ANÁLISIS DE ALGUNAS DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DE LA SOBREYECTIVIDAD ASOCIADAS A LA CONVERSIÓN ENTRE LOS REGISTROS CARTESIANO Y ALGEBRAICO

Javier David Fernández Tenorio (0837549)

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
Santiago de Cali
2014

ANÁLISIS DE ALGUNAS DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DE LA SOBREYECTIVIDAD ASOCIADAS A LA CONVERSIÓN ENTRE LOS REGISTROS CARTESIANO Y ALGEBRAICO

Javier David Fernández Tenorio (0837549)

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física

Directora: Mg. Myriam Vega Restrepo

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
Santiago de Cali

2014

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

TÍTULO DEL TRABAJO:	Análisis de algunas dificultades en la comprensión de la sobreyectividad asociadas a la conversión entre registros cartesiano y algebraico
Se trata de:	*Proyecto* ☐ *Informe Final* ☒
Director:	Myriam B. Vega Restrepo
1er Evaluador:	Jorge Enrique Galeano Cano
2do Evaluador:	Luis Carlos Arboleda Aparicio.
Fecha y Hora	*Año:* 2014 *Mes:* Octubre *Día:* 02 *Hora:* 4:00 pm.

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	*Código*	*Programa Académico*
Javier David Fernández T.	0837549	3487

EVALUACIÓN					
Aprobado	☒	*Meritorio*	☐	*Laureado*	☐
Aprobado con recomendaciones	☐	*No Aprobado*	☐	*Incompleto*	☐

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de _________________ (máximo un mes)* ***ante****:*

Director del Trabajo	☐	*1er Evaluador*	☐	*2do Evaluador*	☐

En el caso que el Informe Final se considere ***Incompleto****, se da un plazo de máximo de _________________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:*

Año:	*Mes:*	*Día:*	*Hora:*

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

FIRMAS:

Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

OBSERVACIONES: X	**RECOMENDACIONES:** ☐	**RAZÓN DEL DESACUERDO – ALTERNATIVAS:** ☐

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

Se han presentado consideraciones que sin pretender alterar la versión actual, pueden contribuir a mostrar la importancia de continuar la reflexión epistemológica, didáctica, cognitiva sobre el aprendizaje de la sobreyectividad.

Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

Gdo

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

Universidad del Valle

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Análisis de algunas dificultades en la comprensión de la sobreyectividad asociadas a la conversión entre los registros cartesiano y algebraico

Autores:

Nombre: Javier David Fernández Tenorio Firma: C.C. 1143840427

Nombre: Firma: C.C.

Nombre: Firma: C.C.

Fecha: ____________

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

A Dios porque su diestra siempre me ha sostenido.

A mis padres que abnegadamente dedicaron su vida a hacer de mí un hombre de bien.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco a DIOS el Todopoderoso a quien debo mi vida, mi felicidad y quien me inspiró a tomar este camino, iluminando con su gracia cada paso que he dado hasta ahora.

A María Adelaida Tenorio, mi señora madre, quien con su amor y dedicación ha estado a mi lado en todo momento, ofreciendo incondicionalmente su apoyo moral y espiritual y sembrando en mí el amor por el estudio.

A mi señor padre Jairo Fernández ya fallecido, quien desde muy pequeño infundió en mí el deseo de superación personal y de afrontar con tesón las dificultades que pudiera encontrar en mi camino.

A mis queridos hermanos y hermanas y a la señora María Elda Prada quien ya no se encuentra entre nosotros. Sin su apoyo y aliento constante este sueño no habría llegado a hacerse realidad.

Al señor Santiago Salazar quien me ha dado su respaldo incondicional desde que comencé mis estudios.

Especialmente a la profesora Myriam Vega Restrepo cuya dirección y acompañamiento fueron esenciales para el desarrollo de este trabajo de grado.

Al profesor Luis Recalde Caicedo quien me ha alentado a aumentar mis habilidades matemáticas y cuyos aportes fueron indispensables para el fortalecimiento de este trabajo.

A los profesores Luis Carlos Arboleda y Jorge Enrique Galeano cuyas profundas observaciones aportaron al fortalecimiento de este trabajo de grado.

Al profesor Marino Sterling Duque mi profesor de matemáticas de la secundaria quien creyó en mis capacidades académicas desde el principio y cuyo ejemplo me motivó a seguir el camino de la enseñanza de las matemáticas.

A los estudiantes que voluntariamente aceptaron ser parte del estudio realizado.

A los profesores del Área de Educación Matemática quienes hicieron parte de mi proceso de formación académica y personal.

Finalmente, a todos mis compañeros y amigos, los cuales desde el principio han estado a mi lado alentándome a terminar de manera exitosa mis estudios universitarios.

A todos ellos mis más sinceros agradecimientos y bendiciones.

Javier David Fernández Tenorio.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

RESUMEN

El presente trabajo corresponde a un análisis de las dificultades que se presentan en la comprensión de la sobreyectividad como una propiedad de las funciones de variable real. Este análisis está fundamentado en los trabajos de Raymond Duval sobre la adquisición de conocimientos por medio de los registros semióticos de representación; se centra específicamente en la discriminación de unidades significantes en dos representaciones de las funciones de variable real: la representación analítica y la representación gráfica.

El trabajo se realizó con estudiantes de sexto y séptimo semestre de Licenciaturas en Educación Matemática. Se llevó a cabo en cuatro etapas que van desde la detección de dificultades al momento de enfrentarse a la definición, hasta la identificación de problemas en la discriminación de unidades significantes en cada registro.

Los resultados del análisis permitieron identificar varias dificultades en la comprensión de la sobreyectividad; presentamos algunos aportes que pueden ayudar al control de éstas. Además, los resultados también permitieron llegar a dos conclusiones importantes: primero, que la sobreyectividad no puede asumirse como propiedad trivial o que se genera de forma espontánea en los estudiantes; segundo, que el análisis semiótico puede extenderse a propiedades de los objetos y no solamente a los objetos mismos.

Palabras clave: sobreyectividad, registros semióticos, funciones, unidades cognitivamente pertinentes.

INTRODUCCIÓN

A partir del desarrollo de las investigaciones en torno al problema de la comprensión en matemáticas, es indiscutible la existencia de una pluralidad de representaciones para un mismo objeto matemático, cada una de las cuales da cuenta de forma particular de algunas de sus propiedades. No obstante, es muy común observar que muchos estudiantes se adhieran a una representación específica de dichos objetos, ya sea por comodidad en el manejo de las unidades que la conforman o porque no están conscientes de la existencia de otro tipo de representaciones.

Tal situación genera dificultades cuando al estudiante se le proponen tareas en donde tenga que trabajar con representaciones que no conoce o de las cuales no tiene manejo. Frente a esta situación ha surgido una postura que afirma que la comprensión de un objeto matemático requiere que se distingan variadas representaciones; más aún, es necesario que se pueda pasar de una representación a otra, operación cognitiva que requiere no solo conocer los sistemas semióticos en los cuales se forma cada representación del objeto en cuestión, sino además poder coordinarlos.

La Historia de las Matemáticas da un soporte a dicha postura mostrando la trascendencia de las representaciones en la constitución de un objeto matemático. Por ejemplo, la función como objeto matemático resultó de un proceso que inició en la búsqueda de la resolución del problema del área, para lo cual fue necesario establecer relaciones entre los elementos de las figuras geométricas (idea que dio lugar a la noción de lugar geométrico), expresar dichas relaciones por medio de ecuaciones y finalmente, llegar a comprender y tratar la dependencia de una cantidad respecto a otra que está sometida a variación. Todo este proceso permite concluir que es imposible pensar sobre el objeto función sin remitirse a sus representaciones.

Esto mismo pasa con las propiedades de la función. Por ejemplo la sobreyectividad, sobre la cual centraremos nuestra atención. Para una comprensión de ésta es necesario poder determinarla en cualquier representación en el que se muestre la función, según lo señalado anteriormente. No obstante, este proceso en algunos casos resulta abstruso puesto que una representación de una función puede estar configurada dentro de un registro, de tal manera que con las reglas de conformidad de dicho registro no se pueda extraer la información necesaria para determinar propiedades como la sobreyectividad.

Es necesario entonces un cambio de registro de representación para que el individuo pueda extraer dicha información y ampliar su conocimiento sobre la propiedad en cuestión. No obstante, este cambio no resulta ser inmediato en la mayoría de los casos debido a lo que

Duval (2004) reconoce como congruencia y no congruencia entre registros, es decir, un cambio de registro resulta ser más o menos difícil de efectuar dependiendo de qué tan congruentes sean las dos representaciones dadas en el registro de partida y de llegada.

Nuestro estudio pretende abordar algunas de las dificultades que emergen en la conversión de un registro a otro, enfocándonos en la sobreyectividad como una propiedad particular que cumplen algunas funciones (específicamente centramos nuestra atención en las funciones de variable real). Para ello hemos centrado nuestra atención en la conversión *gráfico cartesiano* → *expresión analítica*, en la cual se ven involucrados los registros cartesiano y algebraico, respectivamente.

Sin embargo, pese a que ambos registros resultan ser esenciales para el desarrollo de este trabajo, nos interesa resaltar el registro de la lengua natural, puesto que dada su cualidad de constituirse en "la organización semiótica por excelencia" según lo señala Benveniste (citado por Duval, 2002, p. 29), puede llegar a aportar a la detección y al control de las dificultades en la determinación de la sobreyectividad al interior de los otros dos registros ya mencionados.

Las descripciones y las explicaciones que los estudiantes dan en lengua natural permitirán caracterizar los elementos de una representación que son tomadas en cuenta para verificar una propiedad en una función en el registro algebraico y en el registro de los gráficos cartesianos. La identificación y análisis de dichos elementos en cada registro nos permitirá establecer su congruencia y examinar la forma en que ambos registros pueden ponerse en correspondencia.

De esta forma en el capítulo 1 presentamos el planteamiento de la problemática que motiva este estudio, así como los objetivos que hemos trazado para poder aportar a su análisis y posible control. Ofrecemos además una justificación de la importancia de este trabajo para la educación matemática enfocada específicamente en los procesos de enseñanza de las funciones de variable real y de sus propiedades.

En el capítulo 2 exponemos el marco de referencia conceptual sobre el cual se fundamenta nuestro estudio, dentro del cual consideramos dos tipos de aspectos: los aspectos matemáticos y los aspectos semióticos. En los aspectos matemáticos presentamos las nociones que preceden a la sobreyectividad desde una mirada conjuntista: relación, función y algunas de sus representaciones, etc. Finalmente presentamos varias versiones de la definición de sobreyectividad que fueron esenciales para nuestro análisis. En los aspectos semióticos damos cuenta de algunas nociones tales como registros y representaciones semióticas, operaciones cognitivas asociadas a dichos registros, la congruencia y no congruencia entre representaciones dadas en distintos registros, unidades significantes en los registros de representación que consideraremos, etc. Los aspectos semióticos se constituyen en la columna vertebral de nuestro análisis, ya que es por su medio que identificaremos y abordaremos el problema de estudio.

Más adelante, en el capítulo 3, describimos el marco metodológico que implementado para llevar a cabo nuestro trabajo. En este capítulo damos una descripción del grupo de estudiantes a los cuales se dirigió el estudio; luego presentamos las etapas en las cuales se realizó el trabajo y los instrumentos utilizados en cada etapa para la recolección y análisis de la información (encuestas y rejillas de análisis).

Posteriormente, en el capítulo 4 mostramos el análisis de las dificultades asociadas a la comprensión de la sobreyectividad desde varias perspectivas: desde las versiones de su definición y las vías de acceso que estas suscitan, la discriminación de las unidades significantes en cada uno de los dos registros considerados, y la discriminación de unidades cognitivamente pertinentes cuando aparecen ambos registros simultáneamente.

Finalmente, en el capítulo 5 presentamos las conclusiones que resultaron de todo este proceso de análisis de las dificultades cognitivas asociadas a la sobreyectividad a partir de los registros de representación, así como las implicaciones didácticas que resultan de este estudio como aporte a la educación matemática, específicamente al proceso de enseñanza de las funciones y de sus propiedades.

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DEL TRABAJO

El fin de todo discurso oído es este: teme a Dios, y guarda sus mandamientos; porque esto es el todo del hombre.

Eclesiastés 12:13

En este capítulo presentamos la problemática que pretendemos abordar en este trabajo y sus ubicación dentro de un contexto educativo, así como los objetivos que queremos alcanzar con miras a tratar dicha problemática. Además, ofrecemos una justificación que da cuenta de la pertinencia de los aportes de este trabajo en el control de las dificultades en la comprensión de la sobreyectividad.

Planteamiento del problema

Durante el proceso de enseñanza de las funciones en los niveles de educación secundaria o universitaria, resulta esencial para los estudiantes reconocer e identificar propiedades como la inyectividad, la sobreyectividad y la biyectividad[1], las cuales se establecen dependiendo de cómo estén relacionados los elementos del dominio y del codominio de la función.

La comprensión de estas propiedades de las funciones juega un papel decisivo en la comprensión de otros conceptos matemáticos un poco más avanzados, así que el análisis de las dificultades que se puedan presentar resulta indispensable para evitar problemas serios con temas más avanzados sobre funciones. Particularmente, la sobreyectividad presenta algunos inconvenientes que, aunque poco tratados, constituyen un claro fenómeno de lo que Duval ha definido en sus trabajos como no congruencia entre registros de representación semiótica.

Uno de tales inconvenientes tiene que ver con la dificultad que tienen los estudiantes al tratar de relacionar aquello que se da en la definición de una función sobreyectiva con algún procedimiento que pueda efectuarse en los registros de funciones de variable real. Por ejemplo, consideremos la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \notin Q \\ 0, & si \quad x \in Q \end{cases}$$

[1] Las funciones que cumplen con estas propiedades se denominan inyectivas, sobreyectivas y biyectivas, respectivamente.

¿Qué procedimiento analítico puede llevarse a cabo para determinar la sobreyectividad de dicha función? La definición indica que debe garantizarse que para todo elemento del contradominio exista al menos uno en el dominio que sea pre-imagen del primero, pero ¿cómo se garantiza analíticamente la existencia de dicho elemento en funciones cuya expresión analítica puede ser tan compleja como se quiera?

Complicaciones como la que se acaba de mencionar pueden tener un mayor impacto si la formación matemática de los mismos docentes no es muy fuerte en lo que a la determinación de la sobreyectividad concierne.

El contexto de este problema se ubica desde el mismo momento en que se da la definición de funciones inyectiva y sobreyectiva.

Las funciones inyectivas poseen la particularidad de que su misma definición induce siempre el mismo procedimiento para verificar la propiedad que debe cumplirse, sea que ésta se dé en la lengua natural o en la lengua formal de la teoría de conjuntos: partir de la igualdad de dos imágenes que están en el codominio, y llegar a la igualdad de los elementos del dominio asociados a estas imágenes.

Pero contrario a la inyectividad, la sobreyectividad no presenta la misma facilidad de interpretación y de manipulación, y sus formas de introducir bien sea en lenguaje natural o en el de la teoría de conjuntos, pueden llegar a generar problemas de interpretación aunque se aluda a la misma propiedad de las funciones.

Sea cual sea la forma en la cual se presente la definición de función sobreyectiva o sobreyectividad, el problema consiste en garantizar que dicha definición se satisfaga para cualquier función dada en cualquiera de sus representaciones, en nuestro caso las representaciones cartesiana y analítica. No obstante, al no ser explicitado en la definición un procedimiento transparente que pueda seguirse de la misma forma que pasa con la función inyectiva, las manipulaciones algebraicas que deben realizarse o los objetos que deben observarse en los gráficos cartesianos se convierten en procesos abstrusos para los estudiantes.

Esto conlleva a que se recurra a otros medios para explicar por qué una función particular se puede clasificar o no como sobreyectiva. La explicación en lengua natural de la sobreyectividad, el recurso a diagramas sagitales o la restricción al estudio de funciones que son continuas en todo su dominio y de fácil manipulación algebraica, son algunos ejemplos de estos medios alternos. Sin embargo, estas formas de abordar la sobreyectividad constituyen un intento bien intencionado (pero insuficiente) de encontrar una solución a la determinación de esta propiedad. ¿Cuál sería entonces la forma de abordar un problema en donde se solicite determinar si una función es o no sobreyectiva?

Para la comunidad matemática de la actualidad, la forma en la que se debe abordar un problema de este tipo ha de ser por medio del registro algebraico, es decir, debe tenerse a la mano la representación analítica de la función, ya que es por medio de esta que pueden desarrollarse procedimientos analíticos que son aceptados por los matemáticos de hoy. Sin embargo, el avance en este tipo de tratamientos no siempre se da en forma directa, puesto que no siempre la manipulación en un solo registro ofrece información significativa para desarrollar el problema. Esto se refleja cuando la representación analítica es tan compleja que su manipulación por procedimientos analíticos resulta muy difícil. Se hace necesario entonces el paso a otro registro, el cual permita obtener información que aporte al desarrollo del problema, a partir de la cual se puedan hacer modificaciones en el registro inicial en donde está situado el ejercicio.

De otro lado, también podría decirse que resulta evidente que es el registro de la lengua natural el que permite que los estudiantes no solo se familiaricen con la sobreyectividad, sino que también abre una vía por medio de la cual puedan expresar qué elementos identifican de una función particular para poder caracterizarla como sobreyectiva, lo cual puede resultar más abstruso en otros registros.

En este orden de ideas, las dificultades en la determinación de la sobreyectividad de una función remiten a la operación de conversión y a la actividad de coordinación de registros de representación. Por otra parte, es razonable considerar que estas dificultades pueden llegar a presentarse aún en los docentes de matemáticas, sobre todo cuando en su formación matemática no se ha hecho énfasis respecto a la sobreyectividad de una función.

De esta forma, reconociendo el papel que juega la formación matemática de los docentes en la comprensión por parte de un estudiante de un objeto matemático, el problema de estudio de este documento se inscribe en la siguiente pregunta:

¿Cuáles son algunas de las dificultades presentes en la comprensión de la sobreyectividad de una función, asociadas a la conversión entre los registros cartesiano y algebraico que presentan los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas?

Objetivos

Objetivo general

Caracterizar y analizar algunas de las dificultades que emergen en la comprensión de la sobreyectividad asociadas a la operación de conversión entre los registros algebraico y cartesiano por parte de un grupo de estudiantes de las Licenciaturas del Área en Educación Matemática de la Universidad del Valle.

Objetivos específicos

- Examinar las dificultades que emergen en la comprensión de la definición de sobreyectividad desde una interpretación formal y una interpretación a partir de los registros cartesiano y algebraico, por parte de un grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

- Reconocer las unidades significantes en cada registro que, en contraste con las descripciones de los estudiantes, son pertinentes para la determinación de la sobreyectividad.

- Identificar los valores visuales y categoriales que atañen a unidades cognitivamente pertinentes (a partir de las descripciones de los estudiantes), cuando ambas representaciones de la función en los registros cartesiano y algebraico aparecen simultáneamente.

- Examinar las implicaciones didácticas de ampliar el análisis de unidades cognitivamente pertinentes a la enseñanza de propiedades de las funciones como sobreyectividad, a través de la discriminación de unidades cognitivamente pertinentes en cada registro.

Justificación

El concepto de función ha sido objeto de estudio y pieza fundamental para el desarrollo de investigaciones en distintos campos de las matemáticas. Así mismo ha ocupado una cantidad importante de investigaciones en educación matemática, dado que su comprensión le permite al estudiante desarrollar habilidades en una gran cantidad de procesos que están relacionados con situaciones de variación en distintos contextos.

No obstante la multiplicidad y variedad de investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las funciones, se hace necesario enfocar la atención en las exigencias cognitivas con las que se encuentran los estudiantes que tratan de establecer si una función cumple con una propiedad determinada, por ejemplo, paridad, restricción, sobreyectividad, inyectividad, etc. No se puede pasar por alto que la comprensión de la función como objeto matemático está íntimamente relacionada con la comprensión de dichas propiedades.

En este orden de ideas, se hace necesario y pertinente realizar un estudio que centre su atención en aquellos fenómenos de tipo cognitivo que emergen en la determinación de algunas de esas propiedades.

Raymond Duval durante los últimos 20 años ha centrado sus estudios en la adquisición de los conocimientos matemáticos, con base en los cuales ha establecido que las dificultades en la comprensión de las matemáticas están asociadas con los problemas relativos a los cambios de registro de representación. Entre sus múltiples investigaciones destacamos, en particular, una dedicada a los procesos de conversión entre gráficos y ecuaciones (Duval, 1988), cuya réplica constituye una parte esencial de nuestro trabajo de grado.

Nos interesa en particular extender el análisis de Duval a una propiedad de las funciones conocida como sobreyectividad, la cual está asociada a la forma en que se relacionan los elementos de los conjuntos de partida y de llegada de una función.

La importancia de la comprensión de dicha propiedad radica en que se constituye en un fundamento primordial de otros conceptos matemáticos que son enseñados en cursos avanzados de educación superior, y que son esenciales para docentes de matemáticas en formación: las transformaciones lineales en espacios vectoriales, los homomorfismos de grupos y anillos, la equipotencia de conjuntos, etc.

Sin embargo, pese a la importancia de la sobreyectividad en la comprensión de conceptos matemáticos posteriores, puede darse el caso en que esta propiedad se asuma como trivial o eludible, limitando su comprensión al análisis de algunos ejemplos muy restringidos de funciones típicas (por ejemplo, funciones definidas en conjuntos finitos, funciones lineales o en general funciones continuas), a lo cual puede adicionarse el conformismo con un único registro de representación de dichas funciones aún por parte de los docentes.

Estas situaciones generan en el estudiante una idea muy limitada de la sobreyectividad, lo cual conlleva a dificultades cuando se encuentra con funciones exóticas o cuando el registro en el que se da la representación de una función particular sea distinto al que está acostumbrado a tratar.

A partir de la identificación y caracterización de algunas dificultades que surgen en el proceso de determinación de la sobreyectividad de una función por parte de docentes en formación, la relevancia de este trabajo radica entonces en mostrar que dicho proceso no es trivial, como se podría llegar a considerar, ni siquiera para individuos que tienen una interacción cercana con este tipo de propiedades de las funciones. Además, este trabajo muestra la posibilidad de ampliar el estudio hecho por Duval sobre la comprensión de los objetos matemáticos a través de los registros de representación, al estudio de las propiedades de dichos objetos, resaltando el papel que tiene la lengua natural en dicho estudio. Esto último podría ofrecer insumos para posteriores investigaciones en el campo de la educación matemática, específicamente en lo que tiene que ver con los estudios sobre propiedades de objetos a partir del análisis de los registros semióticos en los que estos se presenta.

CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Las matemáticas pueden ser definidas como aquel tema del cual no sabemos nunca lo que decimos ni si lo que decimos es verdadero.

Bertrand Russell

En este capítulo nos encargamos de presentar los fundamentos teóricos que se tendrán en cuenta para el análisis de la comprensión de la sobreyectividad de las funciones y de sus dificultades asociadas.

Para tal fin presentamos algunos antecedentes que Duval ha tenido en cuenta en torno al problema de las representaciones de los objetos matemáticos y de las actividades cognitivas que le son asociadas, tal como lo es la conversión. Acto seguido, presentamos los aspectos matemáticos que le permitirán al lector ponerse al corriente con la propiedad del objeto matemático que hemos decidido examinar. Finalmente, mostramos los aspectos semióticos que son el pilar central de nuestro análisis y que van encaminados a sustentar que los problemas en la comprensión en matemáticas se deben a una falta de gestión de la operación de conversión y a la falta de coordinación de los registros de representación.

Algunos antecedentes asociados a la comprensión de los objetos matemáticos

En el campo de la Educación Matemática ha surgido un paradigma asociado a la comprensión de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes. De acuerdo con Duval (2004) dicho paradigma está relacionado con la idea de que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Varias observaciones han surgido a partir de este argumento. Una de estas tiene que ver con los obstáculos de orden epistemológico que se generan cuando se asume que trabajar con la representación de un objeto es trabajar con el objeto mismo. En otras palabras, se piensa que la representación de un objeto da cuenta en forma absoluta del objeto representado. La otra postura tiene que ver con que no es posible llegar a la comprensión de un objeto sin un proceso de coordinación de sus diversas representaciones y sin una operación de conversión entre estas.

En el marco de este estudio se retoma una tercera postura referida por Duval, la cual sostiene que la comprensión de un objeto matemático requiere precisamente de un proceso de coordinación y una operación de conversión entre una variedad de registros asociados al mismo objeto, y que permiten diferenciarlo de sus representaciones. Esto quiere decir que una sola representación no da cuenta por sí misma de todo lo que atañe al objeto, pero ofrece información que articulada con la que ofrecen las otras representaciones permite llegar a una comprensión de éste.

De acuerdo con lo anterior, este trabajo se ciñe a la idea de que cada una de las distintas representaciones ofrece información parcial sobre un objeto matemático, por lo cual, contar con algunas de estas constituye una condición necesaria si se quiere avanzar al objetivo de su comprensión. Sin embargo, esta misma condición no es suficiente para alcanzar este objetivo. Si bien cada representación dada en registros distintos ofrece información particular del objeto, es necesario poder pasar de un registro a otro con el fin de que toda esta información se articule en una idea más amplia de lo que significa el objeto matemático. Sin embargo, esta operación de conversión y el proceso de coordinación entre registros no siempre se promueven en la enseñanza de un objeto matemático.

La conversión de la representación de un objeto dada en un registro a otra representación en otro registro, puede resultar más o menos inmediata dependiendo si las dos representaciones son o no congruentes entre sí. En otras palabras, una operación de conversión resulta ser más difícil para un individuo si las dos representaciones dadas no son congruentes; esto es, si no hay correspondencia semántica, univocidad semántica terminal o si no se puede establecer una organización de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas. Se retomarán estos tres criterios más adelante.

Puede notarse entonces que algunas de las dificultades en la conversión entre registros están asociadas a la congruencia y no congruencia entre las representaciones de un mismo objeto. En este documento se analizarán y caracterizarán algunas de esas dificultades para el caso particular de la determinación de la sobreyectividad de una función, tomando los registros cartesiano, algebraico y lengua natural, que son algunos de los que tradicionalmente se utilizan en la representación de las funciones.

Para el análisis de las dificultades que suscita la operación de conversión de una representación del objeto matemático en cuestión y el proceso de coordinación entre los registros considerados, se presentarán a continuación dos clases de aspectos: aspectos matemáticos y aspectos semióticos. Los aspectos matemáticos hacen referencia a las consideraciones formales de la sobreyectividad de una función (objetos matemáticos preliminares al objeto en cuestión, definición del objeto, convenciones de notación, análisis de esta propiedad para distintos tipos de funciones, incidencia en otros objetos matemáticos). Los aspectos semióticos refieren a la comprensión del objeto en cuestión, teniendo en cuenta los procesos de coordinación de registros y la operación de conversión entre cada uno de estos. A continuación se profundizará en cada uno de estos aspectos.

Aspectos matemáticos en torno a la sobreyectividad de una función

Para efectos de este trabajo es necesario aclarar que es la función el objeto matemático sobre el cual se centra nuestro interés, haciendo énfasis en una propiedad particular como lo es la sobreyectividad. De este modo, asumimos la función como un conjunto de parejas ordenadas que cumplen una condición determinada.

Sin embargo, la función como objeto posee otras versiones que otorgan un peso epistemológico distinto a este mismo objeto.

Por esta razón, es pertinente dar a conocer al menos una de estas otras versiones de la definición, con el fin de justificar nuestra elección de la versión conjuntista de este objeto matemático. Tales versiones resultan de un devenir histórico que comenzó a hacerse explícito en el siglo XVII y aún en la actualidad para algunos son consideradas como pertinentes. Presentamos entonces un breve recorrido histórico que permite dar cuenta de algunas de las versiones a las que hemos hecho referencia.

Algunos antecedentes históricos a la función

De acuerdo con Recalde (s. f.) la referencia a las funciones comienzan a hacerse en los trabajos de matemáticos del siglo XVII como James Gregory, Isaac Newton y Gottfried Leibniz. Cada uno le dio un matiz diferente a este nuevo objeto según el interés de sus trabajos, lo cual permitió que se definieran versiones distintas de la función.

Cada una de tales versiones fue acogida por otros matemáticos del siglo XVIII y del siglo XIX los cuales brindaron sus propios aportes para perfeccionar dicho objeto. Por ejemplo, la versión de Gregory que según Recalde (ibíd) hace referencia a la función como "una cantidad que se obtiene a partir de otras cantidades a partir de operaciones algebraicas o mediante otra operación", fue retomada por Euler y luego por Lagrange los cuales hacen referencia a la función como una expresión analítica, las cuales dan cuenta de forma general de la acción de obtener una cantidad por medio de otras operaciones.

Por otra parte, la interpretación de Newton que desde la física que aludía a la función como una relación de dependencia entre cantidades, fue retomada por Cauchy en su *Curso de análisis* de 1821.

Pese a que ambas se constituyen en versiones de la función, fue la interpretación de la "función como relación especial arbitraria" (Recalde, s. f., p. 5) la que se instituyó con el desarrollo de la teoría de conjuntos que se da a finales del siglo XIX, y que aún hoy día permanece vigente.

No obstante, la versión conjuntista no es la única que hoy día conserva su vigencia. Según Shílov (2004), en 1837 Dirichlet define una función como una correspondencia entre valores de dos variables. Específicamente, a cada valor de una variable x le corresponde un valor completamente determinado de la variable y. Esta versión que de acuerdo con Ferreirós (2003) aún permanece en uso, se refuerza con el desarrollo de las matemáticas contemporáneas a partir de la teoría de categorías, la cual interpreta la función como una aplicación o morfismo entre los objetos de una categoría, más que como conjunto de pares ordenados con una característica particular.

En este orden de ideas, podemos concluir que son dos las interpretaciones de la función que actualmente se utilizan en los desarrollos matemáticos: la interpretación categórica y la conjuntista.

El motivo de nuestra preferencia de la interpretación conjuntista se debe a que es a esta a la que se recurre en las matemáticas universitarias y, además, es en este sentido en el que se definen propiedades como la sobreyectividad, la inyectividad y la biyectividad de funciones. Veamos entonces algunas nociones alrededor de las funciones desde la teoría de conjuntos.

La función desde una mirada conjuntista

Muchas de las definiciones dadas en libros de texto especializados en matemáticas de nivel superior recurren a las parejas ordenadas para definir la función. Por ejemplo, una forma en la que se establece una función F es como "un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tienen el mismo primer elemento. Esto es, si $(x, y) \in F$ y $(x, z) \in F$, entonces $y = z$" (Apostol, 1989, p. 42).

En el mismo sentido, Jech & Hrbacek (1999) establecen que una relación binaria F es llamada función si aFb_1 y aFb_2 implica que $b_1 = b_2$, para cualquier a, b_1 y b_2. En otras palabras, una relación binaria F es función si y solo si para todo a en el *Dom F* existe exactamente un b tal que aFb (p. 23).

Sin embargo, pese a que las versiones que se presentaron anteriormente recogen varios aspectos del significado de función y le dan cierto nivel de formalidad, estas se dan en un lenguaje que no es propiamente matemático.

Para poder dar un soporte fuerte a las versiones anteriores y pasar a una versión aún más formal de la función como conjunto de pares ordenados, es necesario optar por una interpretación de los conjuntos como objetos que se definen y se rigen por un cuerpo axiomático definido para la Teoría de Conjuntos. Dicho cuerpo axiomático está conformado actualmente por los axiomas fundamentales propios de la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel: de extensionalidad, de pares, de conjunto potencia, de unión, de elección, de infinito, de comprensión, de reemplazo y de regularidad. Además, debe tenerse en cuenta la existencia del lenguaje propio de la teoría de conjuntos que permite enunciar la definición de función y de otros objetos matemáticos, a partir de nociones que sean previamente establecidas dentro del discurso matemático y que estén libres de cualquier carácter intuitivo. Dicho lenguaje permite formar expresiones por medio de la combinación de símbolos básicos y del uso de reglas de conformación que le son propios. Lewin (s. f.) caracteriza esos símbolos básicos:

1. Variables: x, y, z, X, Y, Z, asociadas a conjuntos con las últimas letras del alfabeto.

2. Constantes: a, b, c, A, B, C, asociadas a conjuntos fijos con las primeras letras del alfabeto.

3. Símbolo de pertenencia y no pertenencia: $\in, \notin$

4. Símbolo de igualdad: =

5. Conectivos lógicos: propios de la Lógica de predicados de primer orden implicación ($\rightarrow$), doble implicación ($\leftrightarrow$), Conjunción ($\wedge$), Disyunción ($\vee$), negación ($\neg$)

6. Cuantificadores: universal ($\forall$), existencial ($\exists$)

7. Paréntesis: (), usados como signos de puntuación (pp. 7-8).

Cualquier expresión de alguna noción dentro del lenguaje de la teoría de conjuntos resulta de una combinación de estos símbolos.

La función como noción matemática no escapa a este hecho. A partir de este lenguaje, Lewin (s. f.) enuncia que una relación[2] F (entre A y B) es una *función* si y sólo si $\forall x \forall y \forall z (((x, y) \in F \wedge (x, z) \in F) \rightarrow y = z)$ (p. 30).

Puede notarse que esta forma de escritura trasciende a un nivel de formalidad y abstracción más allá del recurso a cualquier expresión que tenga sentido en el lenguaje común y que es independiente de cualquier representación de la función.

Desde este momento, cualquier mención que se haga acerca de la función como objeto matemático hará referencia a cualquiera de las definiciones dadas anteriormente. La

[2] “Un conjunto R es una **relación binaria** si todos los elementos de R son parejas ordenadas” (Lewin, s. f., p. 24)

consideración de estas definiciones y de las representaciones que se dan de la función permitirá que en los aspectos semióticos se tomen en cuenta las posibles dificultades que subyacen a la sobreyectividad, y que emergen desde la concepción que un sujeto tiene de la función como objeto matemático y del manejo de sus múltiples representaciones.

Retomando las ideas de cada uno de los autores que definen la función: al ser una relación, posee dos componentes determinados por los conjuntos A y B a los que pertenecen los elementos x e y, respectivamente. Al conjunto A se le conoce como **dominio de la función** o conjunto de partida, usualmente denotado como $\mathcal{D}(F)$ o *Dom F*; al conjunto B se le conoce como **contradominio**, **codominio** o conjunto de llegada, y usualmente se denota por *Cod F*.

Es necesario aclarar que para que una relación sea función no es necesario que todos los elementos del contradominio estén relacionados con los del dominio; basta solamente con que un solo elemento del dominio no esté relacionado con dos elementos distintos del contradominio. Puede notarse que el contradominio posee un subconjunto formado por aquellos elementos que están directamente relacionados con los elementos del dominio. Usualmente a este subconjunto se le conoce como **rango** o **recorrido de la función** y se denota por *Ran F* o *R (F)*[3].

Por último, ofrecemos algunas notaciones que atañen a las funciones de variable real:

- Para denotar la dependencia de los elementos del codominio con los del dominio, se recurre a la notación $y = F(x)$. Esta escritura indica que y se obtiene a partir de x por medio de F.

[3] Como se había establecido anteriormente, a los elementos del rango se les conoce como **imágenes** de la función y a los elementos del dominio relacionados con las imágenes se les denomina **pre-imágenes** de la función

- La siguiente notación explicita los conjuntos que aparecen relacionados por medio de la función *F*:

$$\begin{aligned} F : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas notaciones, analicemos algunas representaciones de la función.

Formas de presentación de las funciones

Recalde et al. (2004), clasifican las distintas representaciones de la función. Distinguen así las representaciones simbólica-abstracta, algebraica, sagital, tabular, por pares ordenados definidos por extensión y comprensión, y la representación cartesiana.

La forma **simbólica-abstracta** consiste de la notación que indica la regla de formación a partir de los elementos del dominio, el cual está definido desde el principio. Por ejemplo, la función $F(x) = 2x$, tal que x es un número real. Aquí se indica cuál es la regla de formación y se explicita el dominio (los números reales).

La forma **algebraica** se obtiene a partir de ecuaciones con variables (generalmente x e y), despejando una en términos de la otra. Por ejemplo, de la ecuación $\frac{y}{x-1} = 2$, se obtiene la función $y = 2x - 2$, que se puede representar también como $F(x) = 2x - 2$.

Otra representación muy común es la representación **sagital**, que permite visualizar por medio de flechas la forma en que se relacionan los elementos del dominio y del codominio, facilitando la verificación de las dos condiciones que debe cumplir una función.

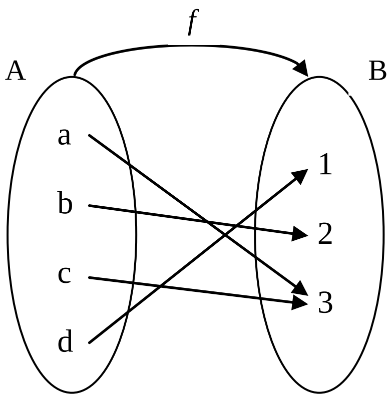


Gráfico 1. Representación sagital de la función *f*.

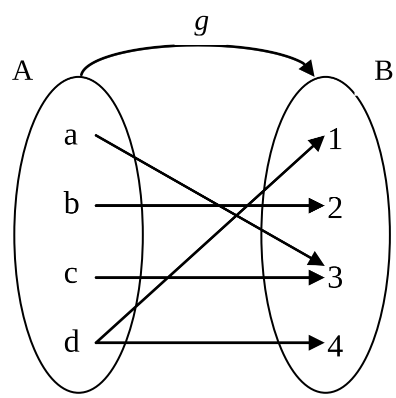


Gráfico 2. Representación sagital de una relación *g* que no es función.

El gráfico 1 permite ver que todos los elementos del primer conjunto solo están relacionados a través de *f* con un único elemento del segundo conjunto. El gráfico 2 permite analizar que existe un elemento del conjunto inicial relacionado con más de un elemento del conjunto final a través de *g*. Puede decirse entonces que *f* es función mientras *g* no lo es.

La forma **tabular** consiste en una tabla de valores de los cuales los valores de *x* corresponden a valores particulares del dominio, y los valores de *y* corresponden a valores del codominio. Por ejemplo:

X	a	b	c	d	e
Y	5	3	2	4	1

Tabla 1. Ejemplo de representación tabular de una función

X	a	b	b	c	d
Y	5	3	3	4	1

Tabla 2. Ejemplo de representación tabular de una relación.

Es visible que la tabla 1 representa una función mientras que la tabla 2 no.

La forma **de pares ordenados** presenta dos variantes. Por una parte, es posible representarla como un conjunto en donde se mencionan una por una las parejas ordenadas formadas por los elementos del dominio junto con el elemento del codominio con el cual están relacionados. Por ejemplo, sea $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{m, n, p\}$, el conjunto $F = \{(a, n), (b, p), (c, m)\}$ representa una función mientras que $G = \{(a, p), (b, n), (b, p), (c, m)\}$ no corresponde.

Por otra parte, es posible representarlas de forma general por medio de un esquema como el que sigue:

$$f = \{(x, y): y = F(x)\}$$

Es decir, todas las parejas ordenadas (x, y) que cumplan con una regla de formación $y = F(x)$ particular. Por ejemplo, $f = \{(x, y): y = x + 1\}$, representa a la función por medio de pares ordenados en donde y elemento del codominio se obtiene a través de sumar uno a cada elemento del dominio.

Estas dos variantes se reconocen como representaciones **de pares ordenados por extensión y comprensión**, respectivamente.

Por último, la forma **gráfica-cartesiana** de una función consiste de un trazo hecho sobre un plano cartesiano, formado por dos rectas perpendiculares conocidas como ejes coordenados. Dicho trazo se considera formado por puntos (así como cada eje coordenado), en donde cada punto corresponde a una pareja ordenada (x, y). Los valores de x e y son valores referenciales ubicados en los ejes horizontal y vertical, respectivamente.

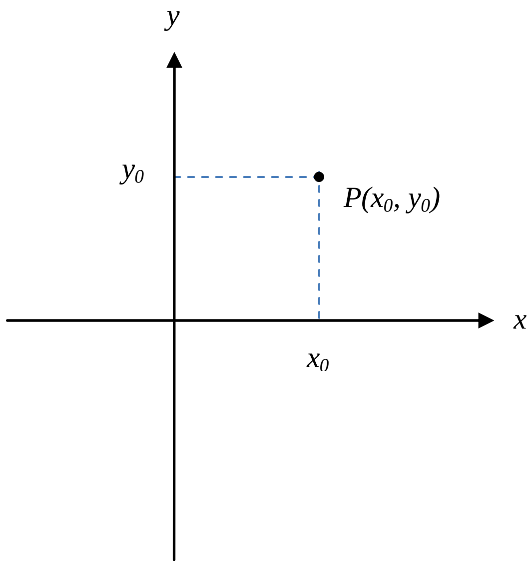


Gráfico 3. Representación cartesiana de un punto.

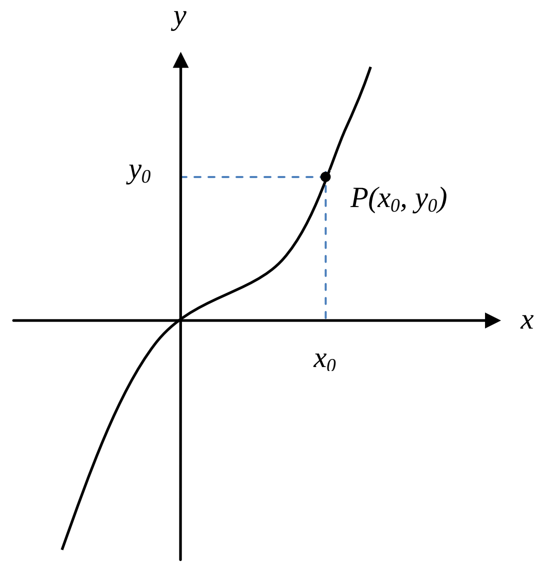


Gráfico 4. Representación cartesiana de una función.

Cada punto del trazo de la función se ubica de la misma forma que en el gráfico 3, de acuerdo a la regla de formación que exista para las parejas ordenadas como se analizó en la representación por pares ordenados (ver gráfico 4, p. 44).

Vale la pena comentar que pese a que las representaciones sagital, tabular y de pares ordenados por extensión permiten dar una mirada a la función, dicha mirada solo es posible a partir de lo finito y discreto, es decir, solo para un número finito de valores, los cuales no dan cuenta del resto de casos, que puede llegar a ser infinito.

Por el contrario, las representaciones algebraica, simbólica-abstracta, de pares ordenados por comprensión y cartesiana, permiten ampliar la visión tratando de abarcar casos continuos e infinitos. Esta idea permitirá pasar a un nivel un poco más formal de lo que se concibe en matemáticas como función y que dé cuenta de conjuntos finitos e infinitos.

De acuerdo con la forma en que se relacionen los elementos de la función, con la escritura en notación algebraica, con el comportamiento del gráfico de dicha función, se pueden establecer algunos criterios de clasificación de funciones que permitirán analizar algunas propiedades y características sobre las cuales es necesario tratar. Así, habiendo determinado lo que se concibe en matemáticas como función y cada uno de sus componentes y representaciones, se procederá a definir tres propiedades que cumple cualquier función: inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Lewin expresa estas tres propiedades en los siguientes términos.

Las funciones inyectivas

Intuitivamente la inyectividad o no inyectividad de una función consiste en determinar si algún elemento del contradominio de la función está relacionado con más de un elemento del dominio. Esta propiedad puede analizarse desde las distintas representaciones de la función. Analicemos algunas de éstas.

En la representación gráfico-cartesiana basta con observar si para un mismo valor en el eje vertical existen dos puntos en el trazo de la función que le correspondan. Esta verificación se hace usualmente a través del “criterio de la recta horizontal”, que consiste en dibujar una recta paralela al eje horizontal y verificar que en cualquier lugar del plano cartesiano corta al trazo de la función a lo sumo en un punto.

En la representación tabular basta con observar que dos de los valores de la variable independiente no tenga el mismo valor de la variable dependiente.

En el registro de pares ordenados (por extensión), basta con observar que no haya dos parejas que tengan la misma segunda componente.

Las representaciones algebraica y simbólica-abstracta poseen tratamientos similares. Basta con sustituir en la variable independiente de la función dos valores genéricos x_1 y x_2, e igualar las dos expresiones obtenidas. Luego, a través de la aplicación de operaciones y propiedades se debe llegar a la igualdad de los valores dados. Por ejemplo, sea $f(x) = x + 1$.

Sustituyamos x por x_1 y x_2. Obtenemos entonces $f(x_1) = x_1 + 1$ y $f(x_2) = x_2 + 1$.

Igualando ambas expresiones se obtiene $x_1 + 1 = x_2 + 1$.

Aplicando propiedad uniforme de la suma y el opuesto aditivo se obtiene finalmente que $x_1 = x_2$.

En cada caso se puede notar que para que una función sea inyectiva debe verificarse que para elementos distintos del dominio corresponden elementos distintos del rango, o equivalentemente, que si un elemento del rango está relacionado con dos elementos del dominio, éstos últimos son iguales.

