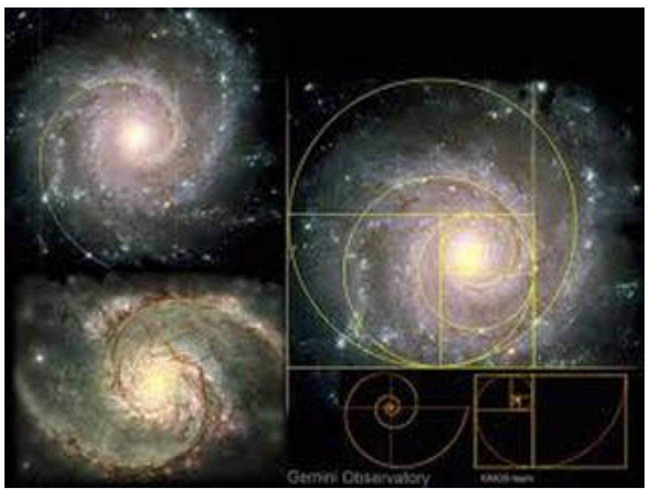
DESARROLLO HISTORICO DE LA NOCIÓN DE CURVA: DE LA FORMA SINTÉTICA A LA REPRESENTACIÓN ANALITICA

JADER MOSQUERA MICOLTA

Trabajo de grado presentado al Programa Académico de Licenciatura en Matemáticas y Física como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física.

DIRECTOR

Dr. Luis Recalde Caicedo



UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA

PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2013

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

PROGRAMA ACADÉMICO LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2013

JADER MOSQUERA MICOLTA

DESARROLLO HISTORICO DE LA NOCIÓN DE CURVA: DE LA FORMA SINTÉTICA HASTA LA REPRESENTACIÓN ANALITICA

Materias o temas: Historia de las Matemáticas, Educación Matemática

En la imagen de la portada; las galaxias, que representan la explosión de un cuerpo que gira. Muchas galaxias tienen forma de espiral (como por ejemplo la galaxia Andrómeda); curva que en éste trabajo se va estudiar con gran detenimiento.

En la imagen de la contraportada; la curva lemniscata de Bernoulli, es una curva muy importante en Matemáticas y su ecuación es $r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$.

CONTENIDO

1

AGRADECIMIENTOS

Considero que cada persona en su vida realiza cosas importantes, pero para mí, este trabajo de grado corresponde a la construcción teórica más importantes que haya realizado hasta el momento y aprovecho esta oportunidad, para agradecer a todas las personas que me han ayudado y han creído en mí. Primero que todo quiero agradecer a **Dios**; **al padre**, quien fue el ser que me creo y debido a mis intensas horas de oración, me dio la sabiduría para realizar este trabajo y para culminar de forma eficaz mis estudios en Matemáticas y Física, **al hijo,** que con su sacrifico en la cruz me revistió de salvación y pago por todas mis fallas, **al espíritu santo**, quien es la persona que me motiva y me da las fuerzas para seguir cuando quiero desmallar. También quiero agradecer: **A mi familia**, aunque somos poquitos hemos sido los suficientes para ayudarnos y fortalecernos en todo tiempo como amigos y como familia para progresar, **a mis profesores** quienes fueron la fuente de inspiración para desarrollar mi carrera profesional, de igual forma, quiero agradecer **al profesor Luis Recalde** (Mi director de tesis) quien es una persona utilizada por Dios para llevar a cabo sus proyectos y con su profesionalismo desarrollamos este trabajo excelentemente. **A mis amigos**, quienes con sus consejos me fortalecieron y me acompañaron para llevar a cabo mi carrera universitaria y para vivir una vida mejor, **a mis compañeros**, ya sean de la iglesia, universitarios o del grupo de recreación, quienes con sus bromas y sonrisas me recuerdan que soy un ser humano y de manera indirecta, me sacan del mundo teórico y abstracto que corresponde el desarrollar la profesión de docente en Matemáticas y Física. También quiero agradecer a **los lectores**, porque este trabajo no solo se realiza para cumplir con el requisito de optar por un título profesional sino para que sirva como fuente de inspiración para que otras personas se enamoren más de las Matemáticas y de la Física.

Y sé que algún día llegare al cielo y le diré a Dios, Señor; he aquí el desarrollo histórico de la noción de curva, desde la forma sintética hasta su representación analítica…

RESUMEN

En este trabajo se realiza un estudio del desarrollo histórico de la noción de curva desde la forma sintética hasta la representación analítica; tomando como rejilla de análisis dos categorías metodológicas presentes en el tratamiento histórico de la noción de curva como lo son la tematización y la generalización. Y considerando los aportes más importantes de la concepción de las curvas en la antigua Grecia, en la geometría cartesiana y en la representación de las curvas mediante series de potencias.

Palabras claves: Método analítico, método sintético, generalización, tematización, series de potencias, curvas y ecuaciones.

ACTA DE EVALUACIÓN

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

TÍTULO DEL TRABAJO:	DESARROLLO HISTORICO DE LA NOCIÓN DE CURVA: DE LA FORMA SINTÉTICA A LA REPRESENTACIÓN ANALITICA						
Se trata de:	Proyecto		Informe Final	x			
Director:	LUIS CORNELIO RECALDE CAICEDO						
1er Evaluador:	GABRIELA INÉS ARBELAÉZ ROJAS						
2do Evaluador:	JADER MOSQUERA MICOLTA						
Fecha y Hora	Año: 2014	Mes:	10	Día:	11	Hora:	11:00 a.m.

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
		LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

EVALUACIÓN					
Aprobado	X	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	
En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________________ (máximo un mes) **ante**:					
Director del Trabajo	X	1er Evaluador	X	2do Evaluador	
En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:					
Año:		Mes:		Día:	Hora:
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).					

FIRMAS:

	Gabriela Arbeláez	
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

OBSERVACIONES :		**RECOMENDACIONES:**		**RAZÓN DEL DESACUERDO – ALTERNATIVAS:**	
(si se considera necesario, usar hojas adicionales)					

Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluado r*

FORMATO DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

Universidad del Valle

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

Universidad del Valle

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo ☑ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Evolución histórica de la noción de curva desde la forma sintética hasta la forma analítica

Autores:

Nombre: Jader Mosquera Firma: [signature] C.C. 1'113.635.336

Nombre: Firma: C.C.

Nombre: Firma: C.C.

Fecha: 17 de febrero del 2015

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

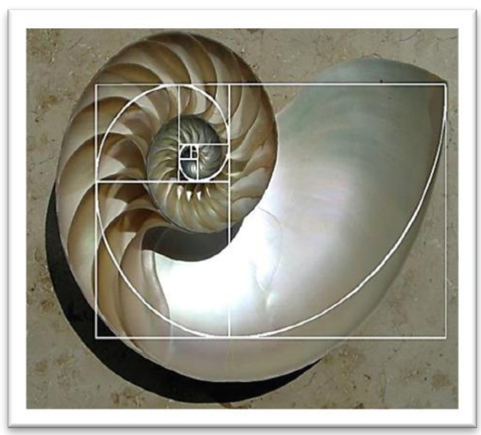
[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

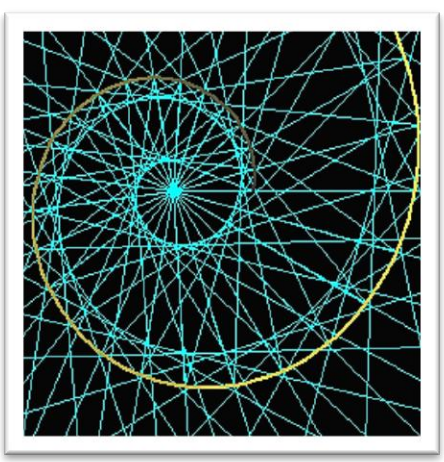
F-01-04-05
V-01-2011

Elaborado por Grupo de Trabajo Sistema Documental
División de Bibliotecas

INTRODUCCIÓN

Todos tenemos la intuición de lo que es una curva, porque la vemos representada en la naturaleza, mediante la trayectoria de un planeta alrededor del sol, la órbita que un satélite realiza alrededor de un planeta, la forma de una cuerda colgante, la trayectoria que describe un proyectil lanzado al aire, las formas que adquieren las galaxias, las borrascas y los huracanes. De igual forma, vemos las curvas representadas en los seres vivos, tanto animales como vegetales, tal es el caso; en las conchas de los caracoles y los moluscos, los cuernos de los rumiantes, la distribución de las pipas de cualquier girasol, las escamas de cualquier piña, los pétalos de una margarita, etc. Tal como lo evidencian las siguiente imágenes.





De esta manera, las curvas nos ayudan a interpretar y solucionar problemas cotidianos; como el ritmo de crecimiento o de decrecimiento de una población, la tasa de desintegración de un material radioactivo, el rastro que describe un vehículo que viaja con trayectoria constante desde el ecuador hacia los polos, etc. Así, toma sentido la frase de Galileo Galilei "*El Universo es un libro escrito en el lenguaje de las matemáticas, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra; sin ellos solo se conseguirá vagar por un oscuro laberinto*." Citado por (Pérez A. , 2006).

Lo presentado anteriormente representa la aplicación cotidiana de las curvas, las cuales, según nuestra concepción, son de vital importancia para las Matemáticas, la Física, la arquitectura, el diseño, las representaciones artísticas, la ingeniería (ya sea en pequeños mecanismos como en mega estructuras), el arte; es decir, para la ciencia en general, y como consecuencia, para la vida real.

Este trabajo se realiza con el objetivo de estudiar el desarrollo histórico de la noción de curva, desde su representación sintética con los antiguos griegos, hasta su representación analítica mediante ecuaciones algebraicas y series de potencias. Para lo cual, en **el primer capítulo**, usamos como rejillas de análisis, dos categorías metodológicas presentes en el tratamiento histórico de los conceptos matemáticos, propuestas por (Gardies, 2001), denominadas tematización y generalización. Así, en la tematización se elige una propiedad geométrica como un objeto matemático autónomo, es decir, como un objeto matemático independiente de cualquier referente sustancial y en la generalización, las propiedades geométricas se redefinen o se extienden debido a sus desarrollos, es decir, las nociones matemáticas adquieren un estatus epistemológico superior al que anteriormente tenían. Ya que, siguiendo las ideas de (Gardies, 2001), para llegar al concepto de curva que conocemos actualmente, fue necesario realizar muchas generalizaciones y tematizaciones de propiedades geométricas.

En el **segundo capítulo**, realizamos un estudio de la representación sintética de la noción de curva en la antigüedad griega, con el objetivo de; identificar los aportes que hicieron los matemáticos griegos al desarrollo de dicha noción y manifestar como se define una curva por el método sintético. Para lo cual, primero analizamos las herramientas y los problemas clásicos de la geometría griega, identificando que las herramientas clásicas de los geómetras griegos son la regla no graduada y el compás, y los problemas clásicos de esta geometría son: La trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo. De igual forma, se pudo evidenciar cómo, a través de la solución de los problemas clásicos de la geometría griega, se crea una gran cantidad de curvas novedosas para las Matemáticas. Las cuales se generan por la combinación de movimientos, como por ejemplo, la trisectriz, la cuadratriz, etc.

Posteriormente, en este mismo capítulo, observamos una noción preliminar de curva, la cual se presenta en los presocráticos al pretender dar una explicación racional sobre los orígenes de la naturaleza. Esa noción preliminar de curva se evidenció cuando estos matemáticos crearon dos maneras diferentes para definir curvas, a saber; definición cinemática de una curva y definición mediante intersecciones de superficies conocidas. Luego, reconocemos cómo, bajo la concepción de que el universo físico era explicable en términos geométricos y que las Matemáticas tienen por objetivo la modelización de las regularidades empíricas que se producen en la realidad, se generan los primeros desarrollos de la noción de curva con Aristóteles y Platón, donde ellos establecen que el mecanismo para probar la existencia de un ente (matemático) es mediante su construcción a través de la regla no graduada y el compás. Es decir, solo existe, aquello que se puede construir con la regla y el compás. Después, mediante el método axiomático propuesto por Euclides y los trabajos de Arquímedes, encontramos la definición sintética de una curva, es decir, aquella definición donde se consideran unos elementos primigenios como son los puntos, las líneas rectas, las superficies, etc. Luego se enuncian unas propiedades, que estos elementos cumplen, a través de axiomas; los cuales no tienen demostración y posteriormente, mediante deducción lógica, se obtienen las propiedades de estos elementos. Las cuales, se denominan proposiciones o teoremas. Luego, identificamos el desarrollo conceptual que sufre la noción de curva con los trabajos de Apolonio y Pappus, donde el primero define una propiedad específica sobre cada sección cónica, la cual recibe el nombre de síntoma de la curva, que corresponde, en términos modernos, a la ecuación de la curva en cuestión. Mientras que el segundo, se interesó por resolver problemas, tales como; la manera de generar curvas dadas tres o cuatro líneas rectas, es decir, en términos modernos, determinar el lugar geométrico de los puntos que se mueven de una manera determinada. Así, creo un problema que lleva su nombre, el cual, ningún matemático de la época lo pudo solucionar de manera general.

En el **tercer capítulo**, realizamos un estudio sobre la representación analítica de las curvas en la geometría de Descartes, con el objetivo de estudiar la representación analítica de las curvas mediante ecuaciones algebraicas, en este estudio, se muestra cómo Descartes creo un método para solucionar los problemas geométricos, el cual se conoce como el método del análisis, o método analítico, donde se considera como resuelto el problema a solucionar, para posteriormente, llegar a los principios iniciales que son necesarios para que se pueda cumplir lo que se probó o se construyó, es decir, para que se pueda cumplir la solución del problema. De igual forma, Descartes definió las operaciones elementales de la Aritmética para los segmentos, introduciendo en estas operaciones, un segmento que es de gran importancia para todo su trabajo, el cual es, el segmento unidad, ya que este segmento; permite que la operación de multiplicación entre los segmentos sea cerrada, es decir, que productos de segmentos sean otro segmento. Es imprescindible decir que, la unión que realizo Descartes entre los objetos geométricos (segmentos) y las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división y radicación), mejor dicho, entre La Geometría y La Aritmética, se convirtió en una poderosa herramienta matemática que le permitió resolver problemas modernos y antiguos, para el caso de la geometría griega. Tales son los casos, con el problema de la trisección del ángulo, el tan anhelado problema de Pappus, entre otros.

Luego, explicamos cómo, mediante la solución que realiza Descartes del problema de Pappus, se genera la noción de curva que él va a considerar, ya que, en esta solución, Descartes determina que la solución en todos los casos para el problema de Pappus, viene determinada por una ecuación de segundo grado y además, enuncia las condiciones sobre los coeficiente de esta ecuación para determinar el lugar geométrico en cuestión; que puede ser una parábola, una elipse o una hipérbola. Y es aquí, donde identificamos la representación de las curvas mediante ecuaciones algebraicas, posteriormente concretamos la noción de curva que admite Descartes, donde él realiza una clasificación de las curvas en mecánicas y geométricas. Donde las primeras, las considera como aquellas que no se pueden expresar mediante una ecuación algebraica y las segundas, como las que sí se pueden expresar mediante ecuaciones algebraicas.

Es importante decir que Descartes excluyo de la Geometría las curvas mecánicas, argumentando que, no existía una herramienta física (tal como la regla o el compás) que permitiera trazarlas punto por punto, mediante un movimiento continuo y en consecuencia, como ya se dijo; no se les puede asociar una ecuación algebraica.

En el **cuarto capítulo**, realizamos un estudio de la representación de las curvas a través de las series de potencias, con el objetivo de identificar la herramienta matemática que se desarrolló para acoger las curvas mecánicas. Mostramos cómo, con el estudio de los fenómenos que cambian en el tiempo, se desarrollan conceptos como: Fluxión, fluente, máximos, mínimos, rectas tangentes, diferenciales, derivadas, infinitesimal, variación, integral, etc. Los cuales, dan origen al Calculo Diferencial e Integral. Y con éstos, se encontraron las primeras expansiones de las curvas mediante series infinitas, de igual forma, ponemos de manifiesto cómo, a través de un proceso denominado la división larga, también se obtienen series de potencias que representan curvas, así mismo, el desarrollo de una serie que fue muy importante en la representación analítica de las curvas, la cual fue; la serie del binomio y luego, evidenciamos como, mediante las series de potencias, las curvas mecánicas que habían sido excluidas de la *Geometría* por Descartes, ya son admitidas; pues ya se desarrolló una herramienta que permitía representarlas. La cual fue, las series de potencias. Por último, con todos estos elementos deducimos la noción de curva que se admite en esta etapa de la historia.

CAPITULO 1: CATEGORÍAS METODOLÓGICAS EN EL TRATAMIENTO HISTÓRICO DE LA NOCIÓN DE CURVA

En este trabajo realizaremos un estudio del desarrollo histórico de la noción de curva: Desde la forma sintética hasta la representación analítica, para lo cual tendremos en cuenta dos categorías ontológicas denominadas "generalización" y "tematización" como rejillas de análisis. Estas categorías ontológicas fueron estudiadas por Jean-Louis Gardies en su trabajo la *Thématisation en mathematiques*[1].

La tematización es una categoría ontológica mediante la cual algunas propiedades geométricas se convierten en objetos matemáticos autónomos e independientes de cualquier referente sustancial; de esta manera, según lo expresado por (Gardies, 2001) es mediante la tematización que toma existencia propia lo que antes sólo se consideraba como una característica general o una propiedad. De igual forma, la generalización es una categoría ontológica mediante la cual se redefinen o se extienden los conceptos que se han desarrollado con anterioridad y se ubican en un nivel epistemológico superior al inicial. Así, lo que nos proponemos con éstas categorías ontológicas (tematización y generalización) es identificar que autores y de qué manera, hicieron uso de ellas para construir la noción de curva que consideramos en el periodo estudiado y en consecuencia, para admitir aquellas curvas que no se consideraban como pertenecientes a la geometría, las cuales eran: Las curvas mecánicas. Porque se entiende que la noción de curva que consideramos actualmente ha sido objeto de sucesivas generalizaciones y tematizaciones.

