricular y matemático expuestos en el marco teórico. Además se describen los procesos o expectativas de desempeño que se esperan tengan los estudiantes en la resolución de la prueba.

A continuación se expone de manera específica cada pregunta, indicando cuáles son los aspectos a indagar en cada situación, los contenidos matemáticos y las expectativas de desempeño.

PREGUNTA	EXPECTATIVAS DE DESEMPEÑO	CONTENIDOS MATEMÁTICOS ESPECÍFICOS
PRUEBA I		
Pregunta 1	Se espera que los estudiantes reconozcan las desigualdades en su presentación simbólica en las cuales se involucran operaciones con números enteros. El estudiante debe ser capaz de decidir en cada caso la veracidad de enunciado con la ayuda de las operaciones básicas (+, -) entre los números enteros.	definición de desigualdad
Pregunta 2	En estas preguntas se evalúa la producción de una desigualdad o una inecuación lineal a partir de traducción desde el lenguaje común hasta el lenguaje algebraico, se pretende que los estudiantes logren relacionar una expresión matemática con los enunciados verbales dados.	Concepto de inecuación de primer grado.
Pregunta 3		
Pregunta 4	En este ítem se pretende que los estudiantes realicen los procedimientos necesarios para justificar la afirmación, sea resolviéndola, por medio de tanteo o por algún otro tipo de procedimiento, para así interpretar su solución y el significado del concepto de inecuación lineal.	Solución de las inecuaciones lineales.
Pregunta 5	Esta pregunta permite que el estudiante reflexione sobre la aplicación del concepto de desigualdad. Para su desarrollo el estudiante debe aplicar propiedades aditiva y multiplicativa de las desigualdades. Se espera que en el proceso de resolución los estudiantes identifiquen la inecuación lineal que se genera como solución de ésta	Propiedades de los números enteros en las inecuaciones lineales.
Pregunta 6	Esta pregunta es del tipo de producción de expresiones equivalentes, se espera que el estudiante aborde las propiedades de relación de orden, tales como: dados números reales cualesquiera a, b , si $a < b$ entonces, para todo real negativo c se cumple que $ac > cb$. Esto con el fin de que los estudiantes logren interpretar desigualdades equivalentes.	Propiedades de relación de orden.

PREGUNTA	EXPECTATIVAS DE DESEMPEÑO	CONTENIDOS MATEMÁTICOS ESPECÍFICOS
Pregunta 7	En esta pregunta el estudiante debe utilizar las competencias operatorias para resolver una inecuación lineal. Se espera que al final del proceso de resolución los estudiantes identifiquen e interpreten la solución de las mismas.	Resolución de inecuaciones lineales e interpretación del conjunto solución.
Pregunta 8	Esta pregunta permite la identificación de expresiones equivalentes. Se espera que el estudiante reconozca cuándo la expresión está cumpliendo la relación de orden establecida, para ello debe saber la importancia de la propiedad multiplicativa de las desigualdades y las propiedades de relación de orden y de esta manera concluir en cuál de los pasos se rompe la equivalencia determinada por el cambio de desigualdad.	Resolución de las inecuaciones lineales.
Pregunta 9	En esta pregunta se espera que el estudiante reconozca que la solución de una inecuación lineal se puede generar mediante diferentes maneras, como los intervalos, la representación en la recta numérica y la desigualdad. De esta forma el estudiante debe relacionar la solución de la inecuación presentada en lenguaje algebraica con la representación en la recta numérica dada en el enunciado	Solución de una inecuación lineal como desigualdad, intervalo o gráfica en la recta numérica.
Pregunta 10	Teniendo en cuenta que en esta pregunta se hace lo contrario de lo convencional, es decir, se da la solución de la inecuación, se espera que los estudiantes en el proceso de resolución encuentren la inecuación que no tiene como solución el intervalo dado.	Solución de una inecuación lineal como desigualdad, intervalo o gráfica en la recta numérica.

Tabla 2. Análisis preliminar, Prueba I

PREGUNTA	EXPECTATIVAS DE DESEMPEÑO	CONTENIDOS MATEMÁTICOS ESPECÍFICOS
PRUEBA II		
Pregunta 1	Se espera que los estudiantes establezcan una relación de inecuación lineal entre lenguaje geométrico como se muestra en cada uno de los ítems anteriores, con la representación simbólica mediante desigualdades, permitiendo que los estudiantes aborden las diferentes formas de representación de inecuaciones lineales.	Representación de desigualdades dadas en la recta numérica.
Pregunta 2	En esta pregunta se espera que el estudiante reconozca que la solución de una inecuación lineal se puede generar mediante diferentes maneras, como los intervalos, la representación en la recta numérica y la desigualdad. De esta forma el estudiante debe relacionar la solución de la inecuación presentada en lenguaje algebraica con la representación en la recta numérica dada en el enunciado	Solución de una inecuación lineal como desigualdad, intervalo o gráfica en la recta numérica.
Pregunta 3		
Pregunta 4	se espera que los estudiantes representen mediante una inecuación lineal el enunciado de situación problema, de tal manera que obtengan una inecuación y al realizar las transformaciones necesarias encuentren e interpreten la solución	Representación de enunciados en inecuaciones lineales.
Pregunta 5	En esta pregunta los estudiantes deben determinar los datos necesarios del problema, y así plantear la inecuación lineal pertinente, haciendo uso de diversas estrategias que permitan encontrar el conjunto solución pedido en el enunciado.	Traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico.
Pregunta 6	En esta pregunta se realiza el proceso contrario de la pregunta anterior, es decir se espera que los estudiantes determinen un enunciado problema presentado en lenguaje cotidiano a cada una de las inecuaciones lineales dadas.	Inecuaciones lineales en enunciados problema.

Tabla 3. Análisis preliminar, Prueba II

3.2. IMPLEMENTACIÓN DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

3.2.1. Metodología de la implementación

La prueba se aplicó en dos sesiones, tuvieron una duración de 60 y 45 minutos respectivamente, correspondientes a la clase de matemáticas. La primera sesión se realizó el 13 de Mayo de 2014, y la segunda sesión se aplicó el 10 de junio de 2014. En la primera sesión asistieron 36 estudiantes, el profesor que dirige la clase de matemáticas realizó la presentación de los estudiantes encargados de la prueba diagnóstica, los cuales hicieron algunas explicaciones de cómo realizarla.

En la segunda sesión asistieron 40 estudiantes, debido a que la muestra debe ser igual en ambas sesiones, se excluyeron cuatro estudiantes. El espacio físico en el cual se aplicaron las dos sesiones de la prueba diagnóstica no varió, y las posiciones en los cuales se ubicaron los estudiantes fue su puesto habitual, pues están organizados por orden de lista.

En ambas sesiones hubo acompañamiento del profesor del área, él no hizo ninguna intervención durante la aplicación de la prueba.

3.2.2. Población

La aplicación de la prueba diagnóstica se realizó a 36 de los 40 estudiantes de grado noveno (jornada de la mañana), de la Institución Educativa Santa Isabel de Hungría sede Alfonso López, cuyas edades oscilan entre los 14 y 16 años. La institución cuenta con seis grados novenos, sin embargo se tomó al grado 9-1 debido a que contenía la mayor cantidad de estudiantes.

Las instituciones educativas Arquidiosesanas, manejan una pedagogía conceptual, es una propuesta creada y desarrollada, principalmente por el Dr. Miguel de Zubiría Samper y el equipo de la Fundación Internacional de Pedagogía Conceptual Alberto

Merani, de Bogotá. Se basa en la Neuropsicología de la mente humana, es decir, desarrolla las tres dimensiones: Afectiva, Cognitiva y Expresiva.

Además todos los estudiantes a los que se les aplicó la prueba diagnóstica han sido instruidos en el concepto y uso de las desigualdades e inequaciones.

3.3. RESULTADOS Y ANALISIS DE RESULTADOS: Prueba I y Prueba II

En el siguiente apartado se muestran los resultados obtenidos de las pruebas aplicadas, los cuales son clasificados de acuerdo a los tipos de respuestas indicadas por cada uno de los estudiantes. A partir de esto, se realiza el análisis de las respuestas exponiendo las dificultades y errores encontrados.