Esta idea permite el paso a una definición formal de la inyectividad usando el lenguaje de la teoría de conjuntos:

Sea $F: A \to B$, donde A y B corresponden al dominio y codominio de F, respectivamente, se dice que F es **inyectiva** o uno a uno (1-1) si:

$\forall x_1 \forall x_2 (F(x_1) = F(x_2) \to x_1 = x_2)$, donde $x_1, x_2 \in A$ (Lewin, s. f., p. 31)

Las funciones sobreyectivas

De primera mano, la sobreyectividad consiste en establecer si cada elemento del codominio está relacionado por lo menos con un elemento del dominio, es decir, que no puede quedarse ningún elemento del codominio sin relacionarse.

En la representación gráfica-cartesiana esto puede determinarse por medio de la recta horizontal, observando si dicha recta corta al trazo de la función por lo menos en un punto, teniendo en cuenta a partir de qué punto del eje vertical está definido el gráfico de la función.

En la representación tabular basta con observar si algún dato en las casillas del contradominio se queda sin un valor en el dominio. Similarmente, en el registro sagital basta con mirar si en el contradominio se quedan elementos sin relacionar con elementos del dominio por medio de flechas.

En la representación algebraica la determinación de la sobreyectividad es un poco más complicada que en el resto de representaciones, ya que existen expresiones analíticas cuyo manejo algebraico resulta ser muy engorroso.

La idea intuitiva que se dio de sobreyectividad puede verse en otros términos a partir de la igualdad del contradominio y el rango de la función. De hecho, para que ningún elemento del codominio se quede sin estar relacionado con algún elemento del dominio, es necesario que todos los elementos del primero sean imagen de los elementos del segundo. A continuación se dan varias definiciones de sobreyectividad:

- "Se dice que una función es sobreyectiva (o que f aplica A sobre B) si cada elemento de B es la imagen por la función f de algún elemento de A" (Munkres, 2002, p. 20).
- "Una función es suprayectiva cuando el rango es igual codominio" (Becerra, 2004, p. 20).

En general, dentro del lenguaje de la Teoría de Conjuntos puede darse una definición más formal de la sobreyectividad:

- De acuerdo con Lewin (s. f.), se dice que una función F es sobreyectiva si:

$$\forall y(y \in B \rightarrow \exists x(x \in A \wedge y = F(x)))$$ (p. 31)

Al igual que en el caso de la noción de función, cualquier mención que se haga de sobreyectividad o de función sobreyectiva hará referencia a cualquiera de estas definiciones.

Nótese que en ninguna de las definiciones se explicita la naturaleza de los conjuntos de partida y de llegada. Esto quiere decir que los elementos que se ponen en correspondencia pueden llegar a ser de distinto tipo: puntos de una recta, números, matrices, polinomios, etc.

Sin embargo, en este trabajo se centrará especial atención a un tipo particular de funciones: las funciones de variable real, es decir, aquellas funciones cuyos conjuntos de partida y de llegada respectivamente resultan ser subconjuntos del conjunto de los números reales.

La razón por la que se hace énfasis en las funciones de variable real obedece a varios factores. Por una parte, es este tipo de funciones el cual está considerado dentro de muchos de los currículos en los distintos niveles de educación. Por otra parte, tiene que ver con la estrecha relación que existe entre el conjunto de los números reales y la representación cartesiana por medio de ejes coordenados perpendiculares. Esta relación es consecuencia del vínculo existente entre el continuo numérico (determinado en su totalidad por los números reales) y el continuo geométrico del cual línea recta es su principal prototipo, el cual a su vez hace parte de la representación cartesiana de las funciones.

Habiendo analizado algunos de los aspectos matemáticos involucrados en torno a la sobreyectividad de una función, se dará paso al análisis *a priori* de todo lo relacionado con las representaciones de las funciones sobreyectivas asociadas a los registros de representación de interés de este trabajo.

Aspectos semióticos en torno a la sobreyectividad de una función

En los aspectos matemáticos descritos anteriormente, la existencia de múltiples definiciones da lugar a múltiples interpretaciones de una función. La interpretación de la sobreyectividad y las dificultades que en su determinación surgen, dependen entonces de la forma en la que se asume el concepto de función. De esta forma, para analizar aquellos fenómenos asociados a la comprensión de la sobreyectividad en el marco de los registros de representación, es necesario analizar los aspectos semióticos ligados a la función y a sus distintas representaciones.

Por esta razón, se ofrecerán algunos presupuestos teóricos que fundamentan el análisis semiótico de la función sobreyectiva, siguiendo la perspectiva de Duval sobre los registros semióticos.

Representaciones semióticas y registros semióticos de representación

En la actualidad según lo señala Duval (2004b), todo estudio relativo a la adquisición de algún tipo de conocimiento debe recurrir a la noción de representación. No obstante, dicha noción ha sido interpretada de tres formas distintas en tres contextos distintos. La interpretación que es adoptada por el mismo Duval, y que interesa en este trabajo se da en el marco de la adquisición de los conocimientos matemáticos, y es asumida como **representación semiótica**.

Para poder definir lo que se concibe como representación semiótica, Duval (2004) propone una clasificación de las distintas representaciones. Distingue de esta forma cuatro tipos de representaciones, en el marco de lo que él reconoce como las oposiciones clásicas interno-externo y consciente-no consciente. A partir de esto, se definen las representaciones semióticas como representaciones que "a la vez son representaciones conscientes y externas… y que permiten una 'mirada' al objeto a través de la percepción de *estímulos* que tienen el valor de *significantes*" (Duval, 2004b, p. 35).

De acuerdo con lo anterior, una representación semiótica es la que le permite a un individuo hacer parte de su consciencia aquella información de la cual no era consciente en un primer contacto con el conocimiento que se quiere aprender; dicha acción de consciencia se lleva a cabo en medios que son perceptibles para el individuo por medio de sus sentidos.

Por una parte, para que una representación permita dar una "mirada" al objeto requiere del empleo de signos que, de alguna forma, adquieren significado para aquel que los percibe. Por otra parte, dicha adquisición de significado se da de acuerdo al tipo de signos que se esté empleando, y que a su vez depende del contexto o contextos socioculturales en el que el individuo se encuentre.

Dicha tipificación de signos está directamente relacionada con lo que Benveniste reconoce como **sistemas semiológicos** o **sistemas semióticos**. Cada uno de estos sistemas posee reglas de formación de representaciones que le son propias y que lo diferencian de los otros sistemas. En cada sistema, cada signo se constituye en una unidad significante que en conjunto con otras unidades y respetando las reglas de conformidad del sistema, configuran una representación de un objeto. Ahora bien, la conformación de una representación en un sistema semiótico determinado requiere de un medio físico a través del cual pueden ser comunicadas con otros individuos y modificadas con el fin de extraer información adicional sobre el objeto representado. Así la representación queda plasmada en un medio que es perceptible por otros individuos y susceptible a modificaciones.

Teniendo en cuenta lo anterior, Duval establece la existencia de un tipo particular de sistemas semióticos los cuales no solo permiten formar nuevas representaciones a través de nuevas configuraciones de signos del sistema, sino que también permiten hacer dos tipos de transformaciones de una representación en otra: una de estas transformaciones se da al interior de un mismo sistema y la otra pasando de un sistema a otro. Duval explicita que no todos los sistemas permiten llevar a cabo estas tres actividades. Aquellas que sí lo permiten se conocen como **registros semióticos de representación o registros de representación semiótica**. Estas actividades que permiten los registros se conocen respectivamente como formación, tratamiento y conversión de representaciones. A continuación ampliamos más sobre el asunto.

Formación, tratamiento y conversión de representaciones semióticas

Después de fundamentar lo que se entiende por representación semiótica, Duval (2004b), define tres actividades cognitivas de la representación ligadas a la semiosis: la formación de representaciones semióticas, el tratamiento de dichas representaciones en un mismo sistema semiótico, y la conversión de dichas representaciones desde un sistema semiótico inicial a un sistema final.

La formación de representaciones semióticas remite a la configuración de un conjunto de signos en una unidad, de tal forma que permita una mirada al objeto por medios físicos y no solamente mentales. El tratamiento se constituye en un proceso mediante el cual un individuo busca obtener determinada información, a través de modificaciones de una representación inicial, sin recurrir a otros signos diferentes a los del sistema semiótico en el que se ofrece la representación inicial, es decir, manteniéndose en el mismo sistema.

Por su parte, la conversión de representaciones semióticas requiere de dos sistemas, de los cuales uno se constituye como registro inicial (en el que se da inicialmente la representación del objeto) y el otro corresponde al registro final, al cual se desea llevar la representación. La conversión es entonces aquella actividad que permite transformar una representación dada en un sistema en otra representación dada en otro sistema.

La actividad de conversión y sus problemas específicos

Como lo menciona Duval (2004b), la actividad de conversión de una representación de un objeto consiste en la formación de otra representación por medio de un cambio de registro, con el fin de obtener información que no es posible percibir en el registro inicial, dada la diferencia de los sistemas semióticos en los que se enmarca cada registro; dicha diferencia radica, por una parte, en la naturaleza de los signos considerados en cada sistema (líneas, números, etc.), y por otra en las reglas que rigen la forma en la que se configuran tales signos para que se entiendan como la representación de algo en dicho sistema.

Apoyado en sus investigaciones, Duval señala reiteradamente que la actividad cognitiva de conversión es la menos espontánea y de más difícil adquisición, y esto debido a varios factores. Por una parte, no existen reglas de conversión como sí ocurre con las reglas que se establecen en la actividad de tratamiento las cuales sí están definidas al interior de cada sistema.

Por otra parte, en el contexto educativo se fomentan con mayor insistencia la formación y tratamiento que la conversión; esta última actividad se efectúa solo en términos de economía de tratamiento, en otras palabras, su uso se remite únicamente a facilitar procedimientos que se tornan abstrusos en determinados registros o, en otros casos, esta actividad permanece ausente en el proceso de enseñanza.

En términos de las representaciones semióticas, Duval menciona que las dificultades en la conversión tienen que ver con lo que él denomina fenómenos de **congruencia y no congruencia**[4] entre registros de representación semiótica. Define además en este contexto tres criterios que permiten establecer cuándo dos registros de representación son congruentes o no. Los tres **criterios de congruencia** son:

- La posibilidad de correspondencia semántica entre los elementos significantes. Es decir, que a partir de la representación dada en un registro inicial, cada uno de sus elementos constitutivos pueda ponerse en relación con los elementos de otra representación del mismo objeto matemático en otro registro, y que además tengan igual significancia al interior de cada representación.
- Univocidad semántica terminal. Una misma unidad significante en un registro solo puede estar en correspondencia con una y solo una unidad significante dada en el otro registro.

[4] Se habla de **congruencia** entre dos representaciones de un mismo objeto en registros distintos cuando el paso de una a la otra se da de forma casi natural o espontánea. En caso contrario se habla de **no-congruencia** entre dichas representaciones (Duval, 2004b).

- El orden de arreglo de las unidades que componen cada representación. Este criterio refiere a que la forma en la que se interioriza las unidades que se ponen en correspondencia debe darse "en el mismo orden de las dos representaciones" (Duval, 2004b, p. 53).

Dos representaciones serán congruentes cuando se verifican los tres criterios. La no congruencia puede darse en mayor o menor grado, dependiendo de la cantidad de criterios que se dejen de cumplir y de los criterios mismos. Así pues, puede hablarse de grados de no congruencia entre representaciones semióticas, que dependen de los criterios que no se cumplen.

La coordinación entre registros de representación semiótica

De acuerdo a lo considerado anteriormente, la conversión resulta ser la actividad que le permitirá a un individuo llegar a la comprensión del contenido conceptual, pues le permite obtener información sobre dicho contenido en cada registro y que no está presente en los otros.

Pero la actividad de conversión tiene sentido por la existencia de múltiples registros para un mismo contenido. Por lo tanto, dicha actividad presupone varias cosas: primero, que el individuo sea consciente de la existencia de una variedad de representaciones para un mismo objeto en diferentes registros; segundo, que pueda manejar, desenvolverse en cada registro por separado, obteniendo toda la información que se pueda del objeto en cada uno; y por último, que pueda establecer una correspondencia entre las unidades constitutivas de las representaciones que den cuenta del mismo contenido en registros distintos, teniendo consciencia de que los cambios en una de las representaciones tienen efectos en la otra representación en su respectivo registro.

Los tres aspectos mencionados son características propias de lo que Duval reconoce como **coordinación de los registros de representación semiótica**.

La coordinación según Duval (2004b) se constituye en una consecuencia directa de la actividad conceptual[5] de la cual el individuo debe tomar consciencia para poder llevar a cabo una actividad semiótica como lo es la conversión, en otras palabras, la coordinación precede a la conversión.

Esto quiere decir que para poder que la coordinación se lleve a cabo, es necesario que los estudiantes puedan identificar de forma consciente la información del objeto que se puede extraer de una representación en un registro dado, para después conjugarla con la información que se extraiga en otro registro y darse una idea más completa del objeto matemático. Claro está que esta información se recoge a partir de la significación que toma cada unidad significante en cada representación del objeto. Este proceso permite que se efectúen cambios de registro en donde cada unidad significante en una representación se corresponda con otra que tenga igual significancia.

Sin embargo, la coordinación y la conversión requieren de la discriminación de unidades significantes dentro de cada uno de los registros considerados. Esto se hace evidente en la tercera característica de la coordinación que mencionamos anteriormente que hace referencia a la puesta en correspondencia de dichas unidades en registros semióticos

[5] Se le otorga el carácter de consecuencia de actividad conceptual ya que requiere de una apropiación previa de la significación que tiene cada unidad en un registro determinado.

diferentes. Tal puesta en correspondencia requiere que se hayan identificado las unidades que son pertinentes en cada registro.

Duval explicita que es este proceso de discriminación de unidades el que se requiere para que se pueda llevar a cabo la coordinación y conversión de representaciones, más aún, señala que debe ser un “objeto de aprendizaje específico” (Duval, 2004b, p. 76).

Dado que nuestro interés es analizar la comprensión de la sobreyectividad como propiedad de las funciones a partir de los registros de representación, gran parte de este análisis se centra en identificar aquellas unidades significantes de las representaciones de las funciones en los registros cartesiano y algebraico que los estudiantes tienen en cuenta para la determinación de tal propiedad. Es en este punto en donde nuestra apuesta a la lengua natural se hace definitiva, pues se constituye en una herramienta que permitirá hacer dicha discriminación en cada registro. A continuación presentamos los fundamentos teóricos que nos permitirán hacer tal discriminación en cada registro.

Unidades visuales[6] en el registro cartesiano

Las representaciones gráficas pueden involucrar cualquier cantidad de unidades visuales que pueden discriminarse a partir de las dos figuras que, de acuerdo con Duval (s. f.), conforman dichas representaciones: la figura-fondo, compuesta por los ejes coordenados con sus respectivas graduaciones; la figura-forma, definida por el(los) trazo(s) que se hacen sobre la figura-fondo.

[6] Se conoce como **unidades visuales** a las unidades significantes que conforman una representación de un objeto en el registro de los gráficos cartesianos. Análogamente, se conocen como unidades simbólicas a las unidades significantes que conforman una representación en el registro algebraico.

Sin embargo, no todas las unidades visuales que puedan distinguirse en la representación cartesiana son tomadas en cuenta para los distintos objetos matemáticos. Tal elección depende de la pertinencia que tengan dichas unidades para el estudio de propiedades definidas para un objeto matemático en particular.

Es en esa discriminación de unidades visuales cognitivamente pertinentes que, según Duval (s. f.), está basado el problema de la comprensión de las representaciones cartesianas, la dificultad en la actividad de conversión y por ende, en la comprensión del objeto en cuestión.

Ahora bien, para realizar tal discriminación Duval pone las unidades que componen la representación cartesiana en términos de **variables y valores visuales pertinentes**[7].

Las variables visuales para el caso de las funciones corresponden a una determinación cualitativa de elementos y características del gráfico cartesiano que son susceptibles de transformaciones, por ejemplo, el desplazamiento del gráfico, la extensión, concavidad en algunos casos, simetría, intercepciones con ejes coordenados, etc.

Los valores asociados a dichas variables se determinan dependiendo del tipo de gráfico cartesiano y que a su vez depende del tipo de función considerado; además, los "los valores visuales (…) son **valores oposicionales**" (Duval, s. f., p. 7). Desplazamiento horizontal o vertical, extensión acotada o no acotada, concavidad hacia arriba o hacia abajo, simetría horizontal o vertical, puntos de intercepción con los ejes (ninguno, uno o varios), son ejemplos de valores de las variables antes mencionadas.

[7] Es necesario resaltar que para la construcción teórica alrededor de las representaciones cartesianas, Duval se restringió a un tipo particular de gráficos cartesianos: los que resultan de las funciones lineales y afines, es decir, la línea recta en el marco de la geometría analítica.

Todas estas variables y valores visuales pueden determinarse casi en la totalidad de las representaciones cartesianas de las funciones. No obstante no todas resultan ser pertinentes para el estudio de tal o cual propiedad de las funciones.

Para poder reconocer cuál de todas esas variables y valores visuales resultan ser pertinentes, se hace necesario tomar en cuenta otro registro el cual pueda representar las funciones. Acto seguido, deben ponerse en variación la mayor cantidad de valores visuales posibles, analizando qué cambios se dan en el otro registro o, más precisamente, qué unidades significantes de la representación de una función en el otro registro se ven alteradas a partir de tales variaciones.

Naturalmente, dichas variaciones dependerán de la propiedad de las funciones que se esté analizando y del tipo de funciones que se estén considerando (lineales, cuadráticas, continuas, discontinuas, etc.).

El otro registro que Duval considera en sus investigaciones y el que nosotros también tendremos en cuenta es el que refiere a las ecuaciones o también llamado algebraico. A continuación damos una descripción de las unidades significantes que conforman dicho registro.

Unidades simbólicas en el registro algebraico

Las funciones en el registro de los gráficos cartesianos resultan de la yuxtaposición de signos de distinto tipo: signos relacionales (=, <, >,…), signos operacionales (+, -), símbolos de variable, de constante y de exponente, entre otros. No obstante dicha yuxtaposición de signos no se hace de forma arbitraria. Existen reglas de conformidad que permiten que una expresión resultante sea la representación de algo; sin embargo, no es de nuestro interés profundizar en dichas reglas.

Lo que en realidad queremos resaltar del hecho de que las funciones puedan representarse como expresiones algebraicas es que “cada símbolo constituye una unidad significativa” (Duval, 1988, p. 127). No obstante, es necesario analizar cómo dichas unidades se interpretan como pertinentes para la determinación de una propiedad de un objeto matemático como la función.

Dicho análisis se debe realizar a partir de otro registro de representación, ya que la representación algebraica de una función no dice nada por sí misma dada la naturaleza de los símbolos que la conforman. Un registro que resulta práctico para el análisis es precisamente el registro cartesiano, dada su cualidad de permitir una visualización de lo que se estudia, en este caso, las funciones.

Valores visuales pertinentes y valores categoriales

De acuerdo con Duval (s. f.), es la asociación de los valores visuales con las unidades simbólicas lo que permite discriminar cuáles de dichos valores resultan ser pertinentes en la determinación de tal o cual propiedad de las funciones. De este modo, las unidades simbólicas que puedan asociarse al algún valor visual se traducen como **valores categoriales**, que también resultan ser valores oposicionales.

A partir de la asociación que se haga de los valores visuales de la representación cartesiana de una función, la pertinencia de un valor visual está determinada según Duval por el siguiente hecho: “la modificación de un valor visual en el registro gráfico provoca una modificación del valor categorial en la escritura algebraica” (Duval, s. f., p. 9). Dicho de otra forma, “los valores visuales pertinentes son aquellos cuya variación acarrea un cambio del valor categorial en la ecuación correspondiente” (Duval, s. f., p. 12)

Es este acto de discriminación de unidades cognitivamente pertinentes propuesto por Duval, el cual se constituye en el derrotero de nuestro análisis de la comprensión de la sobreyectividad y de sus posibles dificultades. Puede notarse que la discriminación de valores visuales y, por tanto, de unidades cognitivamente pertinentes se hace teniendo en cuenta la conversión en el sentido *gráfico cartesiano → expresión analítica*. Esto es importante ya que es este sentido de la conversión la cual se constituye como cognitivamente más productiva que el pasaje inverso, y esto debido a que es más la información que puede ofrecer el gráfico a la expresión analítica que viceversa.

CAPÍTULO 3. ASPECTOS METODOLÓGICOS DEL TRABAJO

Nunca consideres el estudio como una obligación, sino como una oportunidad para penetrar en el bello y maravilloso mundo del saber.

Albert Einstein

En el presente capítulo damos cuenta de los fundamentos metodológicos que permiten realizar el análisis la comprensión de la sobreyectividad y algunas de sus dificultades asociadas, así como del papel que tiene la lengua natural tanto en su identificación y caracterización como en su control.

Inicialmente realizamos una caracterización de la población escogida para el estudio. Luego presentamos los instrumentos utilizados para la recolección de la información en cada una de las etapas en que se desarrolló el trabajo. Por último, presentamos los instrumentos para el análisis de los resultados obtenidos en cada etapa (rejillas de análisis), dando una explicación del funcionamiento de cada una de manera que se pueda hacer una lectura ágil y apropiada en cada caso.

Caracterización de la población y de la muestra escogida

Con el fin de mostrar que los problemas de la determinación de la sobreyectividad persisten en los niveles de educación superior, sin importar qué tan cercano es el contacto con la funciones, este estudio se dirigió a estudiantes de Licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas y de Licenciatura en matemáticas y física de la Universidad del Valle, que cursan la asignatura Álgebra Moderna, dictada en los semestres superiores de cada uno de los programas académicos mencionados (sexto y séptimo semestre).

Particularmente, para el desarrollo de este trabajo hemos escogido como muestra a treinta (30) estudiantes de los programas académicos antes mencionados y que estuvieron matriculados en el curso de álgebra moderna impartido en el periodo académico de agosto-diciembre de 2013.

La escogencia de los estudiantes de esta asignatura se debe, por una parte, a que en este punto de sus carreras universitarias, los individuos ya han tenido algún contacto con las funciones, y más aún, con la sobreyectividad de funciones de variable real en cursos como Cálculo diferencial e integral, en donde las funciones y la sobreyectividad de éstas son objeto de estudio; por otra parte, en esta asignatura se amplían dichos contenidos a conjuntos de objetos que no necesariamente son números, llevando al estudiante a un nivel de generalidad más alto.

De los treinta estudiantes que cursan esta asignatura se seleccionaron algunos estudiantes como casos particulares para realizar un estudio de caso. Los criterios que se tuvieron en cuenta para la selección de dichos estudiantes se mencionarán más adelante.

Etapas del desarrollo del estudio

Para llevar a cabo el análisis de las dificultades presentes en la comprensión de la sobreyectividad se fijaron varias etapas de trabajo. Cada una de las etapas incluye el diseño, aplicación y análisis de encuestas, las cuales constituyen el instrumento de recolección de la información pertinente para nuestro trabajo. El número de encuestas (cuatro en total) define la cantidad de etapas (ver anexos 1-4, pp. 149-155); en cada una se indagan aspectos diversos alrededor de las dificultades en la comprensión de la sobreyectividad de una función interpretada en sus distintos registros de representación. A continuación damos una descripción detallada de cada una de las cuatro etapas.

Primera etapa: categorización de los estudiantes encuestados

La encuesta correspondiente a esta etapa se diseñó con distintos fines. Por una parte, para poder hacer una selección de los individuos que serían útiles para nuestro estudio; por otra parte, para identificar los elementos que los estudiantes traen a colación al dar una versión propia de la definición de sobreyectividad, contrastándolos con los que se muestran en las presentaciones formales de la definición que tomaremos en cuenta y que mencionaremos más adelante. Por último, esta encuesta permitió analizar el grado de coherencia existente entre los procedimientos que los estudiantes proponen como viables para la determinación de la sobreyectividad en cada registro de las funciones, y los que en este documento se consideran como más recomendables de acuerdo a las distintas versiones de la definición de la propiedad en cuestión. Esto último permitió percibir y caracterizar algunas de las dificultades presentes en los tratamientos de las distintas representaciones de la función.

En lo que respecta a la selección de los estudiantes, fue necesario distinguir varias categorías de acuerdo a las repuestas dadas en la primera encuesta. La categorización se realizó a distintos niveles con el fin de caracterizar con suficiente detalle a cada individuo de la muestra, de tal forma que con la información obtenida se seleccionen los casos que aporten información pertinente a nuestro estudio.

La categorización de la muestra fue realizada en tres niveles, cada nivel es determinado por una de las tres últimas preguntas de la encuesta 1[8]:

El **primer nivel** de categorización corresponde a los elementos que los individuos traen a colación para poder definir la sobreyectividad de una función. Para este nivel se recurrió a la segunda pregunta de la encuesta, donde se solicitó dar una definición de la sobreyectividad.

El **segundo nivel** se define al interior de cada categoría definida en el primer nivel. Sin embargo este nivel varía de una categoría a otra. Para el caso de la categoría A, sus subcategorías o categorías de segundo nivel se definen de acuerdo al proceso que emplean los

[8] La primera pregunta de la encuesta 1 se encarga de establecer discriminar los estudiantes que tienen familiaridad con la sobreyectividad de las funciones de variable real de los que no la tienen. En las encuestas realizadas no se encontraron estudiantes que desconocieran dicha propiedad.

individuos para determinar la sobreyectividad de una función por medio de su expresión analítica, para lo cual se tuvo en cuenta la tercera pregunta de la encuesta. Para el caso de las categorías B, C y D, el segundo nivel se define de acuerdo a la forma de determinar la sobreyectividad de una función por medio de su gráfico cartesiano; en este caso se recurrió a la cuarta pregunta de la encuesta[9].

El **tercer nivel** de categorización emerge al interior de las categorías de nivel 2. Para el caso de la categoría A, la categoría de tercer nivel que le está asociada se define de acuerdo a la forma en la que determinan la sobreyectividad de una función por medio de su gráfico cartesiano. Para el resto de categorías de primer nivel, sus categorías de tercer nivel se definen de acuerdo al proceso que emplean los individuos para determinar la sobreyectividad de una función por medio de su expresión analítica.

Presentamos a continuación las distintas categorías y subcategorías construidas.

Categoría A

En esta primera categoría los estudiantes definen la sobreyectividad de una función por medio de la igualdad del rango y el contradominio.

- ***Subcategoría I***

Los estudiantes que se encuentran en esta subcategoría consideran que la determinación de la sobreyectividad de una función consiste en despejar la variable

[9] En la tercera y cuarta pregunta de la encuesta 1, respectivamente, se pidió a los estudiantes una descripción del procedimiento que emplearían para determinar la sobreyectividad de una función dadas su expresión analítica y su gráfico cartesiano. En ambos casos se solicitó dar un ejemplo.

independiente en función de la dependiente, cuando se tiene a mano su expresión analítica, observando posibles indeterminaciones.

Subcategoría 1

El estudiante opta por observar y comparar en los puntos correspondientes a las imágenes y pre-imágenes de la función, observando si el dominio es igual al contradominio.

Subcategoría 2

En este caso el sujeto verifica si los valores que toma la variable independiente (ordenada) son los mismos del contradominio.

Subcategoría 3

El alumno corrobora si dentro de los valores que están determinados en la gráfica de la función, las ordenadas toman valores positivos y negativos.

Subcategoría 4

El estudiante no ofrece explicación de la determinación de la sobreyectividad para el caso de los gráficos cartesianos.

Subcategoría 5

En este caso el estudiante expresa que es necesario explicitar en qué conjuntos están definidos el dominio y el rango de la función, de lo contrario cualquier elección que se haga de la sobreyectividad de la función resulta válida.

- ***Subcategoría II***

Aquí los individuos optan por analizar si el dominio y el rango tienen los mismos elementos.

Subcategoría 1

El estudiante recurre al trazo de una recta horizontal para verificar la sobreyectividad de una función.

Subcategoría 2

El alumno prefiere observar si para cada número real (punto en el eje de las abscisas) existe una imagen (punto en el eje de las ordenadas).

- ***Subcategoría III***

Aquí se encuentran los estudiantes que no ofrecen una explicación clara de cómo determinar la sobreyectividad de una función respecto a su expresión analítica.

Subcategoría 1

En este caso el sujeto establece la sobreyectividad a condición de que los puntos del eje x en los que está definida la función sean los mismos de las imágenes (puntos del eje y).

Subcategoría 2

El individuo explica la necesidad de observar que dos valores del dominio estén relacionados con un único valor en el contradominio.

Categoría B

En esta categoría los estudiantes conciben la sobreyectividad como a la igualdad del dominio y el rango de la función.

- ***Subcategoría I***

Aquí los alumnos prefieren verificar si los valores que toma *x* (abscisas) son los mismos que toma *y* (ordenadas).

Subcategoría 1

El sujeto verifica que la función esté definida para cualquier valor de la variable independiente.

Subcategoría 2

El individuo establece si los valores que toma *x* son los mismos que toma *f(x)*.

- ***Subcategoría II***

En este caso el sujeto se remite a observar la función y los puntos ordenados.

- ***Subcategoría III***

Los estudiantes optan por verificar que no existan saltos en el gráfico de la función por medio de las abscisas y las ordenadas de sus puntos.

Subcategoría 1

El individuo determina los conjuntos sobre los cuales están definidos el dominio y el rango de la función respectivamente, analizando si son iguales o no.

Subcategoría 2

El sujeto prefiere hallar el dominio y el rango de la función, verificando si estos coinciden. Para corroborar la elección, se haría uso de un tabulado de valores de la función.

- ***Subcategoría IV***

El estudiante recurre a un análisis del recorrido y la extensión del gráfico de la función.

Categoría C

En esta categoría se ubican los estudiantes que definen la sobreyectividad en términos de correspondencias entre los elementos del dominio y el rango.

- ***Subcategoría I***

En esta subcategoría los estudiantes explicitan el recurso a rectas horizontales.

Subcategoría 1

En este caso el individuo prefiere usar el procedimiento para verificar la inyectividad de una función cuando se tiene su expresión analítica.

Subcategoría 2

Aquí el estudiante se inclina por relacionar dos elementos del dominio y del contradominio y se verifica si ambos cumplen las condiciones dadas en la expresión analítica.

- ***Subcategoría II***

En este caso los alumnos verifican que cada punto del eje y esté relacionado con algún punto del eje x.

Subcategoría 1

El sujeto verifica si todos los elementos del rango de la función tienen correspondencia con el dominio.

Subcategoría 2

El individuo prueba si para cada elemento del dominio existe una imagen a través de *f*.

- ***Subcategoría III***

El estudiante se dedica a observar si la curva de la función representada presenta algún salto o hueco.

- ***Subcategoría IV***

En este caso el estudiante no ofrece explicación para la determinación de la sobreyectividad en el registro gráfico-cartesiano. No obstante, sugiere para la expresión analítica que debe analizarse si todo elemento del contradominio tiene imagen.

Categoría D

En esta categoría los estudiantes traen a colación elementos distintos a los que los demás estudiantes hicieron referencia en las otras categorías (cardinalidad, inyectividad, entre otros).

- ***Subcategoría I***

Aquí los estudiantes proceden a encontrar a la expresión analítica de la función representada por el gráfico.

Subcategoría 1

En esta categoría el estudiante verifica analíticamente si la función es inyectiva.

Subcategoría 2

El estudiante no explicita procedimiento para la verificar analíticamente la sobreyectividad de una función.

- ***Subcategoría II***

En esta subcategoría se incluyen a los individuos que mostraron el gráfico de una función particular como ejemplo, pero que no ofrecieron una explicación de la forma en que determinan que dicha función es sobreyectiva.

Subcategoría 1

El sujeto recurre a despejar la variable x en términos de la variable y, reemplazando lo obtenido de x en la expresión original, obteniéndose de esta forma una igualdad.

Subcategoría 2

El estudiante no explicita una explicación en lengua natural. Consigna por medio de una notación conjuntista que las imágenes deben ser iguales para valores distintos del dominio.

Subcategoría 3

Por medio de la expresión analítica el individuo procede a probar si el rango de la función está contenido en el dominio de la misma.

- ***Subcategoría III***

En este caso la el alumno determina sobreyectividad en el gráfico comparando el tamaño del dominio con el del contradominio. Para ello se recurre a la observación de cada imagen y pre-imagen de la función.

- ***Subcategoría IV***

En este caso el estudiante se asegura de que cada valor del eje *y* esté relacionado con un valor del eje *x*.

- ***Subcategoría V***

Aquí el estudiante explicita el uso de una recta vertical para verificar que cada elemento del eje *x* se corresponde con un elemento del eje *y*.

Codificación de los estudiantes

Teniendo en cuenta la categorización que se hizo de los estudiantes que hicieron parte de la primera encuesta, hemos propuesto una codificación de tal manera que se pueda identificar a cada uno entre los otros individuos que hacen parte de su categoría.

Cada estudiante está identificado con un código de 4 dígitos cada uno de los cuales leído de izquierda a derecha está determinado de acuerdo a los niveles de categorías que se definieron con anterioridad y a los cuales pertenece cada estudiante. De esta forma cada dígito está caracterizado de la siguiente forma:

- El primer dígito establece la categoría de primer nivel. Este dígito corresponde a un valor numérico de uno a cuatro.
- El segundo dígito identifica la categoría de segundo nivel. El valor de éste dígito está entre uno y cinco.
- El tercer dígito corresponde a la categoría de tercer nivel. En este caso el valor del dígito se encuentra entre cero y cinco.

- El cuarto dígito hace una distinción entre los individuos que pertenecen a una misma categoría de tercer nivel. Para ello se asigna un dígito que toma valores entre cero y tres. El orden en el que se asigna este dígito es arbitrario.

Por ejemplo, obsérvese el código **1 1 2 3** corresponde al estudiante número 3 ubicado en la subcategoría 2, de la subcategoría I, de la categoría A.

Si dentro de una categoría de cualquier nivel no están definidas subcategorías respecto a los otros niveles, debido a que solo hay un estudiante es esa categoría, entonces a dichas subcategorías se les asigna el número cero como su dígito correspondiente. Por ejemplo, obsérvese el código **3 4 0 0** establece que existe un único estudiante que se encuentra en la subcategoría 4 de la categoría C.

En lo que respecta a los elementos que los estudiantes refieren para dar su versión personal de la definición de sobreyectividad, recurrimos a la siguiente tabla:

Categoría	**Versión general ofrecida por los estudiantes**	**Elementos que se traen a colación**	**Versión formal a la que tiende**
A			
B			
C			

Tabla 3a. Modelo de primera rejilla de análisis de las versiones de la definición de sobreyectividad dadas por los estudiantes para las categorías A, B y C

En esta tabla se consignan las síntesis de las versiones de la definición de sobreyectividad dadas por los estudiantes (segunda columna) de acuerdo a la categoría a la que pertenecen; a continuación, se destacan los elementos de la función que aparecen descritos en cada presentación personal de la definición, y por último, de acuerdo a dichos elementos se indica en la cuarta columna la versión formal a la cual se inclina tal presentación dada en la tercera columna.

Un análisis similar se realiza de forma particular para los estudiantes que se encuentran en la categoría D, ya que en ésta aparecen una variedad de versiones que no se ajustan a ninguna de las otras categorías. A la tabla correspondiente a esta categoría se adicionan las dificultades específicas para cada estudiante. De esta forma la tabla siguiente corresponde a la tabla 11b del capítulo 4 de este trabajo:

Estudiante	**Versiones ofrecidas por los estudiantes**	**Elementos que se traen a colación**	**Versión formal asociada**	**Dificultades detectadas**
4110				
4120				
4210				
4220				
4230				
4300				
4400				
4500				

Tabla 3b. Modelo de segunda rejilla de análisis de las versiones de la definición de sobreyectividad dadas por los estudiantes para las categorías D

Los códigos que aparecen en la primera columna corresponden a los estudiantes que conforman la categoría D.

El análisis de los elementos que se traen a colación al presentar una versión particular de la definición de sobreyectividad sacará a flote las dificultades cognitivas que tienen los estudiantes con esta propiedad en su nivel más general.

- Por último, en lo que concierne al grado de coherencia entre los procedimientos dados por los estudiantes y los que consideramos como más óptimos, empleamos la tabla 4.

Estudiante	Procedimiento descrito	Condición 1	Condición 2	Condición 3	Nivel de coherencia

Tabla 4. Modelo de rejilla de análisis de los niveles de coherencia entre los procedimientos dados por los estudiantes y los considerados como recomendables en ambos registros.

La primera columna corresponde a los nueve estudiantes que se seleccionaron para el estudio. Para este análisis se seleccionaron nueve estudiantes de los treinta que respondieron a la encuesta 1. La selección de estos se realizó de acuerdo a los siguientes criterios:

- Los estudiantes han tenido contacto con la sobreyectividad de las funciones en otros cursos. Para esto se tiene en cuenta la primera pregunta de la encuesta 1.

- Cada estudiante seleccionado dio respuesta a todas los ítems de la encuesta de forma clara y legible.

- En cada caso los estudiantes ofrecieron los ejemplos que se solicitaron para las descripciones que dieron en los dos últimos ítems de la encuesta.

La segunda columna muestra los procedimientos que cada estudiante describió para la representación analítica y la cartesiana. Las tres columnas siguientes indican si las condiciones de coherencia se cumplen o no y con base en la cantidad de condiciones que se dejen de cumplir, en la última columna se determina el nivel de coherencia de cada procedimiento con el que consideramos más recomendable de acuerdo a la versión que cada estudiante decidió acoger, de acuerdo a la categoría en la que se encuentra. Las condiciones y los niveles de coherencia se explican con detalle en el capítulo 4.

Es claro que el análisis que se haga de los procedimientos dados por los estudiantes a partir de la tabla anterior debe tener en cuenta los procedimientos que consideramos como ajustados a las versiones formales que se han señalado en el capítulo 2. En este orden de ideas nos proponemos mostrar las distintas vías de acceso a la sobreyectividad de una función a partir de las dos representaciones que nos interesan. Cada vía de acceso queda determinada por un procedimiento específico el cual se comparará con los procedimientos dados por los estudiantes. Sin embargo, la definición de cada una de estas vías de acceso se produce en tres etapas sucesivas:

- Primero, se debe fijar si lo que se quiere probar es la sobreyectividad o la NO sobreyectividad de una función particular.
- A continuación, se debe escoger una versión formal de la sobreyectividad.
- Por último, debe construirse un procedimiento específico que permita verificar si las hipótesis de la versión formal elegida se cumplen o no; tal procedimiento depende de la representación inicial en la cual se presente la función.

  Los procedimientos específicos aparecen descritos con detalle en la tabla 1 del capítulo 4.

La siguiente rejilla que corresponde a la tabla 10 del capítulo 4 consigna tales vías de acceso:

Versión	Si la función es	Procedimiento general	Procedimientos específicos	
			Representación algebraica	Representación Gráfica-cartesiana
I o III	Sobreyectiva			
	No sobreyectiva			
II	Sobreyectiva			
	No sobreyectiva			

Tabla 5. Modelo de rejilla de análisis de las vías de acceso a la sobreyectividad o no sobreyectividad de una función.

En esta rejilla se muestran los procedimientos a nivel general que deben ejecutarse al momento de comenzar la prueba de la sobreyectividad (tercera columna). Estos fijan el rumbo que debe seguir la prueba que se vaya a ejecutar, con lo cual, los procedimientos específicos en cada representación (cuarta y quinta columna) están supeditados a tales procedimientos generales. Además, en esta tabla se distinguen los procedimientos que corresponde a la sobreyectividad de los que atañen a la no sobreyectividad (segunda columna) de acuerdo a las versiones formales que hemos tomado en consideración.

El contraste entre los procedimientos apropiados y los ofrecidos por los estudiantes nos dejan entrever las dificultades que se tienen con la definición de la sobreyectividad interpretada en cada registro de representación de las funciones (específicamente de los registros algebraico y cartesiano).

Segunda etapa: discriminación de unidades significantes en el registro cartesiano

En esta etapa se pretende examinar los elementos de la representación cartesiana de la función que los estudiantes tienen en cuenta para la determinación de la sobreyectividad.

Tales elementos que podrían llegarse a constituir en lo que Duval reconoce como **unidades significantes de una representación** en la determinación de la sobreyectividad, son extraídos de lo que los estudiantes seleccionados respondieron en la encuesta 2 (ver anexos, pp. 168-185) y son comparados con las unidades que consideramos como pertinentes de acuerdo a los elementos presentes en cada versión de la definición.

Esta encuesta presenta cuatro gráficos cartesianos de funciones de variable real con sus respectivas condiciones. Primero, se pide a los estudiantes que digan si los gráficos presentados corresponden a funciones sobreyectivas o no. Luego, se solicita que se describan los elementos que ellos consideran pertinentes para el estudio de la sobreyectividad y los criterios que utilizarían para tal fin.

A partir de las respuestas dadas se propone la siguiente rejilla de análisis que da cuenta de las unidades significantes discriminadas por los estudiantes y que podrían constituirse en unidades cognitivamente pertinentes para la sobreyectividad.

Gráfico	**Estudiante**	**Sobreyectividad según los estudiantes**	**Elementos presentes en la descripción**	**Elementos pertinentes según cada versión de la sobreyectividad**

Tabla 6. Modelo de rejilla de análisis de los elementos constitutivos de la representación cartesiana discriminados por los estudiantes.

Esta rejilla se reproduce para cada uno de los cuatro gráficos propuestos en la encuesta 2. En la primera columna se presenta el gráfico a analizar tal como aparece en la encuesta, su respectiva condición y la sobreyectividad. En la segunda columna se muestran los estudiantes que se escogieron para el estudio a través de sus respectivos códigos y a continuación, en la columna que sigue se ofrecen las respuestas en cuanto a la sobreyectividad de la función en cuestión. Después, se muestran los elementos que cada estudiante pudo identificar para la determinación de la sobreyectividad respecto al mismo gráfico. Por último, se muestran las unidades que en este estudio discernimos como pertinentes para cada versión de la definición.

Tercera etapa: discriminación de unidades significantes en el registro algebraico

De forma análoga que en la segunda etapa, se pretenden discriminar elementos que se traducen en unidades significantes pertinentes para la verificación de la sobreyectividad para el caso de la representación analítica (tales unidades significantes se traducen en unidades simbólicas).

Dichas unidades se extraen respectivamente de las respuestas dadas por los estudiantes en la encuesta 3 (ver anexos, pp. 186-203). Esta encuesta presenta cuatro expresiones analíticas de funciones de variable real con sus respectivas condiciones. El primer ítem de esta encuesta solicita que cada uno diga si cada expresión corresponde a una función sobreyectiva o no. El segundo ítem pide a los estudiantes explicitar los elementos constitutivos de la expresión analítica que usan para decidir sobre la sobreyectividad de cada función y los criterios que utilizarían.

Para el análisis de las respuestas dadas a esta encuesta se propone una rejilla similar a la que se mostró para el análisis de los gráficos cartesianos para extraer las unidades significantes:

Expresión analítica	**Estudiante**	**Sobreyectividad según los estudiantes**	**Elementos presentes en la descripción**	**Elementos pertinentes según cada versión de la sobreyectividad**

Tabla 7. Modelo de rejilla de análisis de los elementos constitutivos de la representación algebraica discriminados por los estudiantes.

Esta rejilla se reproduce para los cada uno de las cuatro expresiones analíticas propuestas en la encuesta 3. En la primera columna se presenta la representación analítica a analizar tal como aparece en la encuesta. En la segunda columna se indican los estudiantes que se encogieron para el estudio a través de sus respectivos códigos y a continuación, en la columna que sigue se ofrecen las respuestas en cuanto a la sobreyectividad de la función en cuestión. Luego, se muestran los elementos que cada estudiante pudo identificar respecto a la misma expresión analítica. Por último, se muestran las unidades que en este estudio discernimos como pertinentes para cada versión de la definición de la misma forma que con los gráficos cartesianos.

La discriminación que se haga de las unidades significantes en cada uno de los dos registros de representación por medio de las descripciones dadas en lengua natural, permitirá analizar cuáles de esas unidades se pueden poner en correspondencia de tal forma que se pueda establecer coordinación entre los dos registros de representación considerados.

Cuarta etapa: discriminación de unidades cognitivamente pertinentes en ambos registros

Es necesario aclarar que los elementos en los dos registros cartesiano y algebraico pueden ser considerados como unidades cognitivamente pertinentes solo cuando la variación de uno de estos produzca variaciones en alguno de los elementos del otro registro.

De acuerdo a lo anterior, el diseño de las encuestas 2 y 3 en las dos etapas anteriores permite solamente discriminar elementos que podrían llegar a constituirse en unidades cognitivamente pertinentes para la determinación de la sobreyectividad, pero no permite asegurar con certeza de que se constituyan respectivamente en valores visuales y categoriales respectivamente en los dos registros de representación considerados.

En esta etapa colocamos a funcionar los dos registros de representación simultáneamente, de tal forma que se puede observar cómo se relacionan los elementos constitutivos de una representación con los de la otra. La forma cómo se establece esta relación nos permite examinar si las variaciones de un elemento en una de las representaciones genera cambios en la otra representación.

Con el fin de saber cuáles son esas unidades cognitivamente pertinentes en cada registro de representación se realizó la encuesta 4; ésta presentaba las representaciones algebraica y cartesiana de cuatro funciones con sus respectivas condiciones. En el primer ítem se solicitaba especificar la sobreyectividad de cada función; en el segundo ítem se pidió una explicación sobre la decisión tomada en el ítem anterior; por último, se solicitó la prueba formal de por lo menos dos de las funciones dadas. Las dos primeras preguntas permiten establecer cuáles de las unidades que conforman las representaciones de cada función en ambos registros resultan ser cognitivamente pertinentes para la determinación de la sobreyectividad, mientras que la segunda pregunta nos permite examinar cuáles de esas unidades se tienen en cuenta cuando se elabora en una prueba formal.

