

REFLEXIONES CRÍTICAS SOBRE MODELOS MATEMÁTICOS EN LA CLASE: ¿SUEÑO O REALIDAD?¹

IBEN CHRISTIANSEN

Sobre la base de dos casos de modelos matemáticos aplicados a problemas auténticos, sugeriré algunas consecuencias de usar las matemáticas. Para ver si las reflexiones sobre estos asuntos se pueden introducir en el aula observé algunos cursos de modelado en escuelas danesas de educación superior. Encontré que las reflexiones eran realizadas en unas pocas circunstancias aisladas, y que generalmente estaban separadas de la actividad de modelaje de los estudiantes. Sin embargo, observé algunas diferencias interesantes entre dos de los cursos. En uno, las experiencias a partir del modelaje estaban en alguna medida influyendo las reflexiones que los estudiantes adelantaban. En el otro, las reflexiones sobre modelos eran claramente opuestas tanto al modelaje como a la actividad matemática de los estudiantes —opuesta en contenido lo mismo que como tipo de discurso.

UNA PREMISA: LAS REFLEXIONES SOBRE MATEMÁTICAS APLICADAS COMO PARTE DE LA EDUCACIÓN PARA LA DEMOCRACIA

El supuesto implícito en la mayor parte del trabajo en el campo de la investigación en educación matemática es que todo lo que allí se hace tiene como propósito optimizar el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes. En pocas ocasiones, al supuesto le siguen reflexiones sobre lo que significa saber matemáticas y en forma aun menos frecuente la investigación está acompañada por consideraciones más generales sobre la meta de la educación matemática y las consecuencias que se derivan del contenido. Las conferencias del congreso *Political Dimensions of Mathematics Educa-*

1. Traducción realizada por Hernando Alfonso y Patricia Perry del original Christiansen, I.M. (1996). Realizing critical reflections on mathematical models in the classroom: Dream or a realistic idea? En T. Kjærgård, A. Kvamme y N. Lindén (Eds.), *Political Dimensions of Mathematics Education (PDME) III: Numeracy, race, gender, and class, Proceedings of the Third International Conference* (pp. 261-283). Norway: Caspar. Agradecemos a Nora Lindén por haber autorizado publicar la traducción al español.

tion (PDME) han hecho mucho para romper este patrón de todas las maneras posibles. Allí, al fin encuentro el lugar para explicar mi punto de partida.

Me he enfocado especialmente en la función de la educación matemática en la educación para la democracia. Sin embargo, esto cubre un rango amplio de perspectivas —desde crear una forma más democrática de interacción en la clase hasta desarrollar un currículo que impulse las reflexiones acerca de asuntos políticos. Distingo entre tres grupos de educadores que hacen tales conexiones entre la educación matemática y la democracia.

El primer grupo se enfoca en la posibilidad de que los estudiantes usen las matemáticas como una ‘herramienta de pensamiento’ para participar activamente en la democracia y para sus vidas, en general. Esto podría consistir, por ejemplo, en la producción de estadísticas relevantes. Stieg Mellin-Olsen (1987) y Marilyn Frankenstein (1989) pertenecen a este grupo de educadores.

El segundo grupo se enfoca en la habilidad para analizar y adoptar una posición crítica con respecto a los modelos matemáticos, especialmente cuando se utilizan en situaciones que tienen consecuencias para la sociedad. Un representante importante de este grupo es Mogens Niss (1990). El declara que es muy importante ser capaz de reflexionar críticamente sobre modelos y sus aplicaciones, ya que las matemáticas juegan un papel importante en la formación de los límites a nuestras actividades. Además, esto es incluso más importante ya que las matemáticas “trabajan en el subsuelo de la cultura y la sociedad” (Niss, 1990, p. 67).

El tercer grupo de educadores cubre un rango amplio de visiones, pero me permito agruparlos en esta conexión, ya que ponen menos atención al contenido, i.e., a las matemáticas. Por ejemplo, ellos se enfocan en formas de incrementar la influencia de los estudiantes en la organización de la instrucción, en el desarrollo de situaciones de comunicación ideal, o en el mismo derecho a la educación. Por supuesto, es injusto nombrar sólo a unos pocos representantes de ese amplio grupo, pero Ellsworth (1989) y Young (1989) presentan buenas introducciones que amplían varios puntos principales.

En mi trabajo me he enfocado totalmente en el segundo tipo de conexiones entre las matemáticas y la democracia. Sería fácil afirmar que los asuntos políticos y las matemáticas están completamente desconectados, y que las especulaciones curriculares mencionadas no tienen relevancia en la educación matemática. Sin embargo, mi investigación de algunos casos auténticos me ha indicado que la aplicación de las matemáticas puede influir la realidad política. Esto puede tomar varias formas pero en la próxima sección abordaré sólo una forma en que esto puede ocurrir y lo haré a través de la discusión de un caso auténtico particular.

La pregunta natural es por qué esto pertenece al salón de clase de matemáticas y no al de ciencias sociales. Por ahora, será suficiente decir que podría ser desconcertante mantener la disyuntiva de los asuntos técnicos y políticos, que se impulsa con la separación actual de las disciplinas. Bien podría suceder que el vínculo de las dos perspectivas creara nuevas ideas iluminadoras. Y difícilmente podemos esperar que los detalles de los cálculos sean estudiados en la clase de sociales. Quizás con el avance de la tecnología para manejar los elementos de rutina de la práctica matemática, se cree un espacio para perspectivas más amplias.

MODELAJE DEL FLUJO DEL AGUA A TRAVÉS DE ØRESUND: DEMOSTRACIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN TECNOCRÁTICA

Una vía de conexión entre Malmo en Suecia y Copenhague en Dinamarca ha sido proyectada por largo tiempo. Aunque el proyecto ha sido acordado por los dos gobiernos, se ha dejado de lado varias veces porque se han cuestionado cuáles podrán ser las consecuencias para el flujo del agua en Øresund. Naturalmente uno no puede conocer esas consecuencias antes de que el proyecto se haya realizado — y ni siquiera después— por tanto, para tener aquí una idea, se han usado cálculos del efecto de bloqueo de la vía, lo mismo que modelos avanzados del flujo del agua, mediante el computador. En el debate, estos cálculos han jugado un papel importante.