Este estudio lo realizaremos en dos etapas: En la primera etapa nos enfocaremos en la geometría griega, en donde analizaremos el desarrollo histórico de la noción de curva en su representación sintética mientras que en la segunda etapa, nos enfocaremos en el desarrollo histórico de la noción de curva en la representación analítica. Para lo cual haremos uso de las categorías ontológicas de Jean-Louis Gardies.

El ejemplo de tematización y generalización que vamos a desarrollar posteriormente, es el que se desarrolla en (Gardies, 2001) con las secciones cónicas. Ya que cuando se pasa

[1] (Gardies, 2001)

del estudio de los matemáticos siglo III a. C al estudio de los matemáticos siglo XVII, se identifica que la noción de sección cónica sufre diversas generalizaciones y posteriormente diversas tematizaciones. Para llegar al concepto de sección cónica que conocemos en la actualidad ha sido necesario, primero que todo, muchas generalizaciones de la noción de cono.

Todo inicia cuando Menecmo, para su estudio sobre las secciones cónicas, consideró un sólido denominado cono circular recto, que podía ser de tres tipos dependiendo del ángulo en el vértice del cono, así, el cono agudo se obtenía cuando el ángulo en el vértice era menor que 90°, el cono recto se obtenía cuando el ángulo en el vértice del cono era igual a 90° y por último, el cono obtusángulo se obtenía cuando el ángulo en el vértice del cono era mayor que 90°. Posteriormente en el libro XI de los *Elementos*, Euclides define cono como una figura que se genera al rotar 360° un triángulo rectángulo sobre uno de sus lados, de esta manera, se puede afirmar que Euclides concibe un cono recto, es decir, el mismo cono que considera Menecmo sólo que Euclides lo define con elementos diferentes como son la rotación y el triángulo rectángulo; en consecuencia podemos concluir que el cono que utilizan tanto Menecmo como Euclides es aquel cono cuyo eje se eleva perpendicularmente al centro de su base circular. Arquímedes, en su trabajo sobre las secciones cónicas, considera el sólido denominado cono oblicuo, el cual es un cono cuya base no es perpendicular al eje del cono y es generado mediante la rotación de una hipérbola alrededor de su diámetro. Algo diferente se identificó en Arquímedes cuando presentó su definición de cono, ya que la mayoría de los matemáticos griegos definían las cónicas a partir del cono; pero Arquímedes lo hizo al contrario, esto es, definió el cono a partir de una cónica, la cual como ya se dijo era la hipérbola. Apolonio consideró que un cono era el lugar geométrico de las rectas que unen a la circunferencia de un círculo cualquiera un punto situado fuera del plano de este círculo. Es aquí donde, según Gardies, ha ocurrido una generalización, en este caso, de la noción de cono. El cono definido por Menecmo, por Euclides y luego por Arquímedes, es un caso particular de la definición posterior de cono presentada por Apolonio. Específicamente se puede considerar que los conos admitidos por los geómetras griegos antes de Apolonio son conos rectos y oblicuos, pero ninguna de las definiciones presentadas es general, es decir, ninguna de las definiciones presentadas abarca a las anteriores, mientras que la definición de cono presentado por Apolonio sí, pues el cono utilizado por Apolonio puede ser recto, agudo u obtuso. Así, se evidencia que en este caso la noción de cono fue redefinida por Apolonio, al incorporar la noción de cono de dos hojas. Pero es aquí donde, según Gardies, ha ocurrido una generalización, porque la noción de cono se ha extendido, es decir, mediante su desarrollo se ha construido una noción de cono más general que todas las anteriores y evidentemente una noción de cono que abarca a todas las anteriores. Esta es la principal actividad epistémica que Gardies quiere resaltar como la categoría ontológica dominante en la geométrica griega.

También, según Gardies, se puede afirmar que en la noción de sección cónica hay una generalización, de la siguiente manera:

Antes de Apolonio las secciones cónicas se obtenían a través de un corte perpendicular a la generatriz del cono y según fuera el ángulo del vértice de éste, se determinaba el tipo de curva. Así, la parábola se obtenía como una sección de un cono rectángulo, la elipse se obtenía como una sección de un cono acutángulo y la hipérbola se obtenía como una sección de un cono obtusángulo. Pero con Apolonio esta forma de obtener las cónicas cambio, ya que con sus estudios se dedujo que las secciones cónicas se podían obtener de un cono cualquiera siempre y cuando se realice una variación al plano seccionador, de la siguiente forma: Para obtener la parábola**,** el plano que cortaba al cono debía ser llevado paralelamente a una generatriz del cono. Para obtener la hipérbola el plano que cortaba al cono debía ser llevado a través de una generatriz y cortar las dos capas del cono y por último, para obtener la elipse**,** el plano que cortaba al cono debía cortar todas las generatrices de éste. De esta manera, esa generalización de la noción de cono y la de sección cónica, desarrollada por Apolonio, lo llevó a demostrar que las propiedades que habían encontrado sus predecesores en cuanto a las secciones cónicas sólo eran casos particulares y como consecuencia, permanecían válidas para la nueva definición aunque ésta era más general. Los estudios desarrollados por Apolonio en cuanto a las secciones cónicas constituyen el primer paso de una tematización que se realizó posteriormente con René Descartes, quién definió algebraicamente las secciones cónicas, es decir, determinó las ecuaciones correspondientes para la parábola, para la hipérbola y para la elipse. Así:

Para la parábola $y^2 = px$.

Para la hipérbola $y^2 = px + \frac{p}{d}x^2$.

Para la elipse $y^2 = px - \frac{p}{d}x^2$.

Pero concretamente la tematización no consiste en extender la noción estudiada, en este caso la de sección cónica o la de cono, sino en definir estas nociones de forma autónoma, como objetos matemáticos independiente de cualquier referente sustancial, es decir, erigir la noción de sección cónica y la noción de cono como un nuevo objeto matemático, aquel que era inicialmente sólo una propiedad de una entidad geométrica y ahora es un objeto matemático del que podemos hablar de sus propiedades de manera independiente . De esta manera, la tematización se evidencia cuando las secciones cónicas dejan de ser descripciones sintéticas del cono y se convierten en una representación analítica, es decir, cuando un objeto matemático, en este caso las secciones cónicas, se independizan de cualquier referente sustancial, esto es, cuando las secciones cónicas se independizan del cono y se convierten en ecuaciones polinómicas mediante los trabajos de Rene Descartes y las series de potencias.

De otra forma, queremos dejar claro que aunque una Tematización no sea igual a una generalización, puede ocurrir que una tematización se pueda generalizar, es decir, puede ocurrir que una tematización, debido a sus estudios, desarrollos y evolución, se generalice. Lo cual, según Gardies, se evidencia cuando se identifica que las ecuaciones características de cada curva cónica, son casos particulares de la ecuación general de segundo grado en dos variables que se puede escribir de la siguiente manera: $ay^2 + bx^2 + cy + dx + f = 0$

Esta ecuación general de segundo grado es obtenida a partir de la generalización de las tematizaciones realizadas por Descartes a las secciones cónicas, y mediante ella se pudo concluir que según el valor de sus coeficientes (a, b, c, d, f) se podían obtener todas las secciones posibles de un cono mediante un plano; pero hubo algo más radical todavía, lo cual fue, que al variar los coeficientes y operarlos se encontraron que también se podía obtener un círculo, es decir, Descartes encontró que de la ecuación general de segundo grado, aparte de obtenerse las secciones cónicas, que hasta el momento eran la parábola, la elipse y la hipérbola, también se obtenía el círculo. Lo cual era claro, que a través de una sección al cono también se obtenía el círculo y de esta manera se concluía que las secciones cónicas eran la parábola, la hipérbola, la elipse y el círculo. De igual forma Descartes observó que dependiendo de donde se haga la sección y por donde ésta pase, se va obtener un objeto matemático diferente; si la sección pasa por el vértice del cono, se obtiene lo siguiente:

- La intersección entre dos rectas.
- Una recta indefinida.
- Un único punto que es vértice del cono.

Por último se puede concluir que "*A la generalización, por Apolonio del objeto sección cónica Descartes sabrá entonces corresponder otra generalización, aquella de la ecuación de segundo grado para dos incógnitas*" (Gardies, 2001, pág. 3).

Con lo anterior queremos clarificar que toda la información hasta ahora presentada sobre la tematización y la generalización, es el marco general con el cual vamos a analizar las curvas que vamos a estudiar en este trabajo, es decir, es el marco con el cual vamos a identificar que autores utilizaron la generalización o la tematización para lograr el desarrollo histórico de la noción de curva en este periodo estudiado.

Posteriormente veremos que al igual que las secciones cónicas, de manera general. Las curvas también tuvieron esta tematización, la cual les permitió pasar de descripciones sintéticas a representaciones analíticas mediante ecuaciones y mediante sucesivas aproximaciones con series de potencias.

CAPITULO 2: LA REPRESENTACIÓN SINTÉTICA DE LAS CURVAS EN LA ANTIGÜEDAD GRIEGA

2.1 Herramientas y problemas clásicos de la geometría griega

En la antigüedad los matemáticos griegos se plantearon una gran cantidad de problemas geométricos y los habían solucionados con las herramientas permitidas en la época para las construcciones y las soluciones de éstos problemas, las cuales eran; la regla no graduada y el compás. Se cree que las rectas y las circunferencias eran ante los ojos de los griegos, las figuras o mejor dicho, las curvas básicas traducidas físicamente a la regla y el compás y por esta razón, se consideraban preferibles las construcciones con estas dos herramientas. De igual forma, con éstas herramientas se podían hacer geométricamente la suma, la resta, la multiplicación y la división de magnitudes, así como hallar raíces cuadradas. Pero no todos los problemas que se plantearon los matemáticos griegos se pudieron resolver con las operaciones que permitirán hacer la regla y el compás. De esta manera, aparecieron una serie de problemas que se resistieron a la resolución con las herramientas citadas entre éstos están los tres problemas clásicos de la geometría.

En el principio la mayoría de los geómetras de la época se vieron atraídos por el surgimiento de tres problemas de construcciones geométricas que aparecieron en Atenas hacia el 428 a.C, cuya solución debía ser con regla no graduada y compas, estos eran:

- La trisección de un ángulo.
- La duplicación del cubo.
- La cuadratura del círculo.

El primer problema consistía en la trisección de un ángulo cualquiera mediante construcciones con rectas y circunferencias, o lo que es lo mismo; la trisección de un ángulo cualquiera mediante regla no graduada y compas.

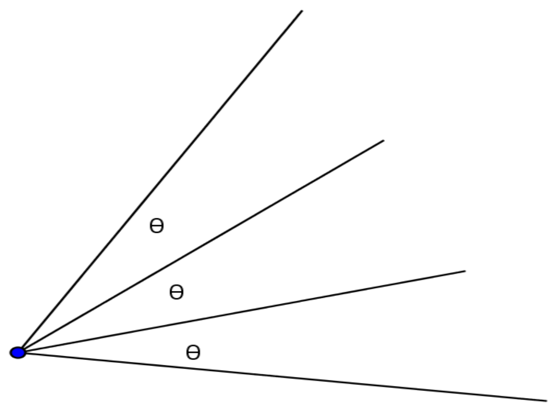


Ilustración 1: Trisección del ángulo.

El segundo problema era determinar geométricamente el lado de un cubo de volumen doble al de un cubo de volumen dado, son varias las leyendas en cuanto a la génesis de este problema que involucran directamente a dioses griegos, al menos con Apolo. Una de las leyendas se refiere a que consultando al oráculo de Delos con el propósito de que se calmara una peste mortífera que había en Atenas hacia el año 430 a. de C. Incluso Pericles[2] perdió la vida. El oráculo habría aconsejado contentar a los dioses duplicando el arca de Apolo que era cúbica, de ahí el nombre de "problema de Delfos" conque a veces se le designa. Los ateniense duplicaron las dimensiones del altar y entonces el volumen se multiplico por ocho y como consecuencia la epidemia no desapareció. Nace así, entre la historia y la leyenda, uno de los tres problemas clásicos de la geometría.

El tercer problema, era construir, a partir del radio r de un círculo dado, un cuadrado equivalente al círculo. [3]

[2] Pericles fue un importante e influyente político y orador ateniense en los momentos de la edad de oro de la ciudad. Su madre se llamaba Agarista, y descendía de la familia de los Alcmeónidas. Fue el principal estratega de Grecia.

[3] Modernamente sabemos que el círculo tiene por área πr^2 entonces el lado del cuadrado debe ser $\sqrt{\pi}r$ y de esta forma el problema se reduce a construir el número $\sqrt{\pi}$, pero estos conceptos no eran manejados por los antiguos.

Reiteramos que la metodología de resolución común de los tres problemas era a través de la regla no graduada y el compás y por ende, cualquier solución que se pudiera obtener por otros procedimientos diferentes no se consideraba valida.

Posteriormente se evidenció que con las condiciones dadas en los problemas (abordarlos con regla no graduada y compas), éstos eran imposibles de solucionar, lo cual llevó a los geómetras a considerar otros objetos matemáticos diferente a los que ya se habían estudiado para considerar nuevas aproximaciones a estos problemas clásicos.

Comenzamos nuestro estudio con estos problemas geométricos porque consideramos que fueron fundamentales para el desarrollo de la noción de curva y por ende, para el desarrollo de las Matemáticas en general, porque cambiaron las concepciones que se tenían acerca de las curvas ya que en la antigüedad se entendía que las únicas curvas existentes eran las líneas rectas y las circunferencias, además. Incentivaron la creación y el desarrollo de nuevas curvas para abordarlos, es decir, abrieron el camino para la creación de nuevas curvas diferentes a las ya utilizadas por la época en Grecia. De igual forma, motivaron el desarrollo de herramientas diferentes a las ya utilizadas para su solución, como lo eran la regla y el compás. También generaron mecanismos diferentes para construir nuevas curvas considerando la adopción de conceptos pertenecientes a la Física.

2.2 La noción preliminar de curva: los presocráticos

Recordamos que los presocráticos es el seudónimo con el que se nombra a algunos de los filósofos anteriores y coetáneos a Sócrates, quienes participaron de las inquietudes, los objetivos y estilos intelectuales típicos de ésta etapa en Grecia; además de ser los primeros filósofos que reflexionaron de forma racional sobre los orígenes de la naturaleza, buscando el principio del que se supone han surgido todas las cosas, el cual permanece a pesar de todos los cambios y que constituye la esencia de las cosas.

A continuación la concepción, respecto a la noción de curva, de algunos matemáticos presocráticos representativos.

Hipócrates (470-410 a.C) fue un matemático y astrónomo griego. Nació en las islas de Quíos frente a las costas de Turquía, entre sus obras escribió una titulada *Los Elementos*, que se perdió y otra que se refiere a las cuadraturas de lúnulas, las cuales se entienden como figuras planas limitadas por dos arcos de circunferencia de radios distintos. A Hipócrates se le atribuye la idea de introducir los teoremas de manera que los posteriores se puedan demostrar a partir de los anteriores tal como lo hizo Euclides, es decir, el método deductivo, también se le atribuye la introducción del método de demostración indirecto en matemáticas. Él fue uno de los primeros matemáticos en abordar los tres problemas clásicos de geometría, específicamente el de la duplicación del cubo, ya que en sus tiempos se sabía convertir un rectángulo de lados $a\ y\ b$ en un cuadrado era equivalente a hallar la media proporcional entre los segmentos $a\ y\ b$, verificando la siguiente proporción $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. De aquí, se aprendió a generalizar el problema interpolando dos medias proporcionales entre magnitudes dadas $a\ y\ b$, para lo cual se debían construir dos segmentos $x\ y\ y$ tales que

$$\textbf{(1)}\ \left\{\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}\right\}.$$

Pero fue Hipócrates quien reconoció que este problema era equivalente al de la duplicación del cubo, utilizando terminología moderna (estas concepciones no se tenían en la época) lo que Hipócrates consideró fue que si se toma $b = 2a$ y operando en (1) se obtiene que **(2)** $a.y = x^2$ $\wedge$ **(3)** $y^2 = x.b$ luego despejando y en (2) se obtiene que $y = \frac{x^2}{a}$ y reemplazando en (3) queda que $\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = x.b$ de lo cual se deduce que $\frac{x^2}{a^2} = x.b$ y como consecuencia $x^3 = a^2.b$ pero cómo $b = 2a$ se concluye que $x^3 = 2a^3$. Con lo que se obtiene $(2a^3)$ que corresponde al doble del cubo dado cuyo lado tiene por magnitud x.

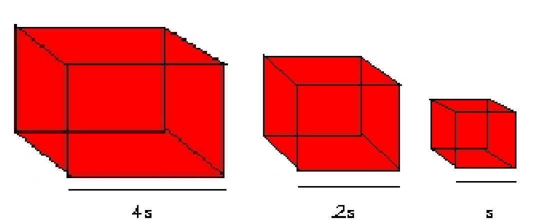


Ilustración 2: Duplicación del cubo

Con el procedimiento anterior, Hipócrates demostraba que se podía conseguir la duplicación del cubo siempre que se pudiera encontrar y fuera permitido utilizar, curvas que tuvieran la propiedad expresada en la proporción continua $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, ya que en éstos momentos los geómetras griegos tenían dos maneras diferentes para definir curvas, las cuales eran:

- **Definición cinemática**: Se consideraba una curva como un punto moviéndose, sometido a dos movimientos simultáneos, es decir, Por medio de combinaciones de movimientos independientes.
- **Como intersecciones de superficies geométricas conocidas**: La curva era definida como la intersección por un plano de cierta superficie geométrica conocida tal como un cono, una esfera o un cilindro.

De ésta manera, los geómetras griegos consideraban que las curvas que se desarrollarán por fuera de éstas dos definiciones, simplemente no eran curvas o no pertenecían a la geometría.