De esta forma se diseñaron dos rejillas de análisis para la encuesta 4. La primera que aparece a continuación permite estudiar el vínculo que existe entre los elementos usados por los estudiantes en cada una de las dos representaciones cuando estas aparecen al mismo tiempo. Además, nos permite hacer un contraste entre los resultados arrojados en las etapas 3 y 4. Los elementos que se pueden discriminar a partir de esta rejilla y del contraste que se haga con los resultados de las etapas anteriores se someten a variación para ver cuáles constituyen efectivamente unidades cognitivamente pertinentes para la determinación de la sobreyectividad de una función de variable real.

Condición, expresión analítica y gráfico	**Estudiante**	**Sobreyectividad**	**Elementos usados en el registro gráfico**	**Elementos usados en el registro algebraico**

Tabla 8. Modelo de rejilla de análisis de la relación entre los elementos que constituyen cada representación de una función.

Las tres primeras columnas de la rejilla anterior presentan respectivamente las dos representaciones de cada función con sus condiciones y sobreyectividad, el código de cada estudiante y su respectiva decisión sobre la sobreyectividad de cada función. Las dos columnas que siguen presentan los elementos del gráfico y de la expresión analítica de cada función que se pueden poner en relación y que se tuvieron en cuenta para la explicación de la decisión sobre la sobreyectividad. Es necesario reiterar que la puesta en relación de los elementos propios de cada representación en los registros distintos se hace en el sentido *gráfico cartesiano* → *expresión analítica*, y es realizada por quienes redactamos este trabajo.

A partir de la determinación de estas unidades visuales y simbólicas, la segunda rejilla permite identificar los valores visuales y categoriales en cada uno de los registros considerados.

Variables visuales	**Valores visuales**	**Valores categoriales**

Tabla 9. Modelo de rejilla de análisis de las variables visuales y sus respectivos valores así como los valores categoriales.

Es necesario aclarar que el análisis de los valores visuales y categoriales no alcanza a abarcarse en este documento debido a la limitación de los tiempos reglamentarios para su entrega. No obstante, presentamos algunas unidades que los estudiantes lograron discriminar en las representaciones cartesiana y analítica de las funciones, así como algunas dificultades que detectaron en este proceso. La tabla 9 no se utiliza en el análisis pero puede ser un instrumento útil para posteriores estudios sobre propiedades de las funciones a partir de los registros de representación semiótica.

A continuación el capítulo 4 muestra los resultados que logramos obtener a partir de las respuestas dadas a las cuatro encuestas realizadas.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES COGNITIVAS ASOCIADAS A LA SOBREYECTIVIDAD

El propósito de trabajar sobre el problema no es "llegar a la respuesta correcta" sino tratar de captar el conflicto entre las diferentes maneras de pensar el problema (…) Cuando uno reconoce el conflicto, el siguiente paso es elaborarlo hasta sentirse más cómodo...

Seymour Papert

En este capítulo damos cuenta de algunas de las dificultades en la comprensión de la sobreyectividad que emergen en su definición desde un punto de vista formal y desde su interpretación en distintos registros de representación semiótica, a partir de los tratamientos que se generan para su determinación.

Por otra parte, mostramos algunas de las unidades significantes que los estudiantes tuvieron en cuenta al tratar de establecer la sobreyectividad cuando se ofrece una de sus representaciones en uno de los dos registros considerados y cuando se ofrecen ambas, así como sus respectivas dificultades. Esperamos que dicha información pueda llegar a constituirse como materia prima para una ampliación del tema de investigación que abordamos en este trabajo.

Aspectos previos al análisis de las dificultades en la comprensión de la sobreyectividad a partir de su definición

Es necesario reiterar que pese a que el objeto matemático considerado en este estudio es la función, nuestro interés se centra en un tipo de funciones particulares que se diferencian por una propiedad conocida como sobreyectividad. Esto implica que nuestro análisis debe remitirse no solamente a las representaciones explícitas en los que se presenta la función y a cómo se establece la sobreyectividad en cada una, o a las dificultades en las transformaciones en las representaciones propias de las funciones en las que esta propiedad se puede determinar.

Es necesario que nuestro estudio incluya un examen de la comprensión de la definición de sobreyectividad por parte de los estudiantes, entendiendo que se trata de una propiedad que permite clasificar las funciones de acuerdo a la forma en que aparecen relacionados los elementos de su dominio y contradominio. La pertinencia de la ejecución de este examen radica en que, contrario a los objetos matemáticos como las funciones, el acercamiento a la comprensión de esta propiedad puede hacerse solamente a través de la manipulación de la definición.

Teniendo en cuenta lo anterior, un análisis de este tipo ha de realizarse en tres niveles: primero, centrándose en la tendencia de los estudiantes hacia una **versión formal particular** de la definición; segundo, enfocándose en los elementos del objeto matemático que un estudiante particular trae a colación al presentar por escrito una **versión o interpretación personal** de la definición de sobreyectividad; y tercero, revisando la coherencia que tiene cada procedimiento enunciado por los estudiantes en cada registro con su presentación de la definición de sobreyectividad.

No obstante, antes de llevar a cabo el análisis que hemos descrito, es necesario explicitar las vías por medio de las cuales puede accederse a la sobreyectividad de una función. La descripción de estas vías de acceso es necesaria para poder observar si el procedimiento descrito por un estudiante es coherente con el que resulta factible de acuerdo con la versión formal de la sobreyectividad a la cual tiende su propia descripción.

Las sobreyectividad y sus distintas vías de acceso

Anteriormente se ofrecieron tres presentaciones formales de la definición de sobreyectividad de una función (ver capítulo 2, pp. 47-48):

- **Versión I:** “se dice que una función es sobreyectiva (o que f aplica A sobre B) si cada elemento de B es la imagen por la función f de algún elemento de A” (Munkres, 2002, p. 20).

- **Versión II:** “una función es suprayectiva cuando el rango es igual codominio (Becerra, 2004, p. 20).

- **Versión III:** "Se dice que F es sobreyectiva si: $\forall y(y \in B \rightarrow \exists x(x \in A \wedge y = F(x)))$" (Lewin, s. f., p. 31).

A partir de estas versiones de la sobreyectividad se pueden definir varias formas de acceder a esta propiedad en cualquier función. En la tabla 10 aparecen explícitas las vías de acceso a la sobreyectividad o no sobreyectividad de una función.

Puede observarse que la cantidad de vías de acceso a la sobreyectividad de una función está dada por la cantidad de procedimientos específicos disponibles para cada representación que permitan verificar las hipótesis de las versiones I, II o III.

Para hacer más inteligibles las vías de acceso a la sobreyectividad descritas, presentamos algunos ejemplos de funciones de las cuales se desea comprobar si son sobreyectivas o no, tomando en cuenta sus representaciones algebraica y cartesiana.

Ejemplos de las vías de acceso a la sobreyectividad

Como se puede notar en la tabla 10 son seis las vías de acceso que hemos considerado en nuestro estudio para la representación algebraica o analítica y tres para la representación cartesiana. Damos a continuación ejemplos de cada una de esas vías de acceso para las representaciones de las funciones que hemos considerado, numerando cada ejemplo respecto a la vía de acceso expresada en la tabla 10 para cada caso.

Versión	Si la función es	Procedimiento general	Procedimientos específicos	
			Representación algebraica	Representación Gráfica-cartesiana
I ó III[10]	Sobreyectiva	Suponer la existencia de un *y* en el codominio y encontrar un *x* en el dominio tal que $y = f(x)$	1. Despejar *x* en términos de *y*, y verificar que no existan valores de *y* tales que $x = R(y)$ no esté bien definido. 2. Tomar un elemento *y* del rango y operarlo con otro elemento convenientemente, de tal forma que el resultado sea un elemento del dominio. El resultado de esa operación es el *x* buscado.	1. Trazar rectas paralelas al eje *x* en los lugares del eje *y* en donde esté definido el codominio, verificando que dichas rectas intercepten al trazo de la función en al menos un punto.
	No sobreyectiva	Por contradicción, buscar por lo menos un valor de *y* en el codominio y suponer que $y = f(x)$. Despejando *x* debe llegarse a una afirmación falsa.	3. Se pueden encontrar los valores de *y* problemáticos despejando *x* en función de *y*, reemplazándolos en la expresión original $y = f(x)$ y llegando a igualdades falsas. 4. Si la expresión analítica no es manipulable, se toma un valor y del codominio que “intuitivamente se sepa” que no está en el rango y se sustituye en $y = f(x)$, llegando a una igualdad falsa.	2. Se ubica en el eje *y* un valor que no esté en el codominio, trazando por ese punto una recta paralela al eje *x*. Debe ocurrir que la recta no corta al trazo de la función en ningún punto.
II	Sobreyectiva	Mostrar ambas contenencias entre el rango y el codominio.	1. Despejar *x* en términos de *y*, y verificar que no existan valores de *y* tales que $x = R(y)$ no esté bien definido.	3. Determinar qué parte del eje *y* corresponde al codominio, observando si es la misma parte que ocupa la extensión del gráfico.
	No sobreyectiva	Mostrar que el codominio no está contenido en el rango.	5. Si la función es manipulable, se despeja la función encontrando valores de *y* problemáticos despejando *x* en función de *y*; esos valores deben estar en el codominio pero no en el rango. 6. Si la función no es manipulable, se toma un valor *y* del codominio del cual “intuitivamente se sepa” que no está en el rango.	2. Ubicar un segmento del eje *y* en donde la extensión del gráfico no coincida con la parte del mismo eje definida por el codominio, y luego usar la prueba de la recta horizontal definida anteriormente.

Tabla 10. Vías de acceso a la sobreyectividad o no sobreyectividad de una función

[10] Podemos ver que a pesar de que la versión I y la versión III pueden interpretarse de la misma manera, ambas difieren por la forma en la que aparecen escritas, recurriendo a una sintaxis distinta en relación con la manera en la que se forman expresiones en la lógica de primer orden y en la lengua natural.

El caso de la representación algebraica

1. Consideremos la función $f : R \to R_0^+$ tal que $f(x) = 3x^2$. Tomando a *f* (*x*) = *y* se tiene que al despejar la variable *x* de la expresión $y = 3x^2$ se obtiene como resultado $x = \sqrt{\frac{y}{3}}$. Esta ecuación permite observar que todos los *x* del dominio están relacionados con aquellos *y* que son mayores o iguales a cero. Estos *y* resultan ser los mismos valores del contradominio expresado en la condición, y como en estos valores no existe ninguno que indetermine la expresión obtenida. De esta forma, la función *f* es sobreyectiva.

2. Sea la función $g : R \to Z$ tal que $g(x) = \|x\|$ (léase parte entera de *x*). Tomando un *y* del contradominio, éste resulta ser un número entero por la condición; de esta forma, si para un valor entero *y* adicionamos un valor perteneciente al intervalo *[0, 1)*, por ejemplo 1/3, podemos ver que el resultado pertenece al dominio de *g* y su parte entera correspondiente es precisamente el mismo valor de *y*. Entonces, todo valor del contradominio estará relacionado por lo menos con un número real de la forma *y* + *k* donde *k* es un valor entre *[0, 1)*, por lo tanto *g* resulta ser sobreyectiva. Para ser más específico aún podría tomarse un valor racional en este intervalo sin que este afecte la conclusión.

3. Para la función $h : R/\{1\} \to R$ tal que $h(x) = \frac{3}{x-1}$. Tomando a *h* (*x*) = *y*, al despejar la variable *x* se obtiene la expresión $x = \frac{3}{y} + 1$, la cual presenta problema en *y = 0*.

Sustituyendo h (x) por este valor se obtiene la igualdad $0 = 3$, lo cual corresponde a un enunciado falso. En consecuencia, la función h no es sobreyectiva.

4. Sea $\psi : R \to [0,1]$ donde $\psi\,(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \notin Q \\ 0, & si\ x \in Q \end{cases}$. Si hacemos ψ (x) = ½ que es un valor entre cero y uno, entonces 1 = ½ o 0 = ½ lo cual es falso en ambos casos. Luego la función ψ no es sobreyectiva.

5. Para la función $\phi : N/\{0\} \to Q$ donde $\phi(x) = \dfrac{1}{x}$, el rango está dado por el conjunto $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in N\right\}$. El valor *3/2* es un número racional, por lo cual pertenece al contradominio de la función ϕ dado en la condición. Sin embargo, este valor no se puede escribir de la forma *1/n* tal que n sea un número natural por lo cual no pertenece al rango de la función. Entonces ϕ no es sobreyectiva.

6. Consideremos la función $\varphi : R \to R$ tal que $\varphi\,(x) = \begin{cases} x, & si\ x \notin Q \\ 0, & si\ x \in Q \end{cases}$, cuyo rango corresponde al conjunto de números irracionales junto con el cero. Escogiendo a ½ como valor de $\varphi(x)$ puede notarse que éste no es ni cero ni corresponde a un valor irracional, lo que significa que ½ no está en el rango de la función φ y, en consecuencia la función en cuestión no es sobreyectiva.

El caso de la representación cartesiana

1. Observemos el siguiente gráfico de la función $f : R \to [1,\infty)$:

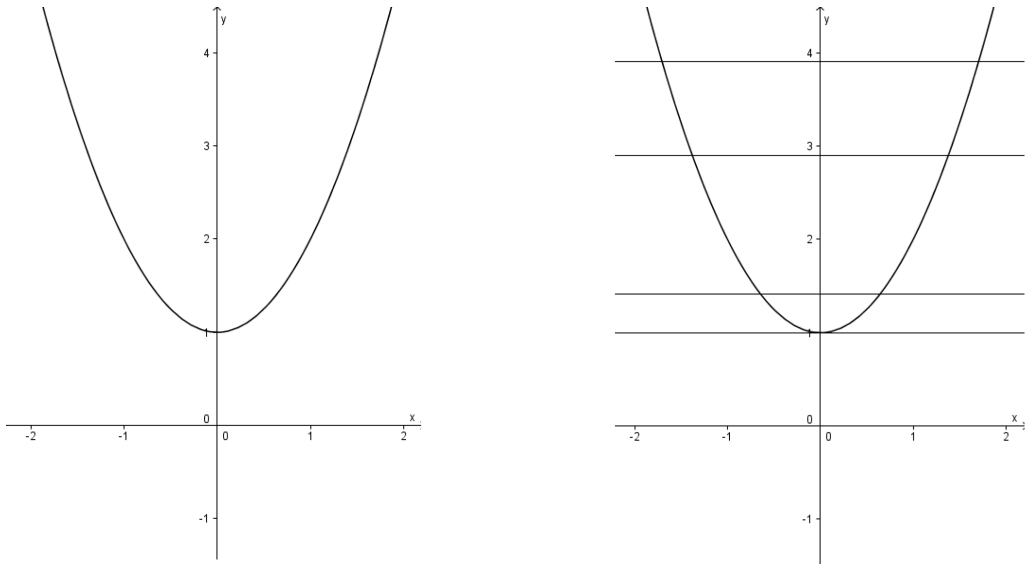


Gráfico 5. Representación gráfica de la función *f* y sus respectivas modificaciones.

Al trazar algunas rectas paralelas al eje *x*, estas interceptan al gráfico cartesiano de la función *f* en todo el intervalo definido en el contradominio al menos en un punto. Por tanto, la función *f* es sobreyectiva.

2. Consideremos la función $g : R \to R$ para la cual se tiene el siguiente gráfico:

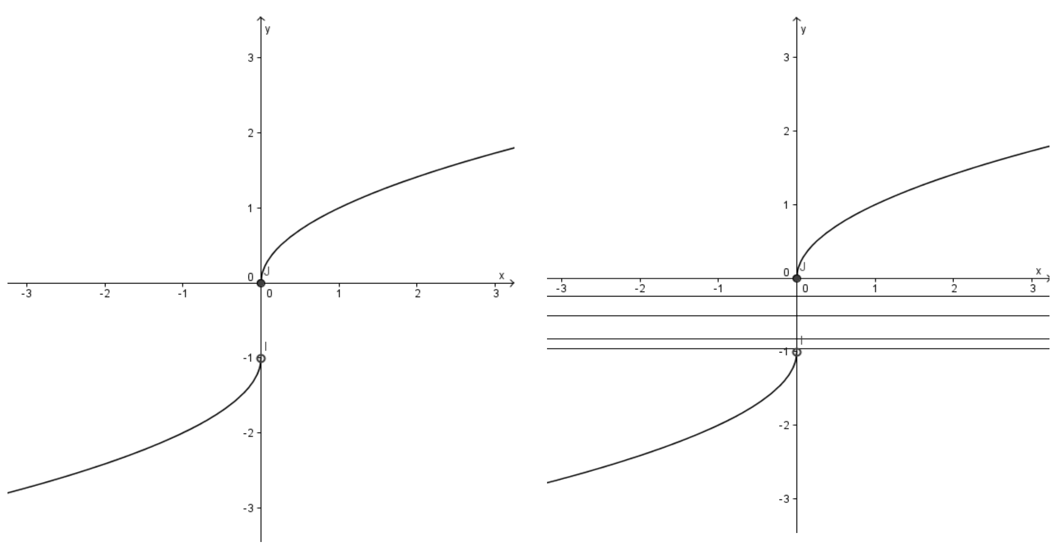


Gráfico 6. Representación gráfica de la función *g* y sus respectivas modificaciones.

Para el caso de esta función a trozos podemos ver que al trazar rectas paralelas al eje y sobre los puntos del intervalo *[-1, 0]* estas no tocan el gráfico de la función en cuestión. Por tanto la función deja de ser sobreyectiva.

3. Veamos ahora la función $h : R \rightarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ cuyo gráfico es el siguiente:

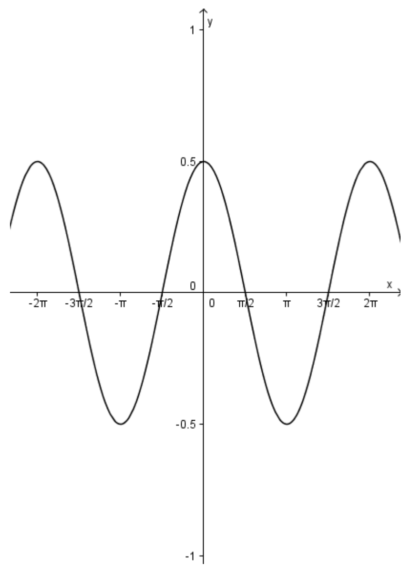


Gráfico 7. Representación gráfica de la función *h*.

En este caso podemos observar que la extensión del gráfico, el cual se interpreta como el rango de la función, corresponde al mismo intervalo que está definido para el contradominio de la función. Luego, la función dada es sobreyectiva.

Dificultades presentes en la definición de sobreyectividad en sus distintas versiones formales

Pese que para efectos de formalización las tres versiones presentadas resultan ser equivalentes, puede darse el caso que algunas resulten ser más difíciles de entender que otras, y por ende, los procesos para verificar la propiedad resultan ser muy complicados.

De esta forma, es posible que la elección de una u otra versión esté supeditada a algunos factores tales como la cantidad de signos, la claridad en el uso especializado de la lengua natural, la forma en la que una versión induce una forma de empezar la verificación a partir de la expresión analítica que las otras versiones no presentan, etc.

La consideración de la presentación a la que un sujeto decide adherirse resulta esencial en este estudio, pues como mencionamos anteriormente, queremos establecer el nivel de coherencia que a partir de la versión escogida tienen los procedimientos de los estudiantes con los que resultan ser más idóneos; sin embargo, no es de nuestro interés analizar los factores que llevan a un estudiante a anteponer una versión sobre las otras.

Ahora bien, una de las hipótesis que queremos sustentar en este documento es que en la elección de una u otra versión formal de la definición pueden llegar a presentarse algunas dificultades en su comprensión, las cuales pueden manifestarse como equívocos en los procedimientos de verificación de la sobreyectividad de una función. Por tal razón surge la necesidad de estudiar las interpretaciones de la definición que proponen los estudiantes para analizar a qué presentación formal se aproximan, así como los elementos que traen a colación en su versión personal para establecer su grado de proximidad.

Para poder llevar a cabo este análisis, recurrimos a los resultados de la encuesta 1 (ver anexos, pp. 156-167), realizada a estudiantes del Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle en el curso de Álgebra Moderna. Reiteramos que esta primera encuesta nos permitió hacer una categorización de los estudiantes en distintos niveles (ver capítulo 3, p. 74), con el propósito de seleccionar a los estudiantes que nos brindaran información pertinente para nuestro trabajo.

Por el momento, nos centraremos únicamente en el primer nivel de categorización pues es en este nivel en el que se pueden diferenciar las distintas versiones de la definición ofrecidas por los estudiantes, así como los elementos que traen a colación para su respectiva escritura. Más adelante volveremos sobre los otros dos niveles de categorización para dar cuenta del procedimiento que un estudiante emplea en la determinación de la sobreyectividad de una función, teniendo en cuenta el registro algebraico y el registro gráfico cartesiano.

La tabla 11a presenta en forma general las versiones de la definición dadas por los estudiantes de acuerdo a las tres primeras categorías[11], los elementos que traen a colación en cada una y la versión formal a la cual tienden.

Categoría	**Versión general ofrecida por los estudiantes**	**Elementos que se traen a colación**	**Versión formal a la que tiende**
A	Una función es sobreyectiva si el rango es igual al codominio.	Rango, codominio, relación de igualdad.	II
B	Una función es sobreyectiva si el dominio es igual al rango.	Dominio, rango, relación de igualdad.	II
C	Una función es sobreyectiva si todo elemento en el conjunto de llegada (imágenes de la función) tiene una pre-imagen en el conjunto de partida.	Conjuntos de llegada y de partida, imágenes, pre-imágenes, correspondencia, relación.	I

Tabla 11a. Primera rejilla de análisis de las versiones de la definición de sobreyectividad dadas por los estudiantes para las categorías A, B y C.

Podemos ver que las categorías A y B tienden a la versión II de la definición formal de sobreyectividad; no obstante, la definición dada por la categoría A resulta ser más

[11]Además de las tres categorías anteriores identificamos una cuarta, la D, que requiere un análisis especial puesto que en ésta se ubicaron los estudiantes que presentaron versiones variadas de la definición de sobreyectividad, recurriendo a tipos de elementos distintos a los considerados por el resto de sus compañeros (de las otras categorías). En la Tabla 11b se presenta lo correspondiente a la categoría D.

aproximada a la versión formal que la definición dada por la categoría B. Esto puede notarse fácilmente dado que uno de los elementos en la segunda columna de la tabla 11a para la categoría B es el dominio en lugar del contradominio. De acuerdo con esto, la sobreyectividad de una función consistiría en analizar que los elementos del dominio y el contradominio fueran exactamente los mismos.

Sin embargo, en contraposición a la consideración dada por los estudiantes de la categoría B pueden encontrarse ejemplos de funciones que ponen en correspondencia conjuntos cuyos elementos son totalmente distintos. Por ejemplo, consideremos la función $f : N \times N \rightarrow Q^{+}$ tal que $f(m,n) = \frac{m}{n}$, la cual corresponde a una función que resulta ser sobreyectiva. De acuerdo a las condiciones planteadas, la naturaleza de los elementos del dominio es diferente a las del rango: la función relaciona parejas ordenadas de naturales con números racionales.

Este ejemplo permite concluir que una de las dificultades en la determinación de la sobreyectividad se debe a que los estudiantes no perciben los elementos de la función que resultan pertinentes para cumplir las hipótesis de esta propiedad. En este sentido, las versiones personales ofrecidas por los estudiantes de la categoría A y de la categoría C son más cercanas a las versiones formales consideradas en este trabajo. Esta dificultad se traduce entonces en la **falta de comprensión de la definición de la sobreyectividad en cada una de sus versiones formales por parte de los estudiantes**.

De esta forma, una condición necesaria para la comprensión de la sobreyectividad es poder ofrecer medios por los cuales los estudiantes puedan hacer una discriminación de los elementos de la función que deben considerarse de acuerdo a la definición, es decir, poder identificar qué elementos de la función son pertinentes en el estudio de la sobreyectividad.

En la tabla 11b se observan dificultades similares a las que se analizaron en la tabla 11a. Específicamente, el estudiante 4500 presenta el mismo caso de sustitución de un elemento de la función pertinente para la determinación de la sobreyectividad (codominio), por otro que no lo es (dominio).

A esto se adiciona el hecho de que algunos estudiantes (4110, 4220 y 4300) confunden la sobreyectividad de una función con otras propiedades del mismo tipo tales como la inyectividad y la biyectividad, lo cual se constituye en una situación productora de errores en los procedimientos de verificación de la propiedad en cuestión y de dificultades en su comprensión.

A partir de los resultados consignados en las tablas 11a y 11b, pueden listarse dos factores generadores de la dificultad en la comprensión de la definición de la sobreyectividad que mencionamos más arriba:

1. La sustitución de elementos de la función pertinentes para la determinación de la sobreyectividad (de acuerdo a una versión formal particular de la definición de sobreyectividad), por otros elementos que no lo son.

2. La confusión de la sobreyectividad con otras propiedades de la función: inyectividad y biyectividad.

Estudiante	Versiones ofrecidas por los estudiantes	Elementos que se traen a colación	Versión formal asociada	Dificultades detectadas
4110	Una función sobreyectiva es ella en la cual si existe $f(x_1)=b$ y $f(x_2)=b$ se debe cumplir que $x_1=x_2$.	Implícitamente se hace referencia a igualdad de imágenes y pre-imágenes.	Ninguna	Confusión de sobreyectividad con inyectividad.
4120	Son todos los elementos que están en el codominio.	Codominio.	Ninguna	No se exhibe el objeto función desde el principio. Asume la sobreyectividad como un conjunto y no como propiedad
4210	Una función es sobreyectiva si el rango de la función son todos los números reales.	Rango, números reales.	II	No se considera que el codominio de la función pueda ser subconjunto de números reales.
4220	Una función sobreyectiva es una función tal que $f(x_1)=y$, $f(x_2)=y$ existen dos elementos tal que su imagen sea la misma.	Implícitamente se hace referencia a igualdad de pre-imágenes y explícitamente a igualdad de imágenes.	Ninguna	Confusión de sobreyectividad con una idea incompleta de la inyectividad
4230	Una función es sobreyectiva cuando el dominio y el codominio tienen la misma cardinalidad.	Cardinalidad, dominio, codominio.	Ninguna	La condición de cardinalidad mencionada hace referencia a funciones biyectivas y no a sobreyectivas.
4300	Una función es sobreyectiva cuando es inyectiva y el tamaño del dominio es igual al del contradominio.	Inyectividad, tamaño, igualdad, dominio y contradominio.	Ninguna	Confusión de sobreyectividad con biyectividad.
4400	Si *f* va de *A* en *B*, *f* es sobreyectiva si y solo si el codominio de *f* es igual a B.	Igualdad, codominio, conjunto B no especificado.	II	Sustituye el contradominio con el rango.
4500	Una función es sobreyectiva si el dominio y el rango tienen los mismos elementos, y si a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango.	Dominio, rango, correspondencia, unicidad.	I	Se confunde la sobreyectividad con la propiedad que identifica a las funciones

Tabla 11b. Segunda rejilla de análisis de las versiones de la definición de sobreyectividad dadas por los estudiantes para las categorías D.

Resaltamos que estas dificultades corresponden al primer nivel de nuestro análisis: la comprensión de la definición de función sobreyectiva. Queda por analizar cómo se manifiestan esas dificultades en los distintos registros de representación considerados.

Dificultades presentes en la definición de sobreyectividad interpretada en los registros algebraico y cartesiano

Para poder llegar a identificar y analizar algunas de las dificultades presentes en la determinación de la sobreyectividad, es preciso examinar cómo los estudiantes interpretan la definición cuando llevan a cabo procedimientos en cada uno de los registros de representación asociados a la función sobreyectiva, observando si tales procedimientos son coherentes con su versión personal de sobreyectividad, la cual a su vez está asociada a una versión formal particular.

Es en este punto de nuestro estudio en donde la distinción que se realizó anteriormente de las distintas vías de acceso a la sobreyectividad juega un papel primordial, pues permitirá identificar que tan próximo es el procedimiento empleado al que consideramos como óptimo.

Para tal fin, seleccionamos a nueve de los treinta y un (31) estudiantes que participaron en la primera encuesta. La elección de los estudiantes no se dio de forma arbitraria. Esta se llevó a cabo a partir de la categorización propuesta en el marco metodológico de este trabajo (ver capítulo 3, pp. 65-72), seleccionando a los estudiantes que aportaban información suficiente para el estudio. Los criterios de selección aparecen explícitamente en el capítulo 3 de este trabajo.

De acuerdo con lo anterior, los estudiantes seleccionados para el estudio fueron los identificados con los siguientes códigos: 1110, 1150, 1210, 2310, 2320, 3120, 3210, 4300 y 4400.

Con la selección de los estudiantes que fueron considerados para este trabajo, presentamos a continuación un análisis de las dificultades presentes en la comprensión de la definición de la sobreyectividad a partir de los registros algebraico y cartesiano.

La definición de sobreyectividad en el registro algebraico y posibles actores generadores de dificultades

Como hemos mencionado reiteradamente en el transcurso de este trabajo, la comprensión de un objeto o propiedad de un objeto matemático se da a través de sus distintas representaciones. En este sentido, es importante para nosotros analizar los procedimientos que los estudiantes consideran que se deben llevar a cabo al tratar de determinar la sobreyectividad de una función, cuando se tiene a disposición su representación analítica. Esto se debe a que tales procedimientos dejan entrever si efectivamente un estudiante ha comprendido la definición de sobreyectividad en el registro algebraico.

En este orden de ideas, recurrimos a las respuestas que dieron los estudiantes escogidos para el estudio a la segunda pregunta de la encuesta 1, y a la tabla 10 presentada en este capítulo, con el fin de establecer el nivel de coherencia entre los procedimientos descritos por cada estudiante con el procedimiento que consideramos como el más apropiado, de acuerdo con la versión de la definición que cada uno decidió acoger. Este proceso de establecer la coherencia entre los procedimientos permitirá detectar dificultades presentes en la comprensión de la sobreyectividad restringida al registro algebraico. La reducción de la coherencia entre los procedimientos es un síntoma de la existencia de dificultades en la comprensión de la sobreyectividad en el registro algebraico.

Presentamos a continuación tres condiciones que, a nuestra consideración, debe cumplir un procedimiento determinado para que sea coherente con los procedimientos que resultan ser más aptos en la determinación de la sobreyectividad de una función, cuando se ofrece su representación analítica:

1. Conviene que haya correspondencia con alguna de las versiones formales de la definición. Para ello, es necesario observar si el estudiante explicita las hipótesis que se deben cumplir de acuerdo a la versión formal a la cual se ha acogido.

2. Se debe traer a colación los mismos elementos de la función al realizar la descripción y que resultan pertinentes de acuerdo a la versión correspondiente.

3. Debe presentarse explícitamente un tratamiento sobre la expresión analítica de la función de tal manera que permita corroborar las hipótesis de la versión formal de la definición.

Con base en estas tres condiciones presentamos una escala en la coherencia que resulta pertinente para nuestro estudio.

Un procedimiento referido por un estudiante tiene un nivel de coherencia **alto** si se cumplen simultáneamente las tres condiciones de coherencia antes mencionadas.

Si una de estas tres condiciones no se cumple, se dice entonces que el procedimiento descrito tiene un nivel de coherencia **medio** con el procedimiento óptimo. Si dos de las tres condiciones fallan se dice que el procedimiento expuesto tiene un nivel de coherencia **bajo**. Y si las tres condiciones fallan se dice que el nivel de coherencia es **nulo**.

La tabla 12a presenta los procedimientos descritos por los estudiantes para la determinación de la sobreyectividad cuando se tiene a la mano la expresión analítica. Así mismo presenta la coherencia de tales procedimientos con las vías de acceso descritos en la tabla 10.

Puede notarse que hay una mayor coherencia en los estudiantes pertenecientes a las categorías A que en el resto de categorías. Esto puede verificarse usando las tres condiciones anteriormente descritas, en contraste con la tabla 8.

A partir de un análisis de las tres condiciones de coherencia se pueden identificar y caracterizar algunos problemas cuando una de estas se deja de cumplir.

En el caso de los estudiantes 1110, 2310 y 3120, puede notarse que la primera condición no se cumple puesto que no se hace explícita las hipótesis que deben cumplirse en ninguno de los casos. Por otra parte, los estudiantes 1210, 2320, 3210, 4300 y 4400 presentan una explicitación de lo que debe cumplirse, no obstante, no corresponde a las versiones formales a las que tiende cada estudiante de acuerdo a su categoría, las cuales son descritas en la tabla 10. La gran mayoría hace referencia a procedimientos propios de otras versiones o de otro tipo de propiedades como en el caso del estudiante 4300.

Estudiante	Procedimiento descrito	Condición 1	Condición 2	Condición 3	Nivel de coherencia
1110	1. Determinar el dominio y el rango de la función. 2. Despejar la variable independiente en términos de la dependiente para verificar si existen elementos que tienen pre-imagen en el dominio.	No cumple	Cumple	Cumple	Medio
1150	En $y = f(x)$, despejar *x* y analizar si existe alguna indeterminación.	Cumple	Cumple	Cumple	Alto
1210	1. Debe mostrase que *f(x)* está contenido en ***R*** y que el rango está contenido en *f(x)*. 2. Verificar que los elementos del conjunto de llegada sean iguales a los del conjunto de salida (se hace uso de un diagrama sagital).	No cumple	No cumple	No cumple	Nulo
2310	1. Hallar los conjuntos a los que pertenecen el dominio y el rango de la función, respectivamente. 2. Comparar ambos conjuntos.	No cumple	No cumple	No cumple	Nulo
2320	1. Hallar primero el dominio y el rango de la función. 2. Observar si el rango y el dominio coinciden. 3. Tabular la función para mayor seguridad.	No cumple	No cumple	No cumple	Nulo
3120	Relacionar elementos de los conjuntos de llegada y de salida, verificando que se cumpla la condición (se hace uso de un diagrama sagital).	No cumple	Cumple	No cumple	Bajo
3210	Verificar si los elementos del rango de la función tienen correspondencia con el dominio.	No cumple	No cumple	No cumple	Nulo
4300	Analizar la inyectividad y el tamaño del rango respecto al del dominio.	No cumple	No cumple	No cumple	Nulo
4400	Verificar que para cada imagen del rango existe una pre-imagen en el dominio (de acuerdo con el ejemplo, esto se hace despejando la variable independiente en términos de la dependiente).	No cumple	No cumple	Cumple	Bajo

Tabla 12a. Niveles de coherencia entre los procedimientos dados por los estudiantes y los considerados como recomendables en el registro algebraico.

En los casos 1210, 2310, 2320, 3210, 4300 y 4400 puede notarse que de acuerdo con las definiciones que admiten, todos refieren elementos de la función que no son pertinentes. Por ejemplo, el estudiante 1210 sustituye el codominio por el dominio. De esta forma, en tales casos se incumple la segunda condición.

Por último, en los casos 1210, 2310, 2320, 3120, 3210 y 4300 no aparece de forma clara una descripción de cómo se puede verificar la sobreyectividad haciendo uso de la expresión analítica. En algunos casos (1210, 2320 y 3120) se recurrió al uso de otras representaciones de las funciones tales como la sagital o la tabular, para explicar cuando una función es sobreyectiva.

En este punto puede observarse que existe una correspondencia entre los factores generadores de la dificultad señalada anteriormente de acuerdo a la definición formal, con la violación de las condiciones de coherencia aplicadas al registro algebraico. Esto nos deja ver que algunas dificultades en los tratamientos con la expresión analítica podrían heredarse de la definición formal.

La definición de sobreyectividad en el registro gráfico-cartesiano y posibles factores generadores de dificultades

Presentamos ahora algunos factores que podrían llegar a generar dificultades que emergen en la definición de sobreyectividad a partir del registro gráfico-cartesiano. Para ello, analizamos la coherencia que tienen los procedimientos dados por los estudiantes con los que consideramos como apropiados. Definimos entonces tres condiciones de coherencia entre los procedimientos descritos por los estudiantes en el registro de los gráficos cartesianos y los considerados como óptimos:

1. Conviene que haya correspondencia con alguna de las versiones formales de la definición. Para ello, es necesario observar si el estudiante explicita las hipótesis que se deben cumplir de acuerdo a la versión formal a la cual se ha acogido.

2. Se deben traer a colación los mismos elementos de la función al realizar la descripción y que resultan pertinentes de acuerdo a la versión correspondiente.

3. Debe aparecer descrito de forma explícita un tratamiento en el gráfico cartesiano de la función (trazos adicionales, reconfiguración del plano y del gráfico, entre otras.), el cual permita corroborar las condiciones de sobreyectividad de acuerdo a la versión que el estudiante consideró.

Los niveles de coherencia corresponden exactamente a los mismos que se definieron para el registro algebraico.

En la tabla 12b puede verse que solo tres de los estudiantes seleccionados para el estudio (1110, 2320 y 4400) explicitaron en su descripción las condiciones que son necesarias para que se cumpla la sobreyectividad en el registro cartesiano. Dichas condiciones se corresponden con la presentación formal de la definición a la cual tienden de acuerdo a su categoría. Esto deja ver que solo una tercera parte de los estudiantes seleccionados no pierde de vista a lo que se debe llegar.

Es menester observar que fueron los mismos estudiantes que cumplieron la primera condición de coherencia los que cumplieron con la segunda. Cada uno refirió elementos de la función pertinentes con la versión formal a la cual tiende su versión personal.

Estudiante	Procedimiento descrito	Condición 1	Condición 2	Condición 3	Nivel de coherencia
1110	Mirar las *x* en el eje de coordenadas y las imágenes en la gráfica. A partir de esto, definir si el rango es igual al codominio.	Cumple	Cumple	No cumple	Medio
1150	No es posible determinar la sobreyectividad si no se ofrecen las respectivas condiciones al dominio y al contradominio.	-	-	-	-
1210	1. Tratar de usar los puntos que se puedan ubicar en el plano *xy*. 2. Tomaría pares ordenados y tabularía para tener una visión más clara. 3. Usar la prueba de la recta vertical para saber si es función. 4. Usaría la prueba de la recta horizontal para saber si es sobreyectiva.	No cumple	No cumple	Cumple	Bajo
2310	Verificar los valores posibles de la variable *x* y de la variable *y*; si presentan algún salto no es sobreyectiva.	No cumple	No cumple	No cumple	Nulo
2320	1. Observar el dominio de la función. 2. Verificar que a cada *x* le corresponde una imagen del eje *y*. 3. No puede haber saltos en la función.	Cumple	Cumple	No cumple	Medio
3120	1. Relacionar los elementos de cada conjunto. 2. Trazando rectas paralelas al eje *y*.	No cumple	No cumple	Cumple	Bajo
3210	1. Buscar la expresión analítica de gráfico. 2. Observar que todos los elementos del rango tengan pre-imagen.	No cumple	No cumple	No cumple	Nulo
4300	Por “tanteo”, viendo cada imagen y pre-imagen. Tomando el tamaño del rango y del contradominio.	No cumple	No cumple	No cumple	Nulo
4400	1. Analizar los valores que toma *f(x)* y ver cuál sería el dominio. 2. Asegurarse de ver que todos los valores en el eje y tenga un valor en el eje *x*.	Cumple	Cumple	No cumple	Medio

Tabla 12b. Niveles de coherencia entre los procedimientos dados por los estudiantes y los considerados como recomendables en el registro de los gráficos cartesianos.

Tales elementos se ofrecen interpretados a partir de las unidades visuales que conforman el sistema semiótico de los gráficos cartesianos; por ejemplo, el dominio correspondería al eje *x* o a una parte de éste y el contradominio sería el eje *y* o la parte de éste que ocupa el trazo de la función.

A partir de lo anterior, podría decirse que por lo menos para el caso del registro gráfico-cartesiano, **la explicitación de las hipótesis y del rumbo que debe tomar la demostración de la sobreyectividad permite que por lo menos logren identificarse los elementos del gráfico cartesiano pertinentes para la determinación de la sobreyectividad**, los cuales también corresponden a los elementos de la función que deben involucrase en la prueba de acuerdo a la versión de la definición a la cual cada estudiante decidió acogerse.

Este proceso de explicitación puede constituirse en un **factor clave en el control de las dificultades en la determinación de la sobreyectividad en funciones de variable real** y por ende, de la comprensión de la sobreyectividad como propiedad de algunas funciones.

Por último, puede verse que sólo dos de los estudiantes que se escogieron para el estudio (1210 y 3120) describieron la necesidad de recurrir a modificaciones en el gráfico cartesiano para poder determinar la sobreyectividad de la función, con lo cual cumplen la última condición de coherencia. Tales modificaciones en ambos casos consisten en el trazo de rectas horizontales paralelas al eje *x*; este tratamiento se corresponde totalmente con los procedimientos específicos descritos como apropiados para el registro cartesiano. Sin embargo, no se detalla la forma en la que este tipo de tratamiento permite identificar que la función sea o no sobreyectiva, lo cual se debe en gran parte a que los estudiantes mencionados no hicieron evidente el rumbo que debe tomar la prueba, tal como se indicó anteriormente.

Para el resto de los estudiantes se presentaron dos situaciones en cuanto a la descripción de los procedimientos. Por una parte, los estudiantes 1110, 4300 y 4400 no presentaron ninguna descripción de algún tratamiento del gráfico para determinar la sobreyectividad de una función, solo se remite a la acción de "ver" en el gráfico que los elementos del conjunto de llegada (eje y) estén relacionados con algún elemento del conjunto de salida (eje x). Por otra parte, los estudiantes 2310 y 2320 recurren a otros procedimientos que van desde observar que la gráfica de la función en cuestión no presente saltos (discontinuidades), hasta la necesidad de recurrir a la expresión analítica de la función como en el caso del estudiante 3210.

Estas situaciones revelan que los procedimientos recomendables que se presentaron en la tabla 10 para el caso del registro cartesiano pueden ser en algunos casos desconocidos o carentes de sentido al no insistir sobre ellos. Esto indica que tales procedimientos deben ser presentados en el aula de clase como criterios de sobreyectividad, lo cual se convertiría en otro factor clave en el control de las dificultades.

De forma similar que para el caso del registro algebraico, puede observarse que existe una correspondencia entre los factores generadores de la dificultad señalada anteriormente de acuerdo a la definición formal, con la violación de las condiciones de coherencia aplicadas al registro cartesiano.

A partir del análisis de la definición de sobreyectividad interpretada en los registros algebraico y cartesiano, y de la coherencia entre los procedimientos dados por los estudiantes y los que consideramos más adecuados, hemos llegado a detectar una dificultad común a ambos registros: **la incapacidad por parte de los estudiantes de interpretar de forma adecuada la definición de la sobreyectividad en cada uno de los dos registros y de llevar a cabo un procedimiento que la verifique**. Así mismo logramos encontrar algunos factores generadores de esta dificultad:

1. La falta de consciencia por parte de los estudiantes de lo que se debe probar: esto se hace evidente, ya que como lo mencionamos anteriormente muchos de los estudiantes no hacen explícitas ni las hipótesis ni el horizonte de lo que se debe demostrar para garantizar la sobreyectividad de una función.

2. La sustitución de los elementos pertinentes de la función (interpretadas en cada registro por las unidades significantes que lo componen) para determinar la sobreyectividad por otros que no lo son.

3. El recurso a procedimientos distintos a los que consideramos como óptimos al interior de cada registro de acuerdo con las versiones de la definición consideradas, los cuales en algunas ocasiones escapan del registro inicial.

Estas dificultades pueden ser generadas por un gran número de situaciones presentes en la enseñanza de la sobreyectividad: acogerse a una única versión de la definición, ajustarse al tratamiento en un solo registro de representación, el recurso a otras representaciones que no dan cuenta de todos los tipos de funciones.

Nos interesa en particular una situación generadora de dificultades indicada por el estudiante 1150 en la tercera pregunta de la encuesta 1 (ver anexos, pp. 157-158): es necesario especificar desde un principio cómo es el dominio y el contradominio de la función[12]. No hacer esta aclaración puede generar en el estudiante confusión puesto que una misma función puede ser sobreyectiva o no sobreyectiva dependiendo del conjunto de llegada que se esté considerando. De hecho, es la no explicitación de estas condiciones la situación generadora de la primera dificultad presentada anteriormente. Por ejemplo, la función $f(x)=x^2$, es sobreyectiva si el contradominio es el conjunto de los reales positivos, pero es no sobreyectiva si el codominio resulta ser todo el conjunto de los números reales.

De esta forma quedan caracterizadas algunas de las dificultades que se detectaron en cuanto a la comprensión de la definición desde las versiones formales y desde la interpretación en cada uno de los dos registros de representación considerados.

Algunas consideraciones adicionales

Hasta el momento hemos caracterizado las dificultades que logramos detectar en la comprensión de la sobreyectividad a partir de los procesos descritos por los estudiantes, y hemos podido determinar que dichos procesos no son del todo coherentes con los que se consideran aptos. Por otra parte, también hemos conseguido avizorar algunos factores que

[12] Esta situación permitió que en las encuestas subsiguientes se haya especificado las condiciones bajo las cuales se da el dominio y el codominio de la función, usando la representación $f:A\rightarrow B$, donde A es el dominio y B es el contradominio.

pueden aportar al control de las dificultades presentes en la determinación de la sobreyectividad.