Según cuál sea la fuente consultada, la impresión que prevalece del propósito del modelaje es diferente. En los reportes iniciales no se había decidido sobre la vía de conexión, por tanto los cálculos de los modelos sirvieron como base para decidir si se construía o no. Como los cálculos mostraron posibles cambios de un 2 a 3% en el intercambio del agua, se decidió construir la vía, pero de tal manera que sus efectos sobre el ambiente fueran mínimos. Después de esto pareció que los partidos políticos podrían ponerse de acuerdo en que querían la conexión, pero quedaba la pregunta de si debería ser un puente o un túnel. Después de que los gobiernos danés y sueco hubieran decidido construir la conexión como un puente, el proyecto tenía que someterse a una investigación sobre las consecuencias ambientales, por parte de las autoridades suecas ('Vattendomstolen'). En este punto se iban a construir modelos tridimensionales, pero aparentemente con el único propósito de darse cuenta de la consigna política hacia una 'solución cero' (sin cambios futuros en el flujo del agua), no como una base para (reconsiderar) la decisión política. Los partidarios daneses del puente temían que el Vattendomstolen requiriera un desarrollo completo de los cálculos sobre los mo-

delos tridimensionales antes de tomar una decisión (Marfelt y Clausen, 1994).

En general, los cálculos sobre un modelo pueden servir a uno de los dos propósitos siguientes. Pueden servir de base para decidir si construir o no la conexión como puente, o para decidir sobre la extensión del dragado, la forma de los pilares, etc. Esta última meta presupone (implícitamente) que es posible construir un puente de ‘solución cero’.

El problema en el debate con respecto a la conexión es que no ha sido claro si los cálculos sobre el modelo sirven a un propósito o al otro: si es una premisa para construir o no el puente, o es una premisa para decidir el cómo construirlo.

La primera es una pregunta política/ética en cuanto concierne a los asuntos económicos, sociales y ambientales, a la luz de las metas generales para el desarrollo social. Los cálculos pueden *contribuir* a la iluminación sobre estos aspectos, pero *no pueden* tomar el lugar de una decisión política.

La pregunta acerca del *cómo* construir la vía de conexión es técnica. Decir que debe construirse de todas maneras pero con la mejor protección posible del ambiente es permitir que la decisión política determine el tratamiento del aspecto técnico. Pero cuando estas preguntas se consideran en relación con la construcción del modelo, los medios para responder a ambas llegan a ser los mismos. Se unen en la búsqueda de un modelo razonablemente confiable a través del cual se puedan obtener respuestas y ahora parece que las respuestas a ambas preguntas pertenecen a la esfera técnica. De modo que la pregunta política se transforma en algo que puede manejarse por medios técnicos. Esta alteración de la pregunta política/ética en una pregunta técnica es a lo que me refiero con el término *la transformación tecnocrática*.²

A la luz de esto, se presenta un problema al evaluar un modelo como una entidad, por las diferencias entre las intenciones y la percepción de los diferentes aspectos del proceso de modelación y entre los juegos de lenguaje a los que se somete el problema a través de este proceso. Un cambio en la perspectiva y el interés en el modelo puede ser también un cambio hacia un nuevo juego de lenguaje o tipo de discurso en el que la verificación de los enunciados siga reglas “diferentes” (cf. Jensen y Lytje, 1993) —un modelo que es confiable con respecto al criterio de verdad, pero no desde el punto de vista del desempeño, o lo opuesto. Estos criterios no pueden sustituir al criterio de justicia; si tal ocurre, ha tenido lugar una transformación tecnocrática.³

La gravedad de las consecuencias de la transformación tecnocrática depende de la confiabilidad del modelo y de la aceptabilidad de las consecuencias de un posible fracaso. Si no se considera suficientemente la fragilidad

del modelo, se puede usar para operar más cerca de los puntos críticos. Hay situaciones en que esto es razonable; a saber, aquellas en que las consecuencias de un fracaso son aceptables. Pero si tales consecuencias —en este caso construir una conexión con graves efectos ambientales— no son aceptables, entonces operar cerca de un punto crítico es más problemático (cf. Booß-Bavnbek y Pate, 1989, p.167). Se impone una discusión acerca de las consecuencias aceptables, de los principios que deben guiar la actividad humana y de las metas de desarrollo de la sociedad. Esta discusión es de índole ética y política; no puede manejarse con medios técnicos.

La transformación tecnocrática es resultado de una interacción de factores, en los que la telaraña de los diferentes juegos de lenguaje es sólo una parte. Se ha sugerido que el uso de la matemática proporciona la formulación de relaciones entre factores variables y resultados calculados, con una certeza que está más allá de lo que está solidificado. Pero el problema con el uso de los modelos matemáticos parece ser más complejo. El problema no

-
2. La distinción de Davis y Hersh (1988) entre descriptivo, predictivo y prescriptivo se puede aplicar aquí, aunque de una manera ligeramente alterada. Ellos distinguen entre modelos con estos tres propósitos diferentes. El propósito que hay detrás del modelo tridimensional del flujo del agua parece en un principio puramente descriptivo. Sin embargo, como la descripción de las condiciones presentes se va a usar en la forma de elementos existentes que se van a combinar con algunos desarrollos propuestos, es posible distinguir un propósito predictivo y uno prescriptivo; a saber, predecir las consecuencias posibles de un puente y prescribir cómo construirlo. Al sugerir las consecuencias de las propuestas, ellas pueden ajustarse a las limitaciones requeridas, lo que es una función prescriptiva, mientras que al mismo tiempo el cálculo de las consecuencias es una función predictiva. Los dos aspectos están entrelazados y no pueden realmente considerarse en forma separada. Así que los dos propósitos no se refieren a dos modelos diferentes, sino que se integran en un único propósito a través de la construcción del modelo.

La fusión de los propósitos predictivo y prescriptivo está respaldada por el uso de modelos matemáticos, porque la posibilidad de realizar los cálculos mencionados deja sin sentido ver que las decisiones basadas sobre la predicción son un prerrequisito para las decisiones prescriptivas.

En resumen, cuando se aplica el modelo, los propósitos predictivo y prescriptivo pueden coincidir. Cuando esto pasa, puede ocurrir la transformación tecnocrática: a través del uso de la matemática se ilumina la pregunta/selección política; la pregunta se transforma en algo más técnico y la respuesta se limita a ubicarse dentro de los límites establecidos por el modelo.