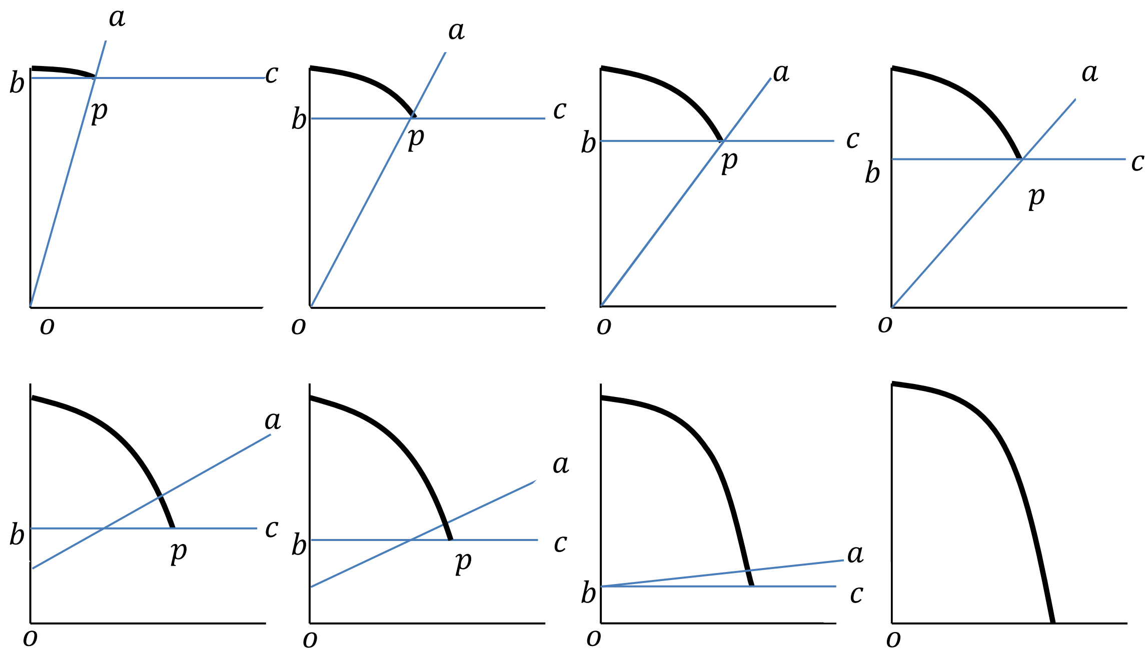
La aproximación realizada por Hipócrates a la solución del problema de la duplicación del cubo es fundamental para el desarrollo de la noción de curva, porque determina una de las primeras conexiones entre lo problemas clásicos de la geometría en la antigüedad y las curvas, ya que es a partir de éstas conexiones, donde se crearán nuevas curvas, además deja un problema abierto que se va solucionar mucho tiempo después por el matemático Menecmo, el cual es: encontrar curvas que cumplan con la proporción continua (ya mencionada).

A Hipias (449-350 a.C) contemporáneo de Sócrates[4], natural de Élide, se le debe la introducción en matemáticas de la primera curva a parte de la recta y la circunferencia, la cual denomino **trisectriz**. Esta curva un siglo después fue utilizada por Dinostrato (quién se estudiará posteriormente) para cuadrar el círculo y por lo cual se denominó **cuadratriz.** Esta curva se introdujo con el propósito de trisecar el ángulo y se obtiene mediante los

[44]Sócrates de Atenas fue un filósofo clásico, considerado como uno de los más grandes pensadores de todos los tiempos. A pesar de que se negó a legar su pensamiento a través de la escritura, conocemos su pensamiento por su discípulo Platón.

puntos de intersección de dos rectas en movimiento, OA y BC. La primera OA gira con velocidad angular uniforme sobre el punto O hasta llegar a OD, la segunda BC se desplaza horizontalmente, también con velocidad uniforme y de tal manera que OA llega al mismo tiempo que la reta BC y en el instante inicial ambas rectas coinciden. Los puntos de intersección de ambas dibujados a través de P constituyen la Trisectriz. La siguiente secuencia muestra distintas fases de la trisectriz.

Ilustración 3: trisectriz o Cuadratriz



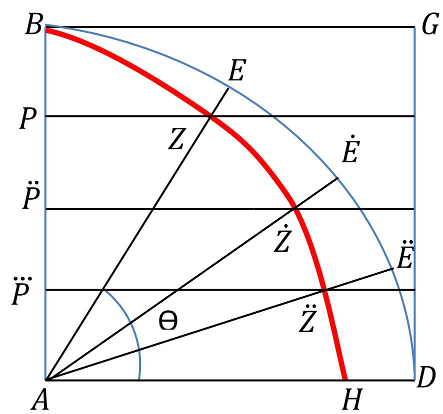


Ilustración 4: Trisección del ángulo con la trisectriz.

Recordemos que la trisectriz es la curva que va por los puntos $BZ\dot{Z}\ddot{Z}H$.

Supongamos la trisectriz trazada y que el ángulo a trisecar es DAE.

1) Sea Z el punto que intersección de la Trisectriz y el ángulo a trisecar.
2) Trácese una paralela a AD que pase por Z. Porque pon un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela.
3) Divídase AP en tres partes iguales y obténgase los puntos $\dot{P}\ddot{P}$. Por el teorema de Tales.
4) Luego por $\dot{P}\ y\ \ddot{P}$ se trazan las rectas paralelas $\dot{P}\dot{Z}$ y $\ddot{P}\ddot{Z}$. Por la razón del numeral 3.
5) Los puntos de corte de las paralelas trazadas determinan los puntos $\dot{Z}$ y $\ddot{Z}$.
6) Trácese las líneas rectas $A\dot{Z}$ y $A\ddot{Z}$. Por dos puntos se puede trazar una línea recta.
7) En consecuencia el ángulo $DA\ddot{Z}$ es la tercera parte del ángulo DAZ puesto que la recta horizontal BG y la recta vertical AB se mueven con la misma velocidad que además es constante y emplean el mismo tiempo en recorrer. Que era lo que se quería probar.

Nota: Para ver mayor información de la trisectriz ver Anexo 1.

Es claro que ésta curva no resolvió el problema de la trisección del ángulo, ni el de la cuadratura del círculo, tal como fueron propuestos originalmente, porque las soluciones presentadas debían hacerse a través de la regla y el compás, o lo que es lo mismo, a través de las rectas y las circunferencias, lo cual como ya sabemos, era imposible.

En nuestra opinión, esta curva es una de la más importante de todo nuestro estudio por diversas razones, entre éstas:

- Es la primera curva que desarrollan diferente a las rectas y a las circunferencias, muchos teoremas de Geometría e incluso nos atreveríamos a decir que la mayoría de los teoremas de la geometría griega, son alusivos a construcciones mediante rectas y circunferencias, dejando por fuera todo un estudio de curvas diferentes a las que se pueden construir mediante rectas y circunferencias.
- Se define mecánicamente, es decir, a través de combinaciones de movimientos simultáneos e independientes. Lo cual es vital porque abre un nuevo camino para concebir curvas, el cual es utilizando conceptos de Física, como lo son el

movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento circular uniforme, y conceptos de geometría como lo son las rectas, la perpendicularidad, el paralelismo, etc.

- Permite solucionar problemas que eran imposibles de solucionar con rectas y circunferencias.
- Genera un cambio en los elementos de construcción predilectos de la geometría griega como lo eran la regla y compás, pero como no había elementos de construcción para esta curva se consideró que no pertenecía a la Geometría.
- Muestra que es posible generar curvas por la composición de movimientos, lo cual constituye los primeros indicios del **principio de la superposición de los movimientos en Física**, el cual expresa que todos los movimientos se pueden considerar como la superposición de tres movimientos que actúan simultáneamente, son independientes y mutuamente perpendiculares. Que sería desarrollado posteriormente por Galileo Galilei[5].
- Permite dividir un ángulo no sólo en tres partes iguales sino en un número cualquiera de partes iguales.

Dinostrato (390-320 A.C) fue un geómetra griego, hermano de Menecmo y discípulo de Platón, reconoció que con la ayuda de la trisectriz de Hipias era posible resolver el problema de la cuadratura del círculo, es decir, reconoció que con la Trisectriz de Hipias era posible encontrar un área igual a la de un determinado círculo, y por la utilización de ésta curva en este problema se le denomino cuadratriz de Hipias o de Dinostrato.

Nota: Para mayor información sobre la cuadratriz ver Anexo 2.

Los geómetras griegos tuvieron muchas dificultades en aceptar ésta curva (cuadratriz, ver ilustración 9) como perteneciente a la Geometría, hasta el punto que propusieron diversos argumentos para probar que ésta no pertenecía a la Geometría, entre estos:

- Esta curva se escapaba de la definición que ellos tenían para concebir curvas. Las cuales eran definición cinemática y como intersección de superficies conocidas.

[5] Galileo, Galilei (1564-1642). Astrónomo, físico y matemático italiano.

- Esta curva no se podía construir mediante la regla y el compás. Las herramientas básicas para las construcciones geométricas para los griegos.
- No había una herramienta que permitiera trazarla completamente como un movimiento continuo.

Pappus (matemático que se estudiara posteriormente) en sus colecciones matemáticas recogió las críticas que el matemático griego Sporos hizo de ésta curva para considerar que no pertenecía a la geometría, en éstas críticas Sporos afirma que la definición de ésta curva aparecía como hipótesis, o lo que se quería demostrar. Realmente lo que consideraba Sporos es que (Arazena, 1998, pág. 34) "*Si dos puntos empiezan a moverse a partir de la posición B ¿cómo puede determinarse la velocidad constante que ha de llevar cada móvil para llegar al mismo tiempo, uno a A siguiendo la recta AB y el otro D siguiendo el arco BED, si no se conoce plenamente la razón entre el segmento AB y el arco BED, que es, precisamente lo que se quiere conocer?*". A demás para generar ésta curva por el movimiento de dos puntos es necesario suministrarle a los mismos unas velocidades determinadas previamente y de ésta manera, para que lo móviles lleguen simultáneamente es necesario que la razón en las velocidades de los movimientos que generan la curva sea igual a la razón entre las longitudes del segmento AB y la del arco BED y como esta razón es desconocida, opina Sporos de Nicea solo se podría hacer que lleguen simultáneamente de casualidad y por lo tanto la curva no se puede trazar exactamente, tal como lo exige el rigor geométrico. Otra crítica que hizo el geómetra griego para ésta curva es en la definición exacta de todos sus puntos, ya que (Arazena, 1998, pág. 35) "*el punto extremo de la curva H, este es, el punto en que la curva corta a la recta AB, que se utiliza para cuadrar el círculo, no está bien determinado geométricamente*" ya que en el límite, la intersección de la recta BG, al desplazarse paralelamente hasta AD, con la recta AB, al girar un ángulo recto entorno a A, es todo el segmento AD y el punto de intersección no está definido en la posición límite. Lo que considera Sporos es que el punto $H = \frac{2}{\pi}$ los griegos con sus métodos geométricos, no tenían una operación que justificara este paso lógicamente, es decir, los griegos no sabían determinar este punto geométricamente.

Eudoxo nació en Cnido (390-337 a.C), en Asia menor, fundó la escuela de Cyzico en el norte de éste lugar. Fue astrónomo, medico, geómetra, legislador y geógrafo. Es el creador de la primera teoría astronómica de los movimientos celestes y también del método de Exhausción, su primera contribución importante a las matemáticas fue su nueva teoría de las proporciones. La cual se realizó con el objetivo de evitar a los números irracionales como números sin dejar de hacer geometría, además introdujo la idea de magnitud continua.

Se considera que Platón había propuesto a sus discípulos que intentaran dar una respuesta geométrica de los movimientos del Sol, de la Luna y de los cinco planetas conocidos y se suponía que los movimientos resultantes tendrían que estar compuestos únicamente de movimientos circulares uniformes básicos, Eudoxo dio respuesta para cada uno de los siete cuerpos celestes, ya que dio una representación satisfactoria por medio de un sistema compuesto por esferas concéntricas cuyos centros estaban en el centro de la Tierra y cuyo radios eran variables, en este sistema cada esfera giraba uniformemente alrededor de un eje fijo con respecto a la superficie de la esfera siguiente, cuyos tamaños se ubicaban de menor a mayor. Con su esquema astronómico Eudoxo vio que podía describir por medio de una combinación de movimientos circulares, los lazos que trazan los planetas en su movimiento a lo largo de sus órbitas, usando para ello una curva conocida como **el hipopede o grillete de caballo**: Esta curva se obtiene como la intersección de una superficie esférica con la de un cilindro de diámetro menor que el radio de la esfera y tangente a ella interiormente, y era una de las pocas curvas nuevas que aceptaron los griegos.

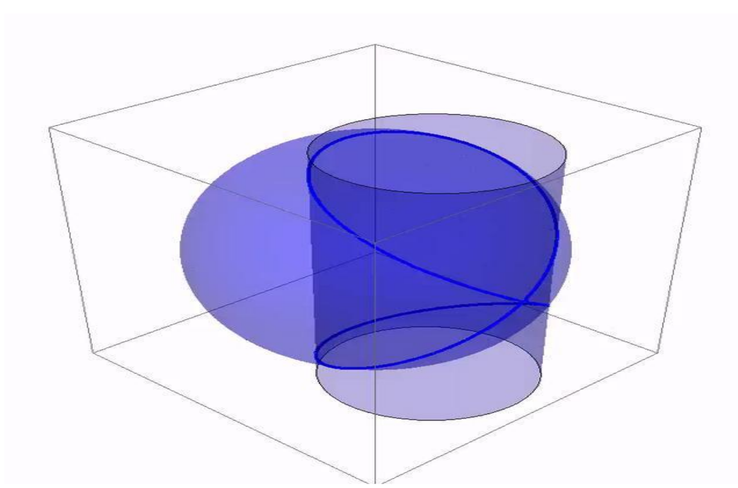


Ilustración 5: hipopede de Eudoxo

Menecmo (380-320 a.C) matemático y astrónomo griego, nació en Alopenconnesus, Turquía, en Asia menor. Fue estudiante de la escuela de Eudoxo y el primero en ocuparse de las secciones cónicas porque las utilizó para resolver el problema de la duplicación del cubo, ya que con los estudios realizados por Hipócrates quién demostró que se podía conseguir la duplicación del cubo siempre que se pudiera encontrar y fuera permitido utilizar, curvas que tuvieran la propiedad expresada en la proporción continua $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ Menecmo descubrió que habían toda una familia de curvas que cumplían con ésta propiedad y que se podían obtener todas **por el mismo método**, el cual era; cortando un cono circular recto por un plano perpendicular a un elemento o generatriz del cono; Dependiendo de la naturaleza del cono así mismo se podía identificar la curva, y en la naturaleza de éste se podían identificar tres tipos según el ángulo en el vértice fuera recto, agudo u obtuso y dicho cono se decía entonces que era rectángulo, acutángulo u obtusángulo. En consecuencias según (Boyer C. , 1986, pág. 132) "*Lo que se le atribuye a Menecmo es precisamente el descubrimiento de las curvas que recibieron más tarde los nombre de elipse*, *parábola e hipérbola*".

Así, se puede ver que Menecmo considera el sólido llamado "cono circular recto", que puede ser de tres tipos según el ángulo en el vértice, formado por dos generatrices, cualesquiera coplanarias con el eje, sea un ángulo agudo, recto u obtuso. Dicho cono se dice que es respectivamente, acutángulo, rectángulo u obtusángulo. Este tipo de cono fue el usado por muchos de los geómetras griegos.

En cuanto a la forma de obtención de las cónicas se puede decir que, lo que posteriormente se llamaría elipse se obtenía como sección de un cono acutángulo, lo que después se llamaría parábola se obtenía como sección de un cono rectángulo y una rama de lo que posteriormente se conocerá como hipérbola se obtenía como sección de un cono obtusángulo. Tal como lo evidencia **la Ilustración 15**, donde ϴ es el ángulo formado por las dos generatrices diametralmente opuestas.

Es importante resaltar que en ése momento de la historia las secciones cónicas tenían otros nombres, así. La elipse se conocía como Oxitoma, la parábola como Ortoma y la hipérbola como Amblitoma. Que hacían alusión a la forma como éstas eran obtenidas.

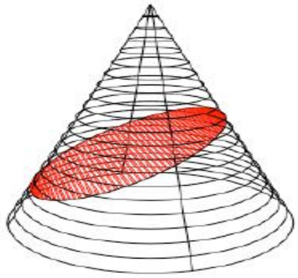
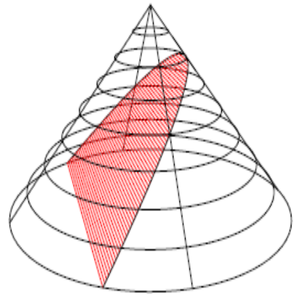
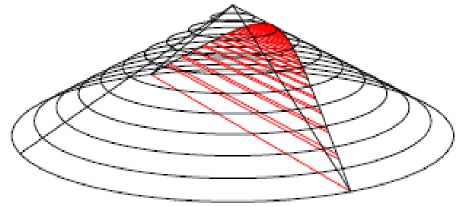
		
Elipse	Parábola	Hipérbola
ϴ es un ángulo agudo	ϴ es un ángulo recto	ϴ es un ángulo obtuso

Ilustración 6: Secciones Cónicas

Nota: Para obtener mayor información sobre los resultados obtenidos por Menecmo ver Anexo 3.

De esta manera vemos que las cónicas hacen su primera aparición en la historia de las Matemáticas para solucionar el problema de la duplicación del cubo, de igual forma; se evidencia que la **técnica** de identificar que geométricamente el problema de la duplicación del cubo era equivalente a encontrar el punto de corte de dos cónicas, de dos parábolas por un lado, y de una parábola y una hipérbola por otro, desarrollada por Menecmo para resolver el problema de la duplicación del cubo, aparte de ser novedosa, fue importante para el desarrollo histórico de la noción de curva, porque a partir de ésta técnica se crearon curvas nuevas, las cuales fueron la Oxitoma, la Ortoma y la Amblitoma O mejor dicho, la elipse, la parábola y una rama de la hipérbola. También es importante resaltar que el **método** que utilizó Menecmo para obtener las cónicas a través de la sección de un sólido como lo era el cono circular recto mediante un plano ya era conocido para definir curvas nuevas, aunque con sutiles variaciones, pero a nadie se le había ocurrido obtener curvas que representaran secciones del cono lo cual es importante para nuestro estudio.