3.3.1. Prueba I

INSTITUCIÓN EN LA CUAL SE REALIZÓ LA PRUEBA: Fundación Educativa Santa Isabel de Hungría Sede Alfonso López

MUESTRA: 36 estudiantes

GRADO: Noveno

FECHA: Mayo 13 de 2014

P_1 : Escriba falso o verdadero según el caso:			
a. $-7 < 7$ ()			
b. $4 - 3 > 2$ ()			
b. $-2 \geq -5 + 3$ ()			
c. $-2 < 10$ ()			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que escriben el valor de verdad de las cuatro afirmaciones en forma correcta.	25	69.4%
Tipo 2	Estudiantes que escriben el valor de verdad de, tres afirmaciones correctas y una afirmación incorrecta (b o c).	7	19.4%
Tipo 3	Estudiantes que escriben el valor de verdad de, dos afirmaciones correctas y dos afirmaciones incorrectas (b y c).	3	8.3%
Tipo 4	Estudiantes que escriben el valor de verdad de, una afirmación correcta y tres afirmaciones incorrectas.	1	2.8%

Tabla 4. Tipos de respuesta Pregunta 1, Prueba I

En la tabla 1 se observa que la mayoría, el 69.4% de los estudiantes evaluados, contestan en forma correcta la validez de las afirmaciones propuestas. Esto parece indicar que los estudiantes reconocen en su representación simbólica desigualdades numéricas, incluso en las cuales se hace necesario realizar operaciones simples para determinar la validez de las expresiones. Además, reconocen en este tipo de representaciones diferentes desigualdades numéricas en tanto las relaciones de orden son distintas.

De otra parte, cerca del 20% de los estudiantes encuentran el valor de verdad de tres afirmaciones acertadamente, lo cual muestra que dichos estudiantes manejan el concepto de desigualdad, pero presentan dificultades en los ítem que involucran operaciones simples con números enteros. Esta problemática operatoria presente en los procesos algorítmicos con números enteros parece tener su origen en el estudio de la aritmética. Esta dificultad también se evidencian en los tres estudiantes que no responden correctamente a los ítem que implican operaciones con números enteros.

Por último, un estudiante que representa el 2.8%, escribió correctamente el valor de verdad de solo una afirmación; esto parece indicar que el estudiante confunde las relaciones de orden representadas en las desigualdades numéricas, es decir, no reconoce el símbolo que denota la relación “menor que”, “mayor que” y “mayor o igual que”.

De acuerdo a esto se puede afirmar que un mínimo porcentaje de estudiantes no reconocen las representaciones simbólicas de desigualdades numéricas.

P_2, I_a : Escriba en forma simbólica las siguientes expresiones:			
a. -3 menor que la es suma de 5 y -3			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que escriben en forma correcta la desigualdad que representa el enunciado. Algunos omiten los paréntesis, realizando la adición ($-3 < 5 - 3$); Otros ubican consecutivamente el signo de la adición y el signo negativo del número ($-3 < 5 + -3$).	28	77.7%
Tipo 2	Estudiantes que asumen el signo de la adición como una disyunción, escribiendo dos expresiones ($-3 < 5 y - 3$).	5	13.8%
Tipo 3	Estudiantes que omiten el signo menos del segundo miembro de la desigualdad dada en el enunciado, tomando como único signo la adición ($-3 < 5 + 3$).	3	8.3%

Tabla 5. Tipos de respuesta Pregunta 2 ítem a, Prueba I

Se puede notar en la tabla anterior que 28 de los 36 estudiantes evaluados escriben en forma simbólica la desigualdad numérica presentada en el enunciado. De los cuales, 13 estudiantes (36.1%) realizan el proceso de conversión, representando mediante símbolos cada uno de los objetos designados en el ítem anterior. Los otros 15 estudiantes (41.6%) aunque representan correctamente la desigualdad no expresan el símbolo que indica la adición.

Esto revela que los estudiantes “traducen” enunciados que contienen parte numérica y verbal, para lo cual deben identificar las unidades significativas del enunciado, como los son los números ($-3, 5 - 3$), la relación de orden (menor que), la operación indicada (adición) y su representación simbólica. En el caso de los 15 estudiantes se realiza el mismo procedimiento con la diferencia de que efectúan la operación indicada.

Con respecto al 13.8% de los estudiantes, puede decirse que reconocen dos partes significativas del enunciado pero el signo de la adición lo representan con una disyunción, lo cual desde el punto de vista conceptual parece que se identifica con la definición de suma, pero en lo que respecta a la pregunta se busca que los estudiantes escriban la representación simbólica de la adición y no aspectos de la definición formal.

$$(A \cup B = \{x|x \in A \text{ o } x \in B\})$$

Por otro lado, los tres estudiantes que omiten el signo menos del segundo término del segundo miembro de la desigualdad, al realizar la “traducción” parecen haber olvidado el signo del número o haber dado mayor importancia al signo de la operación, lo cual demuestra que no hay una conciencia sobre el doble significado de los signos en el álgebra; como operador y como parte constitutiva del número.

P_2, I_b : Escriba en forma simbólica las siguientes expresiones:			
a. 5 es mayor que la diferencia entre -10 y 11			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que escriben en forma correcta la desigualdad que representa el enunciado.	15	41.6%
Tipo 2	Estudiantes que escriben en forma incorrecta la desigualdad solicitada, desconociendo la diferencia que se plantea ($5 > -10 + 11$) y algunos indican la desigualdad como mayor o igual.	14	38.9%
Tipo 3	Estudiantes que escriben en forma incorrecta la desigualdad que representa el enunciado, escribiendo la diferencia como la relación “ser diferente a” (\neq).	7	19.4%

Tabla 6. Tipos de respuesta Pregunta 2 ítem b, Prueba I

Continuando con la pregunta 2, en la tabla 6 se observa que el 41.6% de los estudiantes escriben correctamente el enunciado, lo que permite inferir, que al igual que en el ítem anterior, los estudiantes “traducen” enunciados en forma sincopada identificando las unidades significativas de este, como son los números ($5, -10, 11$), la relación de orden (mayor que), la operación indicada (diferencia) y su equivalencia en la representación simbólica. Ahora bien, en este ítem se presenta un mayor porcentaje de fracaso en comparación con el ítem a, ya que los estudiantes no relacionan la palabra “diferencia” con la operación de restar dos números, la cual conlleva a este bajo resultado. A continuación se muestra un ejemplo de este tipo de respuesta:

b. 5 es mayor que la diferencia entre -10 y 11 $5 > -10 + 11$

Ilustración 2. Ejemplo de respuesta, pregunta 2 ítem b.

Lo expuesto anteriormente muestra las dificultades que poseen los estudiantes en la “traducción” de enunciados, es decir en el proceso de conversión del lenguaje natural al lenguaje simbólico, al no segmentar el enunciado en unidades significativas y hacer equivalencias de estas unidades, en expresiones no convencionales (\neq por $-$) del lenguaje simbólico. Lo que parece indicar que el trabajo escolar no involucra este tipo de proceso.

P_3I_a : Escriba en forma simbólica cada uno de los siguientes enunciados:			
a. Un número desconocido es mayor que 5			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que escriben correctamente la desigualdad que representa el enunciado. Algunos representan la expresión “un número desconocido” con el signo de pregunta.	30	83.3%
Tipo 2	Estudiantes que utilizan la relación de orden entre dos números ($6 > 5$).	2	5.5%
Tipo 3	Estudiantes que escriben incorrectamente el enunciado ($x < 5$) o no responden la pregunta.	4	11.1%

Tabla 7. Tipos de respuesta Pregunta 3 ítem a, Prueba I

Puede observarse en la tabla 7, que la mayoría de los estudiantes responden correctamente a la situación presentada. Esto demuestra que los estudiantes reconocen las inecuaciones lineales sencillas en su representación en lenguaje natural y pueden “traducir” éstas a un lenguaje simbólico, para lo cual parece que estos estudiantes fragmentan el enunciado en unidades significativas y las ponen en correspondencia con los símbolos pertinentes de manera lineal. Algunos estudiantes utilizan la variable x para designar el número desconocido del enunciado, esto da cuenta de que la mayoría de los estudiantes reconocen a x como variable, es decir, como aquella que puede tomar valores diferentes en un dominio. Sin embargo, el otro grupo de estudiantes que utilizan el signo de interrogación “?”, desconocen el signo convencional para designar lo desconocido en el enunciado.

Por otro lado, el 5.5% de estudiantes que escriben una relación entre dos números, es decir, plantean una desigualdad numérica en lugar de una inecuación lineal, parecen no identificar el papel que cumple la variable en el enunciado, que en este caso es la variable como número generalizado, lo cual indica que estos no tienen claro su significado ni su representación en diferentes situaciones.

Con respecto al 11.1% de estudiantes restantes, no responden a la situación debido a que no representan con el símbolo que corresponde la relación de orden “mayor que” establecida en el enunciado. Esto parece confirmar que, a pesar de que reconocen la relación de orden establecida, no logran simbolizarla con el signo que la representa. Nótese que los enunciados de la pregunta 2 involucran números, operaciones y relación de orden mientras en este caso aparecen variable en lengua natural y relación de orden, lo que marca una diferencia que no se nota en los resultados.