3. Habermas liga la transformación a la disfunción del capitalismo. El capitalismo requiere regulación continua del proceso económico que transforma la política de tener un propósito en la formulación y realización de metas sociales generales a ponerse al servicio de una regulación técnica del capitalismo. Esta despolitización se defiende a través de someter los problemas políticos a la racionalidad técnica y de legitimar que los problemas políticos pueden tener soluciones económico-técnicas. En conexión con esto, la tecnología y la ciencia toman el papel de la ideología. Esto contribuye a expulsar los aspectos éticos de las condiciones humanas. (Habermas, 1969; Kragh y Pedersen, 1981, pp. 136-137.)

es que los modelos no reflejen necesariamente la realidad; esto se sabe. El problema es que la similitud en la forma en que las preguntas son formuladas confunde las diferentes preguntas y apoya una transformación de preguntas y respuestas en una dirección más técnica. Además, el uso de modelos fuerza la crítica de las conclusiones obtenidas hacia la consideración de los modelos. Esto refuerza la transformación tecnocrática, dirigiendo la atención hacia aspectos técnicos y de cálculo. Así que este uso de los modelos no solamente es resultado de una tecnocratización, sino que ayuda a promoverla. Es el lenguaje de la ideología experta y ello enmarca el discurso.

Posible implementación del caso Øresund en la clase

El ejemplo puede ilustrar los aspectos problemáticos del acceso a la credibilidad de un modelo auténtico. Los estudiantes podrían vivenciar cómo la credibilidad de un modelo depende de la calidad de las teorías, supuestos, datos (e.g., medición de corrientes) y simplificación de cálculos, y lo que esto significa en términos de acceder o no a la credibilidad.

Debido al conflicto entre las dos formas de usar los modelos —decidir si se construye o no el puente y optimizar su construcción— el ejemplo ilustra que lo que es calculable puede no ser realizable. Esta distinción se aplica solamente a los (aspectos de los) modelos predictivos, pero para estos es una noción generalmente aplicable. La distinción puede parecer obvia, pero a partir de la discusión acerca de la ‘solución cero’ parece serlo menos. Al ilustrar la necesidad de hacer esta distinción, el ejemplo podría ilustrar algunas limitaciones del uso de los modelos.

Así que el ejemplo puede ilustrar cómo se puede distinguir entre la crítica del modelo y la crítica del uso del modelo (por ejemplo comparando el propósito de construir el modelo con el uso que se le va a dar). Esto podría mostrar la necesidad de distinguir la credibilidad del modelo de la credibilidad de las decisiones políticas. Los estudiantes podrían ver ejemplificada la confusión entre los intereses técnicos y los políticos —y esto puede llevarlos a una discusión de la transformación tecnocrática y las responsabilidades conectadas con las afirmaciones basadas en modelos.

Los modelos pueden jugar un papel en la promoción de la transformación tecnocrática y comprenden formas de tal apariencia. Así que el uso de modelos en la argumentación política es una espada de doble filo: en el debate político, los modelos han servido, en alguna medida, para enfocar las discusiones, porque son manifestaciones de la gravedad del problema, pero también promueven una transformación que aparta la atención de los asuntos fundamentales.

Una manera de dirigir la transformación tecnocrática es evaluar un modelo y las conclusiones basadas en él, a la luz de la intención que está detrás de la construcción del modelo. Esto podría hacer claridad sobre las funciones políticas a las que sirve la construcción de modelos y el posible cambio de los intereses que la guían. El ejemplo puede ilustrar muy bien el aspecto general de que los modelos no se usan porque puedan proporcionar resultados completos o exactos, sino que se usan en ausencia de algo mejor. Estudiando los modelos de Øresund en el contexto político, los estudiantes pueden vivenciar que no solamente hay límites en lo que se puede calcular, sino que los hay en lo que es razonable tratar de calcular. Los modelos de Øresund muestran la necesidad de considerar algo más que cuestiones técnicas como base para decisiones políticas.

CLASIFICACIÓN DE REFLEXIONES AL OBSERVAR CURSOS DE MODELADO

Observé tres cursos de modelado para ver si las reflexiones sobre la transformación tecnocrática o asuntos similares podrían surgir. El flujo del agua en Øresund se estudió en un curso de segundo nivel en la escuela superior de Dinamarca. Un curso de tercer nivel trabajó en el modelo de eliminación de la capa de ozono sobre la Antártica. Otro curso, de nivel básico, trabajó con los modelos de población.⁴

Conduje dos niveles diferentes de análisis de los cursos. Primero hice un análisis preliminar y global de los cursos, basada en mis notas de las lecciones y en los reportes de los estudiantes. En segundo lugar, analicé los detalles de la comunicación en los cursos de Øresund y de población. El último tipo de análisis suplementó al primero en varios aspectos y por tanto fue claro que ninguno podría considerarse aisladamente. En lo que queda de este artículo profundizaré en los dos análisis.

Como mi primer interés era ver si las reflexiones sobre matemática, aplicadas a casos auténticos, se podían realizar en el salón de clase traté de clarificar los tipos de reflexión que estaba buscando.

4. Yo participé, con diferente intensidad, en el planeamiento y ejecución de los tres cursos y en dos de los casos grabé en audio la comunicación. Naturalmente, el proyecto no habría sido posible si los profesores me hubieran negado el acceso a sus clases. Pero ellos colaboraron también con trabajo extra y se esforzaron para hacer que los cursos funcionaran y se facilitaran mis observaciones. Por ello, agradezco de manera especial a Bente Jakobsen en Amtsgymnasiet i Hadsten y a Karin Olesen y Borge Rasmussen en Aalborg Katedralskole. Gracias también a los estudiantes de los tres cursos, aunque permanecen anónimos en este reporte.

Por una parte hay reflexiones dirigidas a la obtención del mejor modelo posible. Ellas conciernen a la calidad del modelo en relación con lo que uno quiere calcular, o sea, los aspectos técnicos/tecnológicos. Me referiré también a ellas como ‘reflexiones’ pero las consideraré como parte de la *actividad tecnológica* subyacente. Probablemente serán típicas tres clases de reflexiones:

- Reflexión sobre los cálculos en sí mismos: ¿se han realizado correctamente?
- Reflexiones sobre los cálculos según un criterio de desempeño: a la luz de lo que se va a calcular/modelar, ¿eran razonables los métodos/supuestos escogidos?, ¿es confiable el resultado del modelado?
- Las reflexiones sobre el punto de partida para los cálculos: a la luz del propósito tecnológico de involucrarse en el modelado, ¿los cálculos se dirigieron hacia el problema adecuado?

Las reflexiones de la segunda clase están dirigidas por un interés crítico en reconocer los elementos restrictivos y opresivos de un caso, a través de localizar el significado y la acción en un contexto social. Ellas ofrecen una perspectiva ética de los modelos y de sus aplicaciones en la sociedad. Consideraré estas reflexiones como parte de lo que aquí clasifico como *actividad reflexiva*. Imagino que las siguientes podrían ser algunas preguntas de guía en este tipo de reflexión:

- Reflexiones sobre el objeto de los cálculos: a la luz del uso del modelo en un contexto social, ¿los cálculos se dirigieron hacia el problema adecuado?
- Reflexiones sobre la relación entre el objeto y los cálculos: ¿qué intereses ideológicos y qué circunstancias económicas, sociales y políticas se reflejan en los supuestos que subyacen al modelo?, ¿es razonable encarar este problema a través de cálculos y medios tecnológicos?
- Reflexiones sobre los efectos de introducir cálculos: ¿qué significó usar un modelo para la percepción del problema, para los posibles resultados/respuestas y para la posibilidad de relacionarlo con el problema?