Sin embargo, es necesario hacer un análisis particular de los tratamientos efectuados por los estudiantes en cada registro, esta vez no con relación a la definición y sus múltiples versiones, si no con el fin de examinar con detalle los elementos de una representación de la función que un estudiante tiene en cuenta en el acto de determinar la sobreyectividad.

En este proceso, la lengua natural será la herramienta por medio de la cual tales elementos se harán evidentes en cada registro.

Unidades significantes en los registros algebraico y cartesiano de las funciones

Como mencionamos en el capítulo 2, la coordinación de los registros de representación requiere de la discriminación de las unidades significantes en cada registro de representación que han de ponerse en correspondencia.

En nuestro caso, se hizo la discriminación de las unidades en el registro cartesiano y en el registro algebraico que, de acuerdo con las versiones formales de la definición y con las vías de acceso asociadas, podrían llegar a ser cognitivamente pertinentes en la determinación de la sobreyectividad para cada una de las funciones que se presentaron en cada una de las encuestas realizadas.

Dicha discriminación se realizó con el fin de hacer una comparación entre las unidades que consideramos como pertinentes y los elementos de cada representación que los estudiantes seleccionados indicaron que tendrían en cuenta para la determinación de la sobreyectividad. De esta forma, lo que queremos establecer es si dichos elementos corresponden a unidades cognitivamente pertinentes en cada registro de representación.

Tal como lo mencionamos en el capítulo 2, las unidades significantes en el registro cartesiano se denominan unidades visuales, las cuales pueden discriminarse por medio de las variables y valores visuales. Del mismo modo, en el registro algebraico se discriminan unidades simbólicas por medio de valores categoriales. Hecha esta aclaración, a continuación presentamos la discriminación de las unidades que se hizo en cada caso y su respectiva comparación con los elementos percibidos por los estudiantes, los cuales se extraen de las respuestas a las encuestas 2 y 3 respectivamente (ver anexos, p. 169-204).

Discriminación de unidades visuales llevada a cabo por los estudiantes

Las tablas 13a hasta la 13d muestran las unidades visuales que los estudiantes que describieron en al encuesta 2 como útiles en la determinación de la sobreyectividad para cada uno de los gráficos cartesianos que se presentaron, contrastándolas con las que, de acuerdo a la versión formal que corresponde a su categoría, consideramos pertinentes.

La tabla 13a se muestra los elementos del primer gráfico de la encuesta 2 que según la definición y las distintas vías de acceso a la sobreyectividad antes estudiadas, podrían constituirse en unidades cognitivamente pertinentes de acuerdo a cada versión.

Hemos considerado para el gráfico mencionado que el eje x (eje horizontal y su graduación) así como los valores del eje y entre $(-\infty, 2)$ son elementos pertinentes en la determinación de la sobreyectividad, ya que corresponden respectivamente al dominio y al contradominio de la función los cuales aparecen en las versiones I y III de la definición de esta propiedad.

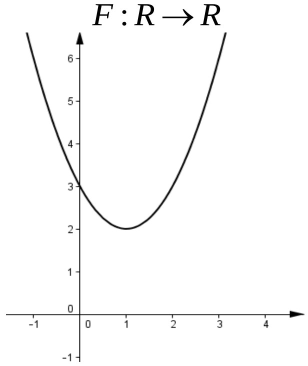
Gráfico	Estudiante	Sobreyectividad según los estudiantes	Elementos presentes en la descripción	Elementos pertinentes según cada versión de la sobreyectividad
$F: R \rightarrow R$  Función no sobreyectiva	1110	No	Puntos del eje *y* que no toma el gráfico, por ejemplo 1 o 0	**Versión I o III:** Eje *x* y sus valores, valores del eje *y* entre (-∞, 2), rectas horizontales en este intervalo **Versión II:** Eje *y* junto con todos sus valores, valores del eje *y* entre (2, ∞)
	1150	No	Concavidad a partir del punto (1,2)	
	1210	Si	Concavidad, corte con eje *y*, imágenes y conjunto de pre-imágenes	
	2310	No	Conjunto de elementos del eje vertical y sus valores, recta horizontal	
	2320	Si	Valores del eje *x* y del eje *y*	
	3120	Si	Eje vertical, eje horizontal y sus respectivos elementos	
	3210	No	Valores que no tienen pre-imagen, por ejemplo -1 y 1	
	4300	Si	Ejes *x* e *y*, gráfica como elementos que toman un comportamiento (trazo)	
	4400	No	Puntos del plano que no toma el gráfico, líneas horizontales	

Tabla 13a. Unidades visuales discriminadas en el gráfico 1 de la encuesta 2.

Del mismo modo, tomamos como unidades visuales pertinentes al eje *y* junto con todos sus valores y los valores del eje *y* entre (2, ∞) que corresponden al codominio y al rango de la función según la versión II.

De acuerdo con esto, de los estudiantes de las categorías A cuya versión personal tiende a la versión formal II, solo el estudiante 1110 identifica una de las unidades que consideramos pertinentes en nuestro estudio: puntos del eje *y* que no toma el gráfico, que corresponde con los valores entre (-∞, 2). El estudiante 1210 refiere otras unidades como la concavidad y los cortes con los ejes los cuales no aportan mayor información.

Sin embargo, el estudiante 1150 destaca el punto (*1*, *2*) (vértice de la parábola) en conjunto con la orientación de la concavidad, que resultan pertinentes ya que a partir de estos se puede tener una idea de la extensión de la gráfica que corresponde al rango de la función. Estos dos elementos podrían llegar a constituirse en unidades visuales pertinentes en el registro cartesiano.

Por otra parte, los estudiantes de la categoría B cuya presentación de la definición también se aproxima a la versión II, se percatan de que los valores del eje y en conjunto conforman un elemento clave para la determinación de la sobreyectividad. No obstante, ambos traen a colación elementos propios de las otras versiones como por ejemplo los valores del eje x. Esta situación se determinó con anterioridad como una dificultad en la comprensión de la sobreyectividad.

De los estudiantes de la categoría C solo el estudiante 3120 percibe los valores del eje x como un elemento esencial para decidir sobre la sobreyectividad de la función. Sin embargo, no recurrió al trazo de rectas horizontales en sus procedimientos, ni tuvo en cuenta los valores del eje y como elemento importante. Por su parte, el estudiante 3210 observa elementos del eje y que no están incluidos en el gráfico 1, observación que se aparta de las versiones I o III a las cuales decidió acogerse.

Por último, el estudiante 4300 de la categoría D muestra una aproximación a las versiones I o III; esto puede notarse ya que refiere al eje x y al eje y como elementos pertinentes para la sobreyectividad. El estudiante 4400 recurre a la observación de puntos del plano que no están incluidos en el gráfico 1 y al trazo de rectas horizontales, los cuales son admitidos en las vías de acceso contempladas en la versión II de la definición.

Respecto a la decisión en la sobreyectividad, puede notarse que los estudiantes de la categoría A fueron más acertados que los de las otras categorías. En general, el grupo de estudiantes obtuvo una precisión en cuanto a la decisión de cinco estudiantes que acertaron sobre nueve en total, es decir, el 55%.

En el caso del segundo gráfico hemos considerado que el eje *x* (eje horizontal y su graduación) así como los valores del eje *y* entre [-1, 1], constituyen elementos pertinentes en la determinación de la sobreyectividad ya que corresponden respectivamente al dominio y al codominio de la función, señalados en las versiones I y III de la definición. También tomamos como unidades visuales pertinentes al codominio en la condición y los valores del eje *y* entre [-1, 1] que corresponden al codominio y al rango de la función según la versión II.

La tabla 13b muestra que de los estudiantes de la categoría A solo el estudiante 1110 refirió todos los elementos que consideramos pertinentes para este gráfico, refiriendo además a un elemento propio de las versiones I o III: puntos del eje *x*. Los estudiantes 1150 y 1210 no refirieron ningún elemento señalado como pertinente; sin embargo, mencionan elementos como la periodicidad, la oscilación de la función en [-1, 1] y sus cotas -1 y 1. Estos resultan pertinentes en este caso pues se traducen en la extensión del gráfico, la cual da cuenta del codominio de la función que a su vez constituye el rango de ésta.

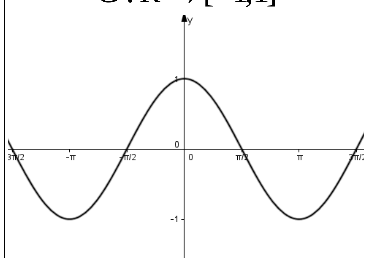
Gráfico	Estudiante	Sobreyectividad según los estudiantes	Elementos presentes en la descripción	Elementos pertinentes según cada versión de la sobreyectividad
$G: R \rightarrow [-1,1]$  Función sobreyectiva	1110	Si	Valores del eje *y* entre [-1, 1], recta paralela al eje *x*, puntos del eje *x* y del eje *y*	**Versión I o III:** Eje *x* y sus valores, valores del eje *y* entre [-1, 1], rectas horizontales en este intervalo **Versión II:** Valores del codominio en la condición, valores del eje *y* entre [-1, 1]
	1150	Si	Periodicidad, cotas de [-1, 1] en el eje *y*.	
	1210	Si	Periodicidad, paridad, valores del eje *x*, oscilación entre los valores máximos y mínimos de [-1, 1]	
	2310	Si	Conjunto al que pertenecen los elementos verticales, línea horizontal.	
	2320	Si	Coordenadas que pertenecen a la gráfica de la función	
	3120	Si	Eje *y*, elementos del eje *y*	
	3210	Si	Elementos entre -1 y 1, elementos del eje *x*	
	4300	Si	Ejes *x* e *y*, gráfica como elementos que toman un comportamiento (trazo)	
	4400	Si	Intervalo [-1, 1] que abarca la función en el eje *y*.	

Tabla 13b. Unidades visuales discriminadas en el gráfico 2 de la encuesta 2.

El estudiante 2310 de la categoría B no da cuenta de los valores del eje *y* como contradominio dado en la condición, pero destaca el otro elemento que hemos destacado como importante para la versión II, junto con el procedimiento de la línea horizontal que es válido para esta versión. El estudiante 2320 no refiere explícitamente a ninguno de los elementos mencionados, sino que destaca las coordenadas que pertenecen a la gráfica de la función. Implícitamente se podría decir que se habla de los valores del eje *y* en [-1, 1], pero no puede asegurarse que el estudiante efectivamente haya hecho referencia a este elemento.

De los estudiantes de la categoría C solo el estudiante 3210 hace referencia a dos de los elementos que resultan pertinentes: eje *x* y sus valores, valores del eje *y* entre [-1, 1], mientras que el estudiante 3120 menciona al eje *y* junto con sus valores los cuales no aportan a la determinación de la sobreyectividad, ya que no aparece ni en la condición ni en la descripción.

En la categoría D, el estudiante 4300 menciona solamente un elemento pertinente: el eje *x*, los otros elementos mencionados corresponden a la versión II. El estudiante 4400 menciona el intervalo [-1, 1] el cual es uno de los elementos importantes que hemos mencionado.

Por último, puede notarse que todos los estudiantes acertaron en la determinación de la sobreyectividad de la función pese a pasar por alto algunas de unidades pertinentes.

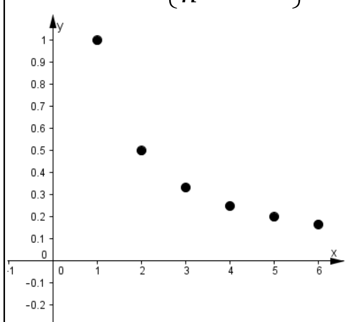
En el caso del tercer gráfico hemos considerado que los valores naturales del eje *x* así como los valores racionales del eje *y* de la forma *1/n* constituyen elementos pertinentes en la determinación de la sobreyectividad, ya que corresponden respectivamente al dominio y al codominio de la función los cuales aparecen en las versiones I y III de la definición. También tomamos como unidades visuales pertinentes al codominio en la condición y los valores del eje *y* en el conjunto $\left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ que corresponden al codominio y al rango de la función según la versión II.

La tabla 13c muestra que solo el estudiante 1110 destacó el conjunto $\left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ como elemento pertinente. El estudiante 1150 observó la relación entre valores particulares lo cual no dice nada de la sobreyectividad para el caso general. Sin embargo, el estudiante 1210 menciona que la condición es indispensable para poder dar cuenta de la sobreyectividad. Esto ya había sido mencionado anteriormente en el análisis de la definición en la formalidad y a partir de los registros de representación.

El estudiante 2310 hace referencia al conjunto de elementos verticales, de los cuales no puede decirse si corresponde al codominio de la función o al eje *y*. El estudiante 2320 hace referencia a los saltos en el gráfico y a puntos del plano que no tienen abscisa que hagan parte de la función, pero ninguno de estos aporta a la determinación de la sobreyectividad.

De la categoría C el estudiante 3120 hace referencia a todos los valores del eje *x* y del eje *y*, de los cuales solamente los naturales y los elementos de la forma *1/n* están relacionados. Por su parte, el estudiante 3210 explicita que la condición es la que le permite dar cuenta de la sobreyectividad de la función.

De forma similar que con el estudiante 3120, el estudiante 4300 hace referencia a todos los valores del eje *x* y del eje *y*, los cuales no aportan a la decisión sobre la sobreyectividad. El estudiante 4400 hace referencia a los elementos de las versiones I o III, salvo por la verificación por las rectas horizontales. Este estudiante no presenta preferencia hacia ninguna de las versiones ya que utiliza elementos de todas las versiones en cada gráfico.

<table>
<tr><th>Gráfico</th><th>Estudiante</th><th>Sobreyectividad según los estudiantes</th><th>Elementos presentes en la descripción</th><th>Elementos pertinentes según cada versión de la sobreyectividad</th></tr>
<tr><td rowspan="9">$H:N \to \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$

Función sobreyectiva

(Se considera N como el conjuntos de los números naturales sin el cero)</td><td>1110</td><td>Si</td><td>Valores del conjunto $\left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$</td><td rowspan="9">Versión I o III:
Valores naturales del eje x, valores racionales del eje y de la forma 1/n, rectas horizontales en cada uno de estos valores.

Versión II:
Valores del codominio en la condición, conjunto $\left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$</td></tr>
<tr><td>1150</td><td>Si</td><td>Relación entre parejas de valores del eje x y del eje y, por ejemplo, H(3) = 1/3</td></tr>
<tr><td>1210</td><td>Si</td><td>El gráfico no es suficiente, la condición es indispensable.</td></tr>
<tr><td>2310</td><td>Si</td><td>El conjunto de elementos verticales</td></tr>
<tr><td>2320</td><td>No</td><td>Saltos en el gráfico, valores particulares que no tienen una abscisa correspondiente, por ejemplo 0.7 y 0.8</td></tr>
<tr><td>3120</td><td>No</td><td>Ejes vertical, horizontal y sus respectivos elementos</td></tr>
<tr><td>3210</td><td>Si</td><td>Se hace uso de la condición</td></tr>
<tr><td>4300</td><td>Si</td><td>Ejes x e y, gráfica como elementos que toman un comportamiento (trazo)</td></tr>
<tr><td>4400</td><td>Si</td><td>Valores naturales del eje x, inversos de dichos valores en el eje y</td></tr>
</table>

Tabla 13c. Unidades visuales discriminadas en el gráfico 3 de la encuesta 2.

Respecto a la precisión en la decisión de la sobreyectividad, puede notarse que siete de los nueve estudiantes acertaron en su elección, lo cual se traduce en que el 77% de los estudiantes acertaron en cuanto a la sobreyectividad de la función.

Finalmente, en el cuarto gráfico hemos considerado que el eje *x* y sus valores así como los valores del eje *y* en los intervalos (-∞, -1), (-1, 1) y (1, ∞) constituyen elementos pertinentes en la determinación de la sobreyectividad, ya que corresponden respectivamente al dominio y al codominio de la función los cuales aparecen en las versiones I y III de la definición. También tomamos como unidades visuales pertinentes al eje *y* junto con todos sus valores y los valores -1 y 1 del eje *y* que corresponden al codominio y al rango de la función según la versión II.

Según la tabla 13d puede verse que el estudiante 1110 logró percibir el conjunto de llegada (eje *y*) como pertinente, mientras que el estudiante 1150 le dio prioridad a los valores -1 y 1 que también son elementos que consideramos como pertinentes. El estudiante 1210 hace referencia a elementos como el eje *x* los cuales son pertinentes de acuerdo a la versión I o III, pero no de acuerdo a la versión II.

De los estudiantes de la categoría B cuya versión personal se acerca a la versión formal II, el estudiante 2310 no hace referencia a ningún elemento de los que hemos definido como acertados, mientras que el estudiante 2320 hace referencia a uno de estos: los valores del eje *y*. Sin embargo, el estudiante 2310 refiere al algo que puede llegar a ser pertinente: determina un conjunto al que pertenecen los valores que aparecen relacionados. Esto podría llegar a entenderse como el rango en este caso.

El estudiante 3120 hace referencia a los ejes vertical y horizontal, de los cuales solamente el segundo corresponde a un elemento pertinente de acuerdo a las versiones I o III, mientras que el estudiante 3210 hace referencia a los mismos elementos definidos como pertinentes salvo por la comprobación por medio de las rectas horizontales.

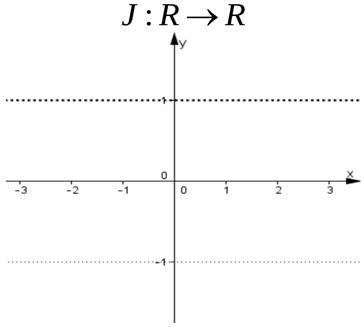
Gráfico	Estudiante	Sobreyectividad según los estudiantes	Elementos presentes en la descripción	Elementos pertinentes según cada versión de la sobreyectividad
$J : R \rightarrow R$  Función no sobreyectiva	1110	No	Valores del eje *y* que la gráfica no toma, conjunto de llegada en la condición (***R***)	**Versión I o III:** Eje *x* y sus valores, valores del eje *y* en los intervalos (-∞, -1), (-1, 1) y (1, ∞), rectas horizontales en esos intervalos **Versión II:** Eje *y* junto con todos sus valores, Valores -1 y 1 del eje *y*
	1150	No	Valores -1 y 1 del eje *y*	
	1210	Si	Valores en el eje *x* y en el eje *y*, condición	
	2310	No	Conjunto al que pertenecen los elementos verticales, elementos de este conjunto que no están relacionados por medio de puntos	
	2320	Si	Valores del eje *x*, valores del eje *y*	
	3120	Si	Elementos de los ejes vertical y horizontal respectivamente	
	3210	No	Valores -1 y 1, valores del eje *x* y valores de ***R*** (eje *y*) que no tienen pre-imagen	
	4300	No	Ejes *x* e *y*, gráfica como elementos que toman un comportamiento (trazo)	
	4400	No	Valores en el eje *x* y valores -1 y 1 en el eje *y*	

Tabla 13d. Unidades visuales discriminadas en el gráfico 4 de la encuesta 2.

El estudiante 4300 hace referencia a todos los valores del eje *x* y del eje *y*. El primero resulta pertinente según las versiones I o III, mientras que el segundo resulta pertinente solo para la versión II. El estudiante 4400 menciona al eje *x* y sus valores el cual es un elemento pertinente según la versión I o III, luego menciona los valores -1 y 1 en el eje *y* los cuales son pertinentes en la versión II.

En lo que respecta a la certitud en las elecciones de la sobreyectividad, seis de los nueve estudiantes decidieron correctamente. Esto quiere decir que el 66% del grupo de estudiantes acertó en su elección.

Puede verse en cada uno de los gráficos que los estudiantes hacen referencia a algunos de los elementos que en cada caso consideramos como pertinentes. Tales elementos pueden considerarse entonces como unidades visuales los cuales podrían caracterizarse más adelante como cognitivamente pertinentes.

Sin embargo, pese a que en cada gráfico los estudiantes pudieron discriminar unidades significantes diferentes al de los otros, algunas de éstas refieren a características comunes para funciones continuas así como para funciones discontinuas.

En el caso de las funciones continuas las cuales corresponden a los gráficos 1 y 2, la extensión vertical del trazo del gráfico de una función resulta esencial, ya que refiere a un elemento pertinente de acuerdo a la versión II de la sobreyectividad de las funciones: el rango. Para las funciones discontinuas que corresponden a los gráficos 3 y 4, la determinación de valores del eje *y* que aparecen relacionados por medio de la función como un conjunto, resulta pertinente ya que también refiere al rango de la función. Algunos de los elementos que consideramos pertinentes en cada caso hacen referencia a estas características; aun así, como se describió anteriormente, hay otros elementos que dan cuenta de las mismas características y que también pueden resultar pertinentes.

En este orden de ideas, toda unidad que haga referencia a la **extensión vertical** en funciones continuas y a **conjuntos de valores particulares del eje vertical** puede llegar a ser pertinente.

A continuación mostramos la discriminación que se hizo de las unidades simbólicas que los estudiantes tuvieron en cuenta para la determinación de la sobreyectividad de una función dada su representación en el registro algebraico.

Discriminación de unidades simbólicas llevada a cabo por los estudiantes

Las tablas 14a hasta la 14d dan cuenta de las unidades simbólicas que los estudiantes lograron discernir de las representaciones analíticas de las cuatro funciones que se presentaron en la encuesta 3, contrastándolas con las que, de acuerdo a la versión formal que corresponde a cada categoría, consideramos como pertinentes.

Para el caso de la expresión 1 la tabla 14a muestra que para las versiones I y III hemos escogido como unidades significantes a los siguientes elementos: variable x, símbolo x^2, valor 1 como sumando. La variable x resulta pertinente ya que hace referencia a los valores del dominio, x^2 y el valor 1 permiten observar que solamente los valores mayores a 1 están relacionados con los valores del dominio. Para la versión II se tuvo en cuenta el símbolo R que representa al conjunto de los números reales, el símbolo x^2 y el valor 1 como sumando. El símbolo R corresponde al contradominio de la función, de x^2 y del valor 1 se desprende que el rango los valores mayores a 1.

La tabla 14a muestra que los estudiantes 1110 y 1150 pudieron discriminar el símbolo x^2 (o por lo menos el superíndice), como unidad significante.

<table>
<tr><th>Expresión analítica</th><th>Estudiante</th><th>Sobreyectividad según los estudiantes</th><th>Elementos presentes en la descripción</th><th>Elementos pertinentes según cada versión de la sobreyectividad</th></tr>
<tr><td rowspan="9">$F: R \to R$
$F(x) = x^2 + 1$
Función no sobreyectiva</td><td>1110</td><td>No</td><td>Símbolo x^2, la suma de la unidad, codominio de la condición (***R***)</td><td rowspan="9">Versión I o III:
Variable x, símbolo x^2, valor 1 como sumando

Versión II:
Símbolo R de la condición, símbolo x^2, valor 1 como sumando</td></tr>
<tr><td>1150</td><td>No</td><td>Superíndice de la variable x, la suma de la unidad</td></tr>
<tr><td>1210</td><td>No</td><td>No hace explícita ninguna unidad simbólica, recurre al esbozo del gráfico de la función</td></tr>
<tr><td>2310</td><td>No</td><td>Superíndice de la variable x, conjuntos de partida y de llegada en la condición</td></tr>
<tr><td>2320</td><td>Si</td><td>Símbolo x^2, condición $F: R \to R$</td></tr>
<tr><td>3120</td><td>Si</td><td>La expresión en conjunto, valor 1, referencia a la parábola y concavidad</td></tr>
<tr><td>3210</td><td>No</td><td>Valor 1 como coeficiente del símbolo x^2, condición, tipificación de la función (cuadrática), conjunto de valores que no tienen pre-imagen: $(1, \infty)$</td></tr>
<tr><td>4300</td><td>No</td><td>No hace explícita ninguna unidad simbólica, conjunto inicial y final de la función</td></tr>
<tr><td>4400</td><td>No</td><td>Compara la expresión $F(x) = x^2 + 1$ con $F(x) = ax^2 + bx + c$, el coeficiente a y el valor 1 que acompaña a x^2, referencia a la parábola y concavidad</td></tr>
</table>

Tabla 14a. Unidades simbólicas discriminadas en la expresión 1 de la encuesta 3.

Sin embargo, el 1110 logró identificar el símbolo *R* como el codominio mientras que el 1150 logró identificar la unidad. El estudiante 1210 no especificó ninguna unidad; empero, menciona la necesidad que tiene para él la recursión al gráfico cartesiano. Esto es evidencia de que es el sentido *gráfico cartesiano* → *expresión analítica* la que brinda información más relevante que el sentido contrario.

Los estudiantes 2310 y 2320 solamente lograron identificar el símbolo x^2 como una unidad pertinente. El estudiante 2310 hace referencia a los conjuntos de partida y de llegada de la función, pero sin hacer mención a la expresión analítica por lo cual no las consideramos como pertinentes. Por su parte, 2320 recurre a la condición $F: R \to R$ lo cual indica la importancia de esta en la determinación de la sobreyectividad.

El estudiante 3120 menciona el valor 1 como una unidad pertinente, además, indica que la expresión en conjunto puede llegar a ser pertinente; esto podría llegar a considerarse ya que por medio de la expresión igualada con un valor apropiado puede llegarse a un resultado falso obteniendo así que la función no es sobreyectiva. Cabe agregar que este estudiante señala algunos elementos que son propios del registro cartesiano como la concavidad. El estudiante 3210 menciona el valor 1 y el símbolo x^2 como unidades pertinentes, agregando elementos como la condición, características como la tipificación de la función, y la determinación por medio de un intervalo de los elementos que no tienen pre-imagen.

El estudiante 4300 no hace referencia alguna de elementos simbólicos de la expresión analítica. El estudiante 4400 hace mención del símbolo x^2 el valor 1, coincidiendo con las unidades que consideramos como pertinentes. Menciona además el coeficiente de x^2, a la parábola que la representa y a su concavidad, los cuales podrían considerarse en la representación cartesiana de la función.

Puede verse en la tabla 14a que siete de los nueve estudiantes acertó en cuanto a la sobreyectividad de la función, es decir, el 77% de los estudiantes seleccionados.

En el caso de la expresión 2, se puede observar en la tabla 14b que para las versiones I y III hemos escogido como unidades significantes a la variable *x*, al coeficiente 3 y la expresión *sen x*. La variable *x* resulta pertinente ya que hace referencia a los valores del dominio, el coeficiente 3 y *sen x* permiten observar que solamente los valores entre -3 y 3 están relacionados con los valores del dominio, puesto que estos muestran que la amplitud de la función seno aumenta de [-1, 1] a [-3, 3]. Para la versión II se tuvo en cuenta la expresión [-3, 3] de la condición, el coeficiente 3 y la expresión *sen x*. La expresión [-3, 3] corresponde al contradominio de la función, el coeficiente 3 y la expresión *sen x* indican que el rango son los valores mayores a entre -3 y 3.

La tabla 14b muestra que los estudiantes 1110, 1150 y 1210 pertenecientes a la categoría A discriminaron el coeficiente 3 y expresión *sen x* como unidades pertinentes para la sobreyectividad, de acuerdo con la versión II de su definición. Sin embargo, el estudiante 1150 fue el único que además distinguió la expresión [-3, 3] de la condición la cual resaltamos como pertinente. El estudiante 1210 recurre al esbozo de la gráfica de la función.

De los estudiantes de la categoría B, 2310 hace referencia a los conjuntos de partida y de llegada de la condición; sin embargo, no recurre a ningún elemento de la expresión analítica. De otro lado, 2320 recurre a la condición $G: R \rightarrow [-3,3]$ y al esbozo del gráfico de la función las cuales no consideramos pero resultan interesantes, ya que se muestra la necesidad de recurrir a otras representaciones. El estudiante 2320 adiciona la expresión [-3, 3] como intervalo que corresponde al codominio de la función señalado en la condición.

Expresión analítica	Estudiante	Sobreyectividad según los estudiantes	Elementos presentes en la descripción	Elementos pertinentes según cada versión de la sobreyectividad
$G: R \to [-3,3]$ $G(x) = 3sen\,x$ Función sobreyectiva	1110	Si	Valor 3, expresión *sen x*, el cual modifica el máximo y el mínimo de la amplitud	**Versión I o III:** Variable *x*, coeficiente 3, expresión *sen x* **Versión II:** Expresión [-3, 3] de la condición, coeficiente 3, expresión *sen x*
	1150	Si	Valor 3, expresión *sen x*, intervalo [-3, 3] de la condición	
	1210	Si	Valor 3, expresión *sen x*, recurre al esbozo del gráfico de la función	
	2310	No	Conjuntos de partida y de llegada en la condición	
	2320	No	Condición $G: R \to [-3,3]$, intervalo [-3, 3], recurre al esbozo del gráfico de la función	
	3120	Si	No hace explícita ninguna unidad simbólica, recurre al gráfico de la función y a un diagrama sagital	
	3210	Si	Valor 3, expresión *sen x*, intervalo [-3, 3]	
	4300	N.R.	No hace explícita ninguna unidad simbólica	
	4400	Si	Valor 3, expresión *sen x*	

Tabla 14b. Unidades simbólicas discriminadas en la expresión 2 de la encuesta 3.

El estudiante 3120 recurre a otras representaciones como la sagital y la cartesiana para poder elegir acerca de la sobreyectividad de la función. De otro lado, 3210 indica que el coeficiente 3, la expresión *sen x* y el intervalo [-3, 3] son las unidades que supone pertinentes. Aunque de acuerdo a su categoría debería señalar elementos de las versiones I o III, uno de los elementos que mencionó (expresión [-3, 3]) corresponde a la versión II. Esto evidencia que se presentan cambios de versión en algunos casos.

El estudiante 4300 no refiere ninguna unidad lo cual es un síntoma de dificultades con el registro algebraico. El estudiante 4400 discriminó el valor 3 y la expresión *sen x* las cuales se ajustan a cualquiera de las versiones ya que no se hace mención de la variable *x* ni de la expresión que personaliza al contradominio.

Puede verse que en la tabla 14b que seis de los nueve estudiantes lograron acertar en su elección de la sobreyectividad, es decir, el 66%.

Para el caso de la expresión 3, la tabla 14c muestra que para las versiones I y III hemos escogido como unidades significantes a la variable *u* y la expresión *1/u*. La variable *u* resulta pertinente ya que hace referencia a los valores del dominio, la expresión *1/u* permite ver que solamente los inversos multiplicativos de los naturales están relacionados con los valores del dominio. Para la versión II se tuvo en cuenta la expresión $\{n^{-1} : n \in N\}$ de la condición que corresponde al contradominio, y la expresión *1/u* que indica que el rango corresponde a los inversos multiplicativos de los números naturales.

La tabla 14c muestra que el estudiante 1110 refiere solamente a la expresión $\{n^{-1} : n \in N\}$ como unidad pertinente. Sin embargo, resalta la expresión $u \in N \wedge u \neq 0$ la cual corresponde con la restricción de la función y que resulta pertinente pues resulta equivalente con la expresión asociada al codominio. Por su parte, el estudiante 1150 no menciona unidad simbólica alguna, mientras que 1210 explicita la expresión *1/u* y menciona la expresión *1/n* que es oportuna ya que hace parte de la expresión que representa al codominio.

El estudiante 2310 hace referencia a la expresión *1/u* como unidad pertinente la cual también hemos considerado. No obstante hace referencia a los conjuntos de partida y de llegada sin recurrir a las expresiones que los representan, por lo cual no se toman en cuenta.

El estudiante 2320 hace mención de la expresión $u \in N$ que está en la restricción y puede asociarse con la variable *u* que consideramos, y de la necesidad del gráfico cartesiano.

Al igual que el estudiante 2310, 3120 hace mención de la expresión *1/u* y del conjunto de partida, de las cuales solo la primera resulta pertinente de acuerdo a las versiones I y III, según lo que se mencionó anteriormente. El estudiante 3210 refirió que las expresiones *1/u* y *1/n* son oportunas tal como lo indicó también el estudiante 1210.

Expresión analítica	**Estudiante**	**Sobreyectividad según los estudiantes**	**Unidades simbólicas presentes en la descripción**	**Elementos pertinentes según cada versión de la sobreyectividad**
$H : N \to \{n^{-1} : n \in N\}$ $H(u) = \frac{1}{u}$ $u \in N \wedge u \neq 0$ Función sobreyectiva	1110	Si	Símbolo n^{-1}, símbolos $u \in N \wedge u \neq 0$, conjunto $\{n^{-1} : n \in N\}$ de la condición.	**Versión I o III:** Variable *u*, expresión *1/u* **Versión II:** Expresión $\{n^{-1} : n \in N\}$ de la condición, expresión *1/u*
	1150	Si	No hace explícita ninguna unidad simbólica	
	1210	Si	Símbolo *1/u* de la expresión analítica y símbolo *1/n* (o n^{-1}) de la condición, recurre al esbozo del gráfico de la función y a una tabulación de valores	
	2310	Si	Referencia a *1/u* como opuesto multiplicativo, conjunto de partida y de llegada en la condición	
	2320	Si	Expresión $u \in N$ y conjunto de partida de la condición, recurre al esbozo del gráfico de la función	
	3120	Si	Símbolo *1/u* de la expresión analítica y conjunto de partida de la condición	
	3210	Si	Símbolo *1/u* de la expresión analítica y símbolo *1/n* (o n^{-1}) de la condición	
	4300	Si	No hace explícita ninguna unidad simbólica	
	4400	Si	Referencia al conjunto $\{u^{-1} : u \in N\}$ como rango de *H*, igualación con $\{n^{-1} : n \in N\}$	

Tabla 14c. Unidades simbólicas discriminadas en la expresión 3 de la encuesta 3.

El estudiante 4300 tampoco indica en este caso ninguna unidad de la expresión analítica. Por otra parte, el estudiante 4400 considera la expresión *1/u* al interior del conjunto $\{u^{-1} : u \in N\}$, el cual también puede considerarse como unidad significante al representar simbólicamente el rango de la función. Menciona además la expresión $\{n^{-1} : n \in N\}$ la cual hace parte de la versión II como referencia al contradominio.

En cuanto al acierto en la sobreyectividad, de la tabla 14c puede decirse que el 100% de los estudiantes acertó en su elección.

La tabla 14d muestra que para las versiones I y III hemos escogido como unidades significantes a la variable t, símbolos t^2 y 0. La variable t resulta pertinente ya que hace referencia a los valores del dominio, los símbolos t^2 y 0 asociados respectivamente a las expresiones $t \in Q$ y $t \notin Q$ permiten ver que solamente los valores racionales positivos y el cero están relacionados con los valores del dominio. Para la versión II se tuvo en cuenta el símbolo R de la condición que corresponde al contradominio, y los símbolos t^2 y 0 de los que se desprende que el rango es el conjunto de los racionales positivos junto con el cero.

El estudiante 1110 no distingue ninguna unidad de la expresión 4. El estudiante 1150 distingue el superíndice del símbolo t^2, el cual es pertinente ya que es un indicador de que el rango son números positivos, sin embargo no distingue ninguna otra unidad para determinar la naturaleza de estos números. De otro lado, 1210 distingue el valor 0, la condición y las expresiones $t \in Q$ y $t \notin Q$, pero no distingue el símbolo t^2 el cual define gran parte de los elementos del rango.

<table>
<tr><th>Expresión analítica</th><th>Estudiante</th><th>Sobreyectividad según los estudiantes</th><th>Unidades simbólicas presentes en la descripción</th><th>Elementos pertinentes según cada versión de la sobreyectividad</th></tr>
<tr><td rowspan="9">$\chi : R \to R$
$\chi(t) = \begin{cases} t^2, & si\ t \in Q \\ 0, & si\ t \notin Q \end{cases}$
Función no sobreyectiva</td><td>1110</td><td>No</td><td>No hace explícita ninguna unidad simbólica</td><td rowspan="9">Versión I o III:
Variable t, símbolos t^2 y valor 0, expresiones $t \in Q$ y $t \notin Q$

Versión II:
Símbolo R de la condición, símbolo t^2, valor 0, expresiones $t \in Q$ y $t \notin Q$</td></tr>
<tr><td>1150</td><td>No</td><td>Superíndice de la variable t</td></tr>
<tr><td>1210</td><td>No</td><td>Condición, expresiones $t \in Q$ y $t \notin Q$, valor 0 de la expresión analítica de $\chi(t)$</td></tr>
<tr><td>2310</td><td>No</td><td>Conjuntos de partida y de llegada en la condición, partes de la expresión analítica de la función</td></tr>
<tr><td>2320</td><td>Si</td><td>Condición $\chi : R \to R$, expresión $t \notin Q$, t^2 y valor 0, recurre al esbozo del gráfico de la función</td></tr>
<tr><td>3120</td><td>Si</td><td>No hace explícita ninguna unidad simbólica, vértice (0, 0) de la parábola definida en la primera parte de χ</td></tr>
<tr><td>3210</td><td>No</td><td>Expresiones $t \in Q$ y $t \notin Q$, símbolo t^2 y valor 0, intervalo $(0, -\infty)$</td></tr>
<tr><td>4300</td><td>N.R.</td><td>Partes de la expresión analítica de la función χ</td></tr>
<tr><td>4400</td><td>No</td><td>Variable t, valor 0 para $\chi(t)$</td></tr>
</table>

Tabla 14d. Unidades simbólicas discriminadas en la expresión 4 de la encuesta 3.

El estudiante 2310 menciona los conjuntos de partida y de llegada sin ofrecer expresión simbólica que dé cuenta de estos; menciona además las “partes” de la expresión analítica. Esto puede llegar a ser pertinente pues aunque no refiere a unidades simbólicas, es fácil notar que habla de los símbolos t^2 y valor 0, así como de las expresiones $t \in Q$ y $t \notin Q$. Sin embargo, no menciona nada sobre el símbolo R que representa el contradominio. El estudiante 2320 explicita la condición, la expresión $t \notin Q$, los símbolos t^2 y 0, haciendo además una referencia a gráfico de la función. Sin embargo no dice nada de la expresión $t \in Q$ la cual es necesaria para conocer la naturaleza de los elementos del rango.

El estudiante 3120 no refiere unidad simbólica alguna, solo hace referencia a elementos que atañe a la representación gráfica de la función. El estudiante 3210 discrimina casi todas las unidades simbólicas que consideramos salvo la variable *t*, incluyendo en su descripción el intervalo $(0, -\infty)$, el cual es pertinente ya que forma parte de los elementos que no están relacionados por medio de la función.

Aunque no decide sobre la sobreyectividad de la función χ, el estudiante 4300 menciona al igual que el estudiante 2310 las "partes" de la expresión analítica de las cuales justificamos su pertinencia. El estudiante 4400 discrimina la variable *t* y el valor 0 las cuales hacen parte de las versiones I y III de la definición. Sin embargo no discrimina el símbolo t^2 que describe gran parte de los elementos que están relacionados por medio de la función con los elementos del dominio.

En cuanto a la precisión en la determinación de la sobreyectividad, la tabla 14d muestra que seis de los nueve estudiantes lograron acertar en su elección. Esto cantidad corresponde al 66% de los estudiantes que desarrollaron la encuesta.

Para cada una de las expresiones analíticas de las funciones se pueden observar casos en los cuales los estudiantes recurren a elementos distintos de los que consideramos como pertinentes de acuerdo a las distintas versiones de la definición. Ejemplo de esto es la mención reiterada que hacen algunos estudiantes de la necesidad de recurrir a los gráficos de cada una de las funciones. Esto muestra que para algunos estudiantes los gráficos cartesianos ofrecen información que en la expresión analítica no se puede percibir.

Es interesante observar que tanto para el registro de los gráficos cartesianos como para el algebraico se recurre a la condición dada por la representación $f : A \to B$ para poder establecer la sobreyectividad de una función. Esto indica que esta condición resulta ser esencial para la comprensión de la sobreyectividad y para su determinación en una función arbitraria, tal como lo señaló el estudiante 1150.

Algunas dificultades comunes en la discriminación de unidades significantes en cada registro por parte de los estudiantes

Aunque los gráficos cartesianos y las expresiones analíticas de las funciones incluidas en las encuesta 2 y 3 son representaciones diferentes del mismo objeto y, por tanto, cada una presenta dificultades muy particulares respecto a la sobreyectividad, en ambas se logró percibir algunos problemas comunes al registro algebraico y al registro cartesiano.

Un primer problema tiene que ver con algo en lo que se insistió constantemente y tiene que ver con **la mención que los estudiantes hacen de elementos que para ellos permiten determinar la sobreyectividad pero que en realidad no son pertinentes**. Parte de ello se pudo observar cuando se anotó en varias ocasiones que se traían a colación elementos que corresponden a varias versiones de la definición, en lugar de hacer referencia solo a las que atañen a la versión que acogió de acuerdo a la categoría a la que pertenece; también se hace evidente esta situación cuando se mencionan elementos que corresponden a partes de la función pero que no hacen referencia a elementos de ninguna de las representaciones.

Otro problema que se pudo observar fue específicamente con el registro algebraico, ya que en varias ocasiones notamos casos en los que los estudiantes no lograron discriminar ningún elemento de las expresiones analíticas de las funciones. Esto muestra que es la discriminación de unidades significantes en el registro algebraico la que presenta mayor problema; esto puede ser debido principalmente al hecho de que en varias ocasiones los estudiantes no logran relacionar elementos de la función que de acuerdo a las versiones de la definición deben tenerse en cuenta con las unidades simbólicas que componen la función.

Este último problema también se pudo observar en la discriminación de los elementos que los estudiantes consideraron como pertinentes en cada una de las funciones de la encuesta 4, de las cuales se ofreció su expresión analítica y su gráfico cartesiano simultáneamente.

En las tablas 15a a la 15d puede notarse que se dan varios casos en los cuales los estudiantes no dan cuenta de ninguna unidad visual o simbólica que para ellos haya sido relevante. Más aún, esta situación se presenta con mayor frecuencia en el caso de la representación analítica.

De los resultados consignados en estas tablas puede notarse que es difícil para algunos estudiantes discriminar unidades pertinentes en cada registro cuando estos aparecen simultáneamente. Incluso puede observarse que en algunos casos la discriminación se recarga sobre una de las representaciones, en este caso, sobre la representación gráfica.

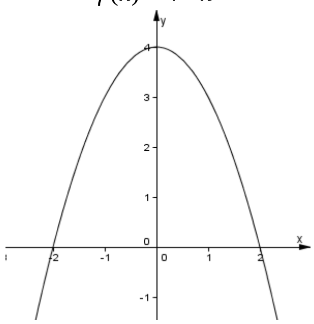
Condición, expresión analítica y gráfico	**Estudiante**	**Sobreyectividad**	**Elementos usados en el registro gráfico**	**Elementos usados en el registro algebraico**
Sea $f: R \rightarrow R$ tal que $f(x) = 4 - x^2$  Función no sobreyectiva	1110	No sobreyectiva	Extensión de la parábola	Valor 4 de la expresión analítica
	1150	No sobreyectiva	Valores del eje *y* que no tienen pareja	Superíndice de la variable *x* y valor 4 de la expresión analítica
	1210	No sobreyectiva	Punto máximo *(0, 4)* de la parábola	Forma cuadrática de la función
	2310	No sobreyectiva	No indica elementos del gráfico	Superíndice de la variable *x* como grado del polinomio de la expresión
	2320	Sobreyectiva	Trazo, simetría, puntos del eje *x* y del eje *y*	Expresión analítica de *f* en conjunto
	3120	Sobreyectiva	Eje vertical, eje horizontal	Superíndice de la variable *x* para tipificar la función
	3210	No sobreyectiva	Punto máximo *(0, 4)* de la parábola, sentido de la abertura	Expresión analítica de *f* en conjunto
	4300	No sobreyectiva	No indica elementos del gráfico	No indica elementos de la expresión analítica
	4400	No sobreyectiva	No indica elementos del gráfico	Valor de *y* sin pareja

Tabla 15a. Rejilla de análisis de la relación entre los elementos que constituyen cada representación de la función 1.

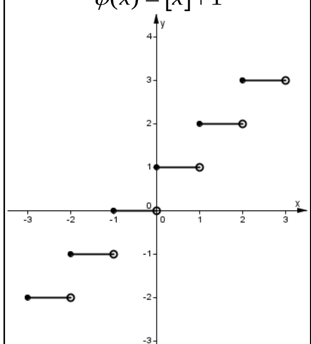
Condición, expresión analítica y gráfico	**Estudiante**	**Sobreyectividad**	**Elementos usados en el registro gráfico**	**Elementos usados en el registro algebraico**
Sea $\varphi: R \rightarrow Z$ tal que $\varphi(x) = [x] + 1$  Función sobreyectiva	1110	Sobreyectiva	Valores enteros en el eje *y*	Símbolo [*x*] de la expresión analítica
	1150	Sobreyectiva	Valores enteros en el eje *y*, valores reales en el eje *x*	Parte entera ([*x*]), suma del valor 1
	1210	Sobreyectiva	No indica elementos del gráfico	Parte entera ([*x*]), suma del valor 1
	2310	No sobreyectiva	Ciertos valores del eje *x* relacionados con un valor del eje *y*	Parte entera ([*x*])
	2320	No sobreyectiva	Saltos de la función, puntos abiertos y cerrados.	No indica elementos de la expresión analítica
	3120	Sobreyectiva	Partes del trazo, elementos del eje *x* y del eje *y*	No indica elementos de la expresión analítica
	3210	Sobreyectiva	Valores enteros del eje *x* (1 y 2), y del eje *y* (2 y 3)	No indica elementos de la expresión analítica
	4300	Sobreyectiva	No indica elementos del gráfico	No indica elementos de la expresión analítica
	4400	Sobreyectiva	Conjunto de valores enteros del eje *y*	No indica elementos de la expresión analítica

Tabla 15b. Rejilla de análisis de la relación entre los elementos que constituyen cada representación de la función 2.