En resumen, puede decirse que para los Presocráticos una curva es el corte entre dos figuras o cuerpos geométricos conocidos (cortes entre figuras geométricas, cortes entre sólidos y planos). Que pueden ser definidos mediante la cinemática, es decir, mediante la combinación de movimientos independientes. Las curvas pueden ser unidimensionales el caso de la línea recta, planas para el caso de las cónicas y tridimensionales para el caso del hipopede, es decir, las curvas máximo pueden ser tridimensionales.

2.3 La génesis de la noción de curva en Platón y Aristóteles

En el principio fue Platón (427-347 a.C) quien consideró que las matemáticas eran intermediarias entre el mundo de las ideas y el mundo de las cosas. De igual forma, (Platon, 1992) considera que Las Matemáticas "*tienen la misión pedagógica de formar mentes bien hechas, cumpliendo con el fin propedéutico de servir de introducción al estudio de la Filosofía*". Citado por (González, 1995, pág. 5). Así, en su Dialogo Timeo, Platón realiza un modelo geométrico para explicar el universo físico. Un modelo basado en las formas perfectas: Círculos, esferas y poliedros regulares. Afirmando que: "*Dios construyo el universo esférico, con las misma distancia del centro a los extremos en todas partes, circular, las más perfecta y semejante a sí misma de todas las figuras… creo así un mundo circular, que gira en círculo, único y asilado*", Citado por (Manzo, 1998, pág. 685).

También Platón consideró que el universo físico era explicable en términos geométricos, para lo cual construyo un modelo a través de círculos, poliedros regulares y esferas. Esta consideración se convirtió en el modelo científico a investigar, para poder comprender, predecir y dominar la naturaleza. Así, "*Desde Platón la historia de la ciencia será la búsqueda de ese modelo geométrico, de esas leyes que controlan el funcionamiento del cosmos, la búsqueda de ese orden inmutable capaz de explicar todos los fenómenos naturales"* (Perez, 2007, pág. 5). Pero es en este modelo geométrico presentado por Platón, donde tenemos una de las primeras definiciones de curva y entendemos que ésta es la circunferencia, cuando afirma que ésta tiene un centro y a partir de éste los extremos están a la misma distancia en todas partes y es perfecta, además es semejante a sí misma. Aquí tenemos entonces uno de los conceptos primigenios de la noción de curva.

Posteriormente el referente más importante es Aristóteles (348-322 a.C) quién fue un filósofo griego que nació en Estagira, Macedonia. Creo dos disciplinas científicas, las cuales son La Biología y La Lógica. Fue el discípulo más distinguido que tuvo La

Academia de Platón y consideró que el objeto de las Matemáticas son las formas extraídas de la naturaleza, es decir, la modelización de las regularidades empíricas que se producen en la realidad. Aristóteles realizo estudios en Física, Psicología, Zoología, Ética, Literatura, Metafísica, Lógica, Poética, Retórica, Política, Filosofía, Meteorología, Botánica y Economía. Se le atribuye un tratado con el título de *Sobre las líneas indivisibles.*

En la búsqueda del modelo geométrico establecido por Platón, Aristóteles situó a la tierra en el centro del universo y la esfera de la órbita lunar, constituyo según su visión, el frente de batalla entre el orden y el caos. Ya que por encima de ésta, estaba el mundo celeste, que es perfecto, inmutable y perpetuo, es decir, el reino del orden. Y por debajo de ésta, el mundo terrestre, constituido por los cuatro elementos, los cuales son: Tierra, agua, aire y fuego. Intercambiándose entre sí; un mundo imperfecto, cambiante e impredecible, es decir, el reino del caos.

Pero había algo que no encajaba en su modelo geométrico, lo cual era, la trayectoria de los planetas conocidos en el momento, porque "*los planetas conocidos describían orbitas erráticas sobre el fondo de las estrellas fijas… e incluso parecen retroceder en sus órbitas*" (Perez A. S., 2000).

También Aristóteles estableció que el mecanismo para probar la existencia de un ente sería **la construcción a través de la regla y el compás**, lo cual también se convirtió en el método que asumió Euclides y casi todo el mundo griego. De esta manera: "*Todos los conceptos matemáticos han de construirse para establecerse su existencia. Así, Los trisectores de ángulos aunque sean definibles, no son construibles con rectas y circunferencias, y por tanto no podían admitirse en la Geometría.*" (Menor, 2004, pág. 30).

Aristóteles señala que la elección de los axiomas es básica para la solides de una teoría y por ende, es importante que los conceptos introducidos sean no autocontradictorios y la manera más clara de comprobar esto, es la posibilidad de construcción de tales objetos y entre los objetos geométricos más simples, visualmente construibles y no contradictorios, están la línea recta y la circunferencia. Reducibles geométricamente a la regla y el compás. Así: "*El gusto por el orden, la simplicidad y la belleza, justifica la insistencia de los* *matemáticos griegos en buscar métodos de demostración basados exclusivamente en el uso de la regla y el compás*". (Bombal, 2012, pág. 3).

Las consideraciones determinadas por Aristóteles en cuanto al objeto de Las Matemáticas se convirtieron en el modelo científico por excelencia, ya que desde esta consideración, los científicos se enfocaron en modelizar las regularidades que se producen en la realidad, es decir, buscar modelos matemáticos, físicos y científicos en general, a través de las teorías para explicar los fenómenos de la realidad, tales como: la redondez de la tierra, las orbitas de los planetas, el tiempo de caída de los cuerpos en la tierra, el efecto del peso en la caída de los cuerpos, etc. Así, para Aristóteles y por ende para los griegos de manera general, aquello que no fuera construible por medio de la regla y el compás, no podía admitirse en la Geometría porque no se podía establecer su existencia.

2.4 La noción de curva en la geometría sintética: Euclides y Arquímedes

Euclides (325-265 A.C) fue un matemático que nació en Alejandría, Egipto. Su formación estuvo asociada a La Academia de Platón, realizó estudios sobre Geometría, Óptica, Astronomía, Música, Mecánica y escribió un libro de Secciones cónicas. Entre sus obras tenemos Los Elementos, Los Datos, La División de figuras, Los Fenómenos, La Óptica, un tratado Sobre cónicas, Sobre Lugares de superficie (perdida), Pseudaria (falacias) y Porismas (perdida).

En cuanto al estudio sobre las curvas en el libro I, (Euclides, 1991, págs. 186-194) afirma que:

- ***Definición I.1:*** *Un punto es lo que no tiene partes.*
- ***Definición I.2:*** *Una línea es longitud sin anchura.*
- ***Definición I.3:*** *Los extremos de una línea son puntos.*
- ***Definición I.4****: Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.*
- ***Definición I.5:*** *Superficie es lo que sólo tiene largo y ancho.*

- ***Definición I.6:*** *Los extremos de las superficies son líneas.*
- ***Definición I.14:*** *Figura es lo comprendido por uno o varios límites.*
- ***Definición I.15:*** *Un círculo es una figura plana comprendida por una línea (Circunferencia) tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto interior son iguales entre sí.*
- ***Definición I.6:*** *Y el punto se llama centro del círculo.*

De igual forma en el mismo libro I (Euclides, 1991, pág. 197) nos presenta sus postulados, afirmando que:

1. *Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.*
2. *Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.*

Luego en cuanto a las proposiciones (Euclides, 1991, pág. 201) afirma que:

Proposición I.1: *Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.*

Proposición III.17 *Desde un punto dado trazar una línea recta tangente a un círculo dado.*

De igual forma, en el libro XI Euclides (Heath T. , 1940, pág. 261) afirma que:

- ***Definición XI.18:*** *Cuando un lado del ángulo recto de un triángulo rectángulo permanece fijo y el triángulo gira a su alrededor hasta volver a la posición de la que empezó a girar, la figura formada es un cono. Si la recta que permanece fija es igual al lado del ángulo recto que gira, el cono es rectángulo; si es menor, obtusángulo; y si es mayor, acutángulo.*

- ***Definición XI.19:*** *El eje del cono es la recta que permanece fija mientras gira el triángulo.*

Las anteriores definiciones las desarrolló Euclides y nos servirán para analizar la noción de curva que tenía Euclides.

Euclides fue un matemático muy importante debido a sus arduos esfuerzos por organizar los contenidos matemáticos de la época; queremos resaltar su novedosa introducción de la noción de cono, ya que él lo considera como una figura geométrica que se obtiene como resultado de hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus lados, esta noción es independiente de las secciones que se obtienen de él, es decir, de las secciones cónicas. Y en cuanto a la noción de círculo esta es muy diferente a la manera como definió el cono ya que consideró un círculo como una figura plana que cumple ciertas propiedades.

Los trabajos de Euclides están escritos en un lenguaje sintético, es decir, parte de algunas hipótesis para deducir las tesis, que en este caso son las proposiciones. De esta manera, "*nos representamos el carácter sintético de la geometría euclidiana en el hecho de que la verdad de un teorema se deduce como consecuencia de un sistema de axiomas*" (Arboleda, 2014, pág. 2). Este lenguaje sintético organiza las diversas proposiciones en una concatenación lógica, de tal forma que cada resultado se remonta a los anteriores, sin introducir en el razonamiento ningún elemento que antes no se había probado su existencia por medio de una construcción. Así, Euclides utiliza un método que asume algunas afirmaciones previas como evidentes, de igual forma, algunas construcciones que se consideran conocidas tal como las definiciones, los axiomas y los postulados, y a partir de éstas, mediante deducciones lógicas, se obtienen los resultados. Éste método se conoce como el método axiomático-deductivo, en el cual primero se definen unos objetos, luego se dan unas propiedades de éstos mediante postulados (o axiomas) y nociones comunes, que posteriormente se utilizan para deducir teoremas o en este caso proposiciones. De esta manera, *La mayor contribución de Euclides fue encontrar y organizar una base común (axiomas) que permitiera demostrar los resultados conocidos de su época, utilizando un razonamiento deductivo.* (Senior, 2009, pág. 1). La manera de proceder de Euclides es novedosa ya que ninguno de los matemáticos antiguos de Grecia había organizado y sistematizado el conocimiento matemático mediante el método que él utilizo.

Según la información presentada, para Euclides una curva es una línea continua que tiene longitud y no tiene anchura. A estas curvas se les puede trazar otras curvas que cumplan algunas propiedades como la tangencia, la perpendicularidad, la semejanza y el paralelismo. Las curvas pueden ser rectas o no rectas y pueden encerrar completamente el plano, es decir, las curvas pueden ser cerradas o abiertas. Estas curvas pueden formar figuras tales como triángulos, círculos, cuadrados y paralelogramos. De igual forma, al hacer girar las curvas con respecto a un eje generan sólidos, tal es el caso cuando se pone a girar un círculo sobre un eje que genera una esfera o cuando al girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus lados se genera un cono. Son ejemplos de curvas cerradas los contornos de las figuras, tales como los contornos de los círculos (circunferencias), los contornos de los triángulos, los contornos de los cuadrados y los contornos de los paralelogramos.

Arquímedes (287-212 A. C) fue un físico y matemático griego que vivió y murió en Siracusa, Sicilia. Su padre era un astrónomo llamado Phidias, recibió su educación en Alejandría. Realizo numerosos descubrimientos en inventos prácticos y en artefactos bélicos, tales como: El tornillo sin fin, la rueda dentada, los sistemas de palancas, la polea móvil, el planetario, las catapultas, las sogas y los garfios.

La obra de Arquímedes fue desarrollada a través de cartas escritas con el mayor rigor euclidiano y con un marcado énfasis en la aplicación de los métodos matemáticos a la Mecánica y a la Física. Entre sus escritos están: Sobre el equilibrio de figuras planas, Sobre los cuerpos que flotan, La cuadratura de la parábola, Sobre las espirales, Sobre conoides y esferoides, Sobre la esfera y el cilindro, La medida del círculo, Sobre el equilibrio de los planos, El arenario y Sobre el método de los teoremas mecánicos.

Para su estudio sobre las cónicas Arquímedes usó conos oblicuos, lo que significa que son conos cuya base no es perpendicular al eje; éstos se generaban por la acción de girar una hipérbola alrededor de su diámetro; en tal movimiento, las asíntotas hiperbólicas engendraban algo que él llama un cono oblicuo, es decir, Arquímedes obtiene un cono a partir de una cónica.

Arquímedes, en su tratado[6] *Sobre conoides y esferoides,* expresa que, “si se coloca en un plano una hipérbola con su diámetro y sus asíntotas y se hace girar alrededor del diámetro hasta que vuelva a la posición de que partió, es evidente que las asíntotas envolverán un cono isósceles cuyo vértice será su punto de intersección y eje el diámetro fijo”, (Vera, 1970, págs. 101-102).

Se considera que Arquímedes asumió las secciones cónicas de la misma forma que las consideró Menecmo, esto es; como aquellas que son engendradas según el tipo de secciones del cono. Las cuales pueden ser: sección de cono acutángulo que generan lo que más adelante conoceremos como elipse, secciones de cono rectángulo que generan lo que llamaremos parábola, sección de cono obtusángulo que generan lo que más posteriormente conoceremos como hipérbola.

También se afirma que Arquímedes fue quien primero denominó parábola a la sección de un cono rectángulo, es decir; llamo parábola a la sección de un cono cuyo ángulo del vértice es recto, cortado por un plano perpendicular a la generatriz.

Arquímedes también se vio atraído por los tres problemas geométricos famosos de la antigüedad y con el propósito de solucionarlos (aunque no propiamente con regla y compás), en su tratado Sobre las espirales (Heath T. , 1912), creo una curva denominada la espiral. Y según él la espiral debe considerarse de la siguiente manera:

> *Imagínese una línea que gira con velocidad angular constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad lineal constante; este punto describirá una espiral*. (Rivera, 2006, pág. 9).

La espiral es considerada una curva mecánica debido a que no podía construirse de manera continua con regla y compás. En términos modernos haciendo uso de las coordenadas polares podemos representar la espiral de Arquímedes mediante la siguiente

[6]Arquímedes en su tratado utilizó un adjetivo para designar una clase de conos, llamados por él *conos isósceles;* pero en este trabajo no se hará un estudio profundo sobre estos, por tal razón si el lector desea buscar mayor información al respecto se puede remitir al libro *Científicos Griegos*.

fórmula: $r = a\theta$ donde r es la distancia al origen de la espiral, $a > 0$ es una constante y θ El ángulo girado.

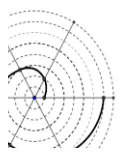


Ilustración 17: Espiral de Arquímedes

Algunas propiedades de la espiral

La siguiente proposición es obtenida del documento *Sobre las espirales* (Heath T. , 1912).

Proposición 20: Mediante el trazado de la tangente a la Espiral en uno de sus puntos se deduce que la subtangente polar es igual a la longitud de un arco de puntos.

Lo cual quiere decir que mediante el trazado de la tangente puede obtenerse una sección igual a un arco de circunferencia de radio y ángulo central dado, y como consecuencia mediante esta curva se puede rectificar la circunferencia o uno de sus arcos.

Nota: Para ver más información sobre los trabajos de Arquímedes ver el Anexo

II.5 Desarrollo conceptual de la noción de curva en Apolonio y Pappus

Apolonio nació en Perga (ahora Turqiá), fue matemático y astrónomo, se educó en Alejandría con discípulos de Euclides, de lo cual se puede afirmar que tuvo un vínculo directo con las premisas intelectuales desarrolladas por el autor de los Elementos. Sus estudios fueron tan importantes que se conoce como “El gran geómetra”, escribió sobre Secciones cónicas, tiene diversos libros perdidos, entre estos: Repartos rápidos, Secciones en una razón dada, Secciones en un área dada, Secciones determinadas, Tangencias, Inclinaciones y Lugares planos.

Apolonio en su libro de *Cónicas* I, realiza las siguientes definiciones:

Definición I.1. Si desde un punto no situado en el plano de un círculo se traza a la circunferencia de éste una recta, se prolonga en sus dos direcciones y, permaneciendo fijo el punto, se hace recorrer a la recta la circunferencia hasta que vuelva a su posición inicial, llamo superficie cónica a la que, descrita por la recta, se compone de dos superficies opuestas por el vértice que se extienden al infinito, lo mismo que la recta generatriz; y llamo vértice de la superficie al punto fijo, y eje a la recta trazada por éste y el centro del círculo.

Definición I.2. Llamo cono a la figura limitada por el círculo y por la superficie cónica comprendida entre el vértice y la circunferencia del círculo; vértice del cono al que lo es de su superficie; eje a la recta trazada desde el vértice al centro del círculo, y base a este.

Definición I.3. Llamo cono recto al que tiene el eje perpendicular a la base y oblicuo al que no tiene el eje perpendicular a la base.

Las anteriores definiciones presentadas por Apolonio corresponden a lo que es una superficie cónica, a lo que es un cono en sus dos modalidades, recto y oblicuo. Posteriormente mostraremos la forma como Apolonio obtiene las secciones cónicas, primero que todo define una propiedad específica de cada sección, lo que se conoce como un síntoma de la sección, que en términos modernos representa la ecuación de la cónica en cuestión y le permite prescindir del cono y dar una condición necesaria y suficiente para que un punto pertenezca a dicha sección.

- **Obtención del síntoma de la parábola**

Consideremos una circunferencia de diámetro BC y un punto O situado fuera del plano que contiene esta circunferencia. Una recta que pase por O y se mueva a lo largo de la circunferencia da lugar a un doble cono. Córtese el cono por un plano paralelo a su generatriz OC y además que corte a la base del cono en una recta DE perpendicular al segmento BC. Con este corte se obtiene la curva DPE cuyo diámetro PM es paralelo a OC.