Estas tres preguntas de guía se pueden ligar a la transformación tecnocrática. La primera, haciendo posible reconocer si ha tenido lugar una transformación tecnocrática, pero permitiendo también otros tipos de alteraciones del asunto central. La segunda pregunta sirve especialmente para recordarnos

que los medios tecnológicos pueden no ser la única manera de enfocar el problema. Finalmente, la tercera pregunta apunta a los efectos de usar modelos matemáticos, uno de los cuales puede ser la transformación tecnocrática.

En lo que sigue, compararé primero los cursos de Øresund y de población con respecto al papel que las reflexiones jugaron en la actividad tecnológica (de modelación). En el curso de Øresund, las reflexiones eran una parte integral del modelado, mientras que los estudiantes del curso de población no enfocaron sus reflexiones en el modelado. En segundo lugar, compararé la actividad reflexiva en los dos cursos. Parece haber una característica compartida, a saber la disyunción de la actividad reflexiva y la tecnológica, pero también una diferencia marcada en el sentido de que la actividad tecnológica en el curso de Øresund involucraba la actividad reflexiva, mientras que los dos tipos de actividad parecen haber estado en oposición en el curso de población. Especulo que esta diferencia puede tener que ver con el papel de las reflexiones en la actividad tecnológica que, de nuevo, puede derivarse de la organización de los cursos.

REFLEXIONES DURANTE LA ACTIVIDAD DE MODELADO. DIFERENCIAS MARCADAS ENTRE LOS CURSOS

Una investigación de las transcripciones de los cursos de Øresund y de población confirma la impresión del análisis introductorio, a saber, que los estudiantes sólo se comprometieron en la actividad reflexiva en muy pocas circunstancias y éstas ocurrieron principalmente en los debates más generales en clase, iniciados por la puesta en escena por parte del profesor. Los tipos dominantes de reflexiones durante el trabajo en grupo de los estudiantes fueron reflexiones sobre la situación instruccional —interpretación de la tarea, formulación de ejercicios, afirmaciones del profesor, etc.— y reflexiones sobre la confiabilidad del modelo, los cálculos y los supuestos que están detrás del modelo. A menos que lo especifique de otra manera, en lo que sigue ‘reflexiones’ se referirá a tales consideraciones de confiabilidad.

El curso de Øresund: modelado y reflexiones como partes integradas de la actividad tecnológica

En mi intento de ‘clasificar’ las reflexiones, caractericé las reflexiones de confiabilidad como parte de la actividad tecnológica, porque ellas forman un ‘puente’ entre la realidad y la descripción matemática —un ‘puente’ que subyace al modelado. En mi análisis de las transcripciones llegó a ser claro que los estudiantes usaron de manera diferente las reflexiones de confiabili-

dad en los cursos, lo que hace inapropiado mantener la clasificación de este tipo de reflexiones. Así pues, los estudiantes del curso de población ejercitaron las reflexiones de confiabilidad que estaban en oposición a su modelado, mientras que las reflexiones y el modelado raramente podían separarse en el curso de Øresund.

Las reflexiones realizadas por los estudiantes en el curso de Øresund concernían principalmente a algunos de los supuestos o expresión de fórmulas realizadas como parte del modelado. Ellos usaron diferentes estrategias al considerar si sus fórmulas tenían sentido y sus reflexiones funcionaban como una forma de detección de errores que se detenían cuando se sugería una corrección supuestamente razonable. De modo que las reflexiones no consistieron simplemente en evaluar el modelado realizado hasta el momento sino que fueron una parte indispensable para mejorar el modelo. En este sentido, el modelado consistía en reflexiones y las reflexiones estaban dirigidas por la actividad de modelado. Es por tanto imposible separar las reflexiones de la formulación del modelo. Esta es una característica general del curso de Øresund.

El curso de población: oposición de modelado y reflexiones

En el curso de población era mucho más clara la tensión entre el modelo y la realidad; resultaba de esto una contrariedad entre reflexiones y modelado.

Los estudiantes del grupo 2 del curso de población —cuya interacción ha sido mi principal objeto de análisis— se enfrascaron en discusiones sobre las condiciones en la realidad, pero esto no se aplicó en la formulación de su modelo. El siguiente ejemplo ilustrará algunos patrones en esta separación de actividades.

En el noveno día del curso, animé a los estudiantes a reflexionar sobre la relación entre producción de comida y población. Susan sugirió trazar dos líneas que representaran comida y población, de modo que su intersección marcara el tiempo y las circunstancias en que ocurriera una carencia de comida (9, C, 3-4)⁵. Neil objetó este enfoque arguyendo que las líneas nunca se intersecarían, pues la población se ajusta a sí misma.

5. (9, C, 3-4) se refiere a mis transcripciones de las grabaciones de audio hechas en la clase del día 9, transcripción C, líneas 3-4. Todas las transcripciones son traducidas por mí de modo que correspondan de la mejor manera con la interpretación hecha sobre la base del original, versión danesa.

Todos los nombres de los estudiantes son seudónimos. Al reproducir las palabras de los estudiantes en las transcripciones se han usado las dos primeras letras de los seudónimos. Las pausas de longitud creciente se indican con uno, dos o tres puntos, así: '.', '..', o '...'. '(...)' indica expresiones inarticuladas y '(¿algo?)' una expresión inarticulada, pero probable. Se ha usado *itálica* para hacer énfasis.

Ne: Pero ¿nunca se intersecan?.. tú no puedes realmente esperar que la gente, ellos, cuando.. realmente, cuando es como eso, que no hay mucha comida, entonces la gente probablemente se dirá a sí misma, este no es un mundo particularmente bueno, etc.... y entonces ellos probablemente, eh, o sea, probablemente se autoajustará.

(9, C, 14-17)

Esto inició una discusión sobre la voluntad y habilidad de la gente para ajustarse a las circunstancias de la vida. Avanzó más lejos —desde las creencias personales sobre países ‘desarrollados’ versus ‘en desarrollo’ hasta el consumo más allá de las propias necesidades. Sugerí que escribieran sus pensamientos sobre la conexión entre población y suministro de comida y trataran de formular una hipótesis —esperando que esto pudiera llevar a una formulación matemática. Pero después que dejé el grupo, los estudiantes rechazaron este enfoque.