P_3I_b : Escriba en forma simbólica cada uno de los siguientes enunciados:			
b. n es mayor que -2 y menor o igual 11			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que escriben correctamente la desigualdad que representa el enunciado.	2	5.5%
Tipo 2	Estudiantes que escriben las desigualdades simultáneas de manera incorrecta ($-2 < n > 11$, $n > -2$ y ≤ 11).	30	83.3%
Tipo 3	Estudiantes que asumen que -2 se encuentra entre dos números cualesquiera ($3 > -2 \leq 11$).	2	5.5%
Tipo 4	Estudiantes que no responden a la pregunta.	2	5.5%

Tabla 8. Tipos de respuesta Pregunta 3 ítem b, Prueba I

Para el ítem b de la pregunta 3 se presenta una situación con un grado de complejidad mayor que el ítem anterior, pues en este caso se debe escribir en forma simbólica el enunciado que involucra una doble desigualdad, aunque debería ayudarles en su “traducción” que la variable no aparece en lenguaje natural sino en su representación simbólica. Frente a ésta, tan solo el 5.5% de estudiantes representan la inecuación lineal esperada, lo cual permite evidenciar que estos estudiantes realizan la “traducción” del enunciado, segmentando este en unidades significativas y estableciendo las

relación entre ellas para posteriormente articularlas y representarlas simbólicamente mediante una inecuación lineal. Esta “traducción” no puede realizarse de manera lineal siguiendo la secuencia del enunciado, sino que a partir de las relaciones de la variable se deben plantear las desigualdades de la inecuación lineal. Puede decirse que estos estudiantes entienden la unicidad de la variable, es decir, que una sola variable cumple con las dos relaciones en una inecuación lineal.

Hay que resaltar el hecho de que el 83.3% de estudiantes responden de forma incorrecta, algunos no utilizan de manera adecuada los signos que denotan las relaciones de orden, otros escriben dos expresiones, esto puede evidenciar que comprenden las relaciones planteadas en este ítem, pero en el paso a la expresión algebraica presenta dificultades para articular las dos desigualdades en una sola inecuación lineal o escriben el símbolo que no corresponde. Esto puede derivarse de una “traducción” del enunciado siguiendo en forma lineal la secuencia del mismo, que a diferencia del ítem anterior no se conserva la relación establecida, pues la manera en la que se escriben las inecuaciones con doble desigualdad es diferente a la forma en la que se presenta en lenguaje natural la relación, lo que puede manifestar que este estudiante no reconoce ni relaciona las partes significativas del enunciado, más bien realiza la “traducción” de este, de forma mecánica sin importar las condiciones que se presenten en la situación.

En el caso de 5.5% de los estudiantes, que asumen que -2 se encuentra entre dos números cualesquiera ($3 > -2 \leq 11$), se presume que interpretan las relaciones que se establecen en el enunciado con respecto al número 2 y no a la variable, pues consideran la notación de variable n , no como una expresión generalizada para representar en la “traducción” sino como una condición que particularizan escogiendo un número que cumple con la relación “mayor que”.

De lo expuesto en los ítem anteriores, se puede decir que los estudiantes identifican, relacionan y representan las relaciones y operaciones de las inecuaciones lineales

expuestas en lenguaje natural, pero respecto a las inecuaciones que involucran doble desigualdad presentan dificultad para entender conjuntamente dos desigualdades.

P_4 : Para la inecuación, $6x + 1 > 5x + 4$ se afirma que es cierta, si x toma valores mayores que tres($x > 3$). Justifique esta afirmación.			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que resuelven la desigualdad planteada encontrando el conjunto solución y verificando la afirmación dada en el enunciado como correcta.	23	63%
Tipo 2	Estudiantes que justifican, afirmando que como el coeficiente de la x es mayor que seis, entonces los valores de x son mayores que 3.	5	13.8%
Tipo 3	Estudiantes que evalúan un número concreto	2	5.5%
Tipo 4	Estudiantes que despejan la variable de la inecuación en forma incorrecta o no realizan ningún procedimiento.	6	16.6%

Tabla 9. Tipos de respuesta Pregunta 4, Prueba I

De acuerdo a lo expuesto en la anterior tabla, el 63% de los estudiantes realizan transformaciones empleando la transposición de términos para encontrar el conjunto solución de la inecuación y validar la afirmación. Este procedimiento los lleva a una respuesta correcta, sin embargo tal como lo afirma Font Pochulu (2008) este proceso expresa un modelo apoyado en metáforas operacionales deja abierta las puertas para que una relación de equivalencia pueda ser considerada como un objeto o dispositivo y ello conlleva a que los estudiantes no reconozcan las ecuaciones equivalente realizando un proceso de algoritmización. Así mismo dicho proceso evidencia la falta de reconocimiento y apropiación de las propiedades de las desigualdades, sin embargo sobresale el hecho de que estos estudiantes reconocen en el proceso mecánico de transposición de términos la agrupación y operación de términos semejantes, para este caso los monomios y los números enteros.

Por el contrario el 19.4% de los estudiantes no justifican adecuadamente el enunciado, algunos afirman que es correcta debido a que el coeficiente de la variable es mayor que tres, otros realizan transformaciones inapropiadas, lo que permite inferir, que estos estudiantes interpretan la inecuación lineal pero de una manera muy superficial

resolviendo mecánicamente la inecuación e imitando métodos memorizados como en la resolución de ecuaciones lineales, esto desde el punto de vista de Barbosa (2003) mencionan que estos estudiantes consideran el álgebra como la ejecución de secuencias de manipulación simbólica y no su validez como consecuencia del empleo de las propiedades de los números enteros.

Con respecto al 5.5% de estudiantes que justifican el enunciado asignando valores a la variable, se puede decir que tiene claridad respecto a la evaluación de valores en la variable independiente de la inecuación, y así determinar si este valor satisface o no la inecuación. Sin embargo al intentar encontrar los valores que satisfacen esta inecuación de esta manera, no logran interpretar ni solucionar la inecuación ya que optan por resolverla de una manera puntual, estos estudiantes podrían tener éxito en la resolución de algunas inecuaciones lineales haciendo uso de este método, pero en algún momento no podrán resolver una inecuación lineal, pues la resolución de una inecuación implica su interpretación y resolución.

En general se puede decir que gran parte de los estudiantes no reemplazan el valor de x en la inecuación si no que la resuelven haciendo uso de un método escolarizado y otros a pesar de que la evalúan no lo hacen en forma correcta.

P_5 : Para todo a que pertenece a los reales, si $2a$ es mayor que $2 + a$, entonces: <ul style="list-style-type: none"> a. $a < 2$ b. $a > 2$ c. $a \leq 2$ d. $a = 2$ 			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que seleccionan la opción b	30	83.3%
Tipo 2	Estudiantes que seleccionan la opción c	2	5.5%
Tipo 3	Estudiantes que seleccionan la opción a	3	8.3%
Tipo 4	Estudiantes que seleccionan la opción d	1	2.7%

Tabla 10. Tipos de respuesta Pregunta 5, Prueba I

En esta pregunta se utiliza la variable como número generalizado y se pretende ver en qué medida los estudiantes hacen uso de una inecuación para abordar este tipo de problemas. De acuerdo a los resultados presentados en la tabla 10, el 83.3% de los estudiantes responden correctamente el enunciado, estos plantean la inecuación lineal que propone el enunciado, lo que evidencia que el estudiante comprende el concepto de inecuación lineal pues concebir la noción de variable como número generalizado, comprende las desigualdades y las relaciones de orden necesarias para resolver esta situación.

Sin embargo el 30.5% de estudiantes presentan errores al momento de aplicar las propiedades que intervienen en este proceso, particularmente no emplean correctamente la propiedad; *dados números reales cualesquiera a, b , si $a < b$ entonces, para todo real negativo c se cumple que $ac > cb$* . Desde la perspectiva de Maroto (2013), menciona que uno de los errores más frecuente se da en enunciados como el anterior, ya que, dado que los estudiantes aprenden el procedimiento algorítmico sin comprenderlo y memorizan reglas como en este caso “se le da la vuelta al símbolo”, sin comprender el hecho de por qué se realiza ese procedimiento.

También algunos estudiantes ven la desigualdad como una inecuación cuyo objetivo es encontrar valores que la verifiquen, además consideran que el hecho de que la letra tenga el signo negativo ($-a$), es un número negativo, es decir no logran asimilar que letras tienen diferentes usos en el álgebra por ejemplo, en la presente prueba se ha visto la letra como: incógnita específica, número generalizado, variable, etc.