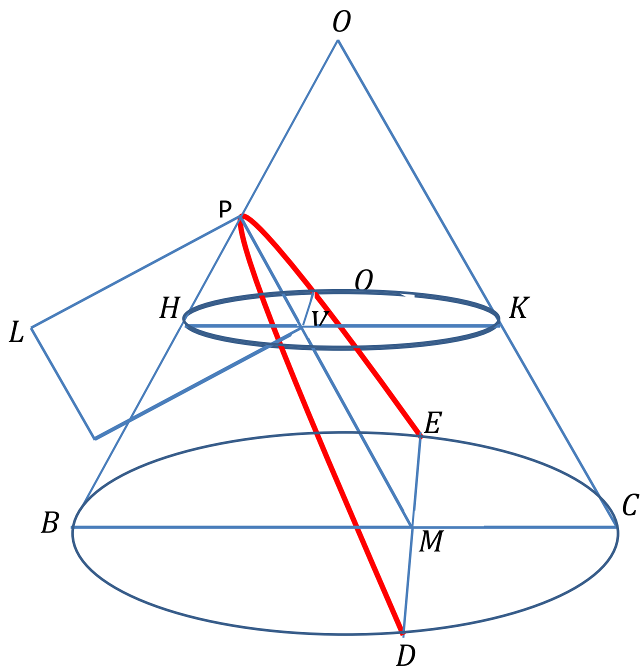


Ilustración 7: Obtención del síntoma de la parábola

Se considera que para rectángulos de igual altura, la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus bases, aplicando este principio en los siguientes rectángulos se puede afirmar que:

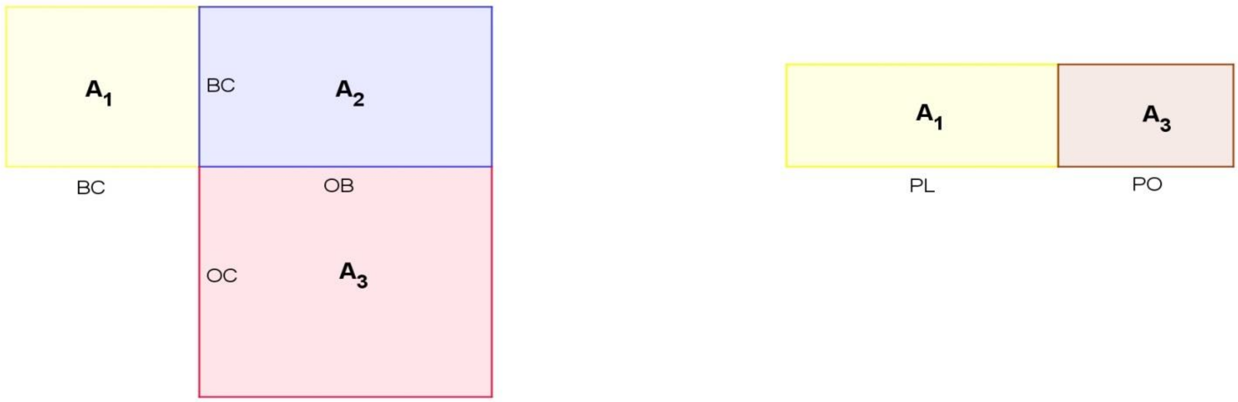


Ilustración 8: Rectángulos de igual altura

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{BC}{OB} \;\; y \;\; \frac{A_2}{A_3} = \frac{BC}{OC}$$

Realizando operaciones entre ambas expresiones (para el primer gráfico) podemos afirmar que

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{BC^2}{OB.OC} \quad (\mathbf{1})$$

Mientras que para el segundo gráfico se puede decir que

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{PL}{PO} \quad (\mathbf{2})$$

De igual forma considerando que el círculo tiene la propiedad de que

$$VQ^2 = VH.HK \; (\mathbf{3})$$

Sustituyendo **(2)** en **(1)** deducimos que

$$\frac{PL}{PO} = \frac{BC^2}{OB.OC} \quad (\mathbf{4})$$

De igual forma como los triángulos $HVP,\ HKO, BCO$ son semejantes podemos afirmar

$$\frac{HV}{PV} = \frac{BC}{OC} \quad y \quad \frac{VK}{PO} = \frac{BC}{BO}$$

Operando los dos términos anteriores deducimos que

$$\frac{HV.VK}{PV.PO} = \frac{BC^2}{OB.OC} \quad (\mathbf{5})$$

Sustituyendo **(5)** en **(4)** se obtiene que

$$\frac{PL}{PO} = \frac{HV.VK}{PV.PO} \ (\mathbf{6})$$

Reemplazando (3) en (6) se concluye, suponiendo que es posible el producto de segmentos, cuestión que no es posible en la época de Apolonio.

$$\frac{PL}{PO} = \frac{VQ^2}{PV.PO}$$

Si cancelamos a ambos lados PO deducimos

$$VQ^2 = PL\,.PV$$

Que es el síntoma de la parábola que corresponde a la condición que deben de cumplir los puntos que hacen parte de la parábola.

- **Síntoma de la Elipse**

Supongamos un círculo de diámetro BC y un punto A fuera del plano que contiene al círculo. Supóngase una recta que pasa por A y se mueve a lo largo del círculo que genera un doble cono. El círculo BC es la base del cono.

Consideremos la sección del cono por un plano que corte al plano de la base en la recta DE (un corte oblicuo al eje del cono) perpendicular a BC.

El triángulo ABC, llamado triángulo axial, contiene en su interior al eje del cono. Éste triángulo corta la cónica en $P\dot{P}$ y $P\dot{P}M$ es la recta determinada por la intersección entre el plano de corte y el triángulo axial.

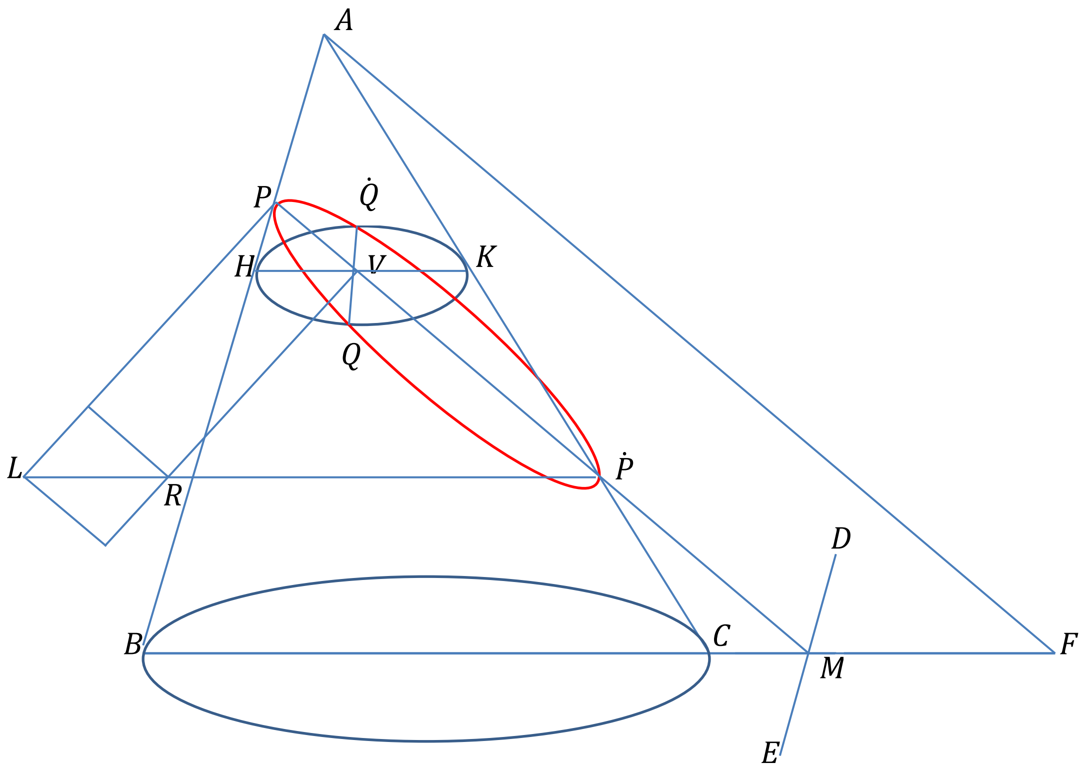


Ilustración 9: Síntoma para la elipse

Sea $Q\dot{Q}$ cualquier cuerda de la sección cónica que sea paralela a DE. Trácese la recta AF paralela a PM hasta intersectar la recta BM.

Trácese un segmento PL perpendicular a PM en el plano de la sección talque PL sea a una recta $P\dot{P}$ como el rectángulo formado por BF y CB es al cuadrado AF, de la siguiente manera, teniendo en cuenta la consideración anterior sobre la inexistencia de algunas operaciones,

$$\frac{PL}{P\dot{P}} = \frac{BF\ .\ CB}{AF^2}. \ \ (\mathbf{1})$$

Sean HK paralelo a BC y que corta a $Q\dot{Q}$ en V. Como HQK es una circunferencia paralela a la base del cono, por la propiedad característica de la circunferencia se tiene que

$$QV^2 = HV\ .VK \ \ \ (\mathbf{2})$$

De igual manera, se sabe que los triángulos HVP y BFA y los triángulos $VK\dot{P}$ y CFA son semejantes, así obtenemos

$$\frac{HV}{PV} = \frac{BF}{AF} \quad y \quad \frac{VK}{V\dot{P}} = \frac{CF}{AF}$$

Y realizando operaciones entre estas expresiones se deduce que

$$\frac{HV \, . \, VK}{PV \, . \, V\dot{P}} = \frac{BF \, . \, CF}{AF^2} \quad (\mathbf{3})$$

Sustituyendo **(2)** en **(3)** concluimos que

$$\frac{QV^2}{PV \, . \, V\dot{P}} = \frac{BF \, . \, CF}{AF^2} \quad (\mathbf{4})$$

De igual forma, los triángulos $LP\dot{P}$ y $RV\dot{P}$ son semejante por lo cual

$$\frac{VR}{V\dot{P}} = \frac{LP}{P\dot{P}} \quad (\mathbf{5})$$

Posteriormente despejando VR de **(5)** deducimos que

$$VR = \frac{V\dot{P}.LP}{P\dot{P}} \quad (\mathbf{6})$$

Despejando QV^2 de **(4)** se obtiene que

$$QV^2 = \frac{PV.V\dot{P}.BF \, . \, CF}{AF^2} \quad (\mathbf{7})$$

Reemplazando **(1)** en **(7)** se puede concluir que

$$QV^2 = \frac{PV.V\dot{P}.LP}{P\dot{P}} \quad (\mathbf{8})$$

Y por último, si reemplazamos **(6)** en **(8)** llegamos a

$$QV^2 = PV.VR$$

Que es el síntoma de la elipse.

➢ **Síntoma de la hipérbola**

Consideremos un cono cuyo vértice es el punto A y cuya base es el círculo BG. Córtese el cono por un plano que pase por su eje, el cual produce como sección de triángulo ABG y por otro plano que corte a la base del cono según una recta DE perpendicular a BG del triángulo ABG, y la superficien cónica según la línea DZE cuyo diámetro ZH, prolongado encuentra a uno de los lados AG del triángulo ABG en un punto T más allá del vértice.

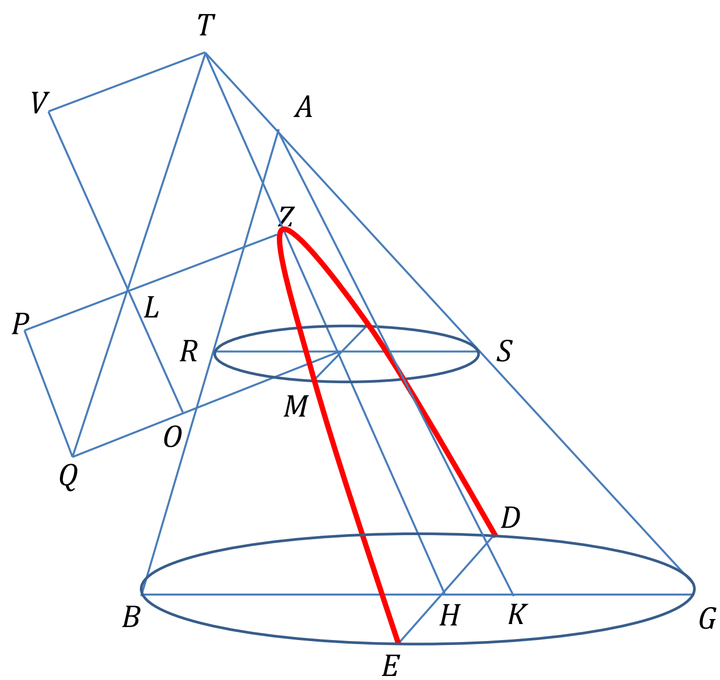


Ilustración 10: Síntoma de la hipérbola

Tracemos por A una recta AK paralela al diámetro ZH de la sección la cual corta BG.

Levantemos en el punto Z la recta ZL perpendicular a ZHy hagamos de manera que la recta ZT sea a una recta ZL como el cuadrado de KA es al rectángulo formado por BK y KG, asi

$$\frac{ZT}{ZL} = \frac{KA^2}{BK\,.\,KG} \quad (\mathbf{1})$$

Luego, desde un punto M tracemos la recta MN paralela a DE, y por el punto N la recta NOQ paralela a ZL. Ahora prolonguemos la reta TL hasta su encuentro en Q con la NOQ y por los puntos L y Q las LO y QP paralelas a la recta ZN.

Consideremos que el cuadrado de MN es equivalente al rectángulo ZQ que aplicado a la recta ZL tiene el ancho ZN y el exceso LQ, que es un rectángulo semejante al de las rectas ZT y ZL.

La recta RNS que pasa a través de N es paralela a BG; y NM es también paralela a DE.

Por lo cual, el plano que pasa a través de MN y RS es paralelo al plano que pasa a través de BG y DE, esta es la base del cono.

Así, si el plano se produce a través de MN y RS, la sección será un círculo cuyo diámetro es la recta RNS y MN es perpendicular a este diámetro. Por la propiedad del círculo tenemos que

$$MN^2 = RN\ .\ NS \quad (\mathbf{2})$$

De igual forma, los triángulos ARS, ABG y ZRN son semejantes y por esta razón

$$\frac{KA}{BK} = \frac{ZH}{HB} = \frac{ZN}{RN} \ \ y \ \ \frac{KA}{KG} = \frac{TH}{TG} = \frac{TN}{NS}$$

De esta forma, si operamos estas expresiones deducimos que

$$\frac{KA}{BK}\ .\ \frac{KA}{KG} = \frac{ZN}{RN}\ .\ \frac{TN}{NS} \quad (\mathbf{3})$$

Por **(1)** sabemos que

$$\frac{ZT}{ZL} = \frac{KA}{BK}\ .\ \frac{KA}{KG} \quad (\mathbf{4})$$

Sustituyendo **(4)** en **(3)** concluimos que

$$\frac{ZT}{ZL} = \frac{ZN}{RN}\ .\ \frac{TN}{NS} \quad (\mathbf{5})$$

Reemplazando **(2)** en **(5)** se obtiene que

$$\frac{ZT}{ZL} = \frac{ZN\ .\ TN}{MN^2}$$

Despejando MN^2 se obtiene que

$$MN^2 = \frac{ZN \ . \ TN \ . \ ZL}{ZT} \quad (\mathbf{6})$$

Y por ser

$$\frac{TZ}{ZL} = \frac{TN}{NQ} \ , \qquad NQ = \frac{TN \ . \ ZL}{TZ} \quad (\mathbf{7})$$

Sustituyendo **(7)** en **(6)** se prueba que el síntoma de la hipérbola es

$$MN^2 = ZN \ . \ NQ$$

Anterior a Apolonio la elipse, la parábola y la hipérbola se obtenían como secciones por medio de un plano de tres tipos de conos circulares rectos distintos, según el ángulo del vértice fuese agudo, recto u obtuso. Apolonio demostró por primera vez que no es necesario considerar exclusivamente secciones perpendiculares a una generatriz del cono, y que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones cónicas sin más que variar la inclinación del plano que corta al cono. Lo cual fue muy importante en la unificación de éstas curvas.

Apolonio obtuvo la parábola realizando un corte con un plano paralelo a la generatriz del cono, la elipse mediante una sección al cono tal que el plano seccionador cortara todas las generatrices del cono y la hipérbola cuando el plano seccionador cortaba las dos hojas del cono. También demostró que el cono que se necesita para generar las curvas cónicas no necesita ser un cono recto, es decir, tal que su eje sea perpendicular al plano de su base circular, sino que puede igualmente tomarse de entrada un cono circular oblicuo o escaleno. De igual forma, llevó el estudio de las curvas a un punto de vista más moderno al sustituir el cono de una sola hoja por un cono de dos hojas. Así, con sus trabajos la hipérbola deja de convertirse en la curva de una sola rama tal como la consideraban los matemáticos anteriores y se convierte en una curva de dos ramas tal como la conocemos hoy. Y de esta manera se reconoce claramente el carácter dual de las curvas. También se considera que fue él quien introdujo por primera vez los nombres de elipse y de hipérbola y aplico estas palabras para las secciones cónicas.

Por otro lado, el lenguaje que utiliza Apolonio en sus estudios es un lenguaje sintético, similar al que utiliza Euclides y los otros geómetras griegos, ya que, para obtener los resultados que necesita, parte de unos objetos preliminares tales como, puntos, rectas, etc. Posteriormente da algunas definiciones y propiedades entre éstos objetos. Finalmente mediante deducciones lógicas obtiene los teoremas.

De esta manera, se pudo ver que Apolonio obtuvo las secciones cónicas al aplicar definiciones, teoremas de proporcionalidad, semejanza y otras relaciones entre las áreas de las figuras. Específicamente lo que Apolonio hizo fue, fijar previamente las hipótesis que consideraba y posteriormente dedujo los teoremas cuidadosamente elaborados.