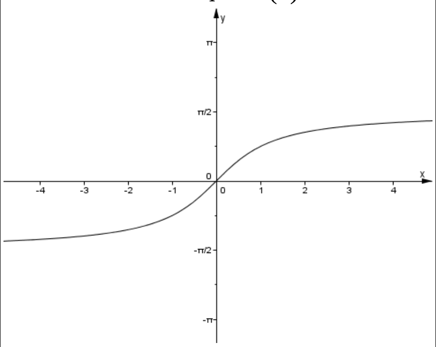
Condición, expresión analítica y gráfico	**Estudiante**	**Sobreyectividad**	**Elementos usados en el registro gráfico**	**Elementos usados en el registro algebraico**
Sea $G: R \to Z$ tal que $G(x) = Arc\tan x$  Función no sobreyectiva	1110	No sobreyectiva	Valor entero de *y* que no es imagen de la función	No indica elementos de la expresión analítica
	1150	No sobreyectiva	Valor 5 del eje *y*	No indica elementos de la expresión analítica
	1210	No sobreyectiva	Valores $-\pi/2$ y $\pi/2$ como asíntotas horizontales	No indica elementos de la expresión analítica
	2310	Sobreyectiva	Valores enteros entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ (-1, 0 y 1)	No indica elementos de la expresión analítica
	2320	Sobreyectiva	Continuidad del gráfico	No indica elementos de la expresión analítica
	3120	Sobreyectiva	No indica elementos del gráfico	No indica elementos de la expresión analítica
	3210	No sobreyectiva	Valores $-\pi/2$ y $\pi/2$ como asíntotas horizontales	No indica elementos de la expresión analítica
	4300	No sobreyectiva	No indica elementos del gráfico	No indica elementos de la expresión analítica
	4400	Sobreyectiva	No indica elementos del gráfico	Expresión analítica de *G* en conjunto

Tabla 15c. Rejilla de análisis de la relación entre los elementos que constituyen cada representación de la función 3.

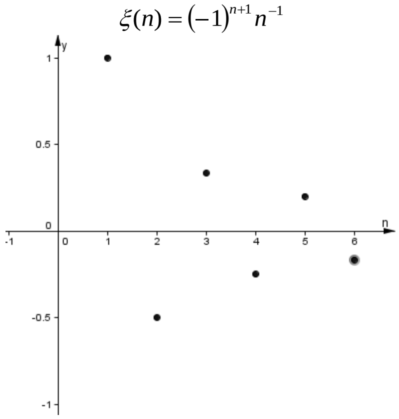
Condición, expresión analítica y gráfico	**Estudiante**	**Sobreyectividad**	**Elementos usados en el registro gráfico**	**Elementos usados en el registro algebraico**
Sea $\xi: Z^{+} \to [-1,1]$ tal que $\xi(n) = (-1)^{n+1} n^{-1}$  Función no sobreyectiva	1110	No sobreyectiva	No indica elementos del gráfico	Variable *n* de la función ξ
	1150	No sobreyectiva	Valor 0.5 del eje *y*	Variable *n* de la función ξ
	1210	No sobreyectiva	Valor 1 del eje *x*, valores 1 y -1 del eje *y*	No indica elementos de la expresión analítica
	2310	Sobreyectiva	Elementos del eje *x* y del eje *y*	No indica elementos de la expresión analítica
	2320	Sobreyectiva	No indica elementos del gráfico	No indica elementos de la expresión analítica
	3120	Sobreyectiva	Puntos del gráfico	No indica elementos de la expresión analítica
	3210	No sobreyectiva	Valores del eje *y* entre 0.5 y 1 que no tienen pre-imagen	Símbolo n^{-1}
	4300	No sobreyectiva	No indica elementos del gráfico	No indica elementos de la expresión analítica
	4400	Sobreyectiva	No indica elementos del gráfico	Variable *n*, Expresión analítica de ξ en conjunto

Tabla 15d. Rejilla de análisis de la relación entre los elementos que constituyen cada representación de la función 4.

Algunas consideraciones finales

Dado que la conversión que de acuerdo a lo que hemos analizado va en el sentido *gráfico cartesiano → expresión analítica*, lo que sigue de la discriminación de unidades visuales y simbólicas en cada registro por separado que hemos hecho hasta el momento, es tomar los elementos que los estudiantes discriminaron para cuando aparecen simultáneamente las dos representaciones de la misma función (información que aparece en las tablas 15a a la 15d), haciendo variaciones en las unidades visuales observando cuales de estas producen variaciones en las unidades simbólicas. Estas variaciones permitirían definir (como hemos mencionado anteriormente) variables y valores visuales y valores categoriales para la determinación de la sobreyectividad. Las unidades que estén relacionadas con estos valores serán las consideradas como cognitivamente pertinentes.

Después de este proceso sigue finalmente el contraste con las unidades que los estudiantes lograron discriminar para el registro algebraico y el registro cartesiano por separado.

Sin embargo, como lo mencionamos anteriormente en este trabajo no se alcanza a llegar a este punto debido a restricciones en los tiempos reglamentarios para la presentación de éste. No obstante, quedan consignados los elementos que los estudiantes lograron discriminar, así como los soportes de los cuales se extrajo la información.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Y todo lo que hagáis, hacedlo de corazón,

como para el señor y no para los hombres…

Colosenses 3:23

En este capítulo presentamos las conclusiones e implicaciones didácticas que resultaron del análisis de la comprensión de la sobreyectividad, a la luz de las investigaciones hechas por Duval sobre los registros de representación semiótica y su papel en la adquisición de los conocimientos matemáticos.

A partir de esto mostramos de forma general los factores generadores de algunas de las dificultades en la comprensión de la sobreyectividad, los cuales se pudieron detectar en nuestro análisis. Seguidamente se presentan algunas propuestas que en trabajos posteriores podrían considerarse como aportes al control de tales dificultades.

Algunas dificultades en la comprensión de la sobreyectividad y sus factores generadores

A partir de los resultados obtenidos en este estudio hemos podido confirmar la existencia de algunas dificultades en la comprensión de la sobreyectividad y algunos de los factores que las generan.

La primera dificultad se hizo manifiesta en el análisis de las versiones formales de la definición versus las versiones personales de cada estudiante y tiene que ver con la falta de coherencia de las segundas con las primeras. Como se mencionó en el capítulo 4, esta dificultad se debe a la sustitución de elementos pertinentes en las versiones formales por otros que no lo son y a la confusión de la sobreyectividad con otras propiedades de las funciones. De ahí esta dificultad se traduce en la falta de comprensión de la definición de la sobreyectividad en cada una de sus versiones formales por parte de los estudiantes.

Una segunda dificultad apareció en el examen que se llevó a cabo de los procedimientos que según los estudiantes llevarían a cabo para probar la sobreyectividad de una función en las representaciones analítica y gráfica; esta dificultad tiene que ver con la falta de coherencia entre sus procedimientos descritos y los que se consideraron como óptimos de acuerdo a la categoría de cada estudiante. Se encontró que la sustitución de elementos pertinentes que aparecen en los procedimientos para cada representación de acuerdo a cada versión por otros que no lo son, constituye un factor generador de esta dificultad, así como la falta de explicitación de las hipótesis que se tendrían en cuenta para poder comenzar la prueba.

La segunda dificultad radica entonces en la incapacidad por parte de los estudiantes de interpretar de forma adecuada la definición de la sobreyectividad en cada uno de los dos registros y de llevar a cabo un procedimiento que la verifique.

La tercera dificultad que logró caracterizarse tuvo su emergencia en la revisión que se hizo de las unidades significantes que los estudiantes tuvieron en cuenta en cada una de las dos representaciones por separado; esta dificultad consiste en la imprecisa escogencia que hacen los estudiantes de las unidades que aportan información a la determinación de la sobreyectividad. Un factor generador de esta dificultad consiste en la referencia que hace la mayoría de los estudiantes a unidades visuales y simbólicas que son pertinentes en otras versiones de la definición pero no en la que corresponde a su categoría.

En el caso específico de la representación analítica, en algunas ocasiones la escogencia o discriminación de unidades fue nula. Esto se manifestó de forma más acentuada en el análisis de las unidades discriminadas cuando ambas representaciones aparecen simultáneamente. De ahí se concluye que es en el registro algebraico en el que existe mayor problema.

Aportes del estudio al caso específico de la comprensión de la sobreyectividad

Pese a que por cuestiones de tiempo no se logró avanzar hasta la determinación de los valores visuales y categoriales en cada uno de los dos registros tomados en cuenta, los cuales un estudiante debería llegar a distinguir para llegar a comprender dicha propiedad, hasta este punto podemos describir algunos aportes al control de las dificultades antes descritas:

1. En lo que respecta a la dificultad en la comprensión de la definición de la sobreyectividad resulta importante que en el proceso de enseñanza se presenten cada una de las versiones de la definición de esta propiedad y de los elementos de la función que en cada una se ven involucrados. De esta forma, los estudiantes al menos estarían conscientes de los elementos que son pertinentes en la verificación de tal propiedad.

2. En lo que respecta a la dificultad en la comprensión de la definición interpretada en los dos registros considerados, se hace necesaria la explicitación de la condición dada por la expresión $f : A \to B$ y de las hipótesis que se tendrán en cuenta de acuerdo a cada versión de la definición, para que los procedimientos llevados a cabo para la verificación de esta propiedad tengan un rumbo bien definido. Además, es necesario crear estrategias que permitan que los estudiantes puedan interpretar de forma adecuada los elementos pertinentes de la función que aparecen en la definición en cada registro de representación.

3. En lo que respecta a las unidades significantes en cada representación, la discriminación de estas es un proceso que se debe presentar de forma explícita a los estudiantes. Más aún, resulta pertinente darle la posibilidad al estudiante de que pueda hacer una discriminación de tal tipo por sí mismo, de tal forma que

con la mediación del docente pueda adquirir habilidad en la discriminación de las unidades que resultan pertinentes en cada registro para la verificación de una propiedad como la sobreyectividad, insistiendo en aquel que presente mayor problema para los estudiantes, en este caso, en el registro analítico.

Es necesario reiterar que estos aportes son hechos hasta donde se pudo llegar. Resultaría interesante ver que otro tipo de aportes se pueden ofrecer con el análisis de las unidades significativas cuando aparecen las dos representaciones al mismo tiempo. Esta tarea queda pendiente para posteriores estudios en esta misma línea.

Aportes del estudio a la educación matemática

Además de los aportes hechos al caso específico de la comprensión de la sobreyectividad, los cuales resultan siendo pequeños aportes a la educación matemática, también pueden resaltarse algunos aportes que atañen a la metodología que se siguió para llevar a cabo este estudio y que pueden llegar a ampliarse al estudio de propiedades de cualquier otro objeto matemático:

1. En el estudio de la comprensión de propiedades de objetos matemáticos a partir de los registros semióticos, es necesario establecer las vías por medio de las cuales se puede llegar a la determinación de dicha propiedad para cada representación del objeto.

2. A partir de nuestro estudio, puede decirse que la lengua natural es un medio por el cual el análisis de la comprensión de propiedades de objetos matemáticos

resulta ser muy productiva, ya que es este registro semiótico el cual resulta más familiar para los estudiantes

3. La discriminación de unidades puede llegar a dirigirse no solo para saber qué es lo que deberían observar los estudiantes sino también lo que efectivamente observan, permitiendo caracterizar algunas dificultades.

Por otra parte, este trabajo deja algunas preguntas abiertas sobre la comprensión no solo de los objetos matemáticos, sino también de las propiedades de estos, y que esperamos puedan ser continuadas en otros trabajos académicos.

Algunas de esas preguntas están encaminadas a los efectos que puede tener el concepto que un estudiante se forma de un objeto en la comprensión de una propiedad de éste:

- Cuando se habla de propiedades de funciones ¿qué tipo de funciones tienen en mente los estudiantes? ¿son continuas? ¿son monótonas? ¿qué tanto afectan estas consideraciones en del estudio de la comprensión de tales propiedades?

Por otra parte, también emerge la siguiente pregunta que cuestiona sobre cómo a medida que un estudiante observa el mismo objeto o propiedad en distintos momentos de su formación académica, puede llegar a involucrarse en redes conceptuales más y más complejas y que no le permiten reflexionar sobre la idea primitiva de tal objeto:

- Tomando en cuenta que un estudiante puede hacerse una idea diferente de un objeto o propiedad dependiendo de qué tan inmerso estén en una red conceptual determinada ¿cómo preguntar a un estudiante por la idea o concepto primitivo aislando la red conceptual?

Estas dos preguntas aunque no hacen parte del propósito de este trabajo, podrían abrir un campo de indagación que ayudaría a profundizar sobre las dificultades aquí encontradas para la sobreyectividad y para otras propiedades de las funciones y de otros objetos matemáticos.

Comentarios finales

A partir de los resultados de este estudio sobre las dificultades en la comprensión de la sobreyectividad y sus factores generadores, podemos llegar a concluir que esta propiedad resulta ser bastante problemática en el aprendizaje de las funciones de variable real aún para individuos que permanecen en contacto con este tipo de propiedades.

Este trabajo muestra que la enseñanza de esta propiedad no puede simplemente reducirse al estudio de algunos casos particulares ni asumirse como espontáneo o trivial en ninguno de los casos. Por el contrario, su preparación y presentación en el aula de clase requieren un mayor detalle por parte del docente puesto que no solamente se trata de mostrar la definición y algunos ejemplos, se trata de que el profesor muestre las distintas versiones de la definición y sus elementos pertinentes, y que los lleve a interpretar estos elementos en cada una de las representaciones que se brinden de la función. Más aún, el trabajo con los estudiantes requiere que el docente reflexione sobre los aspectos formales que la definición involucra, y que las versiones personales de los estudiantes se den en un lenguaje que respete la versión formal de la definición, de tal manera que esta se pueda interpretar de forma adecuada en los distintos registros de representación de las funciones.

Sería ideal que el profesor lograra proponer actividades en las que se muestre que para la verificación de esta propiedad en una de sus representaciones se requiere el paso a otra representación, lo cual generaría una reducción notable de las dificultades con esta propiedad no solo para las funciones de variable real sino también para funciones de cualquier otro tipo.

Sin embargo, un trabajo de este tipo requiere que se haya logrado llegar a un estadio en el que los estudiantes puedan discriminar elementos pertinentes en cada registro y que puedan estar conscientes de la significación que tiene cada uno de esos elementos en cada una de las representaciones por separado. Esto es parte de lo que se logró en este trabajo de grado y lo cual debería ser reproducido por el docente en sus clases. Vemos entonces que la discriminación de unidades para el análisis de la comprensión de la sobreyectividad es un ejemplo de que el análisis a través de los registros de representación semiótica puede llevarse a cabo para propiedades de objetos.

Finalmente se puede decir que este trabajo resulta ser una incursión al análisis de contenidos matemáticos que no se reducen solo a los objetos sino a las propiedades de estos, por medio del análisis semiótico. Queda entonces abierto el campo para que otros estudios continúen en esta línea y puedan llegar a ampliar sobre las dificultades en otro tipo de propiedades ya sea para las funciones o para otros objetos matemáticos y que muy posiblemente aportarán de forma más significativa en el control de tales dificultades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apostol, T. M. (1989). Análisis Matemático. Barcelona: Editorial Reverté S. A.

Becerra J. M. (2002). Matemáticas V… el placer de dominarlas sin complicaciones. Universidad nacional autónoma de México. México D. F.

Cuesta, A. (2007). El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona. Bellaterra.

Duval, R. (2004a). Los problemas fundamentales del aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. (Trad. M. Vega, 1991). Cali, Colombia.

Duval, R. (2004b). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Segunda edición. (Trad. M. Vega, 1999). Cali, Colombia.

Duval, R. (s. f.). Las representaciones gráficas: funcionamiento y condiciones de su aprendizaje. Documento de trabajo no publicado. (Trad. M. Vega, s. f.). Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Duval, R. (1988). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En Rodrigo Cambray Núñez, Ernesto A. Sánchez y Gonzalo Zubieta Budillo (Comps.), Antología de Educación Matemática, 125-139. México D.F.: CONVESTAV-IPN.

Jech, T. & Hrbacek, K. (1999). Introduction to Set Theory. New York: Marcel Dekker Inc.

Lewin, R. A. (s. f). Teoría Axiomática de Conjuntos. Manuscrito no publicado. Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile. Santiago de Chile.

López, J. M. (2007). Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto de función (Tesis de pregrado). Universidad Autónoma de Yucatán. Mérida, Yucatán.

Luzin N. N. (1930). Función (Trads. J. M. Almira y D. Arcoya). *La Gaceta de la RSME*, sección de Historia a cargo de J. Ferreirós, 6(2), 204-225. Recuperado de http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/historia62.pdf

Munkres, J. R. (2002). Topología General. Madrid: Pearson Education S. A.

Recalde L. C. (s. f.). La instauración del álgebra y el análisis como ramas de las matemáticas. Documento de trabajo no publicado. Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Recalde L. C., Hinestroza D., Mora H., Álvarez J., Marmolejo M., & Acosta E. (s. f). Fundamentos de matemáticas básicas. Documento de trabajo. Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Shilov, G. E. (2004). ¿Qué es una función? (Trad. A. A. Cortés) Sigma, (25), 137-147.

ANEXOS

En esta sección presentamos respectivamente los modelos de las cuatro encuestas que se realizaron para el desarrollo de este estudio, así como las respuestas que dio cada uno de los estudiantes a cada una de estas, las cuales constituyen los insumos para el análisis de las dificultades en la comprensión de la sobreyectividad.

Anexo 1: encuesta 1

(Instrumento para el trabajo de grado de Javier Fernández)

Nombre y Apellido: _________________________________ E-mail: _______________

Por favor responda con la mayor claridad posible las siguientes preguntas.

1. En los cursos de matemáticas que ha recibido ¿le han enseñado lo que significa que una función sea sobreyectiva? Sí: ___ No: ___
2. De forma breve trate de dar una definición (así sea aproximada) de lo que usted entiende por función sobreyectiva.
3. De acuerdo con la definición que acaba de dar, describa y después ejemplifique el proceso que usaría para determinar la sobreyectividad de una función cuando usted tiene a disposición solo su expresión analítica.

   DESCRIPCIÓN:

   EJEMPLO:

4. ¿Qué proceso emplearía cuando en lugar de la expresión analítica le presentan el gráfico de la función?

   DESCRIPCIÓN:

   EJEMPLO:

Anexo 2: encuesta 2

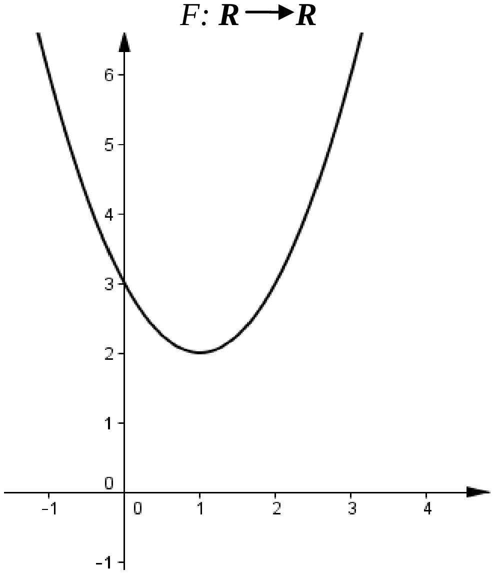
A continuación se presentan algunos gráficos de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada uno de ellos:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar.
2. Respecto **al gráfico como tal,** describ**a** de manera clara y precisa **los elementos o criterios explícitos** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas sobre los gráficos, no dude en efectuarlas.

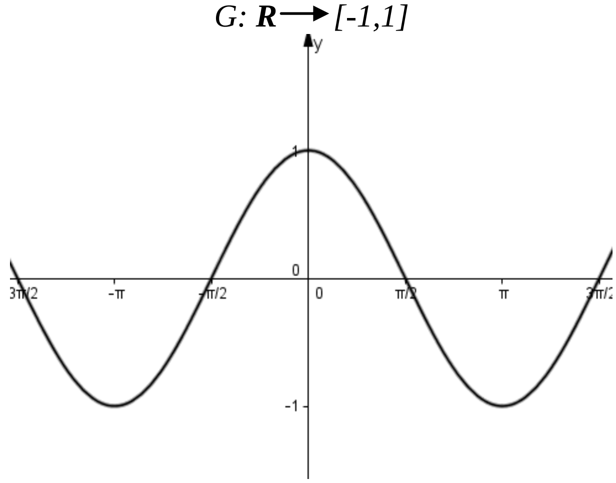
<table>
<tr><th>Gráfico 1</th><th>Gráfico 2</th></tr>
<tr><td>

F: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$

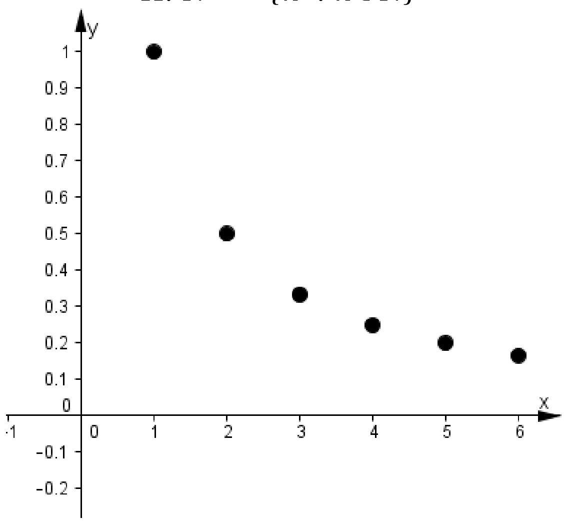
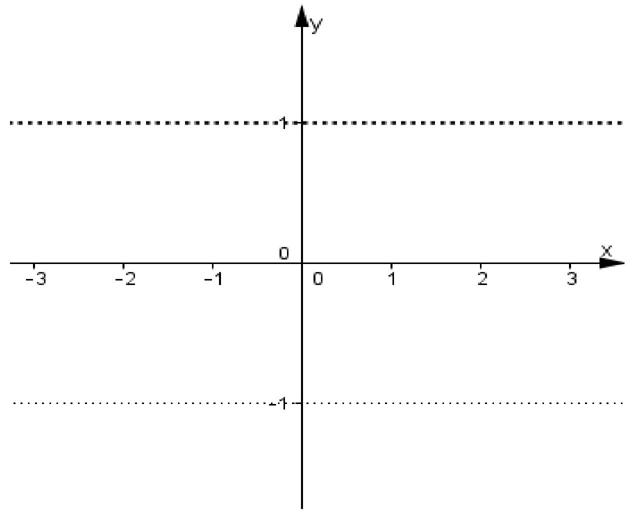


</td><td>

G: $\boldsymbol{R} \longrightarrow [-1,1]$



</td></tr>
</table>

Gráfico 3	Gráfico 4
H: $\mathbf{N} \longrightarrow \{n^{-1} : n \in \mathbf{N}\}$ 	*J*: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ 

Anexo 3: encuesta 3

A continuación se presentan algunas expresiones analíticas de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada una de ellas:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar ni usar procedimiento analítico alguno.
2. Describa de manera clara y precisa **los elementos constitutivos de la expresión analítica y/o criterios explícitos a partir de ella** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

Expresión 1	Expresión 2
$F\colon \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ $F(x) = x^2 + 1$	$G\colon \boldsymbol{R} \longrightarrow [-3,3]$ $G(x) = 3sen(x)$

Expresión 3	Expresión 4
$H\text{: } \boldsymbol{N} \longrightarrow \{n^{-1}\text{: } n \in \boldsymbol{N}\}$ $H(u) = \frac{1}{u}; u \in N \wedge u \neq 0$	$\chi\text{: } \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ $\chi(t) = \begin{cases} t^2, & si \quad t \in Q \\ 0, & si \quad t \notin Q \end{cases}$

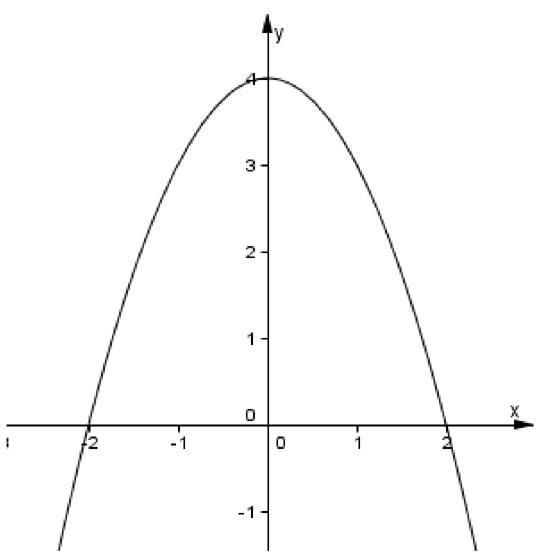
Anexo 4: encuesta 4

A continuación se muestran los gráficos cartesianos y las expresiones analíticas de cuatro funciones de variable real, incluyendo sus respectivas condiciones de dominio y codominio. Para cada una de ellas:

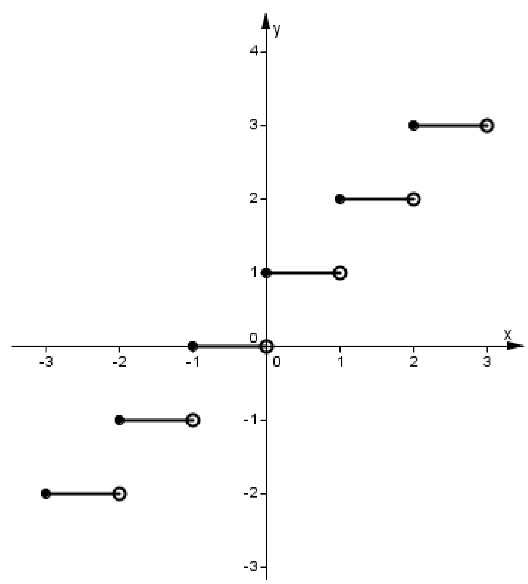
i. Diga si es o no sobreyectiva.
ii. Explique clara y detalladamente su elección en el ítem i., a partir del gráfico de cada función y de su expresión analítica.
iii. Elabore una prueba formal de la sobreyectividad o no sobreyectividad de cada función a partir de su expresión analítica, teniendo en cuenta la explicación dada en el ítem ii.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre los gráficos cartesianos o sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

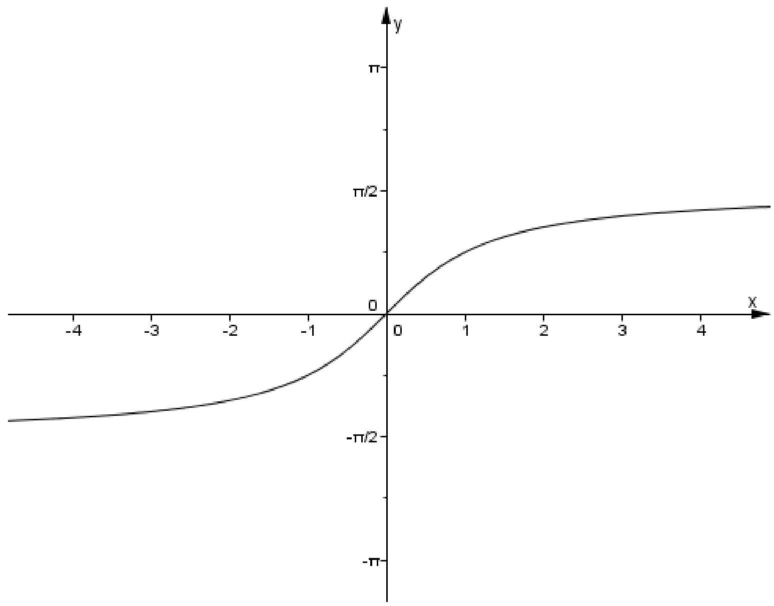
1) Sea f: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, tal que $f(x) = 4 - x^2$.



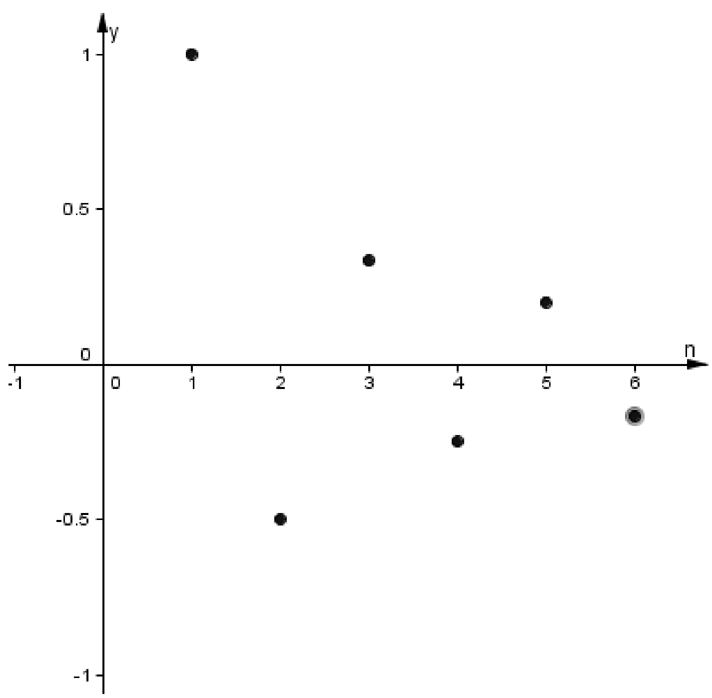
2) Sea φ: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$, tal que $\varphi(x) = [x]+1$ (léase $[x]$ como parte entera de x).



3) Sea G: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$, tal que $G(x) = Arctan\ x$



4) Sea ξ: $\boldsymbol{Z}^{+} \longrightarrow [-1, 1]$, tal que $\xi\,(n) = (-1)^{n+1}\, n^{-1}$.



Anexo 5: respuestas de los estudiantes seleccionados a la encuesta 1

Estudiante Número: 1110

Por favor responda con la mayor claridad posible las siguientes preguntas.

1. En los cursos de matemáticas que ha recibido ¿le han enseñado lo que significa que una función sea sobreyectiva? Sí: X No: ___

2. De forma breve trate de dar una definición (así sea aproximada) de lo que usted entiende por función sobreyectiva.

Si f es una función de A en B sobreyectiva, se cumple que el conjunto de llegada (las imágenes) es igual al rango de f ó Codominio

3. De acuerdo con la definición que acaba de dar, describa y después ejemplifique el proceso que usaría para determinar la sobreyectividad de una función cuando usted tiene a disposición solo su expresión analítica.

DESCRIPCIÓN: Primero determinaría el dominio y el rango de la función, en donde está definida f. Después, despejo, la variable independiente en términos de la variable dependiente, de f, para verificar si existen elementos que tienen una pre-imagen en el Dominio de f.

EJEMPLO: Si $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

$R_f = \mathbb{R}$

$y = \frac{x-2}{x-3} \to xy - 3y = x - 2$

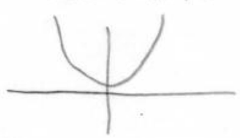
$2 - 3y = x - xy$

$\frac{2-3y}{1-y} = x$ No es Sobreyectiva

4. ¿Qué proceso emplearía cuando en lugar de la expresión analítica le presentan el gráfico de la función?

DESCRIPCIÓN: Miraría las x en el eje de coordenadas y las imagenes en la gráfica y a partir de eso, definiría si el Codominio es igual al Rango

EJEMPLO:



$f(x) = x^2$ No es Sobreyectva

Estudiante Número: 1150

Por favor responda con la mayor claridad posible las siguientes preguntas.

1. En los cursos de matemáticas que ha recibido ¿le han enseñado lo que significa que una función sea sobreyectiva? Sí: _x_ No: ___

2. De forma breve trate de dar una definición (así sea aproximada) de lo que usted entiende por función sobreyectiva.

Es una función $F: A \to B$ tal que A es el conjunto de salida y B el conjunto de llegada (codominio), se dice que la función es sobreyectiva si a cada elemento $y \in B$ $\exists x$ tal que x sea la preimagen y. también en otras palabras el rango es igual al dominio.

3. De acuerdo con la definición que acaba de dar, describa y después ejemplifique el proceso que usaría para determinar la sobreyectividad de una función cuando usted tiene a disposición solo su expresión analítica.

DESCRIPCIÓN:

Tendría que llamar a $f(x) = y$ (donde $F: A \to B$, A, B conj.) y despejaría x y miraría si para x existen problemas es decir si existiría alguna indeterminación.

EJEMPLO:

Ejm 1. $F(x) = x + 1$ tal que $F: R \to R$

sea $y = F(x) \Rightarrow y = x + 1$ Despejando x

$x = y - 1$ ya no tiene problema existe una preimagen para todo y.

Ejem 2

$F(x) = x^2$ ($F: R \to R$ no sobreyectiva)

sea $y = x^2$ despejando

$x = \sqrt{y}$

Donde, cuando $y < 0$ ahí problema

Por lo tanto $\forall y$ no existe preimagen

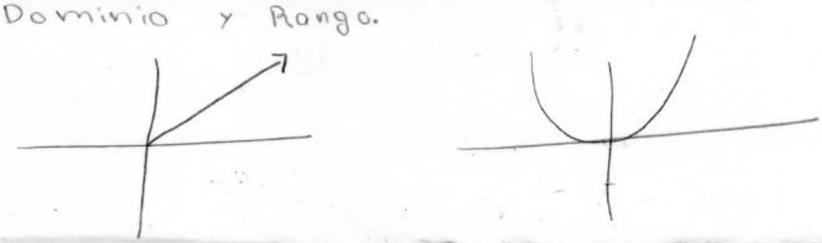
Por lo tanto $F(x) = x^2$ no es sobreyectiva $F: R \to R$

4. ¿Qué proceso emplearía cuando en lugar de la expresión analítica le presentan el gráfico de la función?

DESCRIPCIÓN:

En este caso creo que no es posible por que es muy probable que la función no este definida es decir ~~Rang~~ Dominio y Rango.

EJEMPLO:



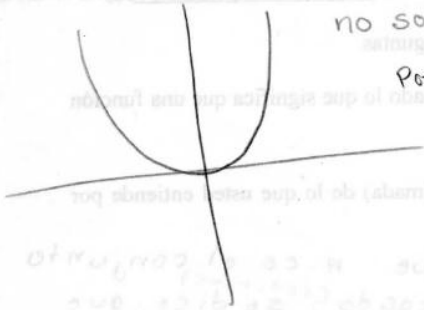
Estudiante Número: 1150

De los graficos anteriores puedo decir que so sobreyectivas y en ambas tendria razón por que no conosco dominio y rango.

así prodia decir a

$f: R \to R$

no sobreyectiva

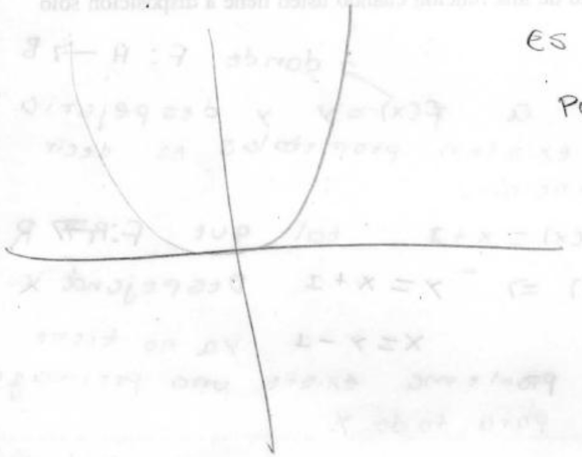


Porque $CoD = R$ $Rango = R_0^+$

$cod \neq Rango$

$f: R \to R_0^+$

es sobreyectiva



Porque $CoD = R_0^+$ $Ran = R_0^+$

$CoD = Ran.$

Estudiante Número: 1210

Por favor responda con la mayor claridad posible las siguientes preguntas.

1. En los cursos de matemáticas que ha recibido ¿le han enseñado lo que significa que una función sea sobreyectiva? Sí: X No: ___

2. De forma breve trate de dar una definición (así sea aproximada) de lo que usted entiende por función sobreyectiva.

Una función es sobreyectiva si su rango es igual al codominio

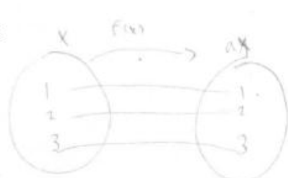
3. De acuerdo con la definición que acaba de dar, describa y después ejemplifique el proceso que usaría para determinar la sobreyectividad de una función cuando usted tiene a disposición solo su expresión analítica.

DESCRIPCIÓN:

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Para demostrar $f(x) \subset \mathbb{R}$ y Rang $\subset f(x)$

EJEMPLO:



los elementos que estan en el conjunto de llegada son iguales al de inicio

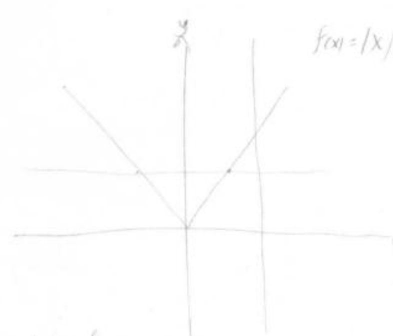
Se puede ver que tambien es uno a uno

4. ¿Qué proceso emplearía cuando en lugar de la expresión analítica le presentan el gráfico de la función?

DESCRIPCIÓN:

1) Si tengo una gráfica trataria usar los puntos que pueda ubicar en el plano xy

2) ahora formaria los pares ordenados y tabularia para tener una visión más clara en este registr.



EJEMPLO: 3) Usaria la prueba de la recta vertical para ver si es función

4) Usaria la prueba de la recta horizontal para saber si es sobreyectiva

Estudiante Número: 2310

Por favor responda con la mayor claridad posible las siguientes preguntas.

1. En los cursos de matemáticas que ha recibido ¿le han enseñado lo que significa que una función sea sobreyectiva? Sí: X No: ___

2. De forma breve trate de dar una definición (así sea aproximada) de lo que usted entiende por función sobreyectiva.

Una funcion sobreyectiva es una funcion donde el conjunto Dominio e igual al conjunto Rango.

3. De acuerdo con la definición que acaba de dar, describa y después ejemplifique el proceso que usaría para determinar la sobreyectividad de una función cuando usted tiene a disposición solo su expresión analítica.

DESCRIPCIÓN:

Primero hallaría el conjunto al que pertenece el Dominio y luego el conjunto al que pertenece el Rango, ya por ultimo compararlos.

EJEMPLO:

Sea $f(x) = x^2$; Dado que el Dominio es $\mathbb{R}$, y el Rango es $[0, \infty)$, la funcion $f(x)$ no es sobreyectiva ya que los conjuntos son distintos.

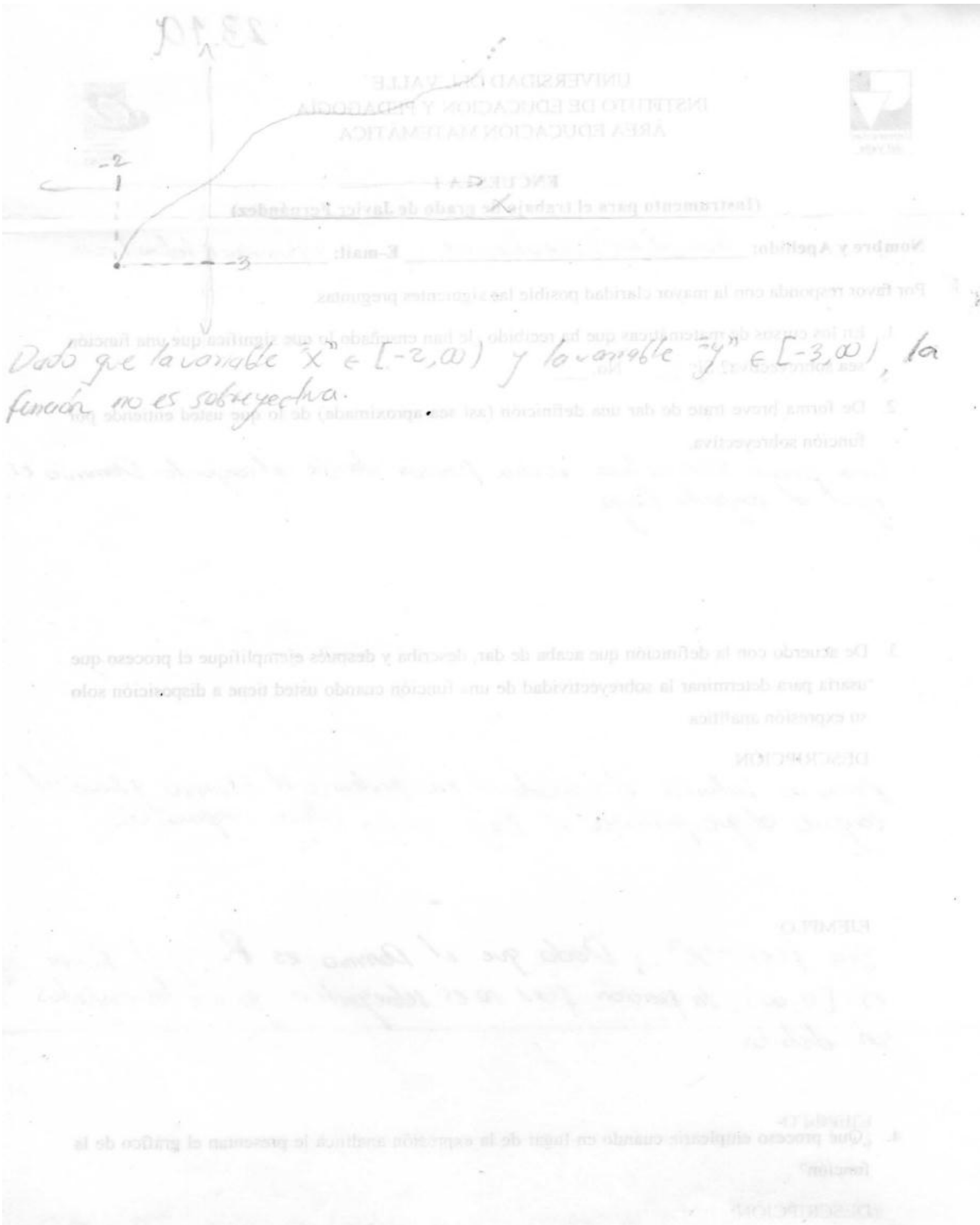
4. ¿Qué proceso emplearía cuando en lugar de la expresión analítica le presentan el gráfico de la función?

DESCRIPCIÓN:

Verificaría los valores posibles de la variable "x" y la de la variable "y", si presentan algún salto, no sería sobreyectiva.

EJEMPLO:

Estudiante Número: 2310



Dado que la variable "x" $\in [-2,\infty)$ y la variable "y" $\in [-3,\infty)$, la función no es sobreyectiva.

Estudiante Número: 2320

Por favor responda con la mayor claridad posible las siguientes preguntas.

1. En los cursos de matemáticas que ha recibido ¿le han enseñado lo que significa que una función sea sobreyectiva? Sí: X No: ___

2. De forma breve trate de dar una definición (así sea aproximada) de lo que usted entiende por función sobreyectiva. una función sobreyectiva es que el conjunto de partida le corresponde un elemento del conjunto de salida es decir es dominio coincide con el rango $D \equiv R$

3. De acuerdo con la definición que acaba de dar, describa y después ejemplifique el proceso que usaría para determinar la sobreyectividad de una función cuando usted tiene a disposición solo su expresión analítica.

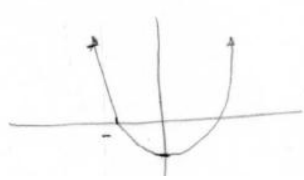
DESCRIPCIÓN: dado la función primero hallo su dominio y Rango. y debo observar que el dominio y Rango coincide. Para estar más seguro realizo la tabla, es decir tabulo dicha función.

EJEMPLO: $f(x) = x^2 - 1$

4. ¿Qué proceso emplearía cuando en lugar de la expresión analítica le presentan el gráfico de la función?

DESCRIPCIÓN: Dado el gráfico de la función observo el dominio de dicha función y a cada x le corresponde una imagen del eje y. y no puede haber saltos en esa función.

EJEMPLO:



Estudiante Número: 3120

Por favor responda con la mayor claridad posible las siguientes preguntas.

1. En los cursos de matemáticas que ha recibido ¿le han enseñado lo que significa que una función sea sobreyectiva? Sí: ✓ No: ___

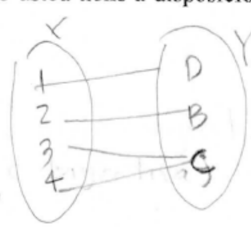
2. De forma breve trate de dar una definición (así sea aproximada) de lo que usted entiende por función sobreyectiva.

→ Es una función donde cada elemento de y es la Imagen de como minimo un elemento de X.