P_6 : Para a y b números reales cualesquiera, si $a < b$, entonces la relación entre $-a$ y $-b$ es:			
a. $-a < -b$ b. $b > -a$ c. $-a > -b$ d. $-a = -b$			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que escogen la opción correcta c.	25	69.4%
Tipo 2	Estudiantes que escogen la opción a.	11	30.5%

Tabla 11. Tipos de respuesta Pregunta 6, Prueba I

De acuerdo a los resultados presentados en la tabla 11, el 69.4% de los estudiantes responden correctamente el enunciado, lo que evidencia que para que estos estudiantes comprendan el concepto de inecuación lineal necesitan entender la noción de variable, en este caso utilizada como modelo para generalizar una relación entre números, también deben comprender las desigualdades y las relaciones de orden, manejar adecuadamente los conjuntos numéricos ($a < 0, a > 0$) y sus propiedades, comprender el significado de distintas implicaciones y de proposiciones tales como, *si y sólo si* y de cuantificadores como *para todo* y *existe*.

Sin embargo el 30.5% de los estudiantes presentan errores al momento de aplicar las propiedades que intervienen en este proceso, particularmente no emplean correctamente la propiedad que dados números reales cualesquiera a, b , si $a < b$ entonces, para todo real negativo c se cumple que $ac > cb$. Desde la perspectiva de Maroto (2013), menciona que uno de los errores más frecuente se da en enunciados como el anterior, ya que, dado que los estudiantes aprenden el procedimiento algorítmico sin comprenderlo y memorizan reglas como en este caso “se le da la vuelta al símbolo”, sin comprender el hecho de por qué se realiza ese procedimiento.

P_7 : El conjunto solución, en los reales, de la inecuación $7x + 21 \geq 0$ es: <ul style="list-style-type: none"> a. $[-3, \infty)$ b. $(-3, \infty)$ c. $(-\infty, -3]$ d. $[-3, -\infty)$ 			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que seleccionan la opción correcta, a.	22	61.1%
Tipo 2	Estudiantes que seleccionan la opción b.	2	5.5%
Tipo 3	Estudiantes que seleccionan la opción c.	3	8.3%
Tipo 4	Estudiantes que seleccionan la opción d.	9	25%

Tabla 12. Tipos de respuesta Pregunta 7, prueba I

En esta pregunta se presenta una inecuación lineal y se pregunta por su solución. Se observa que más de la mitad, el 61.1% de estudiantes, resuelven la inecuación de manera correcta, exponiendo los pasos que han usado para llegar a la solución:

$$\begin{aligned}
 7) \quad 7x + 21 &\geq 0 \\
 7x &\geq 0 - 21 \\
 x &\geq \frac{-21}{7} \\
 x &\geq -3 \\
 &[-3, \infty)
 \end{aligned}$$

Ilustración 3. Ejemplo de respuesta, pregunta 7

Esto permite divisar que los estudiantes logran resolver inecuaciones lineales realizando “transposición” de términos, pero no hay una aplicación explícita de las propiedades de las desigualdades lo que pareciera indicar que no hay conciencia de estas propiedades. A pesar de que realizan un proceso en forma escolarizada, es con base en estos procedimientos llegan a la desigualdad que representa el conjunto de solución de dicha inecuación lineal y la representan en notación de intervalo correctamente. Esto último permite comprobar que los estudiantes reconocen y relacionan las diferentes formas de expresar los conjuntos solución de las inecuaciones lineales, aunque no utilizan las propiedades de las desigualdades necesarias para resolver inecuaciones lineales.

Ahora bien, algunos de los estudiantes que responden de manera incorrecta a la situación planteada, equivalente al 25% de estudiantes, se debe a que aunque resuelven la inecuación lineal de manera correcta, no representan el intervalo correspondiente a la desigualdad propia de la inecuación, de lo cual se puede decir que no dominan la correspondencia entre las distintas formas de expresión de un mismo conjunto solución. Esto puede observarse en la siguiente respuesta:

7. El conjunto solución, en los reales, de la inecuación $7x + 21 \geq 0$ es:

$$7x + 21 \geq 0$$

a. $[-3; \infty)$

b. $(-3, \infty)$

c. $(-\infty, -3]$

$[-3, \infty)$

$$7x \geq -21$$

$$x \geq \frac{-21}{7}$$

$$x \geq -3$$

Diagrama 1

Lo anterior permite concluir que la mayoría de los estudiantes se limitan a despejar la variable usando las mismas técnicas que para las ecuaciones, poniendo de manifiesto que el objetivo es operar y despejar la incógnita sin tener en cuenta la equivalencia en entre las expresiones y por ende la aplicación de las propiedades de las desigualdades. Pero si entienden e interpretan el conjunto solución de las inecuaciones lineales y expresan en sus diferentes representaciones.

P_8 : Indique el paso en el cual se comete un error en el proceso de solución de la inecuación
 $11 - (2 + 5x) > 4 - 3(1 + x)$

$$\begin{array}{rcl}
 11 - (2 + 5x) & > & 4 - 3(1 + x) \\
 11 - 2 - 5x & > & 4 - 3 - 3x \\
 9 - 5x & > & 1 - 3x \\
 -5x + 3x & > & 1 - 9 \\
 -2x & > & -8 \\
 x & > & 4
 \end{array}$$

- a. Paso 1
- b. Paso 2
- c. Paso 3
- d. Paso 4

Tipo Resp.	Descripción	F. A.	Justificación	F. A. de cada tipo	F. R.
Tipo 1	Estudiantes que seleccionaron la opción a	32	El error se encuentra en el paso 1, debido a que no se realizan las operaciones dentro del paréntesis	18	56.2%
			Porque se deben agrupar las letras a un lado y los números al otro lado	9	28.1%
			Porque la suma de los signos no es correcta	5	15%
Tipo 2	Estudiantes que seleccionaron la opción c	1	No justificaron su respuesta	1	2.7%
Tipo 3	Estudiantes que no seleccionaron ninguna opción	3	No realizaron ningún procedimiento	3	8.3%

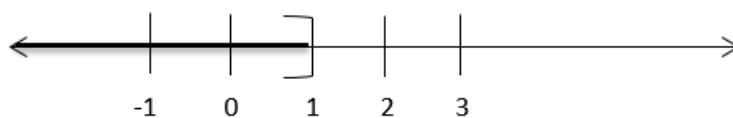
Tabla 13. Tipos de respuesta Pregunta 8

Pasando a la pregunta 8 cabe resaltar que a diferencia de las preguntas anteriores en las que los estudiantes debían solucionar la inecuación lineal, era la mayoría de ellos los que se inclinaban por las opciones correctas, pero en este caso que deben identificar un error en una solución planteada ninguno de los estudiantes escoge la respuesta correcta, esto confirma que los estudiantes si están haciendo uso de un método escolarizado, pues presenta dificultades en la aplicación de las propiedades de las desigualdades para encontrar las inecuaciones equivalentes, debido a que por lo general estos realizan una “transposición” de términos, sin otorgarle sentido y sin comprender el significado de las inecuaciones equivalentes.

Es importante destacar que más del 80% de los estudiantes seleccionan la opción a, justificando que el error se encuentra en el tratamiento que se realiza a la inecuación lineal, esto puede evidenciar una poca apropiación de tal concepto y por ende la incapacidad de reconocer inecuaciones equivalente, ni qué transformaciones son permitidas para llegar al conjunto solución que satisface dicha inecuación.

Para los estudiantes que seleccionan las opciones restantes. Se puede decir, que estos estudiantes presentan algún algoritmo para la resolución de determinadas inecuaciones, pero no logran justificar la validez del algoritmo utilizado. Esto hace que el estudiante no consiga interiorizar el concepto de inecuación, pues no generaliza el análisis utilizando propiedad de los número enteros, y no se da cuenta que hay transformaciones que alteran el conjunto solución.

P_9 : La inecuación que tiene como solución el intervalo señalado en la figura es:



- a. $2x \geq -5 + 3$
- b. $8 - x \geq 2x + 14$
- c. $18 + 2x \geq 10(x + 1)$
- d. $-12 \geq 5x + 8$

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que seleccionaron la opción a	14	38.9%
Tipo 2	Estudiantes que seleccionaron la opción c	19	52.8%
Tipo 3	Estudiantes que seleccionaron la opción d	3	8.3%

Tabla 14. Tipos de respuesta Pregunta 9

Con esta pregunta se pretende establecer una conexión entre el lenguaje algebraico y geométrico. Aproximadamente la mitad de los estudiantes optan por la opción correcta c, algunos realizan el proceso de solución de cada una de las inecuaciones lineales, para así seleccionar la inecuación lineal que corresponde a la solución dada en la recta numérica.