Pappus nació (290-350) en Alejandría, Egipto. Fue un gran recopilador, organizador, y clasificador del conocimiento matemático, además ayudó a generalizar el que ya tenían los matemáticos antiguos. También fue el último gran geómetra que al parecer vivió siempre en Alejandría. Escribió sobre Música, Hidrostática y un libro hacia el año 320 con el nombre de *Synagoge* (Colecciones Matemáticas), en el que nos presenta un panorama histórico del máximo valor de partes de la matemática griega y que serían desconocidas para nosotros debido a que son obras que están perdidas. También escribió otra obra denominada *El Tesoro del Análisis* que fue una obra formada por las propias obras griegas.

Hasta el momento los matemáticos habían considerado las siguientes categorizaciones de los problemas geométricos: **Problemas planos** eran los que se solucionaban únicamente con líneas rectas y circunferencias, **los problemas sólidos** eran los que únicamente se solucionaban con secciones cónicas o con conos, y **los problemas lineales** eran aquellos que se podían solucionar con las líneas rectas, las circunferencias, las secciones cónicas o con los conos y además, con otras curvas admitidas por los geómetras griegos. De esta manera, Pappus se interesó al igual que los matemáticos de la época, por los problemas geométricos famosos de la antigüedad, más específicamente, por la duplicación del cubo, por la trisección del ángulo y por la cuadratura del círculo. Así, consideró que la duplicación del cubo y la trisección del ángulo eran ejemplos de problemas de la segunda categoría, es decir, problemas sólidos, mientras que la cuadratura del círculo lo era de la primera categoría, es decir, era un problema plano y asumió de una manera implícita, que los problemas clásicos de la geometría son imposibles de resolver bajo las condiciones Platónicas, esto es, a través de las rectas y las circunferencias, porque no figuraban entre los problema planos.

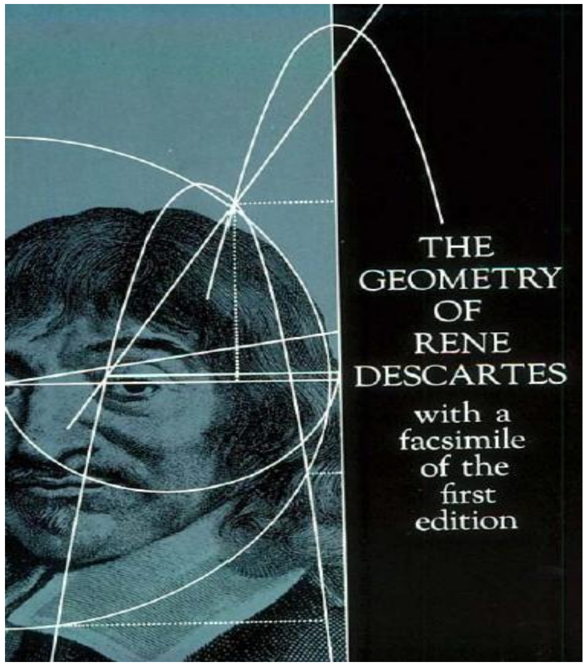
Por otro lado, Pappus también se interesó por resolver problemas tales como la manera de generar curvas (secciones cónicas) dadas tres o cuatro líneas rectas, más específicamente; Dado tres (o cuatro) rectas, encontrar el lugar geométrico del punto $\boldsymbol{P}$ que se mueve de tal forma que el cuadrado de la distancia desde $\boldsymbol{P}$ a una de ésas rectas es proporcional al producto de estas distancias a las otras dos (o en caso de cuatro rectas, el producto de las distancias a dos de ellas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos) midiendo estas distancias en direcciones tales que formen ángulos dados con las líneas correspondientes.

Posteriormente, Pappus propuso la generalización de este problema para n rectas y ningún matemático pudo hallar su solución, entre estos Euclides quien ya lo había intentado sin éxito, también lo trabajo Apolonio pero no consiguió dar una generalización ya que lo soluciono para el caso cuando se tienen seis rectas, en el contexto de su teoría de cónicas, es importante resaltar, que todos estos matemáticos intentaron abordar este problema con los métodos clásicos, es decir, a través de la regla y el compás y como ya se dijo, ninguno pudo hallar una solución general. Así, Pappus soluciono el problema para el caso cuando se tienen tres y cuatro rectas, y reconoció que independientemente del número de rectas involucradas en el problema, siempre quedaba determinada una curva concreta, más específicamente, determinó que independiente del número de rectas involucradas en éste problema, el lugar geométrico siempre era una curva cónica, aunque no logro dar una solución general a éste problema.

> He aquí, la observación más general sobre lugares geométricos de toda la geometría griega, lo que implica, además, la consideración de infinitos tipos nuevos de curvas planas (Gonzales, 2007, pág. 211).

CAPITULO 3

REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE LAS CURVAS EN LA GEOMETRÍA DE DESCARTES



Rene Descartes (1596-1650) fue filósofo, físico y matemático, nació en la Haye (Turena, Francia). Entre sus trabajos están: *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences* (El Discurso del método para dirigir bien la razón y hallar la verdad en la ciencias) publicada en 1637, *Meditaciones metafísicas* publicadas en 1641, *Regulae ad Directionem Ingenii* (Las reglas para la dirección del espíritu) publicada en 1710, *Los principios de la filosofía*, *Tratado de las pasiones en 1649*, *Le Monde* (El Tratado del mundo) publicada en 1634 *y El Tratado del hombre en 1664.*

Descartes en su obra *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences* como apéndice a ésta, publico la *Geometría,* en la cual se realiza una nueva lectura de la Geometría griega que supera sus limitaciones y rebasa sus conquistas geométricas. Porque Descartes con sus trabajos definió las operaciones fundamentales de la aritmética en el los segmentos, así; La multiplicación de segmentos la define mediante la noción de cuarta proporcional, establecida por Euclides en la proposición VII, 12 del libro Los Elementos.

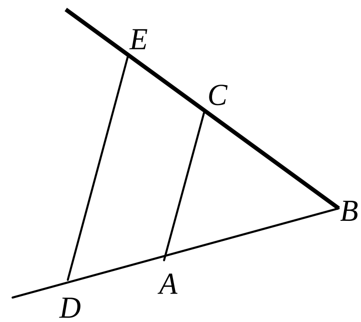


Ilustración 11: Producto de segmentos

Descartes supone que BA es la unidad, es decir, $BA = 1$ y multiplica los valores representados por el segmento BD (una extensión de AB) y por el segmento BC. Posteriormente conecta los puntos A y C, y desde D traza una recta paralela a AC que intersecta a BC en E. Con lo cual se crean dos triángulos ABC y DBE que son semejantes y como consecuencia sus lados están en proporción, es decir;

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$$

Pero como $BA = 1$, de deduce que

$$BE = BD \times BC$$

Posteriormente para la división de segmentos, en este caso, la división de BE con respecto a BD Descartes (haciendo uso de la misma figura anterior) considera que como BE y BD son dados y además BD es una extensión de $BA = 1$. Se prolonga el segmento que une los puntos D y E, posteriormente por el segmento BA se traza una recta paralela a DE y se obtiene el punto C, luego como los triángulos son semejantes deducimos que

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BE}{BD}$$

De lo cual se puede afirmar que

$$BC = \frac{BE}{BD}$$

Descartes también define la raíz cuadrada, supóngase que deseamos buscar la raíz cuadrada del segmento HG, lo primero que debemos hacer es prolongar HG hasta F talque $GF = 1$. Luego bisecamos FH en K y posteriormente se construye el semicírculo con entro en K y radio $KH = KF$. Luego trazamos la perpendicular a FH por G que intercepta la semicircunferencia en I.

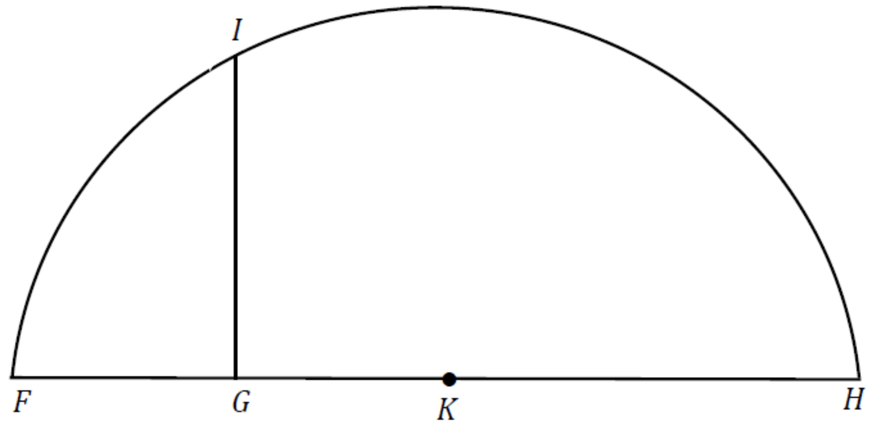


Ilustración 12: Raíz cuadrada

Con esto Descartes construyo tres triángulos rectángulos similares, IGF, IGH e IFH y como los ángulos IGF, IGH e HIF son rectángulos se tiene que,

$$\frac{GH}{GI} = \frac{GI}{GF}$$

Pero como $GF = 1$ entonces $GI \times GI = GH$, lo que comprueba que GI es la raíz cuadrada de HG, es decir $GI = \sqrt{GH}$.

Por mucho tiempo las operaciones aritméticas y las geométricas estaban separadas, por diversas razones, entre estas; la génesis de las cantidades inconmensurables con los trabajos de los pitagóricos, la cual se evidenció al hallar la relación entre un lado de un cuadrado y su diagonal, la homogeneidad dimensional, más específicamente la propiedad de cerradura de los segmentos, ya que en el dominio geométrico las operaciones de suma y de resta cumplían con la propiedad de cerradura, es decir, la suma de dos segmentos era otro segmento, de igual forma, la resta de dos segmentos era otro segmento. Pero sucedía algo extraño con la operación de multiplicación, ya que ésta operación no cumplían con la propiedad de cerradura, así; el producto de dos segmentos no era otro segmento sino una superficie. Pero fue Descartes quién estableció la unión entre las operaciones aritméticas y las magnitudes geométricas al introducir un concepto novedoso como fue el segmento unidad.

Es imprescindible decir que el segmento unidad que utiliza Descartes es el concepto fundamental de todo su trabajo geométrico y algebraico, por diversas razones, entre estas; permite dotar a los segmentos de la misma propiedad (la cual es la propiedad de cerradura) y de las mismas operaciones que tienen los números, las cuales son las operaciones básicas de la Aritmética que son la suma, la resta, la multiplicación, la división y le añade una más, la radicación. Que anteriormente solo estaban definidas para los números. Concretamente lo que realizo Descartes fue dotar de un carácter aritmético a los segmentos, lo que comúnmente se conoce como la aritmetización de la Geometría. Lo cual se convirtió en una poderosa técnica para resolver ecuaciones algebraicas y permitió solucionar muchos de los grandes problemas de las matemáticas antiguas que no se habían podido solucionar como fue el problema de la inconmensurabilidad entre segmentos, el problema de Pappus, la trisección del ángulo, etc.

Descartes también realizó importantes aportes al lenguaje algebraico porque simplificó la notación utilizada por los griegos para los segmentos, ya que por ejemplo, los segmentos que anteriormente se designan AB y BC los designó como a y b y posteriormente las operaciones de suma y resta entre los segmentos AB y BC las designó como $a+b$ y $a-b$, de igual forma el producto de esos dos segmentos Descartes los representa por $a \times b$ y la división $\frac{a}{b}$ y por ultimo designó $a \times a$ o a^2 a la representación del producto de un segmento por sí mismo.

En cuanto a la solución de problemas, Descartes afirma que

> Inicialmente debe suponerse efectuada la resolución, dando nombre a todas las líneas que se estimen necesarias para su construcción, tanto a las conocidas como a las que no son conocidas. A continuación, sin establecer distinción entre las líneas conocidas y las desconocidas, debemos descifrar el problema (Descartes, 1947, pág. 372).

Lo anterior se conoce como el método que implementa Descartes para solucionar los problemas, los cuales en un orden de jerarquía son:

1. Suponer que el problema se encuentra ya resuelto.
2. Nombrar a todas las líneas involucradas en el problema, tanto a las conocidas como a las desconocidas.
3. Bajo la condición 1, se debe encontrar la relación de dependencia que existe entre las líneas conocidas y las líneas desconocidas.
4. Bajo el último punto es posible expresar de dos maneras distintas una misma relación. La igualdad de estas dos expresiones es lo que constituye una ecuación.
5. La ecuación de debe resolver. Los requerimientos constructivos del problema están dados por los requerimientos constructivos de la ecuación.

Y he aquí, el método que le ayuda a Descartes a solucionar diversos problemas que no habían podido solucionar los matemáticos antiguos.

3.1 El problema de Pappus: la génesis de la noción de curva en Descartes

Como ya se ha evidenciado, Descartes desarrolló un método novedoso para solucionar problemas algebraicos y geométricos, con el que se propone, no solo rehacer la geometría griega, sino ir más allá en la solución de los problemas geométricos antiguos y los nuevos. Por esta razón, al final del libro I de la *geometría*, se plantea la solución del famoso problema de Pappus o el problema de las tres o cuatro rectas, el cual, en su generalización, se ha había resistido a ser solucionado por los matemáticos griegos, e incluso algunos historiadores griegos consideran que toda la *geometría* de Descartes está destinada a la solución del problema de Pappus o de igual forma, que el problema de Pappus conforma la *geometría* de Descartes. El problema de Pappus en su generalización sería:

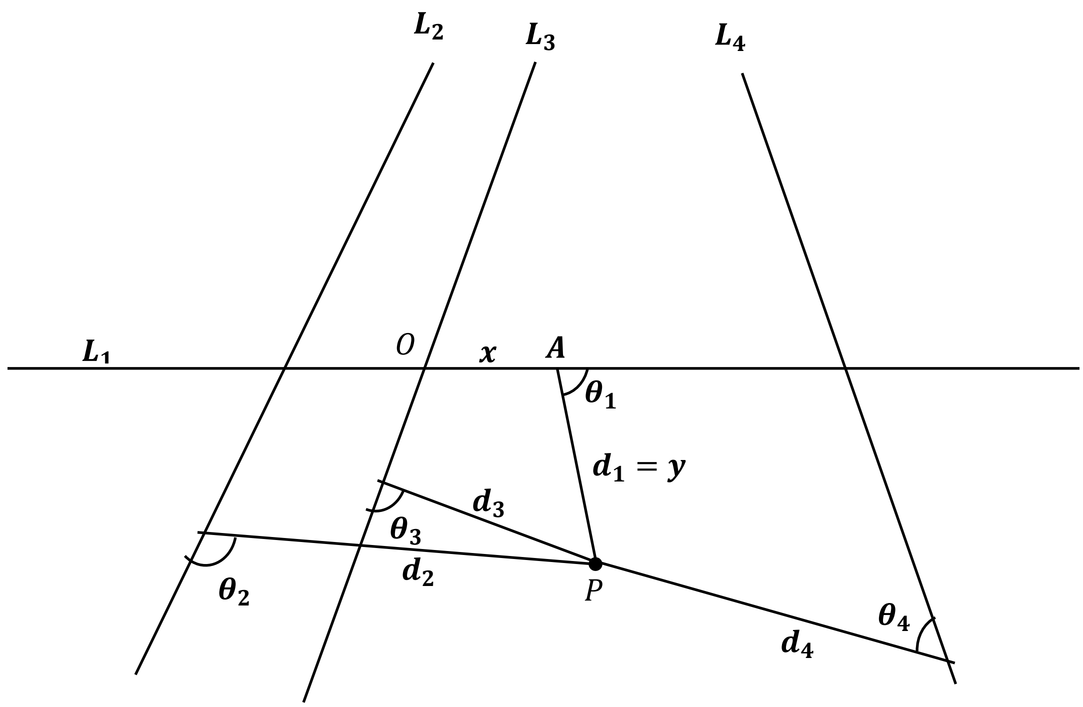


Ilustración 13: Generalización del problema de Pappus

Dados: Una recta L_i en el plano, n angulos θ_i, una razón β, un segmento de recta α. Para un punto P en el plano, sea d_i la distancia oblicua entre P y L_i que forma el ángulo θ_i con L_i.

Problema: Encontrar el lugar de los puntos P tales que las razones siguientes son iguales a la razón dada β: Para tres rectas $(d_1)^2 = d_2 d_3$; para cuatro rectas $d_1 d_2 = d_3 d_4$; para cinco rectas $d_1 d_2 d_3 = a d_4 d_5$ y para el casi de seis rectas $d_1 d_2 d_3 = d_4 d_5 d_6$.

De manera genérica:

Para un número par $2k$ rectas: $d_1 \ldots\ldots d_k = d_{k+1} \ldots . d_{2k}$.

Para un número impar $2k+1$ de rectas $d_1 \ldots\ldots d_{k+1} = d_{k+2} \ldots d_{2k+1}$.

Es importante tener en cuenta que aunque Descartes realiza la solución general del problema de Pappus, él parte del problema cuando se tienen cuatro rectas, así:

> Sean AB, AD, EF, GH, etc. Varias líneas dadas debiendo hallase un punto C, desde el que trazando varias líneas rectas sobre las líneas rectas dadas como CB, CD, CF y CH, de modo que los ángulos CBA, CDA, CFE y CHG sean dados, y de modo tal que el resultado de la multiplicación de una parte de esas líneas sea igual al resultado obtenido por la multiplicación de las otras, o bien que guarden alguna otra proporción dada, lo cual en nada dificulta el problema (Descartes, 1947, pág. 65).