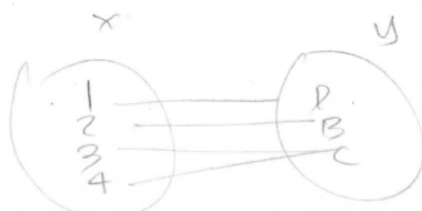
3. De acuerdo con la definición que acaba de dar, describa y después ejemplifique el proceso que usaría para determinar la sobreyectividad de una función cuando usted tiene a disposición solo su expresión analítica.

DESCRIPCIÓN:

Relacionando los elementos del conjunto y
Verificando si se cumple la Condición



EJEMPLO:



4. ¿Qué proceso emplearía cuando en lugar de la expresión analítica le presentan el gráfico de la función?

DESCRIPCIÓN:

Relacionando los Elementos de Cada Conjunto,
trazando lineas Paralelas al eje x

EJEMPLO:

Estudiante Número: 3210

Por favor responda con la mayor claridad posible las siguientes preguntas.

1. En los cursos de matemáticas que ha recibido ¿le han enseñado lo que significa que una función sea sobreyectiva? Sí: X No: ___

2. De forma breve trate de dar una definición (así sea aproximada) de lo que usted entiende por función sobreyectiva.

Una función sobreyectiva es aquella en la que todos los elementa del conjunto de llegada tienen una preimagen del conjunto de Partida.

3. De acuerdo con la definición que acaba de dar, describa y después ejemplifique el proceso que usaría para determinar la sobreyectividad de una función cuando usted tiene a disposición solo su expresión analítica.

DESCRIPCIÓN:

Verificar si todos los elementos del rango de la función tienen correspondencia con el dominio

EJEMPLO:

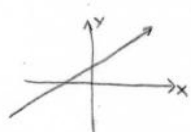
$f(x) = x^2+2$

4. ¿Qué proceso emplearía cuando en lugar de la expresión analítica le presentan el gráfico de la función?

DESCRIPCIÓN:

Creo que buscar la expresión análitica del grafico Observando si en el gráfico todos los elementos del rango tienen preimagen.

EJEMPLO:



Estudiante Número: 4300

Por favor responda con la mayor claridad posible las siguientes preguntas.

1. En los cursos de matemáticas que ha recibido ¿le han enseñado lo que significa que una función sea sobreyectiva? Sí: ✓ No: ___

2. De forma breve trate de dar una definición (así sea aproximada) de lo que usted entiende por función sobreyectiva.

Cumple que es inyectiva y que el tamaño del Contradominio es igual al tamaño del dominio

3. De acuerdo con la definición que acaba de dar, describa y después ejemplifique el proceso que usaría para determinar la sobreyectividad de una función cuando usted tiene a disposición solo su expresión analítica.

DESCRIPCIÓN:

Tengo una función inyectiva $f(x) = x$ en donde $x \in \mathbb{R}$ y $D_f = R_f$ { analizó el caso inyectivo y el tamaño del Rango respecto al tamaño del Dominio

EJEMPLO:

Sea $f(x) = x$, tq $x \in \mathbb{R} \wedge D_f = R_f$

$R_f = \mathbb{R} \wedge D_f = \mathbb{R}$

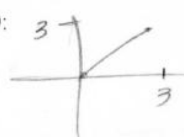
4. ¿Qué proceso emplearía cuando en lugar de la expresión analítica le presentan el gráfico de la función?

DESCRIPCIÓN:

el tanteo, viendo cada imagen y Preimagen

Tomando el tamaño del rango y el contradominio

EJEMPLO:



una función valor absoluto definida entre (0 y 3).

Estudiante Número: 4400

Por favor responda con la mayor claridad posible las siguientes preguntas.

1. En los cursos de matemáticas que ha recibido ¿le han enseñado lo que significa que una función sea sobreyectiva? Sí: X No: ___

2. De forma breve trate de dar una definición (así sea aproximada) de lo que usted entiende por función sobreyectiva. Sea $f: A \longmapsto B$ una función con $x \in$ Dom y ($y \in$ Codominio) $\subseteq B$. f es sobreyectiva sí y solo sí codominio de f es igual a B

3. De acuerdo con la definición que acaba de dar, describa y después ejemplifique el proceso que usaría para determinar la sobreyectividad de una función cuando usted tiene a disposición solo su expresión analítica.

DESCRIPCIÓN: Si tengo la expresión analitica, me aseguraria de que para cada Imagen en el rango, habría una y solo una preimagen en el dominio

EJEMPLO:

sea $f(x) = mx + b$

luego $y = f(x)$ por lanto

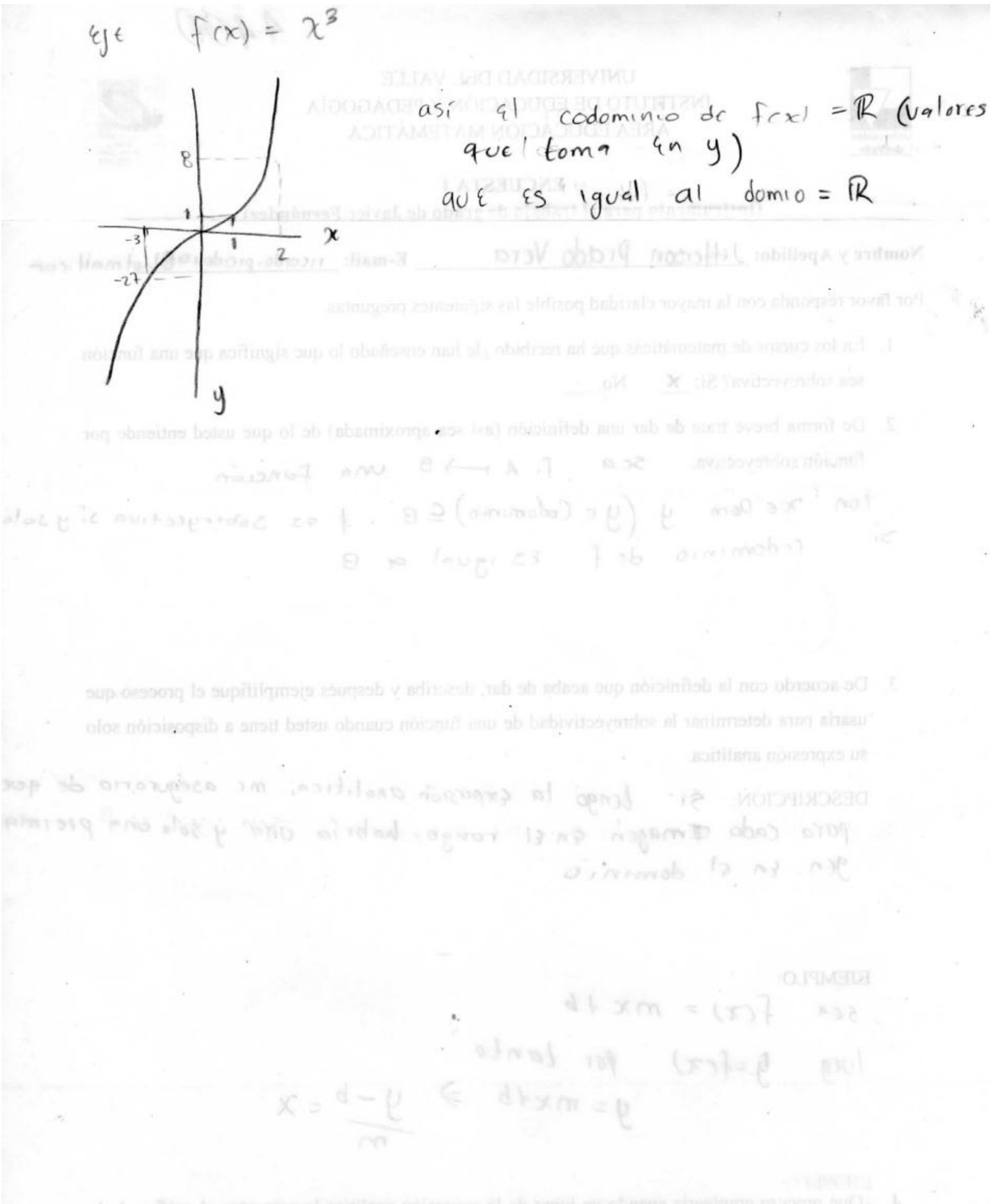
$y = mx + b \Rightarrow \dfrac{y-b}{m} = x$

4. ¿Qué proceso emplearía cuando en lugar de la expresión analítica le presentan el gráfico de la función?

DESCRIPCIÓN: Analizaría los valores que toma f(x) y ver cual seria su dominio, luego me aseguraria de ver que Todos los valores en el eje y. tenga. un valor en el eje x.

EJEMPLO:

Estudiante Número: 4400



eje $f(x) = x^3$

así el codominio de $f(x) = \mathbb{R}$ (valores que toma en y)

que es igual al domio $= \mathbb{R}$

Anexo 6: respuestas de los estudiantes seleccionados a la encuesta 2

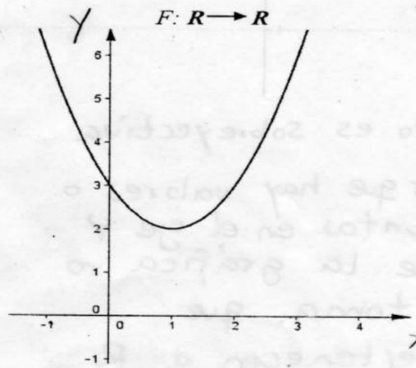
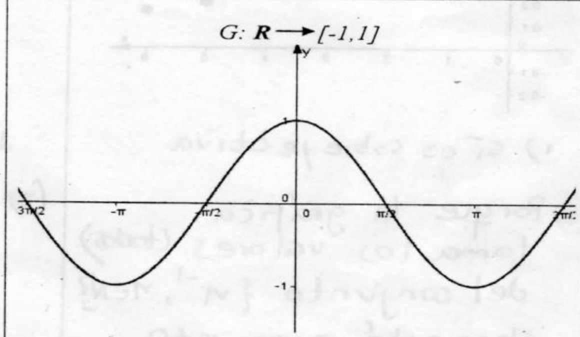
Estudiante Número: 1110

Encuesta 2

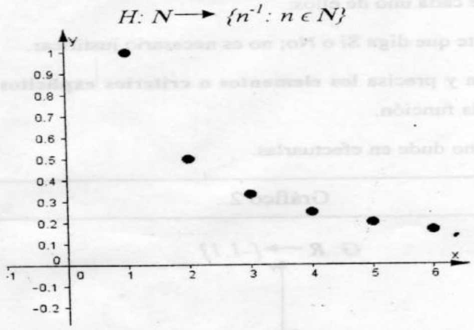
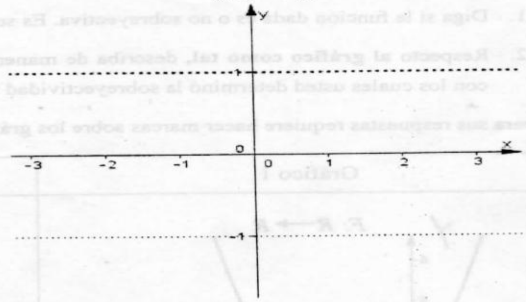
A continuación se presentan algunos gráficos de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada uno de ellos:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar.
2. Respecto **al gráfico como tal,** describa de manera clara y precisa **los elementos o criterios explícitos** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas sobre los gráficos, no dude en efectuarlas.

Gráfico 1	Gráfico 2
	
(1) No es Sobreyectiva (2) La gráfica de la función no toma puntos del eje Y, tales como 1, 0 ...	(1) Si es sobreyectiva (2) Es sobreyectiva, puesto que en el intervalo [-1, 1] la gráfica toma todos los valores los toma todos, pues si se traza una recta paralela al eje x, sobre el intervalo se observa que para cada punto del eje Y corresponde un punto en el eje x

Estudiante Número: 1110

Gráfico 3	Gráfico 4
$H: N \longrightarrow \{n^{-1} : n \in N\}$ 	$J: R \longrightarrow R$ 
1) Sí es sobreyectiva (2) Porque la gráfica toma los valores (todos) del conjunto $\{n^{-1}, n \in N\}$ claro está, para $n \neq 0$. Se aprecia gráficamente que para un elemento del conjunto de llegada siempre hay una pre-imagen	1) No es sobreyectiva (2) Porque hay valores o puntos en el eje y que la gráfica no toma. que pertenecen a R según como está definida la función en el conjunto de llegada.

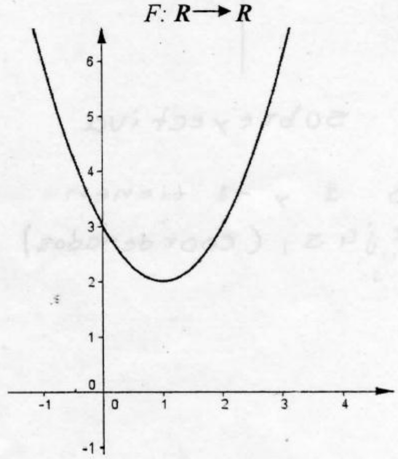
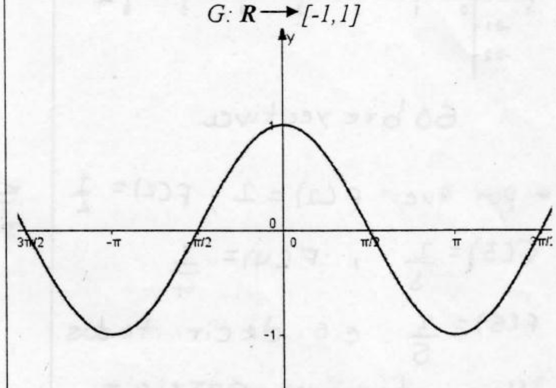
Estudiante Número: 1150

Encuesta 2

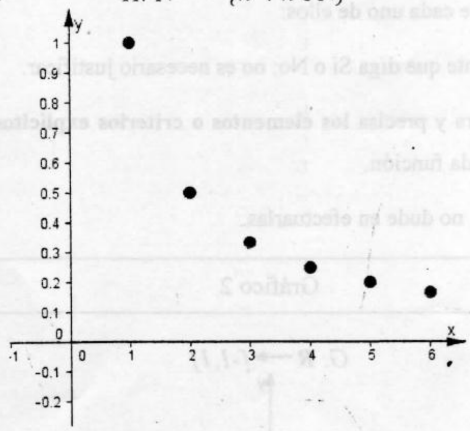
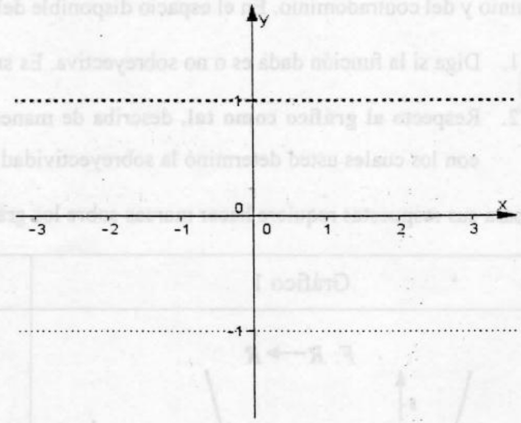
A continuación se presentan algunos gráficos de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada uno de ellos:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar.
2. Respecto **al gráfico como tal,** describa de manera clara y precisa **los elementos o criterios explícitos** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas sobre los gráficos, no dude en efectuarlas.

Gráfico 1	Gráfico 2
*F: **R**⟶**R*** 	*G: **R**⟶[-1,1]* 
1) no sobreyectiva 2) a) la parabola tiene una concavidad de [1,2) d) (2,1) hacia abajo no hay nada	sobreyectiva - La función tiene cotas de [-1,1] en el eje y. - la funcion es periodica

Estudiante Número: 1150

Gráfico 3	Gráfico 4
$H: N \longrightarrow \{n^{-1} : n \in N\}$  Sobreyectiva - por que $F(1) = 1$, $F(2) = \frac{1}{2}$, $F(3) = \frac{1}{3}$, $F(4) = \frac{1}{4}$, $F(5) = \frac{1}{5}$ es decir todos ellos tienen parejas	$J: R \longrightarrow R$  no sobreyectiva Solo 1 y -1 tienen parejas, (coordenadas)

Estudiante Número: 1210

Encuesta 2

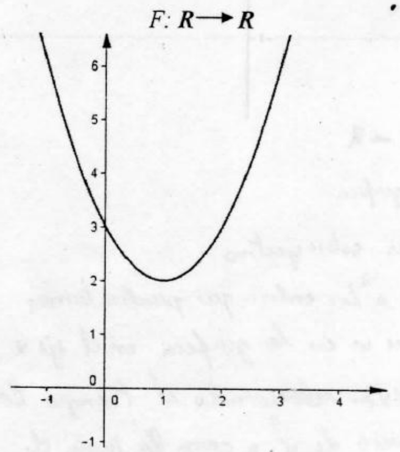
A continuación se presentan algunos gráficos de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada uno de ellos:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar.
2. Respecto **al gráfico como tal,** describa de manera clara y precisa **los elementos o criterios explícitos** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas sobre los gráficos, no dude en efectuarlas.

Gráfico 1

*F: **R** → **R***

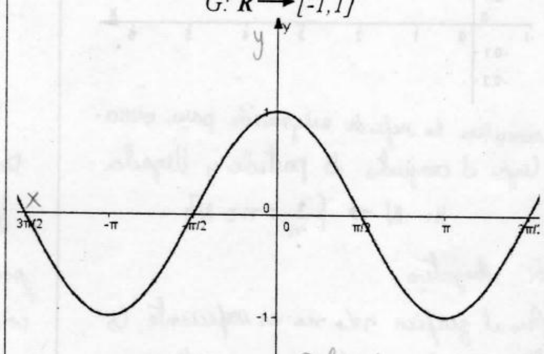


Si sobreyectiva

Del grafico
puedo deducir la ecuación que describe
la parabola, concava hacia arriba y
el corte eje y.
todo los valores de las imagenes, se
pueden encontrar en el conjunto
de valores de las pre-imagenes ya
que va de los $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Gráfico 2

*G: **R** → [-1,1]*



$G: \mathbb{R} \to [-1,1]$

- $G: \cos(\theta)$ por la ondas que describe la función es periodica

Del grafico

Es una función par.

- Se puede afirmar que solo oscilara entre los valores maximos y minimos $[-1,1]$

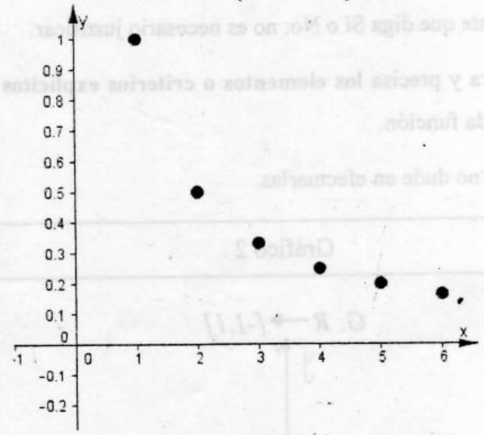
No pero se deduce del grafico

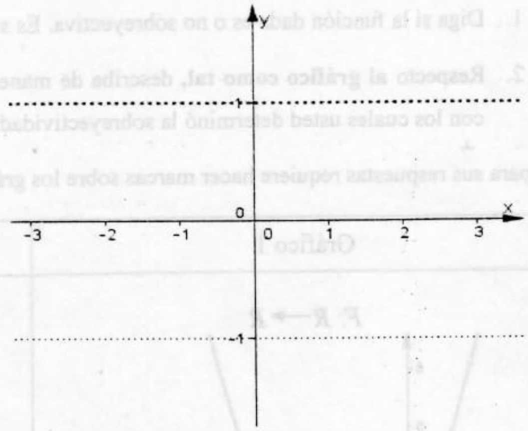
Si

se que $\mathbb{R}$ son los valores que están en mi eje x pero $[-1,1]$ creo que me indican segun la grafica que $[-1,1] \in \mathbb{R}$ y asi si podria ser sobreyectiva

Estudiante Número: 1210

Gráfico 3	Gráfico 4
$H: N \longrightarrow \{n^{-1} : n \in N\}$	$J: R \longrightarrow R$





reescribe la regla de asignación para visualiza el conjunto de partida y llegada

$H: \mathbb{N} \rightarrow \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Si sobreyectivo

Pero el grafico solo no es suficiente. Lo que ayuda mucho para visualizar es $H: N \rightarrow \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ porque los valores que toma y producen dicen que son $\mathbb{Q}$ y es un conjunto mayor de eje x que son $\mathbb{N}$ luego podria uno pensar que no es sobreyectivo ya que quedarian elementos en y sin relacionar.

$J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

De la grafica

Si es sobreyectivo

porque a los valores que pueden tomar como se ve en la grafica en el eje x puede estar relacionado al tiempo con los valores de y. y como la regla de asignación me dice que $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pero es muy confuso pedir ver una función continua ya que relacione el grafico 4 con el 2 pareciera que son el mismo pero con diferente planteamiento de la def. de funcion

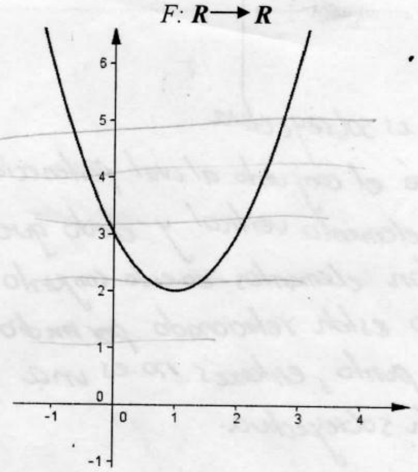
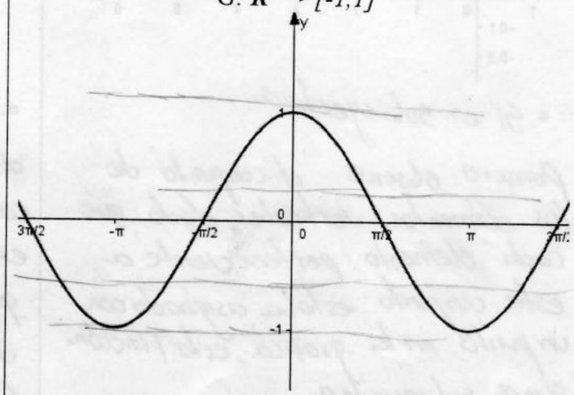
Estudiante Número: 2310

Encuesta 2

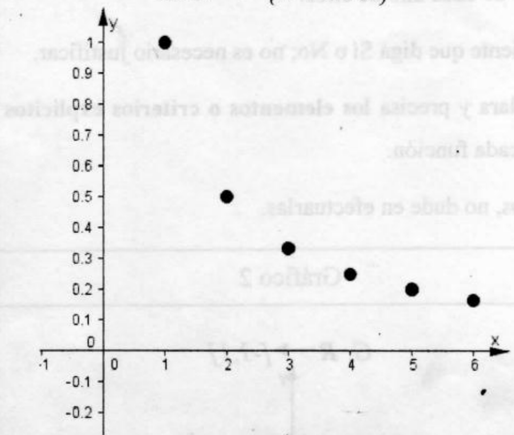
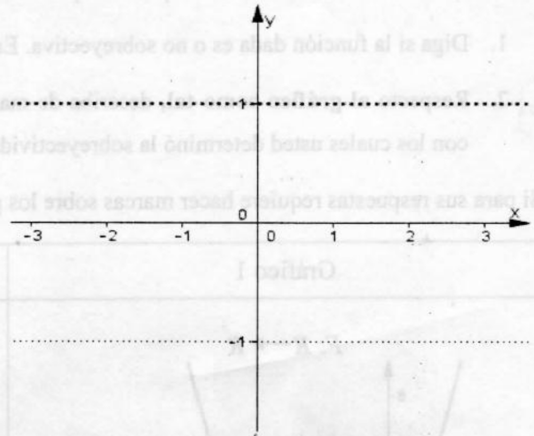
A continuación se presentan algunos gráficos de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada uno de ellos:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar.
2. Respecto **al gráfico como tal,** describa de manera clara y precisa **los elementos o criterios explícitos** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas sobre los gráficos, no dude en efectuarlas.

Gráfico 1	Gráfico 2
F: ***R*** → ***R*** 	*G*: ***R*** → *[-1,1]* 
o No es sobreyectiva. Para ello observe el conjunto de los elementos en la recta vertical, y trazé una línea horizontal por cada elemento, dado que en algunas línea horizontal no se cortaba con un punto en la gráfica, esta no era una función sobreyectiva.	o Sí es sobrectiva. Para esto observe el conjunto al cual Pertenece los elementos verticales, y trazé una línea horizontal, dado que Para cada elemento de este conjunto existía por lo menos un punto que se relacionaba, entonces sí es sobreyectiva.

Estudiante Número: 2310

Gráfico 3	Gráfico 4
$H: N \rightarrow \{n^{-1} : n \in N\}$	$J: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$
	
◦ Sí es sobreyectiva	◦ No es sobreyectiva.
Primero observé el conjunto de los elementos verticales, dado que cada elemento perteneciente a este conjunto estaba asignado con un punto en la gráfica, esta función sería sobreyectiva.	observé el conjunto al cual pertenecían cada elemento vertical y dado que existían elementos en este conjunto que no están relacionado por medio de un punto, entonces no es una función sobreyectiva.

Estudiante Número: 2320

Encuesta 2

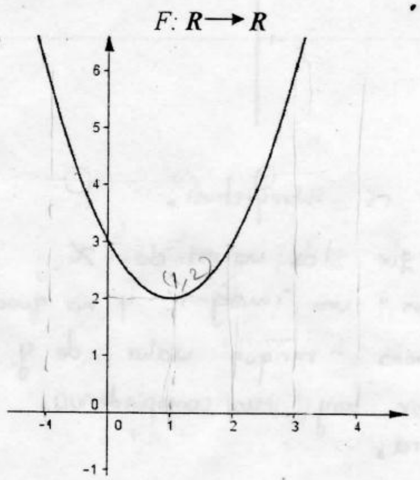
A continuación se presentan algunos gráficos de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada uno de ellos:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar.
2. Respecto **al gráfico como tal,** describa de manera clara y precisa **los elementos o criterios explícitos** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas sobre los gráficos, no dude en efectuarlas.

Gráfico 1

F: ***R*** → ***R***

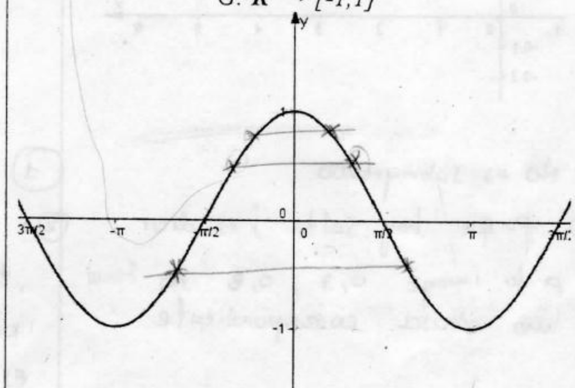


(1) es sobreyectiva

(2) porque a cada v/r de "x" le corresponde un v/r "y" y Satisface que cada abcisa le corresponde una ordenada. y Caen cada v/r de x en y por F: R → R

Gráfico 2

G: ***R*** → *[-1,1]*



(1) Es sobreyectiva

(2) porque a cada abcisa le corresponde una ordenada y cada coordenada pertenecen a la Gráfica de la función.

Cada coordenada como:

(-π/2, 0) (-π, -1) (π/2, -1) (π, -1)

(3π/2, 0) Corresponde caen o estan ligadas al eje y.

Estudiante Número: 2320

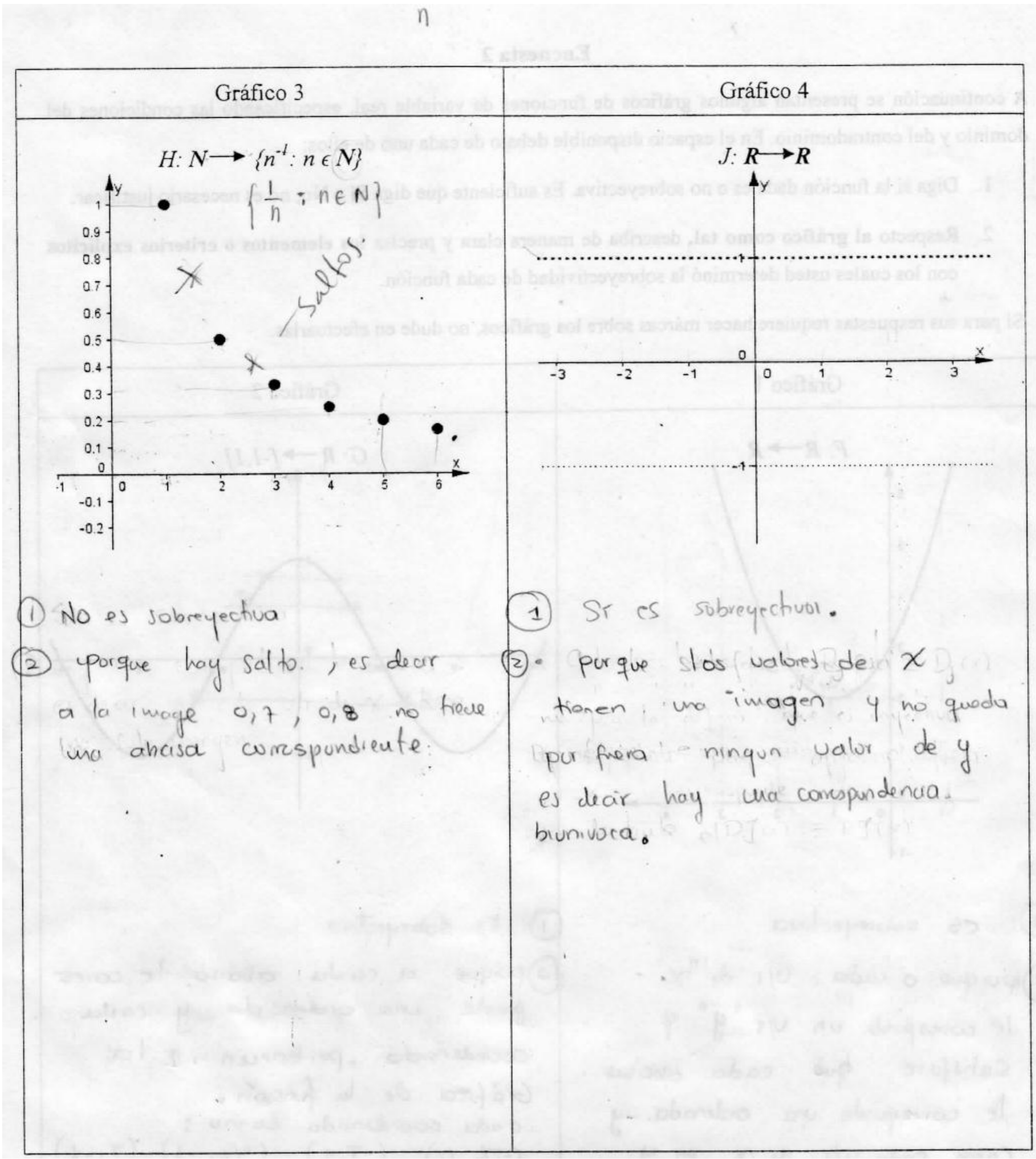


Gráfico 3	Gráfico 4
$H: N \rightarrow \{n^{-1} : n \in N\}$ $\{\frac{1}{n} ; n \in N\}$ Saltos	$J: R \rightarrow R$
① No es sobreyectiva ② porque hay salto, es decir a la image 0,7, 0,8 no tiene una abcisa correspondiente.	① Sí es sobreyectiva. ② porque slos valores de x tienen una imagen y no queda por fuera ninguna valor de y es decir hay una correspondencia biunívoca.

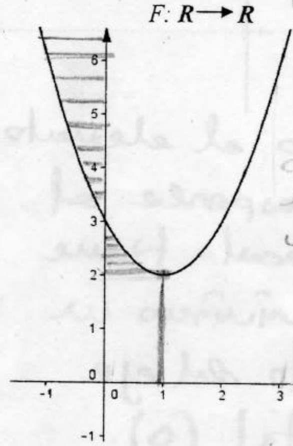
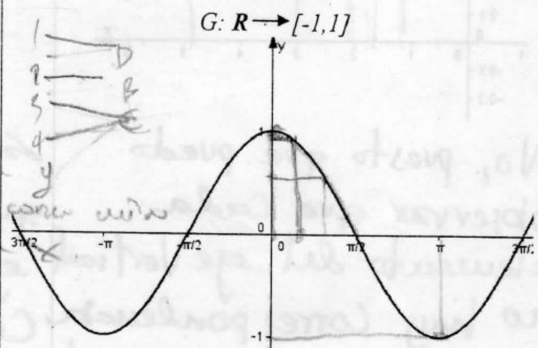
Estudiante Número: 3120

Encuesta 2

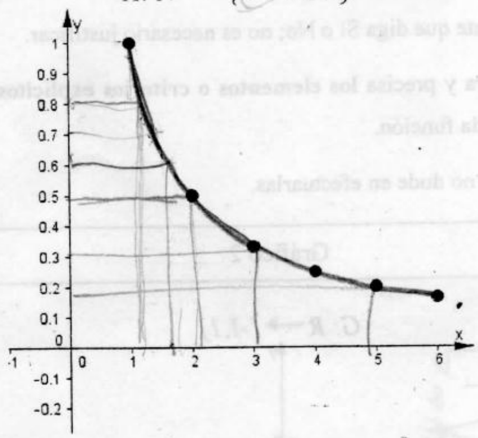
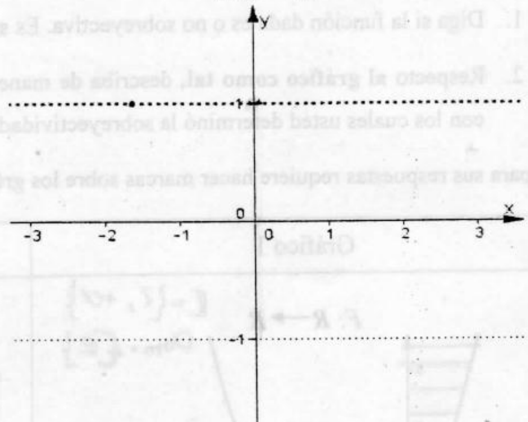
A continuación se presentan algunos gráficos de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada uno de ellos:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar.
2. Respecto **al gráfico como tal,** describa de manera clara y precisa **los elementos o criterios explícitos** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas sobre los gráficos, no dude en efectuarlas.

Gráfico 1	Gráfico 2
F: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ R={2, +∞} Dom={R}  cada elem y es la I de como mín un elem de x	*G*: $\boldsymbol{R} \rightarrow [-1,1]$ 
Sí, teniendo aquí como figura una parabola, Puedo Visualizar que cada elemento que corresponda al eje Vertical es la Imagen de por, lo menos un elemento que Corresponda al eje horizontal	sí, para esta grafica puedo observar la generalidad para el Concepto de Sobreyectividad. cuando al menos un elemento del Conjunto de llegada (eje y) es Imagen de por lo menos de un elemento del Conjunto de partida

Estudiante Número: 3120

Gráfico 3	Gráfico 4
$H: N \longrightarrow \{n^{-1} : n \in N\}$ 	$J: R \longrightarrow R$ 
No, puesto que puedo observar que cada elemento del eje Vertical no hay correspondencia con al menos un elemento del eje horizontal, ya que hay naturalezas distintas en los ejes de coordenadas.	Sí, puesto el elemento que corresponde al eje Vertical tiene como mínimo un elemento del eje horizontal (0)

Estudiante Número: 3210

Encuesta 2

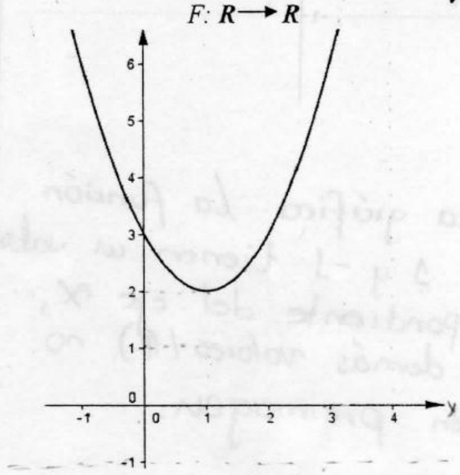
A continuación se presentan algunos gráficos de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada uno de ellos:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar.
2. Respecto **al gráfico como tal,** describa de manera clara y precisa **los elementos o criterios explícitos** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas sobre los gráficos, no dude en efectuarlas.

Gráfico 1

F: ***R*** → ***R***

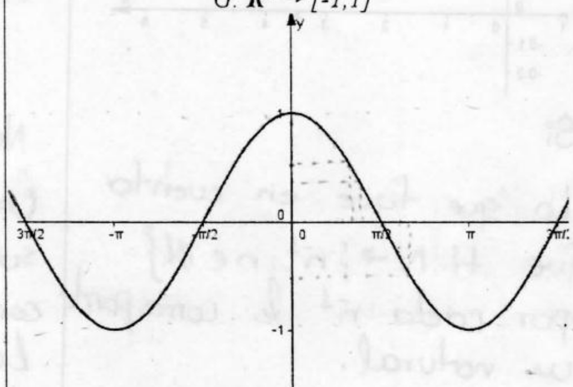


No

En la gráfica se observa que 1 o -1 no hay una Preimagen de x.

Gráfico 2

G: ***R*** → *[-1,1]*



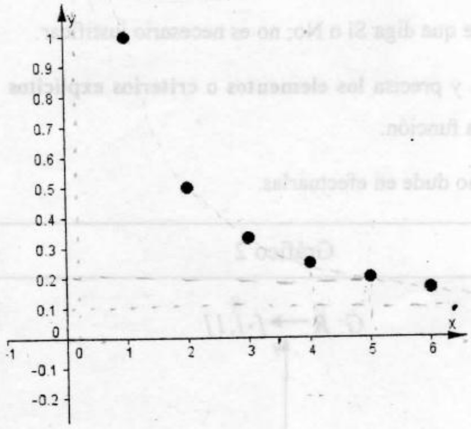
Si

Como se observa que es una función constante, cada elemento que esta entre -1 y 1 le corresponde un elemento del eje x.

Estudiante Número: 3210

Gráfico 3

$H: N \longrightarrow \{n^{-1} : n \in N\}$

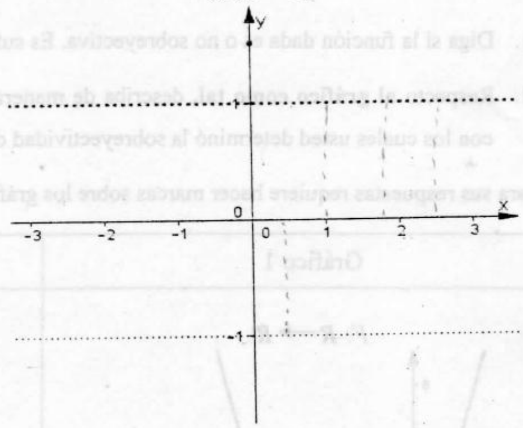


Si

Lo que tuve en cuenta fue $H: N \to \{n^{-1} : n \in N\}$ por cada n^{-1} le corresponde un natural.

Gráfico 4

$J: R \longrightarrow R$



No

En la gráfica la función solo 1 y -1 tienen un valor correspondiente del eje X, Los demás valores ($\mathbb{R}$) no tienen preimagen.

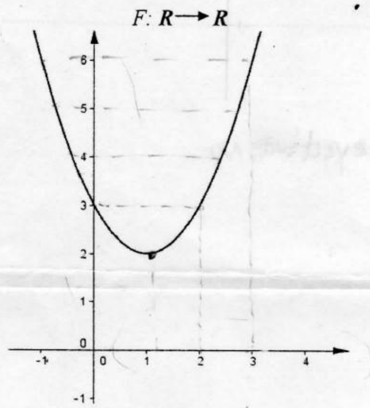
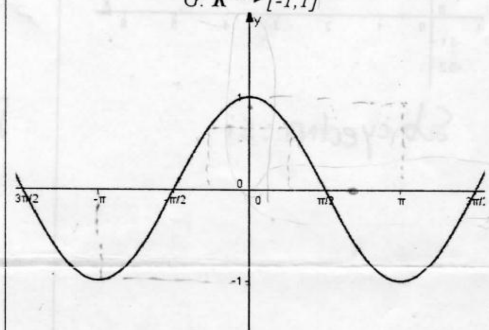
Estudiante Número: 4300

Encuesta 2

A continuación se presentan algunos gráficos de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada uno de ellos:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar.
2. Respecto **al gráfico como tal,** describa de manera clara y precisa **los elementos o criterios explícitos** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas sobre los gráficos, no dude en efectuarlas.

Gráfico 1	Gráfico 2
F: ***R*** → ***R***	*G*: ***R*** → *[-1,1]*
	
Sobreyectiva : SI	Sobreyectiva : SI

1

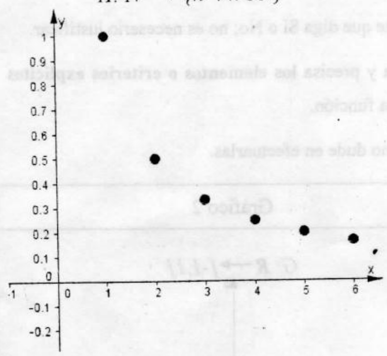
2 el primer elemento identificado fué los ejes ("y" y "x") fue aunque no se nombran así, me permitieron Asociar un Conjunto de salida y otro de llegada

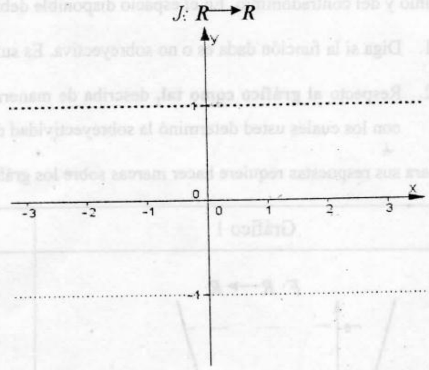
un segundo elemento es la gráfica que me permite pensar en un Grupo de elementos que siguen un comportamiento "Función", Segun como sea este comportamiento puedo pensar en el concepto →

Estudiante Número: 4300

→ de sobreyectividad, Como por ejemplo el Gráfico 4
en donde el comportamiento de la gráfica es particular.

Gráfico 3	Gráfico 4
$H: N \longrightarrow \{n^{-1} : n \in N\}$	$J: R \longrightarrow R$





Sobreyectiva : si	Sobeyectiva: no

Estudiante Número: 4400

Encuesta 2

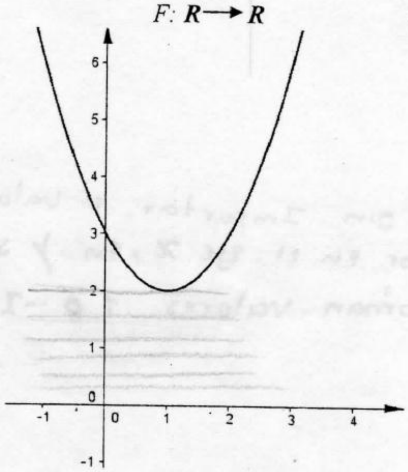
A continuación se presentan algunos gráficos de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada uno de ellos:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar.
2. Respecto **al gráfico como tal,** describa de manera clara y precisa **los elementos o criterios explícitos** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas sobre los gráficos, no dude en efectuarlas.

Gráfico 1

$F: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$

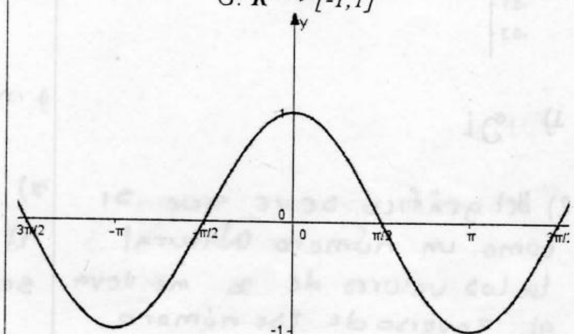


1) No

2) Si trazamos lineas vemos que no todas tocan o cortan al gráfico; esto quiere decir que hay puntos del plano cartesiano que el gráfico no toma

Gráfico 2

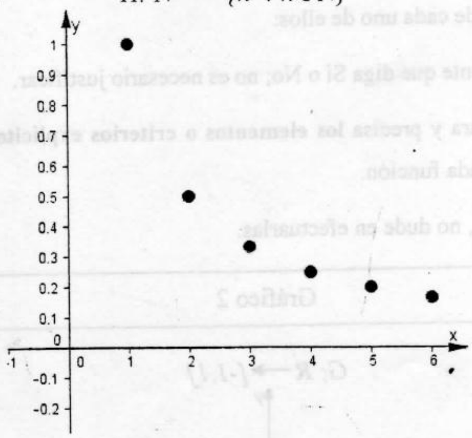
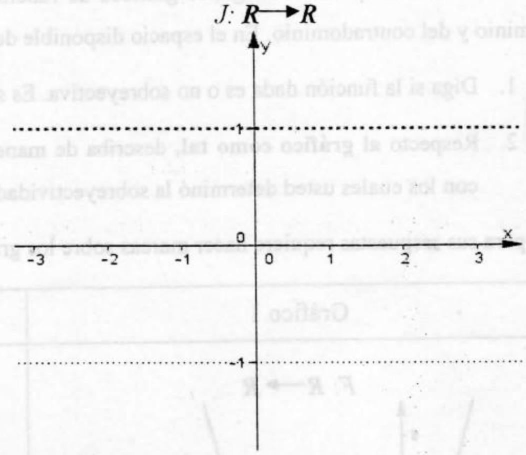
$G: \boldsymbol{R} \rightarrow [-1,1]$



1) Sí.