Ne: Esto es más bien triste. .. y entonces obtendremos malas calificaciones. .. (¿pero?) nos hemos divertido.

(9, C, 76)

Y comenzaron a describir las dos variables como, funciones lineales del tiempo, independientes:

Jo: La fórmula para eso eh .. (¿archivo?) hicimos entonces, si es, suponemos que es lineal. Entonces, en cualquier caso es $2.2x + 0.603$.

(9, C, 82-83)

La conexión con su discusión previa no se produjo inmediatamente, cuando Susan promovió la discusión de nuevo (9, C, 124-125), sino después de un rato de que Ann volviera a la vieja idea.

An: (...) tomemos estos o ese gráfico hecho. .. junto con eh, el de la población y entonces tratemos de ver. porque .. realmente en, en *teoría* sería que .. que alguna vez u otra se intersecan. .. cuando haya algo que hacer con los gráficos, ¿correcto?

(9, D, 12-14)

La primera objeción de Neil para hallar la intersección de los dos gráficos fue argüir con referencia a la realidad. La discusión de esta objeción tuvo lugar también dentro del dominio de la realidad. No se llegó a conclusión alguna y el desacuerdo se resolvió mediante la sugerencia de Ann de que se

mantuvieran dentro del dominio de la matemática (“*en teoría*”). Aunque no es muy claro en la grabación, esto puede haber sido argumentado con referencia a las demandas de la situación instruccional, pues ellos tenían la sensación de que deberían “tener hecho el gráfico”. Ann cortó el nudo gordiano con el desacuerdo entre ‘la idea de intersección’ y las consideraciones de Neil sobre la realidad. Los otros aceptaron.

15 Su: mm.

Ne: Sí, es correcto. .. en teoría debería, en eh

An: (...)

Su: Sí.

To: Eso no estuvo tan mal, eso.

20 Jo: ¿Cuál quieren como eje de las y (...)

(9, D, 12-14)

A este respecto, la objeción de Neil estuvo regida por la referencia al aspecto instruccional y la discusión conducida dentro del dominio de la realidad permaneció separada del trabajo con el (los) modelo(s) que se tenían dentro del dominio matemático.

Distanciamiento de matemáticas y realidad: construcción de una realidad virtual en el curso de población

La opción de expresar relaciones en términos matemáticos no parece estar disponible para los estudiantes del curso de población. Por consiguiente, mis propuestas de que trataran de formular una relación entre producción de comida y población no pueden practicarse en su modelo. Así, puesto que modelar no consiste para ellos en formular relaciones —supuestas o reales— entre las variables, los estudiantes no pueden adoptar su modelo al conocimiento que tienen de la realidad.

Quedan dos posibilidades. Ellos pueden construir una imagen de la realidad que sea consistente con el modelo que han escogido, en correspondencia con el trabajo en el dominio matemático. O pueden rechazar el modelo, en correspondencia con el trabajo en el dominio de la realidad.

Las transcripciones ilustran que las dos opciones no son mutuamente excluyentes. Ann me llamó para solicitar mi ayuda y yo les pregunté acerca de sus supuestos en relación con el desarrollo de la producción de comida. Susan explicó que ellos supusieron un “desarrollo en línea recta” (11, B, 31). La justificación de tal supuesto incluyó la mejora de la producción, mejor tecnología y nueva tierra para la agricultura, indicando que Susan estaba hablando acerca de una producción creciente (probablemente lineal) de

comida (11, B, 31-43). Pero las grabaciones revelan que los estudiantes no creían en estos supuestos. Más tarde, Susan (11, E, 8-10 + 13-14) rechazó precisamente la misma justificación que me había dado.

En contraste con el curso de Øresund, donde se aplicaron tales reflexiones en el modelado, esto nunca estuvo conectado con la formulación de un modelo. En lugar de ello, estas reflexiones fueron separadas del modelo. Esto es lo que hizo posible que Susan criticara el modelo e inmediatamente después continuara en la misma vía con los cálculos. Las reflexiones no se emplearon en el modelo sino que pusieron distancia con respecto a la formulación de supuestos, etc., reflejando un cambio de perspectiva de modo que el modelo se veía desde el ‘exterior’, puede decirse.

Así que, por una parte, los estudiantes habían construido este universo teórico, esta *realidad virtual*, donde legitimaban su elección de modelo prototipo, que les permitía trabajar dentro del dominio matemático. Por otra parte, ellos parecían capaces de ‘salir’ a la realidad y criticar su propio enfoque. En este sentido, *la construcción de una realidad virtual hace posible mantener una separación entre reflexiones y modelado*.

Se tiene entonces que aunque los estudiantes se involucran en reflexiones que podrían muy bien ser aplicadas a la formulación de un modelo, esto nunca se usa en la formación de un vínculo entre la realidad y la matemática, como fue el caso del curso de Øresund.

Esta diferencia puede haber causado la diferencia en la forma en que fueron conectadas las actividades tecnológica y reflexiva en uno de los cursos pero no en el otro. Esto será considerado a través de una discusión de las semejanzas y diferencias entre los dos cursos con respecto a la actividad reflexiva.

ACTIVIDAD REFLEXIVA EN LOS CURSOS DE MODELADO. SEMEJANZAS Y DIFERENCIAS

Semejanza: disyunción de las actividades reflexiva y tecnológica

Aunque los cursos fueron dispuestos de maneras algo diferentes, es posible reconocer algunas características comunes en el tipo de reflexiones ejercitadas y en las circunstancias en las que tuvieron lugar.

Los estudiantes hallaron que la correspondencia de los modelos con la realidad depende de sus bases teóricas, que los modelos son construcciones teóricas en las cuales no se puede confiar y que el modelado precisa de supuestos; por tanto, el modelo necesita ser mejorado y ajustado. Tales re-

flexiones prevalecieron en los tres cursos como parte de la actividad tecnológica —la producción de modelos.

Cuando se les pidió a los estudiantes reflexionar sobre los modelos y sobre su status, parecieron enfocarse principalmente en la confiabilidad de los modelos como herramientas descriptivas. Sin embargo, los estudiantes también hicieron reflexiones explícitas sobre la aplicabilidad de los modelos y de su uso en el razonamiento hipotético, que amplía sus cualidades descriptivas. (En el curso de Øresund el modelo fue reconocido como una herramienta en el razonamiento hipotético, pero hubo una general reluctancia a aceptar la incertidumbre debida a las posibles consecuencias graves.)