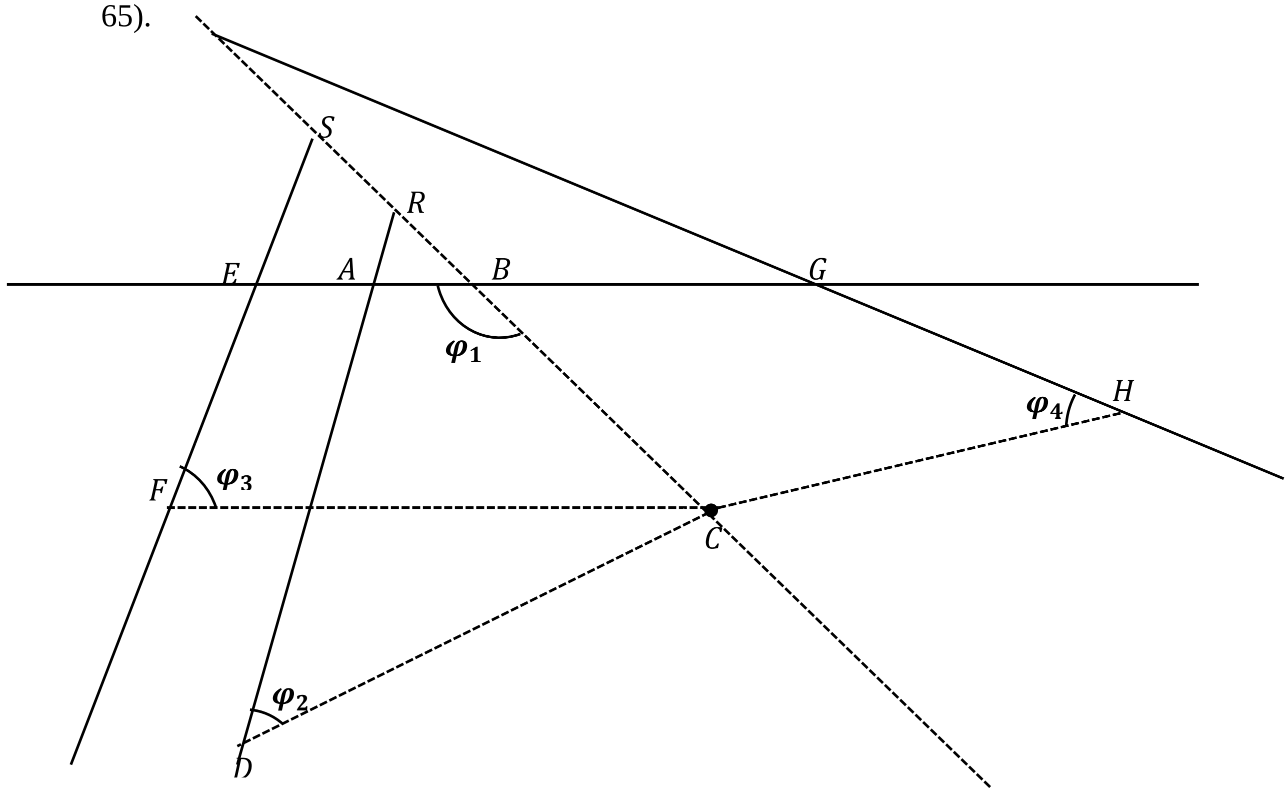


Ilustración 14: Interpretación cartesiana del problema de Pappus

De igual forma, Descartes considera que:

> $AB = L_1$, $AD = L_2$, $EF = L_3$ y $GH = L_4$varias líneas dadas y debe encontrarse un punto como C del cual trazando otras líneas a las dadas como CB, CD, CF, y CH

de manera que los ángulos $CBA = \varphi_1$, $CDA = \varphi_2$, $CFE = \varphi_3$ y $CHG = \varphi_4$ sean dados y que el producto de la multiplicación de una parte de estas líneas, sea igual al producto de la multiplicación de las otras, es decir; $CB \times CH = CD \times CF$ o bien que ellas tengan otra proporción dada7. (Descartes, 1947, pág. 65).

Luego Descarte afirma que va a suponer el problema ya resuelto (Análisis) y para conocer todas las líneas, le da nombre a una de las líneas dadas y a otra de las que hay que encontrar, de esta manera, designa $AB = x$ y $BC = y$; luego prolonga todas las líneas rectas hasta que corten a AB y BC que también se prolongan, si es necesario y si no le son paralelas. Así, nombra E y G a los puntos de intersección de las demás rectas con la recta AB y lo mismo realiza para la recta BC identificando los puntos de intersección R, S y T.

Descartes considera que como todos los ángulos del triángulo ARB son dados; entonces el ángulo BAR está formado por dos líneas en posición, $CBA = \varphi_4$ esta dado y en consecuencia se conoce el ángulo ABR y de igual forma el ángulo ARB ya que es el suplemento de los ángulos ABR y de BAR. De esta manera, La proporción que hay entre los lados AB y BR es también dada y se indica como de z a b, así:

$$\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$$

De donde la cantidad z se toma como parámetro y b es la cuarta proporcional, también sabemos que $AB = x$ y $CB = y$ posteriormente realizando sustituciones obtenemos que

$$\frac{x}{BR} = \frac{z}{b}.$$

De donde se deduce que,

$$BR = \frac{bx}{z},$$

[7] Para esta cita también se tomaron consideraciones de (Alvarez, 2000, pág. 44).

lo cual se puede realizar por la homogeneidad de las cuatro magnitudes, de esta manera obtenemos que

$$CR = CB + BR.$$

Y sustituyendo se obtiene que

$$CR = y + \frac{bx}{z},$$

porque B esta entre C y R.

Por otro lado tendríamos que

$$CR = y - \frac{bx}{z}.$$

Si R esta entre B y C, de igual forma obtenemos

$$CR = -y + \frac{bx}{z}.$$

Si C esta entre B y R.

Posteriormente, como se conocen los tres ángulos del triángulo DRC, se puede afirmar que el ángulo DRC es igual al ángulo ARB ya encontrado, y como el ángulo $CDA = \varphi_2$ es dado entonces se puede encontrar el ángulo DCR. Así, CR es proporcional a CD que se indica como de z a c; de la siguiente manera:

$$\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c},$$

pero como $CR = y + \frac{bx}{z}$ se deduce que,

$$CD = \frac{zyc + bcx}{zz}.$$

Se conocen las rectas AB, AD y EF, sea K la distancia entre los puntos E y A, de decir, $EA = k$. De esta manera:

$$EB = EA + AB.$$

Realizando las sustituciones pertinentes, tenemos que

$$EB = k + x.$$

Pero si B esta entre E y A, se deduce que

$$EB = k - x.$$

De igual forma, si E esta entre A y B, se obtiene que,

$$EB = y + x - k.$$

Los ángulos BES y EBS del triángulo ESB son conocidos, así se puede encontrar el ángulo ESB. Como BE es proporcional a BS, lo cual se representa como de z a d, así:

$$\frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}.$$

Despejando BS, se duce que

$$BS = \frac{BE \times d}{z}.$$

Remplazando lo que ya se obtuvo de BE (téngase en cuenta que $BE = EB$) en lo que se tiene para BS, se obtiene que

$$BS = \frac{kd + xd}{z}.$$

Para la línea total $CS = CB + BS$, deducimos que,

$$CS = \frac{zy + kd + xd}{z}.$$

De igual forma, si C cayera entre B y S, se obtiene que

$$CS = \frac{kd + xd - zy}{z}.$$

También se conocen los ángulos $CFS = \varphi_3$, $FSC = ESB$ y FCS del triángulo FSC se puede conocer la proporción que hay entre los lados CS y CF, lo que se representa como de z a e, de la siguiente manera:

$$\frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}.$$

Despejando CF podemos concluir que

$$CF = \frac{e\,CS}{z}.$$

Remplazando, lo que corresponde a CS

$$CF = \frac{ekd + exd + ezy}{zz}.$$

Se tiene ahora que $AG = l$ es dada, y $BG = l - x$ de igual forma; en el triángulo BGT se conocen sus tres ángulos BGT, $GBT = CBA = \varphi_1$ y BTG la proporción entre BG y BT se indica como de z a f, de la siguiente manera

$$\frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}.$$

De lo cual se obtiene que

$$BT = \frac{f\,BG}{z}.$$

Sustituyendo lo que corresponde a BG

$$BT = \frac{lf - xf}{z}.$$

De igual forma, como $CT = CB + BT$, reemplazando deducimos que

$$CT = \frac{yz + fl - fx}{z}.$$

Por último, del triángulo CTH se conocen todos los ángulos y la proporción CT y CH la cual se indica como z es a g, de la siguiente manera

$$\frac{CT}{CH} = \frac{z}{g}.$$

Posteriormente al despejar CH deducimos que

$$CH = \frac{g\,CT}{z}$$

Si reemplazamos lo que corresponde a CT

$$CH = \frac{gyz + gfl - gfx}{zz}$$

De esta manera, en las ideas de (Alvarez, 2000) las cuatros rectas CD, CF, CH y CB tienen como expresión

$$\wedge_2 = CD = \frac{zyc + bcx}{zz}.$$

$$\wedge_3 = CF = \frac{ekd + exd + ezy}{zz}.$$

$$\wedge_1 = CH = \frac{gyz + gfl - gfx}{zz}.$$

$$\wedge_4 = CB = y.$$

De lo cual se evidencia que cada una de estas expresiones tiene la forma

$$\wedge_i = \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i \ (\mathbf{1})$$

Lo cual representa una combinación lineal de las variables x y y que a su vez son las "coordenadas" del punto C y varían de acuerdo a su movimiento.

De igual forma, según el problema de Pappus, la multiplicación de dos rectas debe ser igual a la multiplicación de las otras dos rectas (para cuando se tienen cuatro rectas en el problema), considerando el problema como resuelto se debe cumplir que

$$CD \times CF = CH \times CB$$

Lo cual de manera genérica se puede ver como

$$\wedge_2 \times \wedge_3 = \wedge_1 \times \wedge_4 \quad (\mathbf{2})$$

Y cada una de estas expresiones se puede ver de como la expresión número **(1)**, de esta forma, expresando **(2)** en términos de x y y obtenemos que

$$(\alpha_2 x + \beta_2 y)(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z) = y(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)$$

Haciendo las operaciones correspondientes obtenemos que

$$(\alpha_2\alpha_3)x^2 + (\beta_2\beta_3)y^2 + (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)xy + (\alpha_2\gamma_3)x + (\beta_2\gamma_3)y = \beta_1 y^2 + \alpha_1 xy + \gamma_1 y$$

Igualando la expresión a cero, es decir, la expresión de la derecha pasándola al lado izquierdo a restar y agrupando términos semejantes

$$(\alpha_2\alpha_3)x^2 + (\beta_2\beta_3 - \beta_1)y^2 + (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3 - \alpha_1)xy + (\alpha_2\gamma_3)x + (\beta_2\gamma_3 - \gamma_1)y = 0 \ (\mathbf{3})$$

Supóngase ahora que

$$\alpha_2\alpha_3 = \alpha.$$

$$\alpha_1 - \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3 = 2\beta.$$

$$\beta_2\beta_3 - \beta_1 = 1.$$

$$\gamma_1 - \beta_2\gamma_3 = 2\delta.$$

$$-\alpha_2\gamma_3 = \gamma.$$

Reemplazando en la expresión número **(3)**, se deduce que

$$\alpha x^2 + y^2 = 2\beta xy + \gamma x + 2\delta y$$

Despejando y^2, se puede concluir que

$$y^2 = -\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma x + 2\delta y$$

Luego, agrupamos términos semejantes

$$y^2 - 2\beta xy - 2\delta y = -\alpha x^2 + \gamma x$$

Posteriormente sacamos factor común y completamos cuadrado

$$y^2 - 2(\beta x + \delta)y + (\beta x + \delta)^2 - (\beta x + \delta)^2 = -\alpha x^2 + \gamma x$$

Luego lo factorizamos

$$(y - (\beta x + \delta))^2 = -\alpha x^2 + \gamma x + (\beta x + \delta)^2$$

Sacando raíz cuadrada a ambos lados y cancelando

$$(y - (\beta x + \delta)) = \pm\sqrt{-\alpha x^2 + \gamma x + (\beta x + \delta)^2}$$

Desarrollamos el binomio cuadrado

$$y - (\beta x + \delta) = \pm\sqrt{-\alpha x^2 + \gamma x + \beta^2 x^2 + 2\beta x\delta + \delta^2}$$

$$y = \pm\sqrt{-\alpha x^2 + \gamma x + \beta^2 x^2 + 2\beta x\delta + \delta^2} + (\beta x + \delta)$$

Sacamos factor común

$$y = \pm\sqrt{(\beta^2 - a)x^2 + \gamma x + 2\beta x\delta + \delta^2} + (\beta x + \delta)$$

$$y = \beta x + \delta \pm \sqrt{(\beta^2 - a)x^2 + (\gamma + 2\beta\delta)x + \delta^2} \quad \textbf{(4)}$$

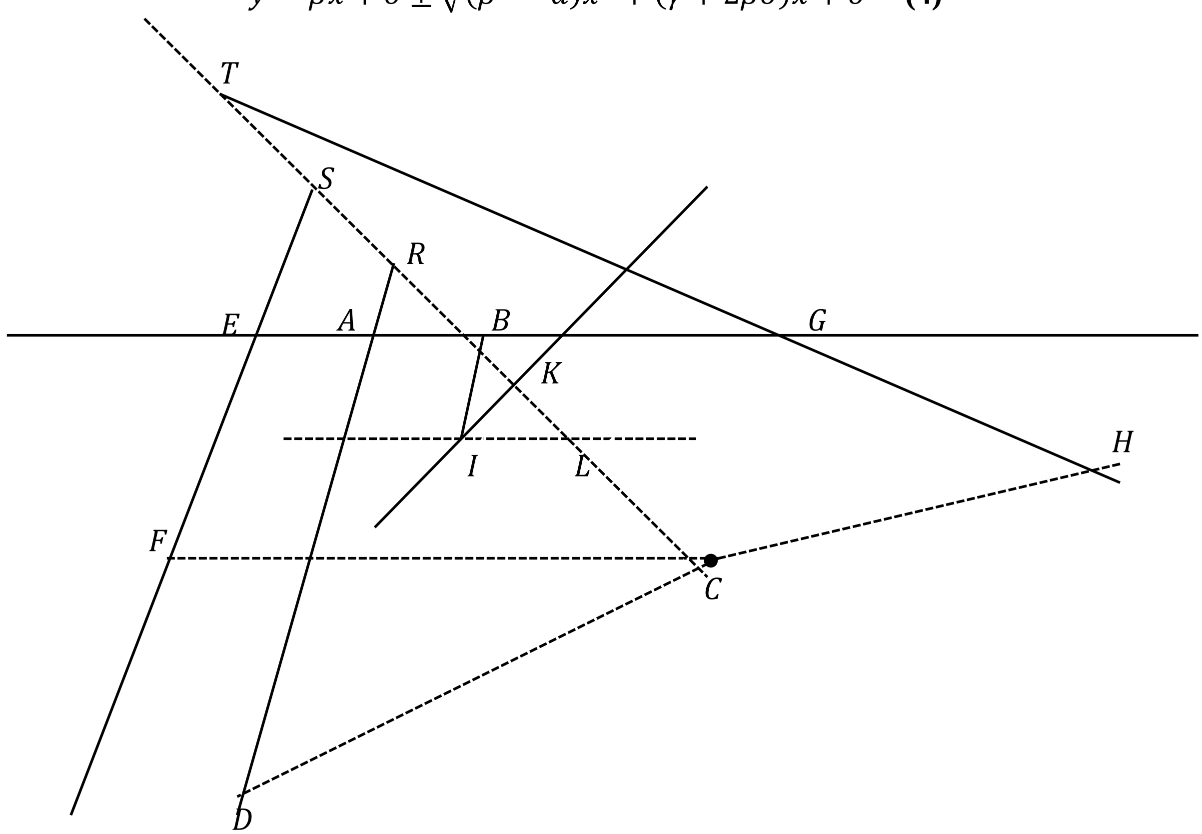


Ilustración 15: Teorema de Pappus (auxiliar)

Sea $KI = BA = x$ y talque KI sea paralela a BA y además, K este en CB al igual que L, también supóngase que

$$BK = \delta,$$

Entonces

$$\frac{IK}{KL} = \frac{1}{\beta};$$

Despejando KL se deduce que

$$KL = \beta x. \textbf{ (5)}$$

Ya que $IK = x$. Por otro lado

$$\frac{KL}{IL} = \frac{\beta z}{\alpha},$$

Despejando IL

$$IL = \frac{\alpha KL}{\beta z}.$$

Y sustituyendo la expresión **(5)** en la ecuación anterior se deduce que

$$IL = \frac{\alpha\beta x}{\beta z}.$$

De lo cual se puede concluir que

$$IL = \frac{\alpha x}{z}. (\mathbf{6})$$

Teniendo en cuanta que $y = BC$ y que $BK = \delta$ de la figura anterior podemos considerar que

$$BC = BK + KL + LC$$

Sustituyendo **(5)** y las consideraciones ya admitidas en la ecuación anterior podemos afirmar que $y = \delta + \beta x + LC$. Despejando LC

$$LC = y - \delta - \beta x \quad \textbf{(7)}$$

Sustituyendo lo que corresponde a y en la expresión **(4)** y realizando las operaciones pertinentes, se deduce que

$$LC = \pm\sqrt{(\beta^2 - a)x^2 + (\gamma + 2\beta\delta)x + \delta^2} \quad (\mathbf{8})$$

Y he aquí una de las expresiones más fundamentales, ya que esta expresión le permite a Descartes la clasificación de las curvas por el criterio del discriminante, así:

Si $\beta^2 - a = 0$ La curva es una parábola

Si $\beta^2 - a > 0$ La curva es una hipérbola

Si $\beta^2 - a < 0$ La curva es una elipse

De esta forma, podemos evidenciar que Descartes presenta condiciones sobre los coeficientes para que la cónica en cuestión (la cónica que soluciona el problema) sea una parábola, una elipse o una hipérbola, haciendo un análisis de los casos posibles, lo cual, modernamente, implica la ecuación característica de la cónica estudiada. También es importante resaltar que; en los resultados encontrados por Descartes se cumple lo que había considerado Pappus, esto es, que en todos los casos la solución a su problema era una curva cónica.