2) Se ve un intervalo de valores [-1, 1], el cual abarca a todo el gráfico respecto al eje Y, y este intervalo a su vez coincide con el intervalo que se supone debe tener a todas los puntos en y.

Estudiante Número: 4400

Gráfico 3	Gráfico 4
$H: N \rightarrow \{n^{-1} : n \in N\}$ 	$J: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 
1) Si	1) no
2) del gráfico se ve que si tomo un número Natural en los valores de x me lleva al Inverso de ese número que según la Información de la función todos los valores de y debe ser un Inverso de un número natural.	2) no sin Importar el valor el valor en el eje x, en y solo se toman valores 1 ó −1

Anexo 7: respuestas de los estudiantes seleccionados a la encuesta 3

Estudiante Número: 1110

Encuesta 3

A continuación se presentan algunas expresiones analíticas de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada una de ellas:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar ni usar procedimiento analítico alguno..
2. Describa de manera clara y precisa **los elementos constitutivos de la expresión analítica y/o criterios explícitos a partir de ella** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

Expresión 1	Expresión 2
$F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ $F(x) = x^2 + 1$ La función f(x) no es sobreyectiva. Porque F está definida con un codominio $\mathbb{R}$ y cualquier valor de x calculado en la función dará resultado un número positivo. Es decir, para cualquier x en el dominio x^2 siempre es positivo y además se está sumando la unidad. No abrán entonces imágenes negativas que pertenezcan al codominio $\mathbb{R}$.	$G: \boldsymbol{R} \to [-3,3]$ $G(x) = 3sen(x)$ La función G(x) SÍ es sobreyectiva Porque G'(x) = sen(x) oscila entre 1 y -1 para cualquier $x \in \mathbb{R}$ El coeficiente 3 que está multiplicando a la expresión, está modificando el máximo a 3 y el mínimo a -3, los cuales son los máximos y mínimos valores en el intervalo [-3, 3] que corresponde al codominio

Estudiante Número: 1110

Expresión 3	Expresión 4
$H: N \longrightarrow \{n^{-1}: n \square N\}$	$\chi: R \longrightarrow R$
$H(u) = \dfrac{1}{u}; u \in N \wedge u \neq 0$	$\chi(t) = \begin{cases} t^2, & si\ \ t \in Q \\ 0, & si\ \ t \notin Q \end{cases}$
H(u) sí es sobreyectiva Porque todas las imágenes de H(u) son de la forma n^{-1} para todo $u \in N$ y $u \neq 0$ ∴ Todas estas imágenes pertenecen al conjunto de llegada $\{n^{-1}, n \in \mathbb{N}\}$	$\chi(t)$ no es sobreyectiva Porque no hay imágenes negativas en $\chi(t)$ que pertenezcan al codominio $\mathbb{R}$ si este (codominio) fuera $\mathbb{R}_0^+$, sí sería sobreyectiva...

Estudiante Número: 1150

Encuesta 3

A continuación se presentan algunas expresiones analíticas de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada una de ellas:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar ni usar procedimiento analítico alguno..
2. Describa de manera clara y precisa **los elementos constitutivos de la expresión analítica y/o criterios explícitos a partir de ella** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

Expresión 1	Expresión 2
F: R→R $F(x) = x^2 + 1$ NO Pues todo numero elevado al cuadrado da positivo y si le sumo uno me sigue dando positivo por lo tanto en la imagenes nunca altre un numero negativo.	*G: R→[-3,3]* $G(x) = 3sen(x)$ Sí La función f(x) = senx oscila entre -1 y 1 ya que la amplitud es 1, pero la función G(x) = 3senx oscila entre [3, -3] por eso es sobreyectiva.

Estudiante Número: 1150

Expresión 3	Expresión 4
$H: N \longrightarrow \{n^{-1}: n \in N\}$ $H(u)=\frac{1}{u}; u \in N \wedge u \neq 0$ Si Pues el conjunto de imagenes el igual al Conjunto del codominio por lo tanto es ∴ Sobreyectiva.	$\chi: R \longrightarrow R$ $\chi(t)=\begin{cases} t^2, & si\ \ t \in Q \\ 0, & si\ \ t \notin Q \end{cases}$ No Pues si un numero negativo o positivo lo elevo al cuadrado da como resultado un positivo asi que nunca puedo obtener un numero negativo.

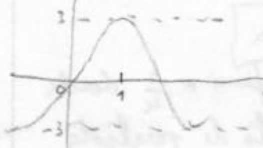
Estudiante Número: 1210

Encuesta 3

A continuación se presentan algunas expresiones analíticas de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada una de ellas:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar ni usar procedimiento analítico alguno..
2. Describa de manera clara y precisa **los elementos constitutivos de la expresión analítica y/o criterios explícitos a partir de ella** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

Expresión 1	Expresión 2
$F: R \rightarrow R$  $F(x) = x^2 + 1$ (no es sobreyectiva) puesto que a ver la función F(x) como el valor de las imagenes y las preimagenes van de Reales en Reales. (para una imagens le corresponden dos preimagenes distintos ej: (2 y -2) su imagen en R(y) sea 5  pero no se alcanza teniendo en cuente los elementos que hacen parte de los R del eje Y negativo donde se indetermine y la raiz de negativa (cuando se toma $\boxed{f(x) = x^2+1}$ y se despeja x.)	$G: R \rightarrow [-3,3]$ $G(x) = 3sen(x)$  Si seria sobreyectiva puesto que la función seno es una función periodica y el 3 que acompaña a sen(x) Hace que la amplitud aumente y vaya desde -3 a 3. que es presisamente donde como maximo siempre oscilara.

Estudiante Número: 1210

Expresión 3

$$H: N \longrightarrow \{n^{-1}: n \in N\}$$

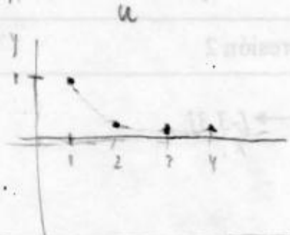
$$H(u) = \frac{1}{u}; u \in N \wedge u \neq 0$$

$H : \mathbb{N} \to \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$n \geq 1$

$H(u) = \frac{1}{u} \quad u \neq 0 \quad u \in \mathbb{N}$

x	y	
1	1	
2	1/2	0,5
3	1/3	$0,\bar{3}$
4	1/4	0,25



$\boxed{\text{si sería sobreyectiva}}$

puesto que H(u) define a $\frac{1}{u}$ donde se especifican el punto de partida de mi función y el de llegada. es $\frac{1}{n}$ sería lo mismo. que decir que salen puntos las imagenes

Expresión 4

$$\chi: R \longrightarrow R$$

$$\chi(t) = \begin{cases} t^2, & si\ t \in Q \\ 0, & si\ t \notin Q \end{cases}$$

$\chi(t)$ no es una función sobreyectiva porque la regla $\chi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ va de real en real.

Pero resulta $\chi(t)$ es una función por partes donde t si $\in$ a $\mathbb{Q}$ daría un número positivo que estaría en el conjunto de Reales que es más denso.

Dado a que si $t \notin \mathbb{Q}$ es decir entre valores enteros dará siempre 0

Por lo que niega decir los valores negativos a y por lo que:

$\chi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ → hace que no esté bien definido

Estudiante Número: 2310

Encuesta 3

A continuación se presentan algunas expresiones analíticas de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada una de ellas:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar ni usar procedimiento analítico alguno..
2. Describa de manera clara y precisa **los elementos constitutivos de la expresión analítica y/o criterios explícitos a partir de ella** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

Expresión 1	Expresión 2
conjunto de partida $F: R \rightarrow R$ conjunto de llegada $F(x) = x^2 + 1$ No es sobreyectiva, me fije en el conjunto de partida, en el conjunto de llegada y en la forma algebraica de la función, dado que ambos conjuntos es $\mathbb{R}$ y que la función es un polinomio de grado 2, existirían dos números distinto en el conjunto de partida que estuvieran relacionado con un único número en el conjunto de llegada.	$G: R \rightarrow [-3,3]$ conjunto de llegada $G(x) = 3sen(x)$ conjunto de partida No es sobreyectiva, me fije en el conjunto de partida y en el conjunto de llegada, que estuviera bien definida, ahora dado que es una función periodica y que el conjunto de partida es $\mathbb{R}$, existirán por lo menos dos números distintos en el conjunto de partida que estén relacionados con un único numero en el conjunto de llegada.

Estudiante Número: 2310

conjunto de partida

Expresión 3	Expresión 4
$H: N \to \{n^{-1} : n \square N\}$ conjunto de llegada	conjunto de partida $\chi: R \to R$ conjunto de llegada
$H(u) = \frac{1}{u}; u \in N \wedge u \neq 0$	$\chi(t) = \begin{cases} t^2, & si\ t \in Q \text{ (primera parte)} \\ 0, & si\ t \notin Q \text{ (segunda parte)} \end{cases}$
Si es sobreyectiva, primero me fije en el conjunto de partida y de llegada, como estaban bien definido con la función, observe la forma algebraica de la función; dado que la relación que tiene cada número, del conjunto de partida, es su opuesto multiplicativo, y este pertenece al conjunto de llegada; Si es sobreyectiva, ya que los opuestos multiplicativos son únicos.	No es sobreyectiva, primero me fije en el conjunto de partida y de llegada, dado que ambos conjuntos estaban bien definidos con la función, observe cada parte de la función, en la primera parte, para cada racional escogido que pertenezca al conjunto de partida, su opuesto aditivo también estará en el conjunto y ambos estarán relacionados con un único número en el conjunto de llegada; ya la segunda parte, como para cualquier número escogido, que NO sea racional, solo existe un único valor que los relaciona a todos, no puede ser sobreyectiva.

Estudiante Número: 2320

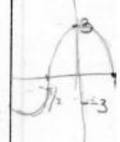
Encuesta 3

A continuación se presentan algunas expresiones analíticas de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada una de ellas:

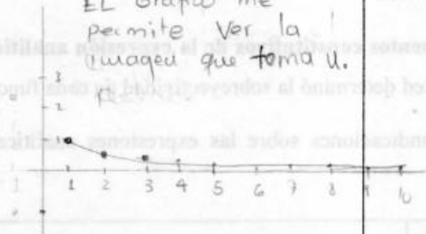
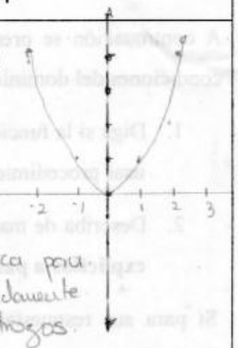
1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar ni usar procedimiento analítico alguno..
2. Describa de manera clara y precisa **los elementos constitutivos de la expresión analítica y/o criterios explícitos a partir de ella** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

Expresión 1	Expresión 2
F: **R** → **R** $F(x) = x^2 + 1$ 1 Si es sobreyectiva 2 los terminos que me permite afirmar que es sobreyectiva es la expresión x^2, porque esta me representa una parabola donde corta en el eje "y" en 1, además F: R → R quiere decir que cada elemento en x le corresponde un elemento en y. es decir coinciden el R_F con D_F.	*G*: **R** → *[-3,3]* $G(x) = 3sen(x)$ 1 No es sobreyectiva 2 como hay restricción en el rango por la Expresión G: R → [-3, 3]. que me indica que $x \in R$ y $y \in [-3,3]$, es decir, que si yo tomo $x = 0$ y lo evaluo en la función $G(x) = 3 sen(x)$ $G(0) = 3 sen(0)$ $= 3 \cdot 1$ $= 3$ entonces cada elemento que tome del eje horizontal siempre va a coincidir o (coer) en el I. Cerrado [-3, 3].



Estudiante Número: 2320

Expresión 3	Expresión 4
$H: N \longrightarrow \{n^{-1}: n \in N\}$ $H(u) = \dfrac{1}{u}; u \in N \wedge u \neq 0$ EL Grafico me permite Ver la imagen que toma u.  (1) Si es Sobreyectiva (2) Como $u \in N$ cada elemento se relaciona con otro elemento que también pertenece a N, es decir, que el Rango de H coincide con el Dominio de H.	$\chi: R \longrightarrow R$ $\chi(t) = \begin{cases} t^2, & si\ t \in Q \\ 0, & si\ t \notin Q \end{cases}$  Realice la gráfica para observa Detalladamente la función a trozos (1) Si es Sobreyectiva. (2) la expresión $X(t) = \begin{cases} t^2, & si\ t \in Q \\ 0, & si\ t \notin Q. \end{cases}$ es una función a trozos como $X: R \to R$ el dominio de $X(t)$ le corresponde una imagen en t^2 forma una parabola y 0, si $t \notin Q$ es una recta vertical (constante) donde la imagen toma siempre como preimagen cero (0). Como la expresión t^2 forma una parabola me permite Determinar la sobreyectividad de la función $X(t)$ que va $X: R \longrightarrow R$

Estudiante Número: 3120

Encuesta 3

A continuación se presentan algunas expresiones analíticas de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada una de ellas:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar ni usar procedimiento analítico alguno..
2. Describa de manera clara y precisa **los elementos constitutivos de la expresión analítica y/o criterios explícitos a partir de ella** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

Expresión 1

$F: R \rightarrow R$

$F(x) = x^2 + 1$

Sí.

El tener la expresión x^2+1 es tener una parabola con concavidad positiva donde intercepta el eje y vertical en 1. Teniendo esta referencia puedo visualizar la correspondencia de elementos en y como imagen en uno o varios elementos del conjunto de partida (eje horizontal).

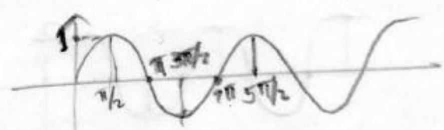
Expresión 2

$G: R \rightarrow [-3,3]$

$G(x) = 3sen(x)$

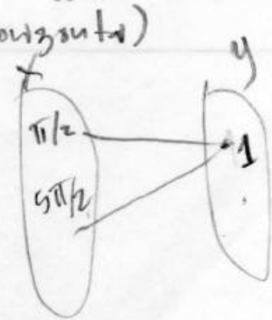
Sí.

la función seno(x) en particular es una función en la cual cumple parametros de periocidad, es decir que



un valor o elemento de y (eje vertical) le correspondera como imagen a varios elementos en x (eje horizontal)

y = 1



Estudiante Número: 3120

Expresión 3	Expresión 4
$H: N \rightarrow \{n^{-1}: n \square N\}$ $H(u) = \frac{1}{u}; u \in N \wedge u \neq 0$ Si, Puesto aqui hay relacion entre H:N, donde habra un espacio geometrico conformado por puntos de la forma $\frac{1}{u}$ lo cual llevara a posibles relaciones entre coordenadas entre los 2 ejes (Horizontal y Vertical)	$\chi: R \rightarrow R$ $\chi(t) = \begin{cases} t^2, & si\ t \in Q \\ 0, & si\ t \notin Q \end{cases}$ Si, Al ver por trozos esta funcion podremos visualizar una parabola con Vertice (0,0) y en una Parabola existe relacion directa entre la Imagen conformada por un elemento en y con dos elementos de X.

Estudiante Número: 3210

Encuesta 3

A continuación se presentan algunas expresiones analíticas de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada una de ellas:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar ni usar procedimiento analítico alguno..
2. Describa de manera clara y precisa **los elementos constitutivos de la expresión analítica y/o criterios explícitos a partir de ella** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

Expresión 1	Expresión 2
F: R ⟶ *R* $F(x) = x^2 + 1$ No, porque es una función cuadratica y esta definida de R→R como el vértice es (0,1) y a es positivo abre hacia abajo. los valores (1,∞) de eje y no tendrían preimagen de x.	*G: R* ⟶ *[-3,3]* $G(x) = 3sen(x)$ Si es sobreyectiva El 3 en la función indica que se esta alargando verticalmente la función, así que su conjunto de llegada ya no sería [-1,1] sino [-3,3], como la función seno es constante todo valor de y que se encuentre entre [-3,3] es imagen de algún R

Estudiante Número: 3210

Expresión 3	Expresión 4
$H: N \longrightarrow \{n^{-1} : n \square N\}$ $H(u) = \frac{1}{u}; u \in N \wedge u \neq 0$ Si, lo diría porque el conjunto de llegada son los n^{-1} y la función $H(u) = \frac{1}{u}$, se puede ver como $H(u) = u^{-1}$.	$\chi: R \longrightarrow R$ $\chi(t) = \begin{cases} t^2, & si\ t \in Q \\ 0, & si\ t \notin Q \end{cases}$ No es sobreyectiva Esta definida de $R \to R$. t^2, si $t \in Q$, como es una función cuadrática, su vértice es $(0,0)$ y abre hacia arriba y los $t \notin Q$ van a tener el valor de 0, por ello los valores del eje y que estan entre $(0,-\infty)$ no son imagen de algún valor del eje x (dominio)

Estudiante Número: 4300

Encuesta 3

A continuación se presentan algunas expresiones analíticas de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada una de ellas:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar ni usar procedimiento analítico alguno..
2. Describa de manera clara y precisa **los elementos constitutivos de la expresión analítica y/o criterios explícitos a partir de ella** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

Expresión 1	Expresión 2
F: R→*R* $F(x) = x^2 + 1$ el conjunto inicial de f es R y el conjunto final es R según la definición de la función F, la Expresión me permite entonces Realizar manipulaciones Algebraicas para determinar el conjunto de Elementos, que se originan a traves de la función es decir que tendre un conjunto [1, ∞) de llegada desde cualquier valor de x así puedo buscar una Expresión que de cuenta de la forma de los Elementos del rango	*G: R*→*[-3,3]* $G(x) = 3sen(x)$ inicialmente evaluo la Expresión y busco los Elementos que esta Expresión Crea. estos elementos los asocio a los elementos que Conforman mi dominio y Busco una relación entre todos los elementos para poder decir que hay Sobreyectividad, si esta relación entre los elementos de salida y de llegada es total y Plena, habrá sobreyectividad en la funcion.

y en comparación con los del dominio determino relaciones

-no es sobreyectiva —.

Estudiante Número: 4300

Expresión 3	Expresión 4
$H: N \longrightarrow \{n^{-1}: n \square N\}$ $H(u) = \frac{1}{u}; u \in N \wedge u \neq 0$ Según las restricciones de la función, puedo pensar en elementos generados por estas condiciones, y ver si su relación corresponde a la forma de sobreyectividad para este caso, la función es sobreyectiva	$\chi: R \longrightarrow R$ $\chi(t) = \begin{cases} t^2, & si\ \ t \in Q \\ 0, & si\ \ t \notin Q \end{cases}$ Para esta función que está definida por partes, miraría cada una de las partes para poder reconocer un procedimiento algebraico que me lleve a la construcción de una expresión que en términos de la variable de mi rango me defina todos los elementos del dominio de la función

Estudiante Número: 4400

Encuesta 3

A continuación se presentan algunas expresiones analíticas de funciones de variable real, especificando las condiciones del dominio y del contradominio. En el espacio disponible debajo de cada una de ellas:

1. Diga si la función dada es o no sobreyectiva. Es suficiente que diga Sí o No; no es necesario justificar ni usar procedimiento analítico alguno..
2. Describa de manera clara y precisa **los elementos constitutivos de la expresión analítica y/o criterios explícitos a partir de ella** con los cuales usted determinó la sobreyectividad de cada función.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

Expresión 1	Expresión 2
F: R ⟶ *R* $F(x) = x^2 + 1$ • No lo es. (1) • sabemos que para todo $F(x) = ax^2 + bx + c$, le corresponde un $F'(x). = (x-h)^2 + k$ donde (h, k) es el vértice, a parte, como en $f(x) = x^2 + 1$ $a>0$. la parábola es concava hacia arriba. así el vértice sería $V: (0, 1)$ y el Rangf: $[1, \infty)$ dejando por fuera todos los $x: x < 1$ y esto ya no haría coincidir el rango con $\mathbb{R}$.	*G: R* ⟶ *[-3,3]* $G(x) = 3sen(x)$ Si lo es. (1) - Sabemos que la función $sen(x)$ es sobreyectiva cuando se tiene una función $f(x) = K\,Sen(x)$ con $k \neq \mathbb{R}$; esta guarda las propiedades de $f(x) = sen(x)$; lo único que hace k es hacer variar la amplitud. así Ranf si $f(x) = Sen(x)$ es $[-1, 1]$ y. Ranf si $f(x) = 3Sen(x)$ es $[-3, 3]$ por lo tanto $G(x)$ es sobreyectiva.

Estudiante Número: 4400

Expresión 3	Expresión 4
$H: N \longrightarrow \{n^{-1}: n \in N\}$ $H(u) = \frac{1}{u}; u \in N \wedge u \neq 0$ - Sí - Observando el ranH = {U⁻¹: U∈N} con U≠0. este conjunto es exactamente el mismo que {n⁻¹: n∈N} así {U⁻¹: U∈N} = {n⁻¹: n∈N} lo que garantiza la sobreyectividad de H(U)	$\chi: R \longrightarrow R$ $\chi(t) = \begin{cases} t^2, & si\ t \in Q \\ 0, & si\ t \notin Q \end{cases}$ - No - puesto que no habrá un único t tal que χ(t) = 0, es decir Para χ(t) = 0 ∈ Rango; no existe un único t∈ Dom χ tal que χ(t) = 0

Anexo 8: respuestas de los estudiantes seleccionados a la encuesta 4

Estudiante Número: 1110

Encuesta 4

A continuación se presentan cuatro funciones de variable real, cada en el respectivo gráfico cartesiano y en su expresión analítica; se incluyen, así mismo, las respectivas condiciones de dominio y codominio.

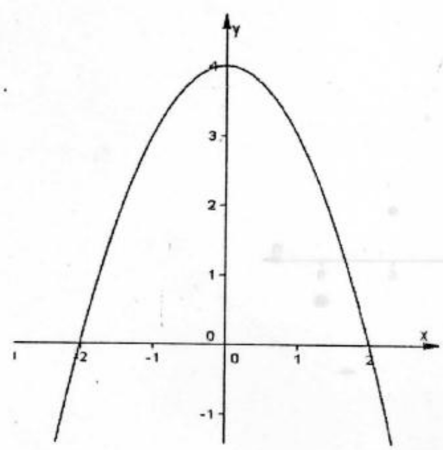
i. Respecto a cada una de las funciones, diga si es o no sobreyectiva.

ii. Explique clara y detalladamente su consideración anterior; para ello sírvase tanto del gráfico de cada función como de su expresión analítica.

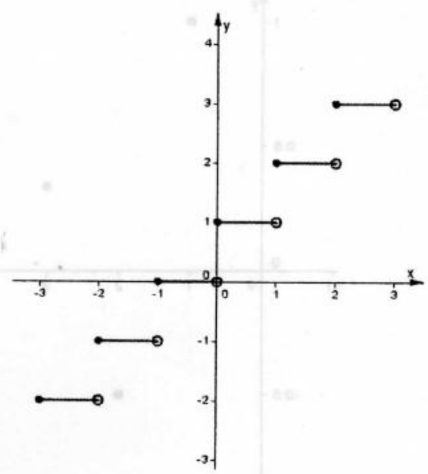
iii. Intente elaborar una prueba formal de la sobreyectividad o no sobreyectividad de por lo menos dos de las funciones.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre los gráficos cartesianos o sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

1) Sea f: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, tal que $f(x) = 4 - x^2$.

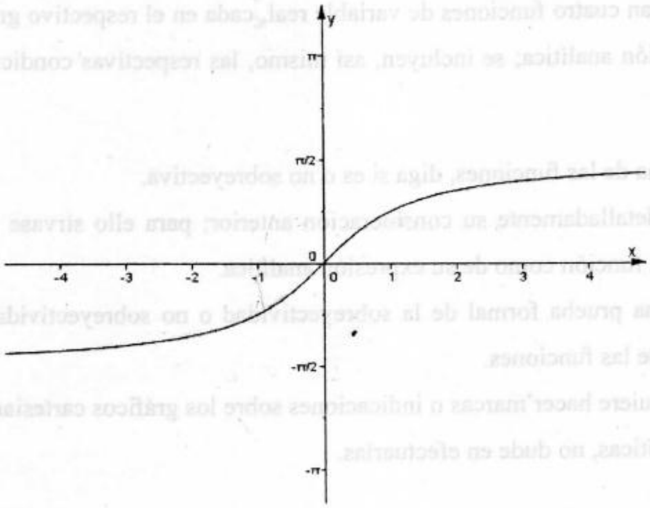


2) Sea φ: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$, tal que $\varphi(x) = [x]+1$ (léase $[x]$ como parte entera de x).

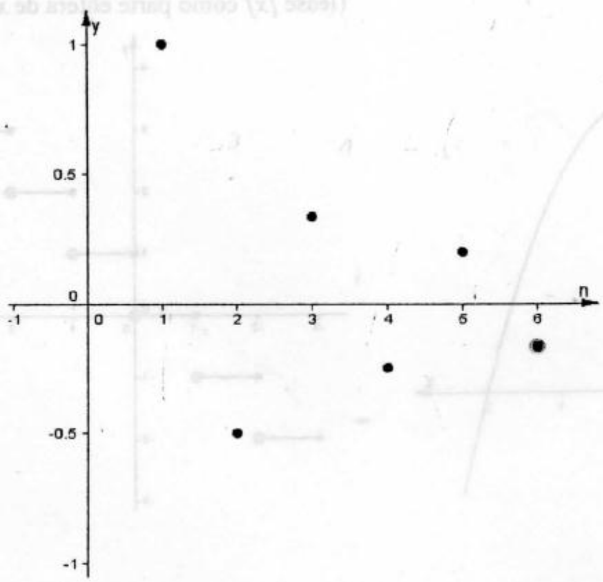


Estudiante Número: 1110

3) Sea G: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{Z}$, tal que $G(x) = Arctan\ x$



4) Sea ξ: $\mathbf{Z}^{+} \longrightarrow [-1, 1]$, tal que $\xi\ (n) = (-1)^{n+1}\ n^{-1}$.

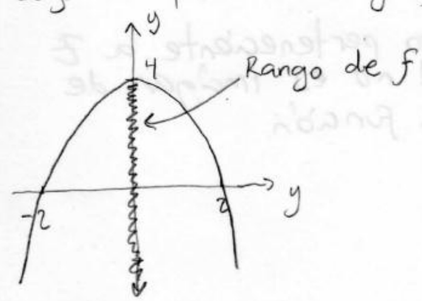


Estudiante Número: 1110

1. $f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 4 - x^2$

Esta función **no** es sobreyectiva, pues para que sea sobreyectiva el rango de la función debe ser igual al codominio.
El codominio de f es $\mathbb{R}$, pero el rango de f es $(-\infty, 4]$ según se aprecia en la gráfica

Es decir, $Ran(f) \neq Cod(f)$.

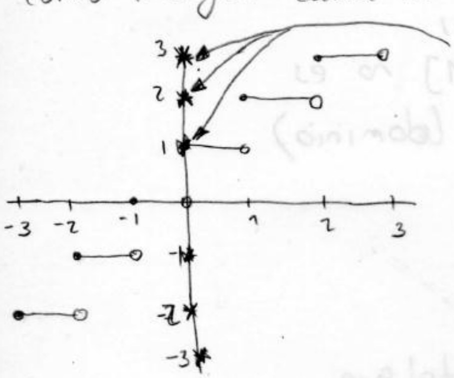


Respecto a la expresión analítica se observa que para todos los $x \in dom$ las imágenes son menores o iguales que 4, pues a 4 se le resta el cuadrado de x, así no abría una imagen mayor que 4.

2. $\varphi = \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$\varphi(x) = [x] + 1$

Esta función, ES SOBREYECTIVA, porque vemos que el codominio de φ es el conjunto $\mathbb{Z}$ y la función toma como imagen cada número que pertenece al conjunto $\mathbb{Z}$



Observe que donde se ha marcado ✱ corresponde a un número entero,
Todos los números enteros son las imágenes de la función φ.

Precisamente de la expresión analítica ~~de la~~

$\varphi(x) = [x] + 1$

Es la parte ENTERA de cualquier $x \in \mathbb{R}$

y como el codominio es $\mathbb{Z}$ entonces se verifica que es sobre...

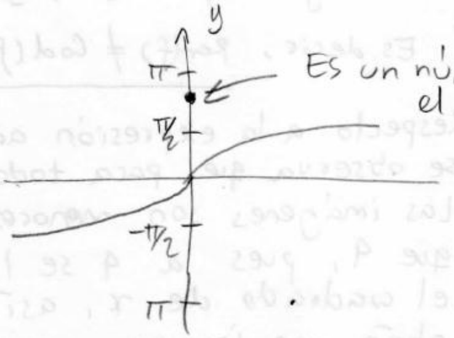
Estudiante Número: 1110

3. $G: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$G(x) = \arctan(x)$.

Esta función No es sobreyectiva,

Hay números enteros que no son imágenes de un $x \in \operatorname{dom} G$



Es un número perteneciente a Z el cual no es imágen de la función.

4. $\xi = \mathbb{Z}^+ \to [-1, 1]$

$\xi(n) = (-1)^{n+1} n^{-1}$

Esta función No es sobreyectiva,

podemos notar que $-1 \in [-1, 1]$ no es la imágen de ningún $n \in \mathbb{Z}^+$ (dominio)

(iii) $f(x) = 4 - x^2$

supongamos que f es sobre..

Entonces, tiene que existir un x tal que

$y = f(x)$

$y = 4 - x^2 \rightarrow x^2 = 4 - y$

$x = \pm\sqrt{4 - y}$ $\nearrow x_1 = \sqrt{4-y}$ $\searrow x_2 = -\sqrt{4-y}$

Pero $y = f(x) = 4 - \left(-\sqrt{4-y}\right)^2 = 4 + (4 - y) = 8 - y$

Entonces, no es Sobreyectiva.

Estudiante Número: 1110

(iii) $\xi(n) = (-1)^{n+1} n^{-1}$

Si esta función es Sobreyectiva.

Entonces tiene que existir un $n \in dom(\xi)$ tal que

$$y = -1$$

$$-1 = f(n)$$

$$-1 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

$$-1 = (-1)^{1} \cdot (-1)^{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$n = (-1)^{n}$$

Pero esto no es una igualdad para ningún $n \in dom\, \xi$

Así, si $n = 1$

$$\Rightarrow \quad 1 \neq (-1)^{1}$$

$$1 \neq -1 \quad //$$

Estudiante Número: 1150

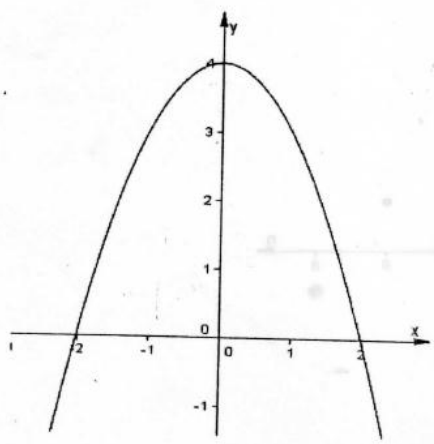
Encuesta 4

A continuación se presentan cuatro funciones de variable real, cada en el respectivo gráfico cartesiano y en su expresión analítica; se incluyen, así mismo, las respectivas condiciones de dominio y codominio.

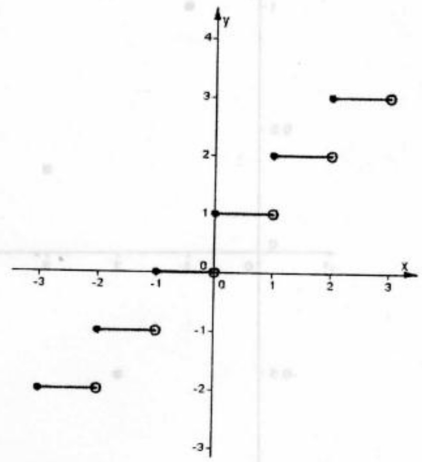
i. Respecto a cada una de las funciones, diga si es o no sobreyectiva.
ii. Explique clara y detalladamente su consideración anterior; para ello sírvase tanto del gráfico de cada función como de su expresión analítica.
iii. Intente elaborar una prueba formal de la sobreyectividad o no sobreyectividad de por lo menos dos de las funciones.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre los gráficos cartesianos o sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

1) Sea f: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, tal que $f(x) = 4 - x^2$.

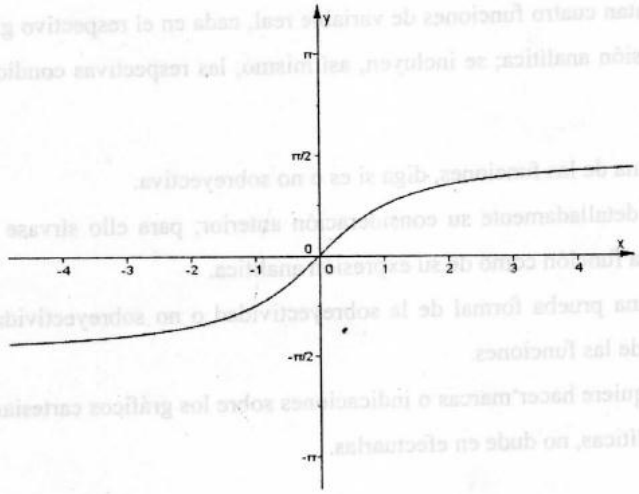


2) Sea φ: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$, tal que $\varphi(x) = [x]+1$ (léase $[x]$ como parte entera de x).

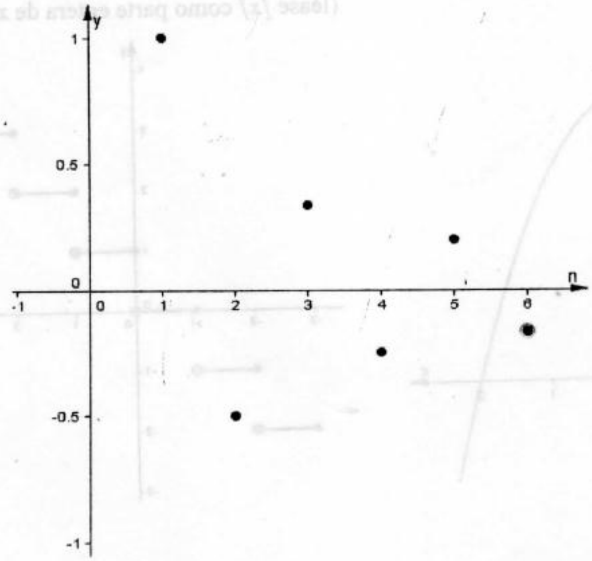


Estudiante Número: 1150

3) Sea G: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{Z}$, tal que $G(x) = Arctan\ x$



4) Sea ξ: $\mathbf{Z}^+ \longrightarrow [-1, 1]$, tal que $\xi\ (n) = (-1)^{n+1}\ n^{-1}$.



Estudiante Número: 1150

1) no

Grafico: mediante la figura se nota que numeros como el 5, 6, 7, 8 no tienen pareja ordena con respecto al eje x por lo tanto para todo que esta en el eje y no hay pareja con uno del eje x.

analitico:

Notemos que si un numero negativo o positivo se le eleva al cuadrado da como resultado un numero positivo y por el menos que lo multiplica daria un numero negativo, y si le sumo 4 me dara igual un numero pequeño por lo tanto los reales positivos grandes no tendra pareja ordenada

Prueba formal

sea $F(x) = y$

$$y = 4 - x^2$$

Despejando x

$$x = \sqrt{4-y}$$

Donde si $y = 10$ no existe valor real para la igualdad

2) Si

Grafico:
todo elemento que esta en el eje y tiene un compañero en el eje x, notando que ago referencia a bs y enteros.

Analitico: Pues si a un numero se le aproxima a la parte entera y se le suma 1 siempre obtendre un numero entero.

Estudiante Número: 1150

3) No

Grafico: el numero π5 no tiene parejita.

analiticamente:

la función $f(x) = \arctan x$ oscila entre $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$ por lo tanto numero como el 7, 9, estan solos sin parejas. ~~por lo tanto~~

4) No.

Grafico: el 0.5 no tiene parejita.

analitico: consideremos tambien el 0.5 y notemos que para cualquier n no existe un numero que de 0.5

Formal

$$\mathcal{E}(n) = (-1)^{n+1}\, n^{-1}$$

Sea $\mathcal{E}(n) = y$

$$y = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

y es de la forma $\frac{a}{b}$ por lo tanto es racional, pero en el intervalo $[-1, 1]$ hay infintos numeros iracionales por lo tanto $\forall y$ no existe un n.

Estudiante Número: 1210

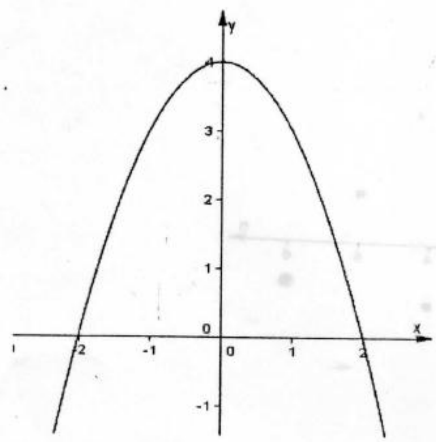
Encuesta 4

A continuación se presentan cuatro funciones de variable real, cada en el respectivo gráfico cartesiano y en su expresión analítica; se incluyen, así mismo, las respectivas condiciones de dominio y codominio.

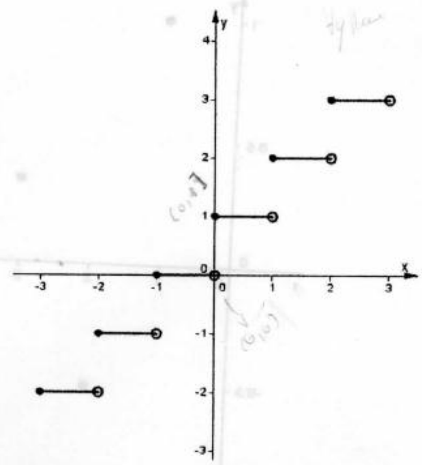
i. Respecto a cada una de las funciones, diga si es o no sobreyectiva.
ii. Explique clara y detalladamente su consideración anterior; para ello sírvase tanto del gráfico de cada función como de su expresión analítica.
iii. Intente elaborar una prueba formal de la sobreyectividad o no sobreyectividad de por lo menos dos de las funciones.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre los gráficos cartesianos o sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

1) Sea f: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, tal que $f(x) = 4 - x^2$.

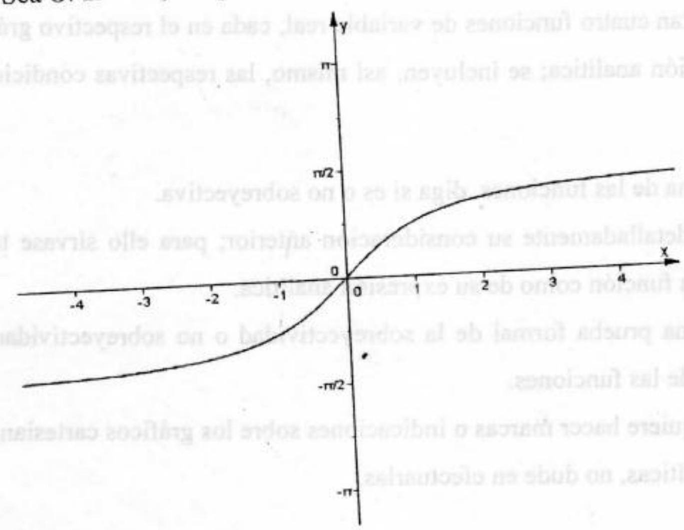


2) Sea φ: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{Z}$, tal que $\varphi(x) = [x]+1$ (léase $[x]$ como parte entera de x).

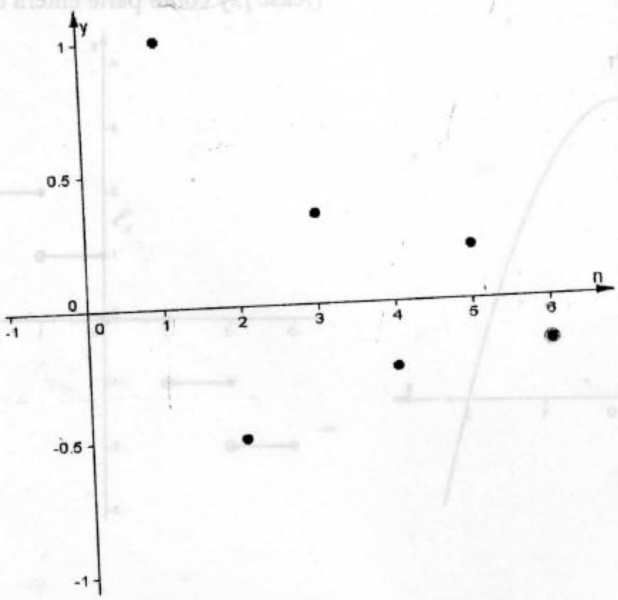


Estudiante Número: 1210

3) Sea G: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$, tal que $G(x) = Arctan\, x$



4) Sea ξ: $\boldsymbol{Z}^{+} \longrightarrow [-1, 1]$, tal que $\xi\,(n) = (-1)^{n+1}\, n^{-1}$.



Estudiante Número: 1210

i) Decir si es sobreyectivo o no

1) No

2) Si

3) No

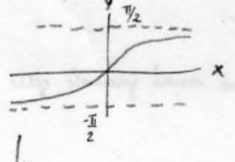
4) No

ii) ① Dado a que la primera expresión es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quiere decir que la función estaría contenida en todo el plano contenuo cartesiano y tengo que $f(x) = 4 - x^2$ es una parabola que tiene como valor máximo o punto de inflexión $(0,4)$, luego no se estaría abarcando todos los numeros Reales y lo mismo pasa en el eje x donde se tienen los puntos de corte en $-2, 2$ pero esto me indica que efectivamente no todos los reales están en mi dominio en función de mis conjuntos de imagenes, como se aprecia en la grafica

② Si es sobreyectiva pues esta función φ me resulto muy dificultoso ya que si bien se me es familiar desde cursos como Calculo I, puede ser que en la regla de asignación $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ se tomen todos los reales pero mi codominio o rango se ve limitado por la parte entera $[x]$ y existen unos valores que no se toman pero como $\varphi(x) = [x] + 7$ se le suma siempre 7 eso hace que no se indetermine el que sea sobreyectiva ya que en cada elemento de mi codominio o rango esta relacionado con mi dominio.

③ No es sobreyectivo, puesto que no está del todo bien definida mi función, es decir, si bien las funciones arco son sobreyectivas en nuestro caso $G(x) = \text{Arc}\tan x$ solo estaría definida si el conjunto de llegada "$\mathbb{Z}$" estuviera de $(-\pi/2, \pi/2)$ pero no hay ninguna información en el grafico o regla de asignación que me lo diga

ya que



tiene esos valor $(-\pi/2, \pi/2)$ como asintotas horizontales

Este grafico lo dedujo del grafico original y por medio de este fue que hallé en intervalo que falla en lo que quería probar (sobreyectividad de $\text{Arc}\tan(x)$)

Estudiante Número: 1210

(4) No es sobreyectivo puesto que ξ está definida desde los $\mathbb{Z}^+$ No hay problema hasta $[-1,1]$ y tengo como función $\boxed{\xi(n) = (-1)^{n+1} n^{-1}}$ (*) pero a partir de (*) evaluo en $n=1$ noto que efectivamente la imagen de uno ba hacia uno como se ve en el gráfico y a medida que aumenta n este disminuye el valor de las imagenes tal alcanzar a $n \Rightarrow$ pero en mi regla de asignación me definen el intervalo $[-1,1]$ y en ningun momento he tomado el valor de -1. por lo que no es sobreyectivo $\xi(n)$ ya que no está bien definida, debería ser: $\xi: \mathbb{Z}^+ \to (-1,1]$ entre otras formas..

Demostración

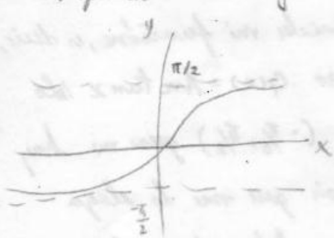
Sobreyectividad: Todos los elementos del rango o codominio deben estar relacionados con uno u otras

Para $(\forall y \in \text{Rang } f)(\exists x \in \text{Dom} / f(x) = y)$

3) Es la inversa para la composición de la función $tg: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

Por lo tanto, es la función $\text{arctg}: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ definida de la siguiente manera: para cada $y \in \mathbb{R}$ se tiene que $\text{arctg}(y)$ es como un unico intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ cuya tangente con y.

la función arctang. es estrictamente creciente, impar y acotada



Dom f: $\mathbb{R}$

Rango $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

si el conjunto de imagenes coincide con el codominio, es decir todo elemento del conjunto del codominio es por lo menos una imagen de un elemento del dominio.