Por una parte, los estudiantes hicieron reflexiones sobre las desventajas del modelo para conducir a descripciones/predicciones exactas. Por otra parte, ellos encontraron que los modelos son valiosos en el pensamiento acerca del futuro. Aunque estas diferentes reflexiones podían llevar a diferentes conclusiones acerca del valor de los modelos, esto no parece ser una contradicción para los estudiantes. Se puede decir, entonces, que ellos reconocían diferentes juegos de lenguaje, donde un modelo se puede criticar sobre la base de sus cualidades descriptivas, pero se puede valorar por su aplicabilidad en el razonamiento hipotético.

En general, las reflexiones se ejercitaron cuando la parte ‘oficial’ de la instrucción lo requirió —bien como respuesta a preguntas del profesor o cuando se requirió para negociar la construcción del modelo. Tal negociación requerirá siempre de reflexiones y se podría hacer probablemente más para explotar este potencial. Sin embargo, la demanda instruccional para la producción de un modelo puede ser, en alguna medida, opuesta a tal negociación. Esto no es diferente en situaciones de modelación auténticas, donde la presión para completar un modelo contrasta con la reflexión que va más allá de lo que se requiere para completar el modelo. En otras palabras, *la actividad reflexiva llega a ser contraria a la actividad tecnológica* —diferente de las reflexiones que son parte de ésta. Esto, en alguna medida, marcará los dos tipos de actividad como mutuamente excluyentes. En los cursos esto se manifiesta considerablemente como una disyunción circunstancial, donde los dos tipos de actividad han ocurrido bajo diferentes circunstancias.

No solamente, entonces, los diferentes tipos de actividad pertenecen a diferentes juegos de lenguaje, sino que esto se refleja en las formas del discurso en la clase. Así, los estudiantes ven *efectivamente* los modelos en una perspectiva más amplia y reconocen la necesidad de incluir consideraciones de los aspectos éticos/políticos, pero cuando se involucran en el modelado, solamente ejercitan las reflexiones necesarias para realizar el modelado satisfactoriamente.

Sin embargo, aunque las actividades reflexiva y tecnológica eran disyuntas, tanto en el curso de Øresund como en el de población, mis análisis muestran que ellos estaban vinculados en algunos aspectos. Lo interesante es la conexión bien diferente entre los dos tipos de actividad en los dos cursos. En el curso de población, el modelado y la reflexión estaban en mutua oposición. En el curso de Øresund las reflexiones eran una parte integral de la actividad tecnológica en el sentido de que ayudaban a guiar el modelado. Además, la actividad reflexiva de los estudiantes en la última fase del curso de Øresund estaban claramente anidadas en sus experiencias de modelado.

El curso de Øresund: modelación que respalda la actividad reflexiva

A grosso modo, el curso de Øresund se desarrolló en cuatro fases, de las cuales las primeras tres se dirigieron a la producción de un modelo. Mientras los estudiantes estaban empeñados en enterarse de las condiciones que gobiernan el flujo del agua en Øresund y en formular sus modelos, raramente reflexionaban sobre la decisión de construir una vía de conexión —ellos se hallaban dentro del juego del lenguaje tecnológico y no se ocupaban de los asuntos políticos conexos.

La última fase del curso consistió en una discusión general sobre la vía de Øresund, los modelos y su empleo. En esta fase se consideraron muchos otros aspectos, además del flujo del agua, pues los estudiantes discutieron la decisión política de construir la vía. Sin embargo, mi análisis indica que la actividad de modelado de los estudiantes influyó en su argumentación en la cuarta fase.

Varios estudiantes usaron diligentemente el hecho de que los cálculos son inciertos. Sobre esta base argumentaron que la construcción de la vía podría tener consecuencias ambientales impredecibles; por consiguiente, no debería ser construida. Otros estudiantes argumentaron sobre correr esos riesgos, pero *nunca* cuestionaron la incertidumbre mencionada. En otras palabras, los estudiantes usaron su conocimiento sobre el verdadero valor de los modelos para llegar al núcleo del asunto, a saber, el carácter político de la decisión. La incertidumbre de los modelos no era reconocida, en general, por los estudiantes antes del curso. Vino, pues, aparentemente, a ser una sorpresa para algunos estudiantes que los cálculos son inciertos. (Por tanto, dijeron también que no es superficial pagar algún tributo a la confiabilidad del modelo en un contexto limitado al salón de clase.) Pero el reconocimiento de la incertidumbre estuvo influido por las experiencias de modelado de los estudiantes, las cuales les habían mostrado así mismo que un modelo también depende de los intereses de los modeladores. Esta conclusión se apoya

en que los estudiantes vivenciaron la necesidad de hacer simplificaciones como parte del modelado.

Para que los estudiantes tengan esta experiencia, que parece formar una base para una posición crítica en el uso de los modelos en problemas auténticos, ellos deben ver que no hay una relación uno-a-uno entre el modelo y el 'sistema' que se afirma debe modelar (cf. Blomhøj, 1992, p. 38). Para que esto tenga lugar, no puede existir de antemano una solución al problema de modelado. En este sentido fue vital para el curso de Øresund: 1) que los estudiantes hayan tomado parte en una negociación de las hipótesis y simplificaciones que tuvieron que introducirle al modelo y 2) que esta negociación haya estado claramente dirigida por el propósito global de construir el modelo.

Una conclusión importante de mis observaciones es, entonces, que el trabajo de los estudiantes con demarcación del sistema y con el modelado dirigido por un propósito fundamentado en un problema auténtico es importante para que reconozcan la verdadera limitación del modelo. Además, esto ayuda a posibilitar el enfoque, por parte de los estudiantes, en el carácter político de la decisión, con respecto a la cual no someten una decisión política a una racionalidad tecnológica. En la terminología del juego de lenguajes: una evaluación dentro de los juegos de lenguaje de la ciencia y la tecnología sirvió como base para una agudeza de la discusión dentro del juego de lenguaje político/ético.

¿REALIZAR ACTIVIDAD REFLEXIVA EN EL SALÓN DE CLASE?

Antes he comparado dos cursos, organizados ambos alrededor del estudio de modelos aplicados a problemas auténticos. Encontré una marcada diferencia en la actividad reflexiva de los dos cursos. En el curso de Øresund, la actividad reflexiva estaba dirigida por la actividad tecnológica, en la cual los estudiantes estaban involucrados, posibilitándoles la consideración de aspectos políticos y éticos, en lugar de atascarse en detalles técnicos y en lugar también de rechazar todos los cálculos. En el curso de población, la actividad reflexiva se opuso a los cálculos con modelo, pues consistió principalmente en un rechazo del modelo.