$2x > -5 + 3$
 $2x > -2$
 $x > -\frac{2}{2}$
 $x > -1$

$8 - x > 2x + 14$
 $-x - 2x > 14 - 8$
 $-3x > 6$
 $x < \frac{6}{-3}$
 $x < -2$

$18 + 2x > 10(x + 1)$
 $18 + 2x > 10x + 10$
 $2x - 10x > -18 + 10$
 $-8x > -8$
 $x < \frac{-8}{-8}$
 $x < 1$

Ilustración 4. Ejemplo de respuesta, pregunta 9

Esto manifiesta que los estudiantes no realizan una aplicación de las propiedades de las desigualdades, pero si identifican las diferentes formas de representar el conjunto solución de las inecuaciones lineales, de modo que relacionan la desigualdad resultante con la representación gráfica dada en el enunciado.

Por otro lado, los 14 estudiantes que seleccionan la opción a, realizan el mismo procedimiento mencionado anteriormente, pero no seleccionan la opción que corresponde a la situación debido a que no interpretan en forma correcta la solución de esta inecuación lineal, pues no dan importancia al signo “menos” que se presenta en la desigualdad resultante.

Con relación a los tres estudiantes que seleccionaron la opción d, se puede inferir que, realizan las transformaciones de cada una de las inecuaciones dadas en el enunciado, pero presentan errores en este proceso escogiendo esta opción por descarte, lo cual deja ver que estos estudiantes no han interiorizado las propiedades de las desigualdades ni realizan transformaciones a inecuaciones lineales simples.

P_{10} : La inecuación que NO tiene como solución el intervalo $(-3, +\infty)$ es:			
a. $-24 + 2x < 10x$ b. $-12 < 4x$ c. $-20 + 4x < 12x + 4$ d. $-9 > -3x$			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que seleccionaron la opción b	3	8.3%
Tipo 2	Estudiantes que seleccionaron la opción c	3	8.3%
Tipo 3	Estudiantes que seleccionaron la opción d	30	83.3%

Tabla 15. Tipos de respuesta Pregunta 10, Prueba I

Según los resultados presentados en la tabla 15, se puede observar que el 83% de los estudiantes seleccionan la opción correcta d, estos estudiantes realizan el proceso de solución de cada una de las inecuaciones y así seleccionan la que no tiene solución en

el intervalo dado, lo que permite indicar que los estudiantes comprende el hecho que para resolver una inecuación es necesario su interpretación y manipulación, sin embargo lo realizan empleando la transposición de términos, el cual no garantiza un correcto aprendizaje de la solución de las inecuaciones lineales, pues este proceso es totalmente mecánico y no le da la verdadera importancia a las propiedades de los números enteros. Además reconocer cuales transformaciones son permitidas para consecutivamente llegar a inecuaciones equivalentes que no alteren el conjunto solución de la inecuación inicial. También deben comprender que la inecuación simple resultante de las transformaciones se puede escribir en notación conjuntista o de intervalo.

En esta misma dirección apunta la opción *b* y *c*, en el cual los seis estudiantes resuelven cada una de las inecuaciones planteadas, pero cometen errores procedimentales, como ejemplo, se tienen estudiantes que no consideran el signo negativo del coeficiente de la variable al realizar su transposición, de lo cual se infiere que son muchos los problemas y dificultades que los alumnos presentan a la hora de resolver una inecuación lineal. Algunos de esos problemas son consecuencia del álgebra elemental y otros son directamente del tratamiento que se le da a las inecuaciones. Hasta este punto se ha observado que muchos estudiantes entienden los signos menor y mayor como relación entre dos expresiones algebraicas que son consecutivos a la hora de la resolución de una inecuación pero que no tienen ningún significado hasta el punto de sustituirla por un signo igual. Es decir, no le dan contenido semántico a la inecuación, evidenciándolo al momento de llegar a la solución aplicando la transposición de términos.

Cabe resaltar que en este punto varios estudiantes solucionan algorítmicamente las inecuaciones planteadas y llegan conjunto solución que satisface cada una de las inecuaciones, sin embargo no logran interpretar ese conjunto solución y representarlo gráficamente.

3.3.2. Prueba II

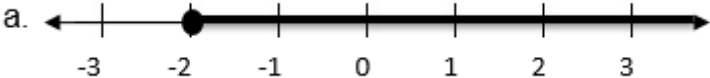
INSTITUCIÓN EN LA CUAL SE APLICÓ LA PRUEBA: Fundación Educativa Santa Isabel de Hungría Sede Alfonso López

MUESTRA: 36 estudiantes

GRADO: Noveno

FECHA: junio 10 de 2014

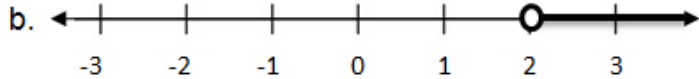
P_1I_a : Al frente de cada recta numérica, represente **mediante desigualdades** los intervalos de números reales representados en cada una de ellas.

a. 

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que escriben mediante la desigualdad correcta, el intervalo representado en la recta numérica:	35	97.2 %
Tipo 2	Estudiantes que no representan mediante la desigualdad correcta el intervalo representado en la recta numérica, pues confunden la relación.	1	2.8%

Tabla 16. Tipos de respuestas Pregunta 1 ítem a, Prueba II

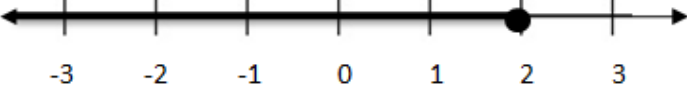
P_1I_b : Al frente de cada recta numérica, represente mediante desigualdades los intervalos de números reales representados en cada una de ellas.

b. 

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que representan mediante la desigualdad correcta, el intervalo representado en la recta numérica: $x > 2$	31	86.1%
Tipo 2	Estudiantes que no representan mediante la desigualdad correcta, el intervalo dado en la recta numérica, algunos confunden la relación.	5	13.8%

Tabla 17. Tipos de respuesta Pregunta 1 ítem b, Prueba II

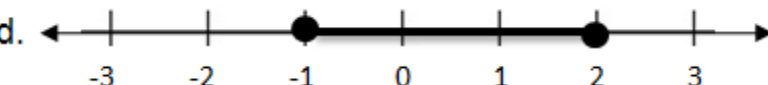
P_{1c} : Al frente de cada recta numérica, represente mediante desigualdades los intervalos de números reales representados en cada una de ellas.

c. 

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que representan mediante la desigualdad correcta, el intervalo representado en la recta numérica: $x \leq 2$	24	66.7%
Tipo 2	Estudiantes que no representan mediante la desigualdad correcta, el intervalo representado en la recta numérica.	12	33.3%

Tabla 18. Tipos de respuesta Pregunta 1 ítem c, Prueba II

P_{1d} : Al frente de cada recta numérica, represente mediante desigualdades los intervalos de números reales representados en cada una de ellas.

d. 

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que representan mediante la desigualdad correcta, el intervalo representado en la recta numérica: $-1 \leq x \leq 2$	15	41.7%
Tipo 2	Estudiantes que no representan mediante la desigualdad correcta, el intervalo representado en la recta numérica, algunos solo escriben mayor, cambian los signos de la desigualdad, escriben dos expresiones separadas o escriben una desigualdad numérica	21	58.3%

Tabla 19. Tipos de respuesta Pregunta 1 ítem d, prueba II

De acuerdo a los resultados obtenidos en la prueba II, en los tres primeros ítem de la pregunta 1, se observa que la mayoría de los estudiantes el 97.2%, 86.1%, 66.7% respectivamente, representan correctamente mediante desigualdades los intervalos dados en las rectas numéricas. Esto parece indicar que los estudiantes conocen el orden de los números reales y su ubicación en la recta numérica, así como la identificación de la representación de intervalos sobre la misma, luego de identificado el intervalo, representan este en lenguaje algebraico mediante una desigualdad simple.

Por lo anterior se puede decir que los estudiantes en general establecen una relación entre las diferentes formas de representación de inecuaciones lineales.

Por otro lado, los estudiantes que no representan correctamente mediante una desigualdad el intervalo dado en la recta numérica, evidenciando una ausencia de significado en la utilización de los símbolos “mayor que” “mayor o igual” y “menor que”, aunque reconocen la representación de desigualdades en la recta numérica no logran asignar una unidad significativa correspondiente a la relación dada.