Nota: Casi que toda función que su conjunto de partida sea más grande que el de llegada (más denso) sera sobreyectiva

Estudiante Número: 1210

1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 4 - x^2$

$D_f = \mathbb{R}$

$R_f = (-\infty, 4)$

$y = 4 - x^2$

Sabemos que la función f(x) tiene como Dom y Rang
$\mathbb{R}$ $(-\infty, 4]$
(lo dedujé al ver la función y evidenciarlo en el grafico)

$y - 4 = -x^2$

$x^2 = 4 - y$

$x = \sqrt{4 - y}$

$y' = \sqrt{4 - x'}$

$D_{y'} = 4 - x' \geq 0$

$4 \geq x'$

Pero si despejo x de f(x) y la dejo en terminos de y noto que la naturaleza de los elementos de mi Rango no todos estaran incluidos en mi dominio por lo que quedaran elementos del conjunto de llegada sin relacionar
Lo cual incumple la def de sobreyectividad de que $\{(\forall x \in Rang f)(\exists x \in Dom f / f(x) = y\}$

Estudiante Número: 2310

Encuesta 4

A continuación se presentan cuatro funciones de variable real, cada en el respectivo gráfico cartesiano y en su expresión analítica; se incluyen, así mismo, las respectivas condiciones de dominio y codominio.

i. Respecto a cada una de las funciones, diga si es o no sobreyectiva.

ii. Explique clara y detalladamente su consideración anterior; para ello sírvase tanto del gráfico de cada función como de su expresión analítica.

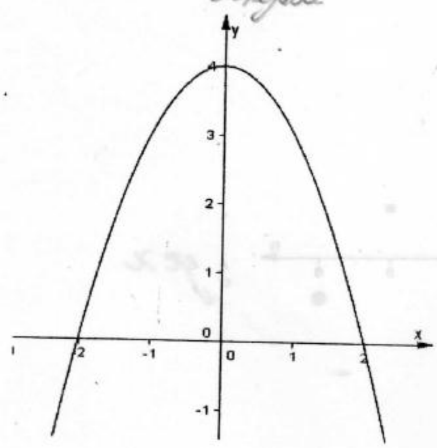
iii. Intente elaborar una prueba formal de la sobreyectividad o no sobreyectividad de por lo menos dos de las funciones.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre los gráficos cartesianos o sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

conjunto de partida

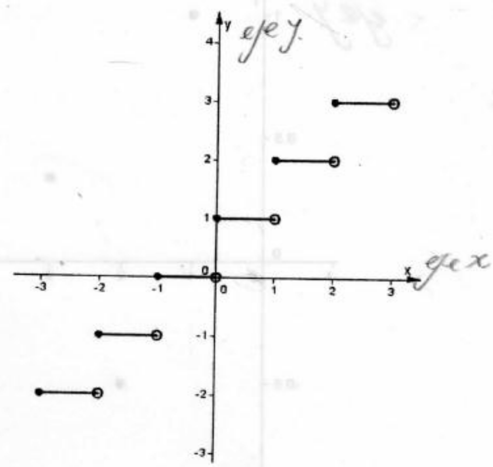
1) Sea f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, tal que $f(x) = 4 - x^2$.

conjunto de llegada



conjunto de partida   conjunto de llegada.

2) Sea φ: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$, tal que $\varphi(x) = [x]+1$ (léase $[x]$ como parte entera de x).

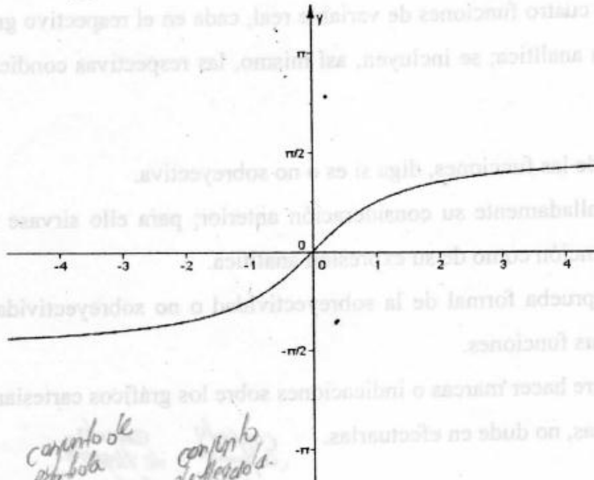


Estudiante Número: 2310

conjunto de partida

conjunto de llegada

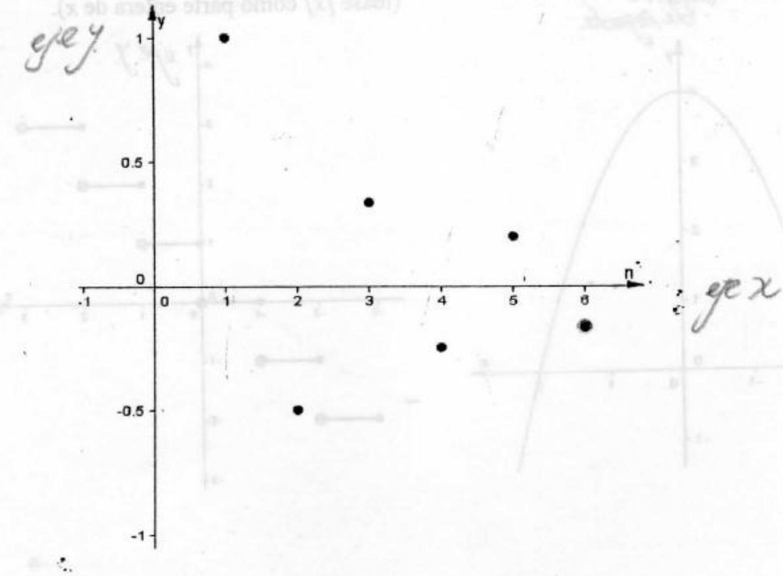
3) Sea $G: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, tal que $G(x) = Arctan\ x$



conjunto de partida

conjunto de llegada

4) Sea $\xi: \mathbb{Z}^+ \to [-1, 1]$, tal que $\xi(n) = (-1)^{n+1} n^{-1}$.



Estudiante Número: 2310

1.

i. No es sobreyectiva.

ii. primero observe que el conjunto de llegada y el de partida estuviera acorde con la grafica, luego observe que si fuera la grafica alusiva a la funcion, dado que la funcion es un polinomio de grado 2, para la mayoría de valores en el conjunto de llegada, sus opuestos aditivos, estarán relacionados con el mismo número en el conjunto de llegada; por medio de la grafica se puede mostrar esto, dado que para $x=2$ y $x=-2$; $f(2)=f(-2)=0$.

iii. para mostrar sobreyectiva basta con mostrar que si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; Para cualquier x_1, x_2. / Partiré de aqui $(f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2)$.

Sea $x_1=2$ y $x_2=-2$.

$x_1 \neq x_2$ ✓

luego $f(x_1)=f(2)=4-(2)^2=0 \quad \wedge \quad f(x_2)=f(-2)=4-(-2)^2=0$

Así $f(x_1)=f(x_2)$.

Por lo tanto $f(x)$ no es sobrectiva.

Estudiante Número: 2310

2.

i No es sobreyectiva.

ii. primero observé que los conjunto de partida y llegada estuvieran acorde a la función en forma algebraica y gráfica; ahora me fije en la parte algebraica, dado que la parte entera de x transforma todo número en su parte entera, tendremos infinitos números con partes enteras iguales, los cuales pertenecerán al conjunto de partida y estarán relacionados con el mismo número perteneciente al conjunto de salida.; con la gráfica pude observar que para ciertos números en el eje x, solo estaban relacionados con un único elemento en el eje y.

iii

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Sea $x_1 = 0 \wedge x_2 = 1/2 = 0,5$

Luego $\varphi(x_1) = \varphi(0) = [0]+1 = 0+1 = 1. \wedge$

$\varphi(x_2) = \varphi(1/2) = \varphi(0,5) = [0,5]+1 = 0+1 = 1.$

Así $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

Por lo tanto $\varphi(x)$ no es sobreyectiva.

Estudiante Número: 2310

3.-

i. Si es sobreyectiva.

ii. primeramente observé que los conjuntos de partida y de llegada estuvieran acorde con la forma algebraica y gráfica de la función, pero la gráfica está elaborada con un conjunto de llegada diferente, aún así, usé parte de la gráfica para mostrar que sí era sobreyectiva; dado que entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ se encuentrán solo 3 enteros $\{-1, 0, 1\}$, y se puede ver con la gráfica que estos valores solo están relacionados con un único número en el conjunto de partida, esta función es sobreyectiva.

4.

i. Si es sobreyectiva.

ii. primeramente observé que los conjuntos de partida y de llegada, estuvieran acorde con la función algebraica y gráfica; dado que cada elemento del conjunto de llegada está relacionado con su opuesto multiplicativo, teniendo en cuenta el signo, estos elementos son únicos y pertenecen al conjunto de llegada; observando la gráfica puede deducir que cada elemento del eje x está relacionado solo con un elemento del eje y.

Estudiante Número: 2320

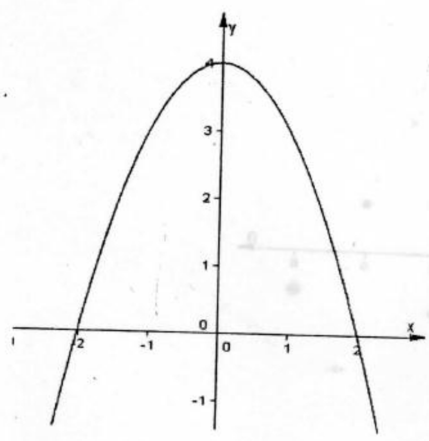
Encuesta 4

A continuación se presentan cuatro funciones de variable real, cada en el respectivo gráfico cartesiano y en su expresión analítica; se incluyen, así mismo, las respectivas condiciones de dominio y codominio.

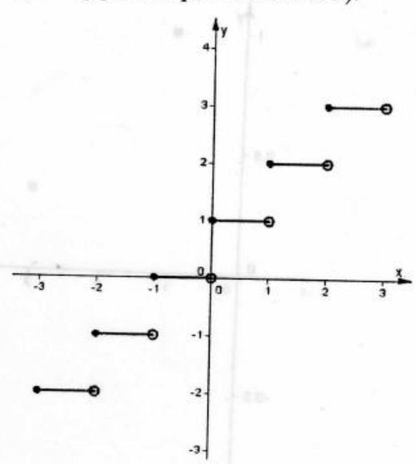
i. Respecto a cada una de las funciones, diga si es o no sobreyectiva.
ii. Explique clara y detalladamente su consideración anterior; para ello sírvase tanto del gráfico de cada función como de su expresión analítica.
iii. Intente elaborar una prueba formal de la sobreyectividad o no sobreyectividad de por lo menos dos de las funciones.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre los gráficos cartesianos o sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

1) Sea f: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$, tal que $f(x) = 4 - x^2$.



2) Sea φ: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{Z}$, tal que $\varphi(x) = [x]+1$ (léase $[x]$ como parte entera de x).

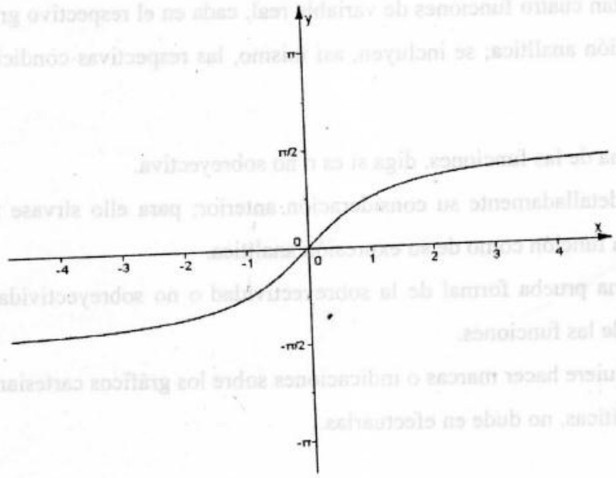


i) la gráfica ① y ③ es sobreyectiva.

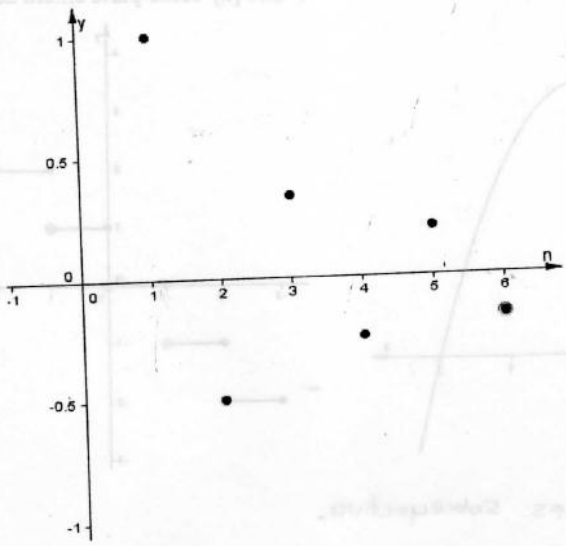
ii) la gráfica ① me permite dar cuenta que los puntos del eje x, tiene una correspondecia con los puntos del eje y y siempre van a coincidir, además la expresión $f(x)^2 = 4 - x^2$ me representa la gráfica de una parabola. Además hay simetria.
La gráfica

Estudiante Número: 2320

3) Sea $G: R \longrightarrow Z$, tal que $G(x) = Arctan\ x$



4) Sea $\xi: Z^{+} \longrightarrow [-1, 1]$, tal que $\xi(n) = (-1)^{n+1}\, n^{-1}$.



Estudiante Número: 2320

(i) La gráfica (1) y (3) es Sobreyectiva

(ii) La gráfica (1) me permite dar cuenta que los puntos del eje x, tiene como correspondencia los puntos del eje y siempre van a coincidir además la expresión $f(x) = 4 - x^2$ me representa la gráfica de una parabola y ademas es una función simetrica.

La gráfica (3) es una función inversa de tangente y esta también los valores de x y y son puntos que tienen una correspondencia Biunivoca, uno a uno, sus trazo es continuo, y periodico.

Las otras gráficas (2) presenta saltos y hay puntos abiertos como cerrado, es decir toma algunos valores y otros no.
La gráfica (4) solo son parejas de coordenadas y no hay trazo alguno en esta grafica

(iii) (Cardinalidad de x) $\geq$ (Cardinalidad de y)

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X : \quad f(x) = y.$$

entonces ss $f(x) = 4 - x^2$

$$4 - x^2 = 4 - y^2$$
$$-x^2 = -y^2$$
$$y^2 = x^2$$
$$y = x.$$

es decir coinciden. por lo tanto es Sobreyectiva.

• Segunda Demostración

Como la condición de sobreyectividad es que la card $X \geq$ Card y

entonces, supongamos que $\varphi(x) = [x] + 1$ es sobreyectiva

luego $[x] + 1 = [y] + 1$

$[x] = [y]$. pero. como $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, por hipotesis

hay una contradicción luego la $\varphi(x) = [x] + 1$ No es sobreyectiva.

Estudiante Número: 3120

Encuesta 4 Corregir

A continuación se presentan cuatro funciones de variable real, cada en el respectivo gráfico cartesiano y en su expresión analítica; se incluyen, así mismo, las respectivas condiciones de dominio y codominio.

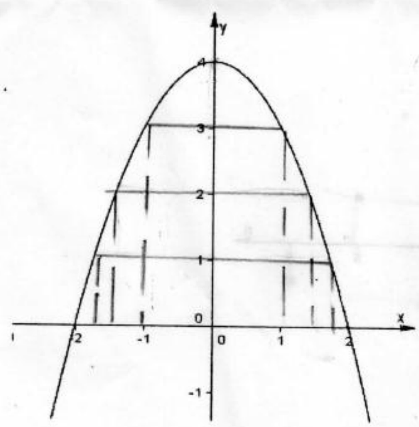
i. Respecto a cada una de las funciones, diga si es o no sobreyectiva.

ii. Explique clara y detalladamente su consideración anterior; para ello sírvase tanto del gráfico de cada función como de su expresión analítica.

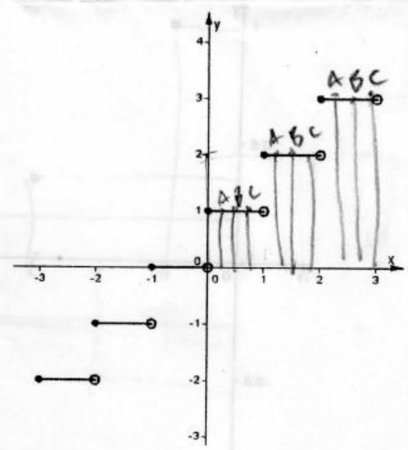
iii. Intente elaborar una prueba formal de la sobreyectividad o no sobreyectividad de por lo menos dos de las funciones.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre los gráficos cartesianos o sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

1) Sea f: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, tal que $f(x) = 4 - x^2$.

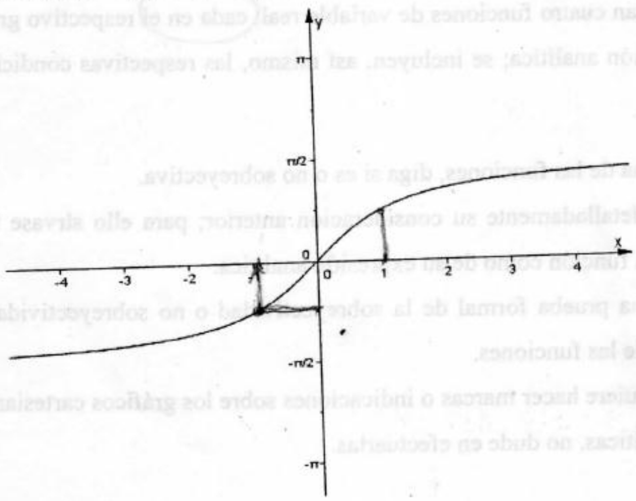


2) Sea φ: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$, tal que $\varphi(x) = [x]+1$ (léase $[x]$ como parte entera de x).

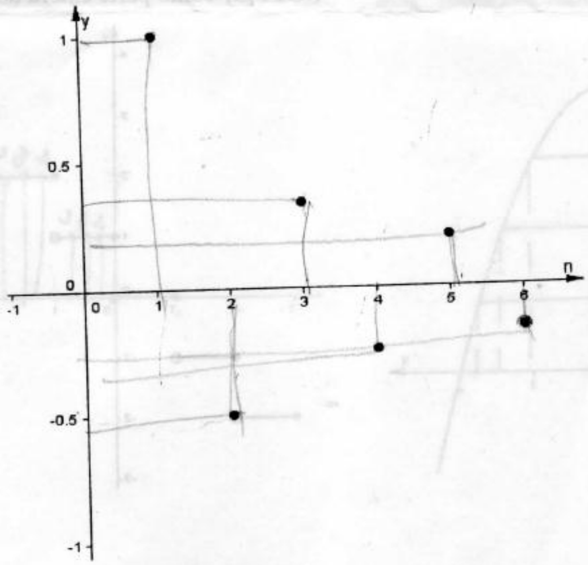


Estudiante Número: 3120

3) Sea G: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{Z}$, tal que $G(x) = Arctan\ x$



4) Sea ξ: $\mathbf{Z}^{+} \longrightarrow [-1, 1]$, tal que $\xi\ (n) = (-1)^{n+1}\ n^{-1}$.



Estudiante Número: 3120

Solución

i)

1) si

2) sí

3) si

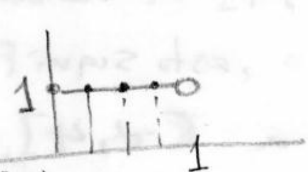
4) sí

ii)

1) En la primera grafica, dado que es una función cuadratica se cumple que cada elemento de y es la Imagen de más de un elemento de x.

Sea y eje Vertical
Sea x eje horizontal.

2) En este caso se muestra una función a trozos, pero en cada region (trozo) se visualiza que el elemento en y tiene como minimo un elemento en X.



3) En la función continua, $\tan^{(-1)} x$
se cumple la Condición Inicial

4) En esta grafica denotada por ptos, se puede apreciar que a cada pto corresponde una pareja de abcisas y

Estudiante Número: 3120

ordenadas, mostrando la relación mutua de cada elemento de (y) con uno de (x)

iii

dado $f(x) = 4 - x^2$

Dominio = $\mathbb{R}$ Rango $(-\alpha, 4)$

$y = 4 - x^2$

$x^2 = 4 - y$

$x = \sqrt{4 - y}$

observamos que x será un número real si y solo si

$4 - y \geq 0$ Resolviendo la desigualdad

$y \leq -4$ analizando los signos de y demarcando por los intervalos tenemos que

$(-\alpha, 4]$

como $(-\alpha, 4]$ el codominio esta incluido en $(-\alpha, 4]$, esto significa que todo "y" que pertenece a $[-\alpha, 4]$ es imagen de algun "x" que pertenece a $\mathbb{R}$, y por lo tanto la función es sobreyectiva

Estudiante Número: 3210

Encuesta 4

A continuación se presentan cuatro funciones de variable real, cada en el respectivo gráfico cartesiano y en su expresión analítica; se incluyen, así mismo, las respectivas condiciones de dominio y codominio.

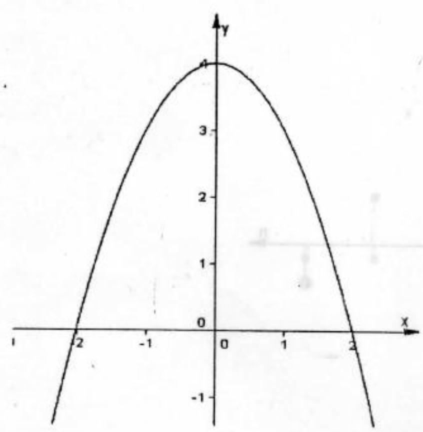
i. Respecto a cada una de las funciones, diga si es o no sobreyectiva.

ii. Explique clara y detalladamente su consideración anterior; para ello sírvase tanto del gráfico de cada función como de su expresión analítica.

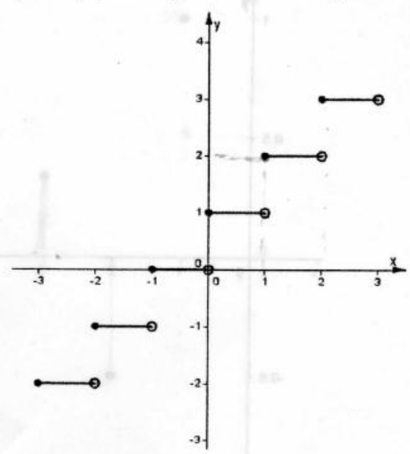
iii. Intente elaborar una prueba formal de la sobreyectividad o no sobreyectividad de por lo menos dos de las funciones.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre los gráficos cartesianos o sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

1) Sea f: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, tal que $f(x) = 4 - x^2$.

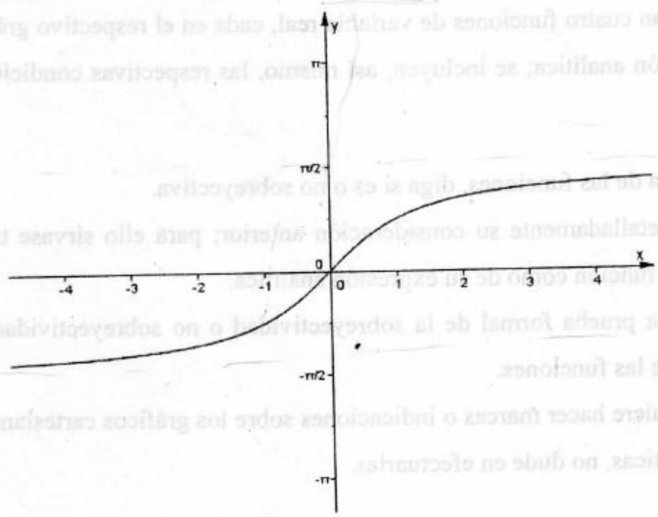


2) Sea φ: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{Z}$, tal que $\varphi(x) = [x]+1$ (léase $[x]$ como parte entera de x).

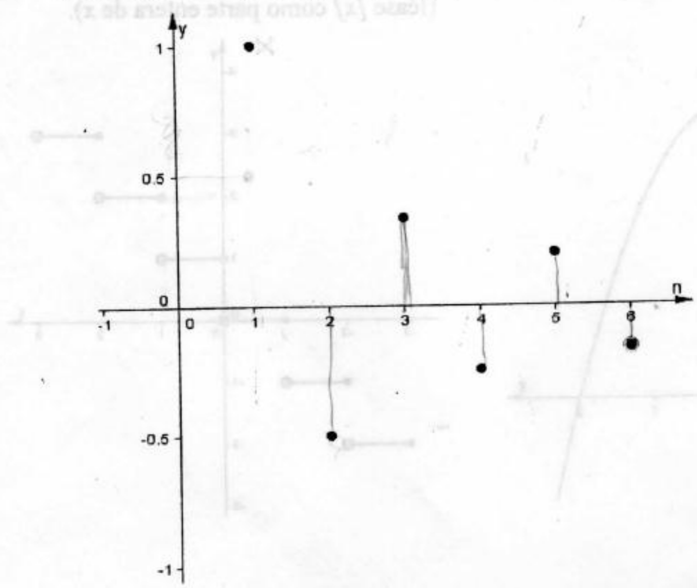


Estudiante Número: 3210

3) Sea G: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{Z}$, tal que $G(x) = Arctan\ x$



4) Sea ξ: $\mathbf{Z}^+ \longrightarrow [-1, 1]$, tal que $\xi\ (n) = (-1)^{n+1}\ n^{-1}$.



Estudiante Número: 3210

Luz M. O. A.

R-

i)

1) No
2) Sí
3) No
4) No

ii) 1) No es sobreyectivo porque el rango de la función (conjunto de llegada) son los reales y no toma los valores de $(4,\infty)$ del rango, como $f(x) = 4 - x^2$ el vertice es $(0,4)$ y abre hacia abajo.

2) El rango de esta función son los $\mathbb{Z}$, así como la función es $\varphi(x) = [x]+1$, todos los $\mathbb{Z}$ van a tener su preimagen, en la gráfica se observa que los $\mathbb{Z}$ les corresponde un valor del eje x, es decir al 2 (eje y) le corresponde el 1 (eje x), al 3 el 2 al -1 el -1 y así sucesivamente.

3). Debido a la forma en que esta definida la función el conjunto de llegada son los $\mathbb{Z}$, pero falta restringir los valores que toma en el eje y es decir $(\pi/2, -\pi/2)$ la función Arctan(x) tiene 2 asíntotas horizontales en $\pi/2$ y $-\pi/2$.

4) la función $\xi(n) = (-1)^{n+1} n^{-1}$ definida $\mathbb{Z}^+ \to [-1,1]$ se podría pensar que es sobreyectiva porque al reemplazar cualquier valor de $\mathbb{Z}^+$ en la función va a caer en el intervalo pero estos números van a ser cada vez más pequeños por el n^{-1}; (el denominador cada vez es más grande. pero al observar en la gráfica hay valores como los que estan entre $(0{,}5, 1)$ no hay un natural que sea preimagen de estos.

Estudiante Número: 3210

iii) como

1) $f(x) = 4 - x^2$

ahora

$y = 4 - x^2$ se despeja x

$y - 4 = -x^2$

$\sqrt{4-y} = x$

Como el dominio son los $\mathbb{R}$

si reemplazamos por 5

$\sqrt{4-5} = x$

$\sqrt{-1} = x$

No hay un valor en los reals tal que $x^2 = -1$

2) $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

$\varphi(x) = [x] + 1$

$y = x + 1 \qquad \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

$y - 1 = x$ cualquier valor $\mathbb{Z}$ que reemplace va a caer en los reales.

Estudiante Número: 4300

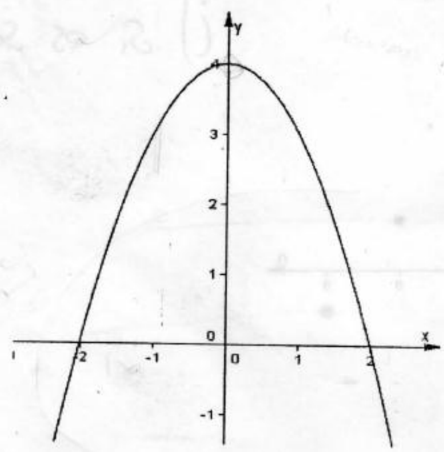
Encuesta 4

A continuación se presentan cuatro funciones de variable real, cada en el respectivo gráfico cartesiano y en su expresión analítica; se incluyen, así mismo, las respectivas condiciones de dominio y codominio.

i. Respecto a cada una de las funciones, diga si es o no sobreyectiva.
ii. Explique clara y detalladamente su consideración anterior; para ello sírvase tanto del gráfico de cada función como de su expresión analítica.
iii. Intente elaborar una prueba formal de la sobreyectividad o no sobreyectividad de por lo menos dos de las funciones.

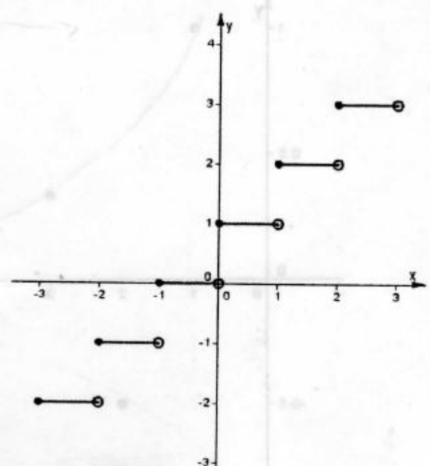
Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre los gráficos cartesianos o sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

1) Sea f: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, tal que $f(x) = 4 - x^2$.



i) No es Sobreyectiva

2) Sea φ: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{Z}$, tal que $\varphi(x) = [x]+1$ (léase $[x]$ como parte entera de x).

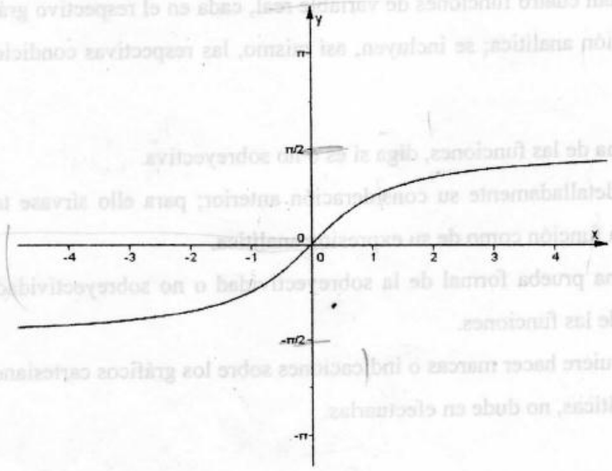


i) Si es Sobreyectiva

Estudiante Número: 4300

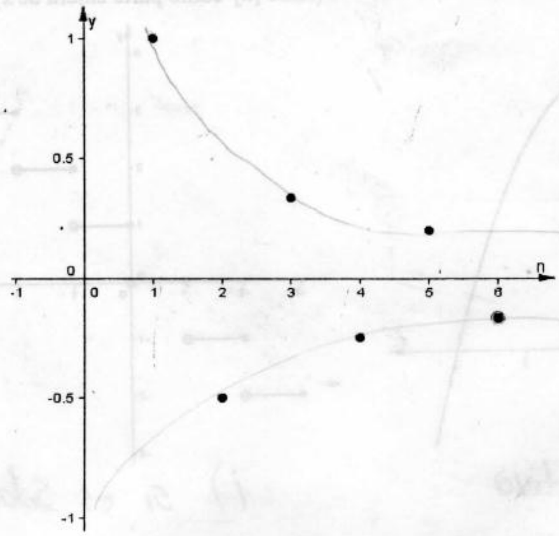
3) Sea $G: \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$, tal que $G(x) = Arctan\ x$

i) No es sobreyectiv



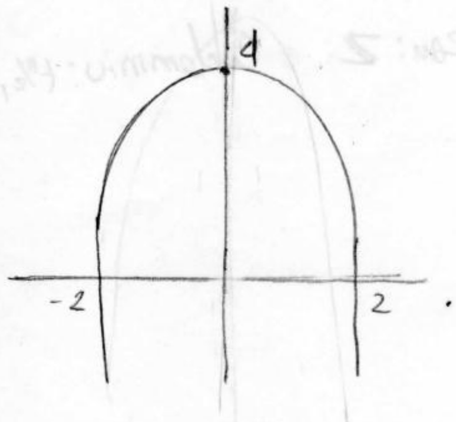
4) Sea $\xi: \boldsymbol{Z}^{+} \longrightarrow [-1, 1]$, tal que $\xi(n) = (-1)^{n+1} n^{-1}$.

i) Si es sobreyectiva



Estudiante Número: 4300

1)



i) No Es Sobreyectiva

Dom: $\mathbb{R}$
Ran: $\mathbb{R}$

Codominio: $y \leq 4$

2)

i) es Sobreyectiva

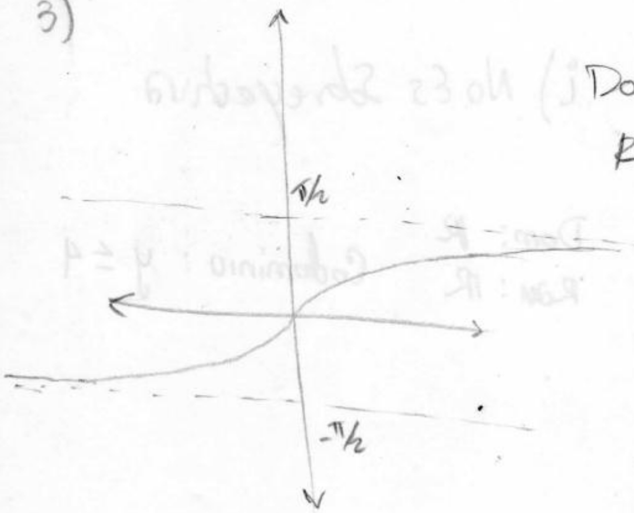
Dom: $\mathbb{R}$
Ran: $\mathbb{Z}$

Codominio: $\mathbb{Z}$

Estudiante Número: 4300

i) No es Sobreyectiva

3)



i) Dom: $\mathbb{R}$

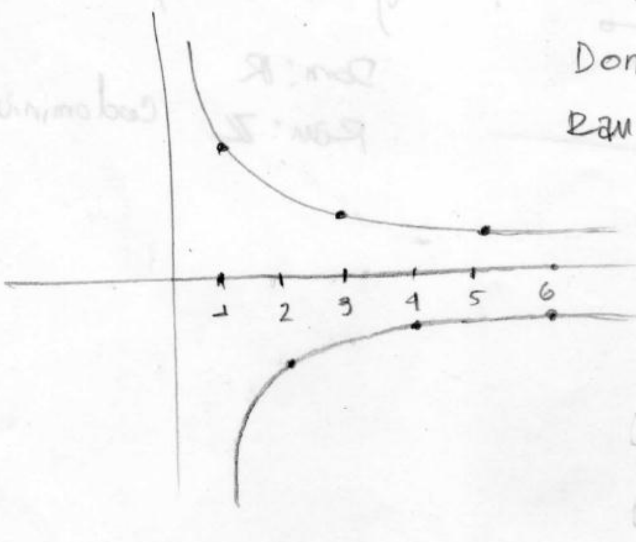
Ran: $\mathbb{Z}$ Codominio: $(-\pi/2, \pi/2)$

4)

i) Si es Sobreyectiva

Dom: $\mathbb{R}$

Ran: $[-1, 1]$ Codominio $[-1, 1]$



Estudiante Número: 4300

Encuesta 4

1) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $f(x) = 4 - x^2$

$$y = 4 - x^2$$

$$\sqrt{4-y} = x$$

Dom = { $\mathbb{R}$ }

los x son de la form $x = \sqrt{4-y}$.

los y son de la forma $y = 4 - x^2$

lo que implica que los elementos del codominio serán:

$$\sqrt{4-y} \to 4-y \geq 0$$

$$y \leq 4$$

Pero la función va de $\mathbb{R}$, (es decir que el $\mathbb{R}$ es el Dominio) hasta $\mathbb{R}$ como Rango; Cumpliendo con la Inyectividad

$$4-x^2 = 4-y^2$$

$$-4+4-x^2 = -4+4-y^2$$

$$-x^2 = -y^2$$

$$(-1)-x^2 = (-1)-y^2$$

$$x^2 = y^2$$

$$x = y$$

Pero esto no es suficiente para ser Sobreyectiva

En conclusión $f(x) = 4-x^2$ No es Sobreyectiva

Estudiante Número: 4300

2) Sea $G: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tq $G(x) = [x] + 1$

$y = [x] + 1$ Dom $= \{\mathbb{R}\}$

$y - 1 = [x]$ Ran $= \{\mathbb{Z}\}$

la función es invertible

Ademas todo elemento del dominio genera elementos del codominio, que visto en el $(\pm \infty)$ cumple con la definición de sobreyectividad

Estudiante Número: 4400

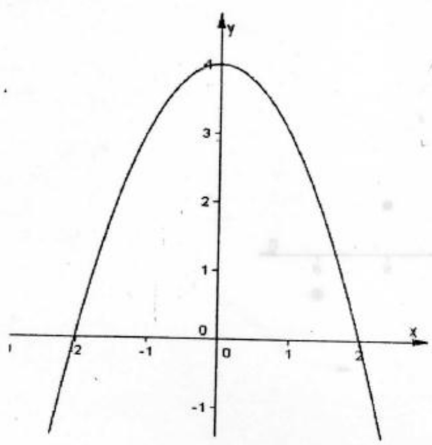
Encuesta 4

A continuación se presentan cuatro funciones de variable real, cada en el respectivo gráfico cartesiano y en su expresión analítica; se incluyen, así mismo, las respectivas condiciones de dominio y codominio.

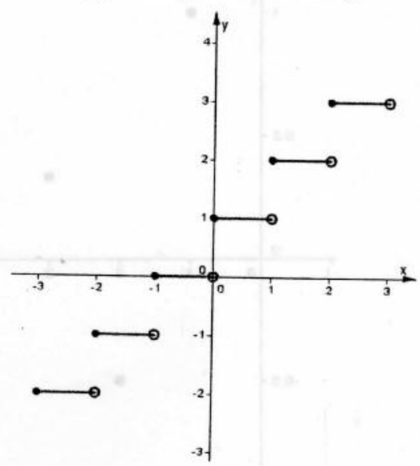
i. Respecto a cada una de las funciones, diga si es o no sobreyectiva.
ii. Explique clara y detalladamente su consideración anterior; para ello sírvase tanto del gráfico de cada función como de su expresión analítica.
iii. Intente elaborar una prueba formal de la sobreyectividad o no sobreyectividad de por lo menos dos de las funciones.

Si para sus respuestas requiere hacer marcas o indicaciones sobre los gráficos cartesianos o sobre las expresiones analíticas, no dude en efectuarlas.

1) Sea f: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$, tal que $f(x) = 4 - x^2$.

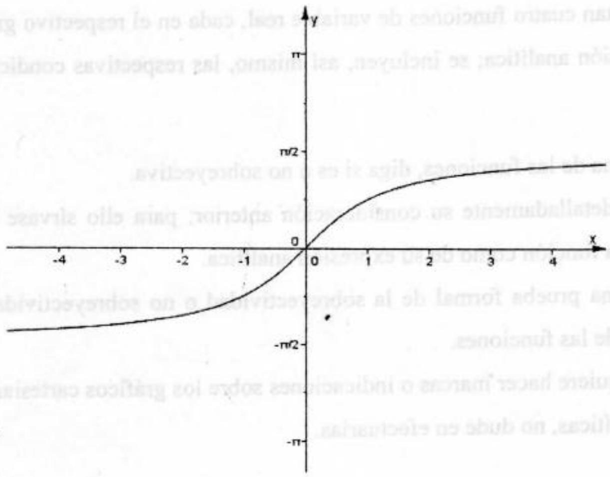


2) Sea φ: $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$, tal que $\varphi(x) = [x]+1$ (léase $[x]$ como parte entera de x).

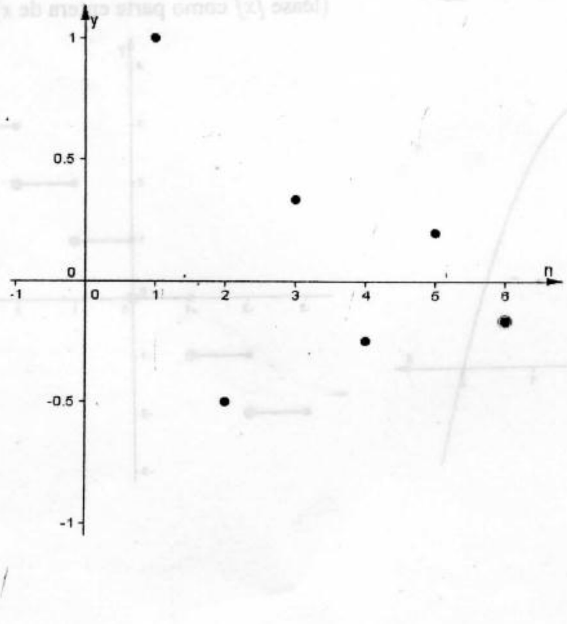


Estudiante Número: 4400

3) Sea $G: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{Z}$, tal que $G(x) = Arctan\ x$



4) Sea $\xi: \boldsymbol{Z}^{+} \rightarrow [-1, 1]$, tal que $\xi(n) = (-1)^{n+1}\ n^{-1}$.



Estudiante Número: 4400

i Respecto a cada una de las funciones, diga si es o no sobreyectiva

1) No

2) Si

3) Si

4) No

ii) Explique clara y detalladamente su consideración anterior; para ello sírvase tanto del gráfico de cada función como de su expresión analítica.

1) No es sobreyectiva, puesto que el conjunto de las Imagenes no es igual al conjunto codominio($\mathbb{R}$) para el cuál está definida la función.
Es decir,

Si tomamos

a $y = 5$ que pertenece a los Reales

podemos verificar que no existe un x tal que

$4 - x^2 = 5$

$x^2 = -1$ y ésta ecuación no tiene solución

2) Si, tomamos la Gráfica vemos que todas las Imgenes de la función, son efectivamente Un $\mathbb{Z}$ y dicho conjunto coincide con el Codominio de la función

③ Sabemos que si tenemos $f(x)$; existe $f^{-1}(x)$ si:i $f(x)$ es Inyectiva y sobreyectiva (Biyectiva), y sabemos que $f(x) = \arctan(x)$ es la Inversa de $f(x) = \tan x$, esto es si tomamos $f(x) = \arctan x$ y a $f^{-1}(x) = \tan x$
la existencia de $\tan(x)$, la garantiza, el hecho de que $f(x) = \arctan(x)$ debe ser sobreyectiva e Inyectiva.

Estudiante Número: 4400

(4) Si tomamos

a $\xi(n) = \frac{1}{2}$, podemos Comprobar que no existe un n tal que se cumpla que $\xi(n) = \frac{1}{2}$, lo que Demuestra que el conjunto de Imagenes no es igual al Intervalo $[-1, 1]$ Por lo cual la función no seria sobreyectiva.

$$(-1)^{n+1} \cdot n^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$(-1)(-1)^n \cdot n^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$(-1)^n \cdot n^{-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{2}$$

$$2(-1)^n = -n$$

Si tomamos a $n = 2$ por contraejemplo

$$2(-1)^2 = -2$$

$2 \cdot = -2$ es una contradicción con lo cual se verifica lo dicho anteriormente.

Estudiante Número: 4400

iii) - Intente elaborar una prueba formal de la sobreyectividad o no sobreyectividad de por lo menos dos de las funciones

(1) Pobrar la sobreyectividad o no sobreyectivida de

sea $f(x) = \tan(x)$; se busca probar que el codominio es igual a $f(x)$, es decir que para todo y en el codominio existe un x en el dominio tal que $f(x) = y$

sea

$y = \tan(x)$ luego como $\tan(x)$ es Invertible.

luego definamos $f^{-1}(x) = \arctan(x)$ luego

Por propiedad de Inversa

$\arctan(y) = x$ $f^{-1}(f(x)) = x$

luego

$y = \arctan(x)$ y se tiene que $\arctan(x)$ es sobreyectiva e Inyectiva (Biyectiva) puesto que es la Inversa de una función, y al esto pasar debe existir par

$f(x) = \arctan(x)$ un $f^{-1}(x)$ tal que

$f(f^{-1}(x)) = x$

Estudiante Número: 4400

(4) se demostrara por contradiccion;
Supongamos que $\mathcal{E}_7(n)$ es sobreyectiva;
entonces debe cumplirse que
$\mathcal{E}_7(n) = y$: con $y \in [-1, 1]$

Dem sea $\mathcal{E}_7(n) = y$

$(-1)^{n+1} \cdot n^{-1} = y$

luego

$(-1)^n + n^{-1} = -y$

$\frac{(-1)^n}{n} = -y$ como $y \in [-1, 1]$ tomemos el caso $y = 0$

$\frac{(-1)^n}{n} = 0$, esto no se cumple para ningún que pertenezca a $\mathbb{Z}$