Ya he especulado sobre algunas razones para esas diferencias, pero en lo que sigue trataré de resumirlas y discutir las un poco más. Por ahora, espero avanzar en la discusión de las maneras en que la actividad reflexiva puede llegar a estar presente en la escuela, donde podemos esperar hacer educación matemática como parte de la educación para la democracia.

Una razón para las diferencias mencionadas puede ser la claridad de la conexión con un asunto auténtico y contemporáneo. Otra razón es la extensión del dominio del trabajo de modelación con el que los estudiantes están equipados. Finalmente, la inclusión en un contexto escolar con el cual los estudiantes están familiarizados tendrá efecto sobre el modo en que manejan un asunto.

Ligamen con un caso auténtico en los cursos

No es sorprendente que un ligamen claro con un caso auténtico específico promueva la actividad reflexiva, pues éste contiene exactamente los tipos de reflexión que se centran en los cálculos del modelo, en relación con el propósito global (no tecnológico) que se persigue en parte a través de la construcción de un modelo.

Al tiempo que los estudiantes de Øresund estaban trabajando en la construcción de un modelo con un propósito claro, a saber, la evaluación del efecto del puente sobre el flujo del agua, los estudiantes de población construían un modelo que no se dirigía a un problema específico, sino a una pregunta general acerca del crecimiento de la población en relación con la disponibilidad de comida. Como resultado, los estudiantes de población no tenían, para su modelo, medios exteriores de evaluarlo; el modelo llegó a ser autorreferencial.

Yo especulo —y sobre bases tan frágiles no se puede hacer más— que esto hizo más difícil para los estudiantes de población reconocer las verdaderas limitaciones del modelo, mientras al mismo tiempo aceptaban el valor del modelo como medio de razonamiento hipotético. En el curso de Øresund, la conexión más clara con un caso contemporáneo hizo necesario para ellos completar un modelo, pero también inducir algunas limitaciones a la correspondencia entre modelo y ‘sistema’. Y esto —junto con el foco sobre negociación de supuestos inducidos y simplificaciones— hizo de las reflexiones una parte integral de su actividad tecnológica. Esto dio como resultado una actividad tecnológica forzada a contener elementos contradictorios; esto respaldó la actividad reflexiva en la fase final del curso.

La existencia de un dominio de modelado con el cual trabajar

En el curso de Øresund, hubo una progresión desde la formulación de supuestos concernientes a la realidad, describiendo conceptos físicos pertinentes, hasta resumir esto en formulaciones matemáticas. Los estudiantes trabajaban generalmente dentro de un dominio de modelado, donde es posible representar relaciones en términos matemáticos y donde la considera-

ción renovada de las condiciones reales conduce a adaptaciones de las formulaciones matemáticas.

Mi análisis ha indicado que los estudiantes del curso de población percibieron el modelado como la elección de una función que debería ajustarse a unos datos. Así, las reflexiones sobre la realidad podrían usarse en la selección de la función, pero, contrariamente a ello, los estudiantes no tuvieron manera de adaptar sus modelos a sus consideraciones.

Estas diferencias entre los dos cursos implicaron que fuera posible para los estudiantes del curso de Øresund usar sus consideraciones de las condiciones reales en su modelado. Como resultado, el modelado y las reflexiones sobre la correspondencia entre el modelo y la realidad no pueden separarse en la mayoría de los registros de grabación de este curso. Lo contrario ocurrió en el curso de población, en el que las reflexiones no pudieron materializarse en el modelo. En este caso, la disparidad entre modelo y realidad no pudo resolverse mediante ajustes del modelo. Como resultado, las reflexiones sobre la confiabilidad del modelo fueron opuestas al modelo mismo. El modelo llegó a verse como un constructo teórico carente de significado fuera del dominio matemático. Ello se manifestó en la construcción de una realidad virtual ajustada al modelo.

La organización del curso de Øresund dio como resultado la formación de un dominio de modelado con el cual trabajar, mientras que la organización del curso de población y la interacción entre los estudiantes y el profesor no equiparon a los estudiantes con dicho dominio. Claramente, esto se debe a decisiones instruccionales en los cursos, pero yo sugiero que esto está conectado también con la inclusión en un contexto escolar.

Las limitaciones del contexto escolar

Los estudiantes percibieron la falta de correspondencia entre el modelo y la realidad como representativa del contexto instruccional. Esto se manifiesta en declaraciones tales como “no creo que hayamos obtenido algo real; esto es solamente matemática típica.” (Øresund, 8, B, 5-6) O también, “esta jerga matemática, puedes expresar una fórmula u otra, pero yo encuentro que simplemente está alejado en teoría” (Población, 11, F, 1-2).

Sin embargo, este es el mismo contexto que hace imposible para los estudiantes rechazar el dominio matemático. Así que los estudiantes están atrapados en el dilema entre modelar para cumplir los requerimientos instruccionales y desear que el modelo refleje la realidad. Este es el dilema que determinó el rechazo de Neil a mi sugerencia de considerar el problema dentro del dominio de la realidad, por temor de obtener malas calificaciones y es este dilema —ligado inextricablemente a la práctica de la escolaridad formal— el que impide a los estudiantes rechazar uno u otro dominio y los in-

moviliza en una situación llena de tensión entre los dominios y también entre el aprendizaje de la lógica instrumental y el aprendizaje de la lógica social.

Estas tensiones son manejadas por los estudiantes de población mediante el involucramiento en una *actividad informal*, en la que se distancian de la actividad planteada como tarea y reflejan lo que se ha mencionado.⁶

La existencia de estos tipos disyuntos de actividad pueden verse como representativos de una tensión general en la educación matemática que yo he tratado de resumir en un modelo para la actividad en prácticas situadas (ver Christiansen, 1996, capítulo 5). Después de todo, los estudiantes están sujetos a ciertas obligaciones en el salón de clase —el ‘contrato didáctico’ (Brousseau, 1984). Parecen percibir que su ‘obligación’ es trabajar en los ejercicios —*aun* en el caso de que la intención del profesor sea que los estudiantes rompan el contrato y se comprometan con una reflexión crítica (cf. Brousseau, 1984).

No obstante, los estudiantes del proyecto de población *rompieron* el contrato y reflexionaron en el contenido de los ejercicios, pero solamente como parte de la actividad informal. Como resultado de esto, la existencia misma de la actividad informal expresa un distanciamiento de la actividad ‘oficial’ del salón de clase. Como se excluyen ciertas perspectivas de las situaciones planteadas como tareas, los estudiantes crean un espacio para estas perspectivas en la actividad informal. De modo que esta actividad está, de dos maneras, en oposición con la actividad planteada como tarea.