Para el ítem *d*, a diferencia de los ítem anteriores, se presenta un intervalo cerrado cuya representación involucra doble desigualdad, el 41.7% de estudiantes representa mediante una inecuación este intervalo. Esto permite evidenciar que los estudiantes conocen el orden de los números reales y su ubicación en la recta numérica, así como la identificación de la representación de intervalos sobre la misma, luego de identificado el intervalo, representan este en lenguaje algebraico articulando las dos desigualdades que involucra esta conversión en una sola expresión, mostrando que reconocen la notación de intervalo cerrado sobre la recta numérica.

Contrariamente el 58.3% de estudiantes no logran representar mediante una desigualdad el intervalo dado en la recta numérica, mostrando de nuevo dificultades para expresar una única inecuación lineal con dos desigualdades, ya que al momento de escribir la desigualdad, algunos estudiantes escriben dos expresiones separadas o simplemente escriben una desigualdad numérica, otros no se percatan en incluir el número de los extremos. Lo que manifiesta que reconocen el orden de los números en la recta numérica puesto que escriben el intervalo representado en la recta numérica en notación de intervalo, pero no logran establecer una relación de este mediante una desigualdad simultánea.

P_2 : Seleccione el conjunto solución de la inecuación $9 + x \geq 5(x + 1)$, representado en una de las rectas numéricas.



Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que encuentran la respuesta correcta solucionando la inecuación lineal, opción d.	27	75%
Tipo 2	Estudiantes que no solucionan correctamente la inecuación lineal, olvidando distribuir el número 5, u omitiendo propiedades de las desigualdades.	9	25%

Tabla 20. Tipos de respuesta Pregunta 2, Prueba II

Con relación a la pregunta dos, el 75% de estudiantes seleccionaron la opción correcta d , se observa que realizan el proceso de solución de la inecuación planteada y seleccionan la opción que coincida con la solución de la inecuación lineal. Esto manifiesta que al igual que en los puntos que implica solución de inecuaciones lineales, los estudiantes manipulan las inecuaciones de una manera mecánica utilizando la transposición de términos. A pesar de esto se puede resaltar que en ese proceso de solución ellos realizan el cambio de la desigualdad aplicando la propiedad correspondiente, lo que permite pensar que aunque no es explícito los estudiantes son conscientes de las propiedades de las desigualdades y la importancia que tienen dichas propiedades en el tratamiento de las inecuaciones lineales, posteriormente realizan una relación biunívoca entre la inecuación simple y una de las representaciones dadas en las rectas numéricas.

Con relación a los estudiantes que escogen cualesquiera de las otras opciones, se observa presentan errores al momento de solucionar la inecuación lineal, pues no diferencian la adición aritmética de la adición algebraica. En el ejemplo mostrado a continuación se observa que el estudiante realiza procedimientos que no son

necesarios, además la solución que obtiene al resolver la inecuación lineal no corresponde a ninguna de las opciones.

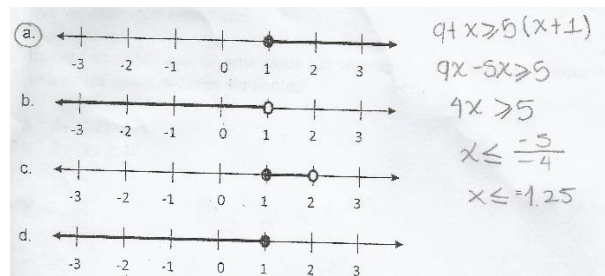


Ilustración 5. Ejemplo de respuesta, pregunta 2

De lo anterior se puede inferir que el estudiantes no comprende el proceso de adición entre monomios y números enteros, utilizando la transposición de términos, lo que impide la comprensión de inecuaciones equivalentes cayendo en el error de alterar la relación y encontrar un conjunto solución incorrecto. Pese a que el conjunto solución es incorrecto no logran establecer un cambio de representación del algebraico al gráfico.

P_3 : Seleccione la gráfica en la recta numérica, que representa el conjunto solución de $4 < 2x + 2 < 8$.

a.

b.

c.

d.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que encuentran la respuesta correcta solucionando la inecuación lineal que involucra doble desigualdad.	24	66.7%
Tipo 2	Estudiantes que no solucionan correctamente la inecuación lineal que involucra doble desigualdad, pues no aplican de manera adecuada las propiedades de las desigualdades	12	33.3%

Tabla 21. Tipos de respuesta Pregunta 3, Prueba II

Otra mirada a la solución de una inecuación lineal surge con la pregunta tres que a diferencia del ítem anterior esta involucra desigualdades simultaneas, en donde el 66.7% de estudiantes realizan el proceso de solución de la inecuación planteada, estos estudiantes aplican el proceso de transposición de términos para la resolución de dicha inecuación, después de haber encontrado el conjunto solución en su representación algebraica, establecen la relación de esta con una de las representaciones de intervalo dadas en cada una de las rectas numérica. Lo que manifiesta que los estudiantes manipulan las inecuaciones de una manera mecánica sin aludir a las propiedades de las desigualdades, además logran reconocer diferentes representaciones del conjunto solución de la inecuación planteada en el enunciado.

Sin embargo el 33.3% de los estudiantes no solucionan correctamente la inecuación lineal pues no aplican adecuadamente las propiedades de las desigualdades. A continuación se muestra la respuesta de uno de los estudiantes, donde se evidencia esta dificultad:

$$\begin{aligned}
 &4 < 2x + 2 < 8. \\
 &4 - 2 < 2x < 8 + 2 \\
 &2 < 2x < 10 \\
 &\frac{2}{2} > x > \frac{10}{2} \\
 &1 > x > 5. \\
 &x \in [1, 5]
 \end{aligned}$$

Ilustración 6. Ejemplo de respuesta, pregunta 3

De acuerdo a lo anterior es posible inferir que estos estudiantes confunden las propiedades de las desigualdades, tratando de adaptarla a situaciones que no corresponde, así como en eso de la propiedad uniforme y multiplicativa de las desigualdades, pues altera la relación agregando números diferentes en los extremos de la inecuación lineal y cambia el sentido de la desigualdad en un paso intermedio. Conjuntamente representan el signo “mayor que” con un intervalo cerrado, esta dificultad se considera como un error de procedimiento el cual se enmarca dentro de los errores que tienen origen en una ausencia del significado.

<p>P_4: Si el numerador de una fracción es $6x + 1$ y el denominador $21 - 4x$, para todo número que pertenece a los enteros entonces, seleccione los valores de x para los cuales el numerador es mayor que el denominador.</p> <p>a. $x > 0$ b. $x > 2$ c. $x < 2$ d. $x = 2$</p>			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que encuentran la respuesta correcta representando mediante una inecuación lineal la situación del enunciado y realizan la solución de la misma, otros encuentran la respuesta correcta asignando un valor a la variable y comprobando la respuesta con la información del enunciado.	29	80.5%
Tipo 2	Estudiantes representan mediante una inecuación lineal, la situación del enunciado pero no solucionan correctamente la inecuación.	2	5.5%
Tipo 3	Estudiantes que no realizan ningún procedimiento y marcan la opción b.	5	13.9%

Tabla 22. Tipos de respuesta Pregunta 4, Prueba II

En la pregunta 4, el 80.5% de estudiantes encuentran la respuesta correcta representando mediante una inecuación lineal la relación presentada en la situación del enunciado, realizando la solución de la misma y comprobando ésta solución con la información del enunciado, de esto se puede deducir que los estudiantes identifican el concepto de fracción pues asignan la expresión correspondiente el numerador y denominador respectivamente, al momento de realizar la “traducción” de la relación, segmentan el enunciado en sus partes significativas reconociendo la información pertinente que le permiten resolver el enunciado. De nuevo se puede observar que estos estudiantes, no hacen uso de las propiedades de las desigualdades para resolver la inecuación lineal, sino que utilizan un método escolarizado.

A diferencia del caso anterior, es de resaltar que solo el 5.5% de estudiantes representan mediante una inecuación lineal la situación propuesta en el enunciado, pero presentan dificultades para encontrar su solución debido a errores en la aplicación de las propiedades de las desigualdades; se presume que los estudiantes asumen que

sin importar el signo del coeficiente de la variable, siempre se debe cambiar el sentido de la desigualdad en el tratamiento de las inecuaciones lineales.

En síntesis se puede decir que de acuerdo a estos resultados, se pretende que los estudiantes obtengan un resultado coherente con las condiciones del problema, sin embargo el objetivo de estos es encontrar un procedimiento para llegar a una solución que no es necesario comprobar ya que el propio procedimiento justifica su validez.

P ₅ : Si al triple de un número se le resta diez unidades, resulta mayor que si al doble de este número se le suma cuatro unidades. Escriba el conjunto de los números que verifican este enunciado.			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que encuentran la respuesta correcta representando mediante una inecuación lineal la situación del enunciado $(3x - 10 > 2x + 4)$ y realizan la solución de la misma. Escriben el conjunto de los números que verifican el enunciado como la desigualdad $x > 14$.	29	80.5%
Tipo 2	Estudiantes que represente con una inecuación lineal la información dada en el enunciado, además toman un caso particular, en este caso $x = 10$: $30 - 10 = 20 + 4 = 24$	4	11.1%
Tipo 3	Estudiantes que escriben solamente un intervalo.	2	5.5%
Tipo 4	Estudiantes que no realizan ningún procedimiento.	1	2.8%

Tabla 23. Tipos de respuesta Pregunta 5, Prueba II

Por lo que se refiere a la pregunta 5, el 80.5% de estudiantes realizan la “traducción” del enunciado dado en lenguaje natural a la inecuación lineal equivalente en lenguaje algebraico seguidamente realizan el tratamiento a la inecuación lineal obtenida por medio de la transposición de términos encontrando el conjunto solución de esta inecuación, lo que parece indicar que estos estudiantes segmentan el enunciado en unidades significativas, en este caso numerales multiplicativos, variable, operaciones, números y relación de orden, después encuentran su símbolo equivalente en lenguaje algebraico llegando así a una expresión que representa el enunciado. Algunos

estudiantes no llegan al conjunto solución correcto debido a la ausencia de las propiedades de las desigualdades en el tratamiento de la inecuación.

De otro lado, el 11.1% de estudiantes escriben $30 - 10 = 20 + 4 = 24$, se asume que ellos escogen un número (diez), y realizan cada procedimiento que indica el enunciado, además consideran semejante la relación “mayor que” con la relación “igual que”, esto permite inferir que los estudiantes segmentan el enunciado en unidades significativas pero no logran relacionar símbolos equivalentes en lenguaje algebraico, además estos estudiantes no establecen diferencias entre las ecuaciones lineales e inecuaciones lineales.

Por otro lado el 5.5% de estudiantes no representa en lenguaje algebraico el enunciado, se limitan a dar un conjunto cualesquiera sin tener correspondencia con la situación presentada, lo que permite inferir por una parte que no identifican el procedimiento de cambiar de registro de representación.

P_6I_a : Inventa en cada caso, un enunciado (un problema) que pueda ser solucionado por cada una de las desigualdades siguientes:			
a. $3x \leq 21$			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que escriben enunciados de problemas que puede ser solucionado con la inecuación lineal propuesta, tales como: El triple de un número es menor o igual que 21.	28	77.7%
Tipo 2	Estudiantes que escriben enunciados que no pueden ser solucionados con la inecuación lineal propuesta.	4	11.1%
Tipo 3	Estudiantes resuelve la inecuación lineal.	1	2.8%
Tipo 4	Estudiantes que no realizan ningún procedimiento.	3	8.3%

Tabla 24. Tipos de respuesta Pregunta 6, ítem a, Prueba II

P_{6b} : Inventa en cada caso, un enunciado (un problema) que pueda ser solucionado por cada una de las desigualdades siguientes: b. $2 - 5y \geq 12$			
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
Tipo 1	Estudiantes que escriben enunciados que pueden ser solucionados con la inecuación lineal propuesta, tales como: Si a dos unidades se le resta cinco veces un número resulta mayor o igual que doce	21	58.3%
Tipo 2	Estudiantes que escriben: si a dos unidades se le resta cinco veces un número resulta mayor o igual que 12.	8	22.2%
Tipo 3	Estudiantes resuelve la inecuación lineal.	1	2.8%
Tipo 4	Estudiantes que no realizan ningún procedimiento.	6	16.7%

Tabla 25. Tipos de respuesta Pregunta 6, ítem b, Prueba II

Con respecto a la pregunta 6, el mayor porcentaje de estudiantes en ambos ítem, 77.7% y 58.3% respectivamente, encuentran enunciados problema que se pueden solucionar con la inecuación lineal presentada, que a diferencia de casos anteriores se hace un proceso inverso. Esto permite inferir que los estudiantes reconocen a la inecuación lineal como una herramienta para solucionar problemas, identificando las unidades significativas de la expresión algebraica y haciendo una “traducción” en lenguaje natural de lo que implica la inecuación en sí.

Dentro de las unidades significativas los estudiantes denotan diferentes caracterizaciones de la variable y a partir de ella designan las relaciones con las cantidades conocidas a los que la expresión se refiere.

3.4. ALGUNAS CONCLUSIONES: PRUEBAS I y II

Con relación a la parte I de la prueba se puede concluir que:

- Los estudiantes tienen una apropiación de las relaciones de orden, pero se presenta una gran dificultad en el manejo de los símbolos, pues tienden a confundir las relaciones dadas en lenguaje natural al escribirlas en forma simbólica, y más aún cuando deben articular dos desigualdades en una inecuación lineal.
- Algunos estudiantes consideran el hecho que para justificar una desigualdad como conjunto solución de una inecuación, es suficiente con reemplazar un valor en la variable, sin tener presente la relación establecida en la desigualdad, además de esto, no comprenden que el resultado de una inecuación no es un solo valor de la incógnita sino que es un intervalo.
- No reconocen los diferentes significados del uso de la variable, reflejando una insuficiencia en el desarrollo del pensamiento variacional. Estos diferentes usos se refieren a la variable utilizada como incógnita, otras como número generalizado y otras como una relación funcional, los cuales se encuentran a lo largo de la prueba y son necesarios para la comprensión de las situaciones.
- Es notorio que muchos estudiantes no superan ciertas dificultades propias de la aritmética, como lo son la aplicación de las propiedades distributivas y uniforme de los números reales y el uso de las reglas del signo.
- Por otro lado, un alto porcentaje de estudiantes reconocen el conjunto solución de una inecuación lineal en diferentes registros de representación. Tales como: el geométrico y algebraico.

- Con respecto a las preguntas que involucran desigualdades simultaneas, se puede notar que algunos estudiantes no aplican adecuadamente las propiedades de las desigualdades para la resolución de inecuaciones lineales, ni siquiera logran resolverla empleando la transposición de términos, que generalmente utilizan para la resolución inecuaciones lineales simples.
- Algunos estudiantes no establecen con claridad las diferencias entre los conceptos de ecuación e inecuación, consideran que las relaciones “mayor que” “menor que” e “igual que” son equivalentes, al utilizar los mismos métodos de resolución, con las claras implicaciones que tiene esto a la hora de interpretar las soluciones de las mismas.

CAPITULO IV: CONCLUSIONES GENERALES Y ALGUNAS REFLEXIONES DIDÁCTICAS



Al inicio del presente trabajo se planteó como uno de los objetivos principales, obtener a partir del análisis de la prueba diagnóstica algunas reflexiones y propuestas didácticas que logran repercutir en los maestros en formación y en ejercicio, consiguiendo que el aprendizaje de las inecuaciones lineales fuese adecuado, mejorando así el aprendizaje de las matemáticas. Por ello a continuación, se presentan las conclusiones generales del presente trabajo y algunas reflexiones didácticas.

4.1. CONCLUSIONES GENERALES

Las conclusiones surgen del análisis de los resultados obtenidos de la prueba diagnóstica y se presentan de acuerdo a los objetivos específicos del trabajo.

Con relación al primer objetivo específico en el cual se propone articular en una prueba diagnóstica enfoques documentados desde las perspectivas curricular, didáctica y matemática, sobre la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales en la escuela, se puede concluir:

- Desde la perspectiva curricular se observó en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006) la importancia que se le da al trabajo con ecuaciones lineales dejando de lado las inecuaciones lineales siendo esta última fundamental para el desarrollo del pensamiento numérico y variacional, pues no se encuentran explícitos subprocesos en los que interviene este concepto. Siendo los Estándares Básicos de competencias en matemáticas los criterios que permiten organizar los contenidos en el aula y como los maestros se rigen a estos criterios, no ven necesario profundizar en el estudio de las inecuaciones lineales.
- Desde la perspectiva didáctica se delimitaron los aspectos a evaluar en la prueba diagnóstica, tomando en consideración la documentación realizada por diversos autores evidenciando, las dificultades en común relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales, las cuales fueron ejes centrales. Estas dificultades son: Cambios de registro de representación; es decir pasar de un enunciado verbal a una expresión algebraica; La comprensión y el tratamiento que se les da a las inecuaciones lineales, ya que algunos estudiantes no establecen diferencias entre las ecuaciones lineales y las inecuaciones lineales; La comprensión en los conjuntos de solución, es decir la interpretación que se le da al resultado de una inecuación lineal.