Primera, permite una relación completamente diferente con el contenido; llega a ser posible reflexionar sobre cálculos matemáticos a la luz de la realidad, lo que resulta en una forma de expresión paralela a la forma de expresión del ejercicio.

Segunda, mediante la crítica —aun implícita— del punto de vista del contenido promovida por/dentro de la forma de expresión del ejercicio, la actividad informal contiene también una crítica de la orientación misma hacia la tarea. Es, sin embargo, una crítica que no debe aparecer en la forma de expresión del ejercicio, si los estudiantes hacen lo debido en el contexto de la clase de matemáticas.

En otras palabras, existe una forma de expresión ‘oficial’ —en este caso manifestada por lo que he llamado ‘actividad orientada como tarea’. Esto implica que para funcionar dentro de la escuela como institución los participantes —profesor y estudiantes— están compelidos a expresarse dentro de la forma de expresión promovida por la tradición institucional. Pero esta forma de expresión no siempre ‘da cabida’ a las experiencias de los participan-

6. Para una discusión sobre esto, véase Christiansen (1994), donde también me ocupo del potencial crítico en esta ‘otra’ actividad planteada como tarea.

tes. Esto puede llevar a la contradicción entre la forma de expresión ‘privada’ que “hace comentarios sobre la práctica esperada de la institución” (Mellin-Olsen, 1991, p. 80).

El contrato didáctico se rompe en situaciones de actividad informal y de formas de expresión ‘privadas’, pero este rompimiento está separado del discurso oficial —manteniendo intacto el ‘contrato’ dentro de la forma de expresión del ejercicio. Como resultado de esto, el aprendizaje que tiene lugar a través de un rompimiento del contrato está desconectado de la actividad oficial de enseñanza-aprendizaje.

¿PUEDE TENER LUGAR EN EL SALÓN DE CLASE LA EDUCACIÓN PARA LA DEMOCRACIA?

El curso de Øresund demuestra la posibilidad de crear una actividad oficial de enseñanza-aprendizaje en el contexto escolar —al menos en alguna medida— que contenga actividad reflexiva. Como se argumentó en la primera parte de este artículo, tal actividad es necesaria para percibir algunas de las maneras en que el uso de la matemática puede influir en la sociedad. De modo que la actividad reflexiva puede verse sosteniblemente como un medio para dar comienzo a reflexiones que pueden ser parte de la base para formar opiniones y, por tanto, para participar activamente en una democracia.

Si bien la comparación entre los cursos de Øresund y de población muestra tra cuán sensible es el resultado de un curso a la organización instruccional y a la comunicación entre estudiantes y profesor, también da una indicación sobre lo que debe considerarse para permitir el desarrollo de la actividad reflexiva: el caso auténtico debe tomarse seriamente; el modelado debe ser orientado hacia una meta y no debe decidirse de antemano sobre un modelo ‘correcto’; los estudiantes deben desarrollar un dominio de trabajo de modelado que puede requerir guías a través de fases que conduzcan a una descripción matemática a partir de un sistema; la comunicación debe apoyar la actividad de modelado de los estudiantes e incluir reflexión continua sobre el modelo preliminar; y todo esto debe unificarse en una brecha con la instrucción tradicional orientada hacia ejercicios y con la correspondiente forma de expresión.

Esto se vincula muy bien con algunas de las especulaciones realizadas por los grupos de educadores primero y tercero mencionados en la sección inicial. Se reconoce allí el potencial al incrementar la influencia de los estudiantes en las actividades de clase, la dirección del aprendizaje hacia una meta, la importancia de permitir la actividad constructiva de los estudiantes y la apropiación de la tarea, etc. En consecuencia —aunque naturalmente a

esto se le debe dar una mayor consideración de la que yo pude haberle dado— las diferentes metas ligadas a la educación para la democracia parecen corresponder muy bien.

REFERENCIAS

- Blomhøj, M. (1992). *Modellering i den elementære matematikundervisning: et didaktisk problemfelt*. København: Danmarks Lærhøjskole.
- Booß-Bavnbek, B. y Pate, G. (1989). Information technology and mathematical modelling, the software crisis, risk and educational consequences. *ZDM*, 5, 167-175.
- Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. En Steiner, Balacheff, Mason, Steinbring, Steffe, Brousseau, Cooney y Christiansen (Eds.), *Theory of Mathematics Education*, ICME 5.
- Christiansen, I. M. (1994). "Infomal activity" in mathematics instruction. *Nordisk Matematikk Didaktikk*, 2 (3/4), 7-30.
- Christiansen, I. M. (1996). *Mathematical modelling in high school: From idea to practice* (Disertación doctoral, versión revisada). Aalborg: Institute for electronic systems, Aalborg University.
- Davis, P. J. y Hersh, R. (1988). *'Descartes' dream: the world according to mathematics*. London: Penguin Books.
- Ellsworth, E. (1989). Why doesn't this feel empowering? Working through the repressive myths of critical pedagogy. *Harvard Educational Review*, 59, (3), 297-324.
- Frankenstein, M. (1989). *Relearning mathematics: a different third R. Radical Maths*. London: Free Association Books.
- Habermas, J. (1969). *Vitenskap som ideologi*. Norway: Gyldendal.
- Jensen, J.F. y Lytje, I. (1993). Om tegn og data. En Jensen, Lytje y Ohrstrom (Eds.), *Tegn y Data, FISK-serie n° 2* (pp. 9-24). Aalborg: Aalborg Universitetsforlag.
- Kragh, H. y Pedersen, S.A. (1981). *Videnskab, teori, samfund: en introduktion til materialistiske videnskabsopfattelser*. Textos tomados de IMFUFA 81/42. Danmark: Roskilde Universitetscenter.
- Marfelt, B. y Clausen, R. (1994). Øresund-nul er ren politik. *Ingenioren* 20, (6), 1.
- Mellin-Olsen, S. (1987). *The politics of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Mellin-Olsen, S. (1991). *Hvordan tenker lærere om matematikundervisning?* Landas: Bergen Lærerhøjskole.

- Niss, M. (1990). Matematiske modeller, almindannelse og demokrati. En *Statens Humnistiske Forskningsrad, Initiativet vedrørende Matematikundervisning: Matematikundervisning og demokrati* (pp. 67-75). Rapport fra en konference afholdt 14 - 16 juni 1990 i Gilleleje. Denmark: Roskilde Universitetscenter.
- Young, R. (1989). *A critical theory of education: Habermas and our children's future*. Great Britain: Harvester Wheatsheafs.

*Iben Christiansen
Centre for Educational Development of University Science
Fredrik Bajersvej 7B2
DK-9220 Aalborg Ø
Denmark
E-mail: iben@iafrica.com*