- La perspectiva matemática permitió encontrar las articulaciones posibles entre las desigualdades e inecuaciones lineales, también sus elementos, sus procesos de solución, las propiedades, diferentes tipos de representación. Algunos de estos elementos fueron fundamentales para determinar el contenido matemático que se evaluó en la prueba diagnóstica.

Respecto al segundo objetivo, el cual hace referencia a la caracterización de dificultades y errores en estudiantes de grado noveno de Educación Básica sobre las desigualdades e inecuaciones lineales a través de la aplicación de una prueba diagnóstica, se puede concluir que:

- Los cambios de registro de representación del conjunto solución de las inecuaciones lineales se evidenció como una de las principales dificultades que presentan los estudiantes, particularmente en la “traducción” de enunciados no lineales donde el estudiante debe comprender la información de este y hacer una segmentación, encontrando las unidades significativas y estableciendo las relaciones que intervienen en función de la variable; como es el caso de enunciados que se representan mediante inecuaciones lineales con desigualdades simultáneas.
- A diferencia del caso anterior, en el cambio de registro de lenguaje geométrico al lenguaje algebraico se observó que la mayoría de los estudiantes reconocen y logran representar a través de inecuaciones lineales los intervalos presentados en las rectas numéricas, algunos de estos relacionan el concepto de infinito. Pero al igual que en el caso anterior se presentan dificultades para representar intervalos cerrados, es decir articular dos desigualdades en una sola inecuación.
- La ausencia de significado del concepto de inecuación lineal es uno de los principales problemas que hay en el tratamiento de estas, pues en las situaciones que se pide encontrar el conjunto solución de una inecuación lineal, los estudiantes emplean la transposición de términos siendo esta una resolución

escolarizada en la que no se promueve la comprensión y aplicación de las propiedades de las desigualdades. Además esto impide que el estudiante tenga una idea clara acerca de inecuaciones equivalentes, ya que es aquí donde se le da un contenido semántico a la inecuación lineal.

- Los errores de procedimiento encontrados en el análisis de los resultados son comunes en gran parte de los estudiantes, pues cuando realizan tratamiento a las inecuaciones lineales hacen un mal uso de las reglas conocidas, tratando de adaptarlas a este caso aunque no sean verdaderas en la situación que se está trabajando.
- A pesar de que gran parte de los estudiantes tienen apropiado la relación de orden y su representación, en algunos procedimientos, algunos estudiantes tienden a confundir el sentido de la desigualdad asignando símbolos no correspondientes a la relación planteada.
- Presentan dificultades para la distinción entre el tratamiento de las inecuaciones y el de las ecuaciones, es decir la única diferencia entre estas, es la relación que une ambos términos de las expresiones, realizando los mismos procedimientos para su resolución. Esto debido a que interpretan de una manera superficial el concepto de inecuación y las reglas que a estas rigen.
- Es alto el número de estudiantes que revelan ciertas dificultades en los procesos de pensamiento matemático, pues se encontraron errores propios de la aritmética, tales como las operaciones entre monomios, la aplicación de la propiedad distributiva o el uso de las reglas de signo, haciendo que la comprensión de conceptos como las desigualdades e inecuaciones en el que se necesita un manejo adecuado de estos conocimientos previos, se dificulte aún más.

4.2. ALGUNAS REFLEXIONES

Se reconoce que la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones en la escuela es un tema muy importante para que los maestros tengan en cuenta a la hora de enseñar en el aula de clase, por ello se proponen algunos elementos para que su aprendizaje sea privilegiado en el trabajo escolar:

- Desde el aspecto metodológico es necesario tener en cuenta que la manera de introducir la resolución de inecuaciones en la escuela, determina, en muchos casos su comprensión pues las técnicas tradicionales utilizadas por los maestros dejan de lado los elementos significativos que dan sentido a las inecuaciones. Estas se ven como un objeto estático, y ello conlleva a que los estudiantes operen de una manera semejante a las ecuaciones realizando un proceso de algoritmización. Por lo tanto una forma significativa y contextualizada para introducir las inecuaciones es presentar situaciones en donde se involucre contextos cotidianos para evidenciar la utilidad del concepto de inecuación y así motivar el aprendizaje de estas.
- Según los resultados encontrados en la aplicación de la prueba, los estudiantes presentan muchos errores propios de la aritmética como operaciones entre números enteros, aplicación de las propiedades de los números reales, operaciones entre monomios, etc. Para esto es importante que se presenten actividades que retomen estos conceptos previos los cuales deben ser comprendidos a profundidad para ser aplicado adecuadamente el concepto de inecuación lineal.
- Se pone de manifiesto que el uso de los diferentes registros de representación y su articulación, son necesarios para movilizar conocimientos y saberes de un objeto matemático, puesto que este tratamiento favorece procesos de generalización. Es por esto que el docente debería proponer situaciones que

promueva en los estudiantes los procesos de conversión entre las diferentes representaciones, pues de acuerdo al análisis de los resultados, los estudiantes no presentan dificultades para hacer “traducciones” lineales, pero se debe reforzar en la conversión donde se requiera comprender el enunciado y designar las relaciones de este, en función de la variable.

- El hecho de que los estudiantes relacionen con más facilidad un enunciado en su representación en lenguaje natural con una representación simbólica, puede aprovecharse para orientar a los estudiantes en el estudio del álgebra. Desde la perspectiva didáctica, tomando en consideración la invención de problemas, se puede aprovechar esta facilidad para que sean los estudiantes quienes propongan problemas a partir de enunciados dados en lenguaje algebraico y logren establecer una relación con una representación en lenguaje natural, y así abordar los diferentes cambios de registros de representación.
- En cuanto al trabajo con las relaciones de equivalencia sería conveniente que los docentes propongan a sus estudiantes situaciones que permitan desarrollar el pensamiento variacional, el cual es importante para que los estudiantes caractericen aspectos de variación, en cuanto a los diferentes usos de la letra. Esto se logra a través de la elaboración e interpretación de ciertas representaciones matemáticas –inecuaciones y desigualdades- que permiten tratar con situaciones de variación y dependencia en la resolución de problemas (MEN, 2006).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apóstol, T. (1988). *Calculus*. (14-20) Bogotá: reverté editores.

Barbosa, K. (2003). La Enseñanza de las Inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.*, 12, 47-68

Blanco, L., Garrote, M. & Hidalgo, J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma*, 46, 37-44.

Borello, M., (2010). Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Tesis de doctorado, Instituto Politécnico Nacional, México: CICATA-IPN.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Segunda edición. Traducción Vega M., 1999, Cali, Colombia.

Gatica, N., Maz, A., (2012). Estudio de inecuaciones de dos variables. Estudio de inecuaciones de dos variables. *Actas del XIV Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas "Diversidad y matemáticas"*.1-11

Maroto, A. (2013). Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. *Revista Educación*, 37, 1-16.

Ministerio de Educación Nacional, (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. MEN, Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional, (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciencias Ciudadanas*. Santa Fe de Bogotá Colombia.

Moraleda, C., (2010) Resolución de ecuaciones, inecuaciones e interpretación de soluciones. Tesis de grado. Master universitario de formación de profesores, Universidad de Granada, España.

Pochulu, M., Abrate, R. & Gabetta, I., (2012). ¿Qué comprenden de ecuaciones algebraicas los alumnos al finalizar la escuela secundaria?. *Clame*, 25, 291-299.

Rico, L. (1995). Errores y Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick. L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogota: Una empresa docente.

Santos, J., & Lozada, A. (2010). Una propuesta para la construcción de los conceptos desigualdad e inecuación mediante el modelo de situaciones didácticas y a partir del desarrollo de la solución de problemas.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Martin, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ice – Horsori.

Torres R. (2013) Aplicación del Enfoque Gráfico en la enseñanza de Inecuaciones: Una .revisión de la experiencia didáctica desde la perspectiva ontosemiótica. El cálculo y su enseñanza, 4, 83-102. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/

Velasco, M: (2011). Aprendizaje de las inecuaciones lineales con valor absoluto desde una perspectiva plurirregistro. Tesis de Magíster en Educación, Énfasis en Educación Matemática, Universidad del valle, Colombia.

Vrancken, S., Engler, A. & Müller, D. (2010). Inecuaciones algebraicas. Una experiencia didáctica articulando diversos sistemas de representación. *Yupana*, 5, 55-66.

Zill, D. (Ed.) (1992). Algebra y Trigonometría. Santafé de Bogotá, Colombia: Editorial McGRAW-HILL/INTERAMERICANA, S.A.