Por otro lado, con la solución del problema de Pappus se demuestra la potencia de la geometría cartesiana, o más específicamente, se demuestra la potencia del método empleado por Descartes, ya que éste problema en su generalización, ningún matemático lo había podido solucionar. También se puede ver la transición que sufre la Geometría, es decir, la transición que sufrieron los problemas geométricos entre el mundo geométrico y el mundo algebraico, lo cual se conoce como el proceso de algebrización de la Geometría, ya que con los trabajos de Descartes, la Geometría o los problemas geométricos, son abordados mediante una herramienta denominada Álgebra.

Así, las cónicas que antes eran secciones de un cono, ahora van a representar una expresión analítica, esto es, una ecuación polinómica. Lo cual, concretamente se evidencia de la siguiente manera, las cónicas antes de Descartes se obtenían como secciones del cono, de esta manera, estas curvas pertenecieran a un mundo netamente geométrico, ahora con sus estudios, las cónicas pasan a pertenecer a un mundo algebraico. Ya que éstas se representan y se estudian a través de una ecuación polinómica, lo cual se entiende como la representación analítica de las cónicas. También podríamos decir que la inclusión del Álgebra generaliza tanto la Geometría como la Aritmética, porque en lo que corresponde a la Geometría, la solución a los problemas ya se pueden realizar de manera general, sin tener en cuenta soluciones para casos específicos, ni soluciones para figuras específicas, ya que, las soluciones vienen determinadas por lugares geométricos que siempre generalizan las situaciones. De igual forma, también se generaliza la Aritmética, ya que las operaciones básicas que antes solamente estaban ceñidas a realizarse para números ahora se pueden realizar para cantidades que pueden ser ángulos, números, vectores, etc. Así, las secciones cónicas quedan generalizadas a partir de la ecuación de segundo grado ya encontrada.

3.2 Noción de curva en Descartes

Algunas de los aportes más importantes de Descartes en cuanto a la noción de curva fueron: La clasificación de las curvas por géneros, la introducción de la herramienta compás generalizado; que permitía obtener la ecuación polinómica asociada a una curva, la clasificación de los problemas geométricos por clases, de la siguiente manera:

Clase 1: Aquellos que conducen a ecuaciones cuadráticas y pueden ser construidos por medio de rectas, circunferencias, parábolas, hipérbolas o elipses.

Clase 2: Aquellos que conducen a ecuaciones cúbicas y cuarticas, cuyas raíces se pueden construir por medio de la concoide.

Clase 3: Aquellos que conducen a ecuaciones de grados cinco o seis, que pueden construirse introduciendo una curva cúbica auxiliar, tal como el tridente o la parábola cubica.

De igual forma, Descartes al introducir las nuevas curvas que necesitaba para sus construcciones geométricas más allá del cuarto grado, añade a los axiomas de geometría un nuevo principio:

> Dos o más rectas (curvas) pueden moverse una sobre otra, determinando por medio de sus intersecciones nuevas curvas. (Boyer, 1986, pág. 243)

Luego realizo una distinción entre las curvas de dos tipos:

Tipo 1: **Curvas geométricas**; son las curvas que están descritas de una manera exacta, es decir, mediante una ecuación en términos de Descartes, las cuales son ecuaciones polinomicas. Estas curvas son: las rectas, las circunferencias, las cónicas, el tridente, etc.

Tipo 2: **Curvas mecánicas**; Son curvas que se tienen que imaginar cómo descritas por dos movimientos separados e independientes, cuya relación no admite una determinación exacta, esto es, una ecuación polinómica. Estas curvas son: La cuadratriz, la espiral, entre otras.

Por otro lado, Rene Descartes al tratar la naturaleza de las curvas en su libro la Geometría, afirma que:

> La Geometría no debería incluir líneas (curvas) que son como cuerdas, en el sentido de que son a veces rectas y a veces curvas, ya que las razones entre líneas rectas y curvas no son conocidas, y creo que no pueden llegar a ser descubiertas por mentes humanas, y por lo tanto ninguna conclusión que se base en tales razones puede ser aceptada como rigurosa y exacta. Citado por (Boyer, 1986, pág. 432).

Según Descartes, las curvas mecánicas deben excluirse de la geometría porque tenemos que imaginarlas como "descritas por dos movimientos separados e independientes, cuya relación no admite una determinación exacta", tal como ocurre con la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. De esta forma, Descartes consideró que las curvas mecánicas no tenían “exactitud de razonamiento”, es decir, a éstas no se les podía encontrar una ecuación polinómica que las representará y que diera cuenta de ellas. De igual forma, no había una herramienta que permitiera trazarlas de manera continua.

Así, curvas como la trisectriz, la hipopede, la curva logarítmica, la espiral, entre otras, que denominó curvas mecánicas, quedaron totalmente excluidas de la *Geometría* y curvas como las cónicas, el tridente, la concoide, la cisoide eran curvas que pertenecían a la *Geometría* y por eso las denominó curvas Geométricas.

Los trabajos de Descartes eliminan de forma brillante la mayoría de las limitaciones que el carácter sintético imponía a la geometría griega, estas limitaciones era:

- Limitación Pitagórica de la inconmensurabilidad
- Limitación Platónica de los instrumentos geométricos (la regla y el compás)
- La limitación Euclidiana de la homogeneidad dimensional
- Limitación tridimensional
- Limitación de la dependencia de las figuras geométricas
- Limitación de la imposibilidad de asignar números a las figuras geométricas

De acuerdo a lo que hemos analizado antes, para Descartes las curvas pueden ser descritas por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos de líneas, cada uno siendo determinado por el anterior, lo que implica que, las curvas se consideran como variaciones, es decir, para Descartes una curva es el lugar geométrico de un punto que se mueve de manera continua y que representa la solución de una ecuación polinómica que ha sido obtenida mediante definiciones o propiedades de las figuras geométricas, es decir, para Descartes una curva es el lugar geométrico de un punto que es solución de una ecuación polinómica.

De esta manera, “Descartes no solamente soluciona el problema de Pappus para el caso más general, sino que emplea un enfoque radicalmente nuevo que le permite introducir las curvas algebraicas[8] y estudiar su naturaleza como objeto distinto a las curvas euclidianas" (Arboleda, 2014, pág. 4).

[8] Vamos a entender curvas algebraicas como sinónimo de curvas polinómicas.

CAPITULO 4

REPRESENTACIÓN DE LAS CURVAS A TRAVÉS DE LAS SERIES DE POTENCIAS.

Hasta el momento sabemos que algunas curvas mecánicas se han admitido en la Geometría, entre estas están aquellas a las que se les ha encontrado una ecuación que permita representarlas correctamente y de igual forma, aquellas a las que se le ha encontrado un mecanismo físico que permita trazarlas de manera continua. Pero ¿Qué pasa con las curvas que no se han admitido en la Geometría, que hasta el momento en su mayoría son las curvas mecánicas según Descartes? ¿Será que como dicen los matemáticos, realmente no pertenecen a la Geometría? o ¿será que no se han encontrado herramientas tanto físicas como conceptuales que permitan abordarlas? estas preguntas la responderemos en esta sección.

Hasta el momento conocemos dos maneras diferentes de considerar las curvas, las cuales son: Curvas mecánicas, que posteriormente tomarán el nombre de curvas trascendentes y curvas geométricas, que se llamaran curvas algebraicas. Las curvas Algebraicas son aquellas que pueden ser expresadas mediante potencias racionales de x y y, a través de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Mientras que las Curvas trascendentes, son aquellas que no son algebraicas y evidentemente no se pueden expresar como potencias racionales de x y y. Algunos ejemplos de curvas trascendentes son: Las curvas trigonométricas, las curvas exponenciales, la cicloide, la catenaria, la hélice cilíndrica, la cisoide, la branquistócrona, etc. Y algunos ejemplos de curvas algebraicas son: Las secciones cónicas, La espiral equiángular o logarítmica, la espiral, la trisectriz, el tridente o parábola cartesiana, etc.

4.1 Aportes realizados por Nicolau Mercator

Nicolaus Mercator (1620-1687) nació en Holstein, Dinamarca. Publicó varios trabajos sobre Astronomía, Trigonometría Esférica y Geografía. Murió el 14 de enero en Paris, Francia.

Mercator en su trabajo *Logarithmotechnia* publicada en 1688, relaciono las curvas con las series de potencias, ya que encontró una de las primeras expansiones mediante una serie infinita de una curva, la cual fue la hipérbola, y la relaciono con el área de un logaritmo. Mercator encontró una serie infinita para la hipérbola $\frac{1}{1+x}$ a través de un proceso conocido como la división larga, el cual consiste en hacer la división de un polinomio por otro de grado superior, ordenando los términos de los polinomios en orden creciente según los grados de dicho polinomio. De la siguiente manera:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1+x \\ \hline -(1+x) & 1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots \\ -x & \\ \underline{+x+x^2} & \\ x^2 & \\ \underline{-x^2-x^3} & \\ -x^3 & \\ +x^3+x^4+\cdots & \end{array}$$

De lo que se deduce que $\frac{1}{1+x}$ = $1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$; de esta manera se evidencia que Mercator comprobó que la hipérbola $\frac{1}{1+x}$ se podía aproximar mediante la siguiente serie de potencias $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7$ ...

Después Mercator dedujo que el área de la hipérbola cuya ecuación es y = $\frac{1}{1+x}$ desde 0 hasta $x,$ es equivalente al área del $\ln(1+x)$ aproximando el área de la hipérbola $\frac{1}{1+t}$ entre

0 y n rectángulos de igual base $\dfrac{x}{n}$ y de altura 1, $\frac{1}{1+\frac{x}{n}}$, $\frac{1}{1+\frac{2x}{n}}$, $\frac{1}{1+\frac{3x}{n}}$,…, $\frac{1}{1+\frac{(n-1)x}{n}}$ y posteriormente representó $\frac{1}{1+\frac{kx}{n}}$ a través de una serie de potencias con lo cual dedujo que:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \cdots$$

Utilizando terminología moderna y unificando conceptos, podemos afirmar que, lo que encontró Mercator fue lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+x}\,dx &= \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + \cdots)\,dx \\ &= \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \cdots\end{aligned}$$

4.2 Aportes realizados por James Gregory

James Gregory (1638-1675) fue un matemático y astrónomo escocés, nació en Drumoak, Aberdeenshire. Entre sus publicaciones están: *Vera Circuli et Huperbolae quadratura* (La verdadera área del círculo y de la hipérbola) publicado en 1667, *La Geometriae pars universalis* (Parte universal de la Geometría), Exercitationes geometricae (Ejercicios geométricos) y *Optica promota* (Avances de Óptica) publicada en 1663. Gregory cayó en cuenta de la potencia que mostraban los desarrollos de curvas a través de las series infinitas y de los procesos infinitos en general. Debido a esto, obtuvo a través de un ingenioso proceso geométrico recurrente, que actualmente es equivalente a efectuar diferenciaciones sucesivas de una función, las series infinitas de diversas curvas, también conocía los desarrollos en serie de Maclaurin de $tang(x)$, $\sec(x)$, $\arctan(x)$ y $\text{arcsec}(x)$.

Se considera que Gregory en Italia comprendió que el área bajo la curva de $y = \frac{1}{1+x^2}$ desde $x = 0$ hasta $x = x$ es igual a el área de bajo la curva de $\arctan(x)$. Y expresando este resultado mediante terminología moderna se obtiene que

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x)$$

Pero con el método ya utilizado por Mercator de división larga se deduce que

$$\begin{array}{c|l}
1 & 1+x^2 \\ \cline{2-2}
\text{-}(1+x^2) & 1-x^2+x^4-x^6+x^8-x^{10}+x^{12}\ldots \\
\text{-}x^2 & \\
-(-x^2-x^4) & \\
x^4 & \\
-(x^4+x^6) & \\
-x^6 & \\
-(-x^6-x^8) & \\
x^8 & \\
-(x^8+x^{10}) & \\
-x^{10} & \\
-(-x^{10}-x^{12}) & \\
x^{12} & \\
-(x^{12}+x^{14}) & \\
-x^{14} & \\
\vdots &
\end{array}$$

De esta manera se obtiene que

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12} - x^{14} + \cdots$$

Y resolviendo la integral deducimos que

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$$

$$= \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12} - x^{14} + \cdots)dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \frac{x^{15}}{15} + \cdots$$

4.3 Aportes realizados por Isaac Newton

Isaac Newton (1642-1727) nació en Woolsthorpe (Reino Unido). Realizo aportes a las Matemáticas, la Mecánica, la Cosmología y al estudio de la luz. Entre sus trabajos están *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* publicado en 1711, *Methodus fluxionum et serium infinitorum* (métodos de fluxiones a través de series infinitas) publicada en 1742, *De quadratura curvarum, Los principia, Philosophiae naturalis principia mathematica* (Principios matemáticos de la filosofía natural)

Newton también se encamino en expresar las curvas a través de series infinitas, pensando en la velocidad del cambio o fluxión de magnitudes que varían de manera continua.

Un descubrimiento crucial que realizo Newton para poder expresar las curvas mediante series de potencias fue la serie del binomio, descubierta en el invierno de 1664. La cual aparece expuesta en dos cartas, *la Epístola prior* de 1676 y *la Epístola posterior* del mismo año. Dicha serie es una generalización del desarrollo del binomio, el cual era muy conocido y había sido muy utilizado por Pascal para resolver diversos problemas. El desarrollo del binomio se entiende así:

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2 + \cdots + x^n$$

Lo que hizo Newton fue generalizar el exponente del desarrollo del binomio, de exponentes enteros a exponentes fraccionarios, de la siguiente manera:

$$(a+x)^{\lambda} = a^{\lambda} + \frac{\lambda}{1} a^{\lambda-1}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2} a^{\lambda-2}x^2 + \cdots + x^{\lambda}$$

Donde $\lambda = \frac{p}{q}$. De ésta manera, Newton en su intento de calcular la cuadratura del círculo, que con terminología moderna seria solucionar la integral

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\ dx.$$

Considero la anterior cuadratura como un problema de interpolación, relacionándola con las cuadraturas análogas

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\ dx.$$

Que eran conocidas para exponentes naturales. Newton tuvo la idea de cambiar el límite superior de integración por un valor genérico x, así obtuvo las siguientes cuadraturas

$$\int_0^x (1-x^2)^0\ dx = x.$$

$$\int_0^x (1-x^2)^1\ dx = x - \frac{1}{3}x^3.$$

$$\int_0^x (1-x^2)^2\ dx = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5.$$

$$\int_0^x (1-x^2)^3\ dx = x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7.$$

$$\int_0^x (1-x^2)^4\ dx = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9.$$

Newton observo que los denominadores que aparecen en las series que solucionan la integral son los números impares $1,3,5,7,9,\ldots$, y que los signos de la expresión se van alternando, y de igual forma, que los numeradores son sucesivamente $\{1\}$, $\{1,1\}$, $\{1,2,1\}$, $\{1,3,3,1\}$, $\{1,4,6,4,1\},\ldots$, que son los números combinatorios que aparecen en el triángulo aritmético de Pascal, que modernamente se pude representar así:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)}{1.2.3.4.5\ldots.k}, \qquad donde \ \binom{n}{0} = 1.$$

Luego por analogía, supone que los términos son los mismos para exponentes fraccionarios, es decir, para exponentes cuyos términos son

$$n = \frac{p}{q} \ donde \ q \neq 0 \ y \ p \epsilon \ \boldsymbol{Z} \text{ y q } \epsilon \ \boldsymbol{Z}.$$

De lo cual deduce que para $n = \frac{1}{2}$ se obtiene que

$$\binom{1/2}{0} = 1, \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \binom{1/2}{2} = -\frac{1}{8}, \binom{1/2}{3} = \frac{1}{16}, \ \binom{1/2}{4} = -\frac{5}{128}, \ldots$$

Razonando por analogía, Newton concluye

$$\int_0^x (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} - \cdots$$

De donde se concluye que; para que se obtenga esta integral término a término, la curva $y = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ debe de tener el siguiente desarrollo mediante series de potencias infinitas

$$y = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} - \cdots$$

Para asegurarse de que ésta analogía da resultados verdaderos, Newton supone que estas series infinitas se comportan como polinomios con infinitos términos a los que se les puede aplicar las operaciones aritméticas elementales, estas son: La suma, la resta, la multiplicación, la división y la radicación. De esta forma, comprueba que la serie infinita de $y = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ multiplicada por si misma da como resultado $y = (1+x^2)$.

También la fórmula del binomio se puede aplicar para exponentes negativos así:

$$\binom{-1}{0} = 1, \binom{-1}{1} = -1, \binom{-1}{2} = 1, \binom{-1}{3} = -1, \binom{-1}{4} = 1, \ldots$$

Con lo cual se deduce que

$$\int_0^x (1+x)^{-1}\ dx = \ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

Por lo tanto,

$$y = \frac{1}{(1+x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots,$$

Que es la misma serie infinita que Mercator anteriormente había encontrado para la hipérbola y si integramos término a término, deducimos la fórmula que Mercator encontró para hallar la cuadratura de la hipérbola, la cual es:

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}\ dx = \ = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \cdots$$

Generalizando los resultados de Newton podemos afirmar que

$$\int_0^n (1-x^2)^n\ dx = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1},$$

$$\text{donde } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots .\,(n-k+1)}{1.2.3.4.5\ \ldots .\,k}, y\ \binom{n}{0} = 1.$$

Newton en cuanto a la noción de curva afirmaba que

> No voy a considerar aquí cantidades matemáticas compuestas de partes extremadamente pequeñas, sino como generadas por un movimiento o flujo continuo. Las líneas se describen, y por describirse son generadas, no por superposición de partes, sino por un flujo continuo de puntos. Citado por (Durán, 2003).

De esta manera podemos determinar que para Newton una curva era el flujo continuo de un punto, que en términos modernos lo podemos expresar como la trayectoria de un punto en movimiento continuo.

4.4 Aportes realizados por Gottfried Wilhelm Leibniz

Leibniz (1646-1716) nació en Leipzig (Alemania), fue matemático, abogado, filósofo, filólogo, historiador e incluso hizo aportes a la Geología. También hizo contribuciones en Mecánica, Óptica, Hidrostática, Neumática, Ciencia Náutica y en Lógica. Descubrió de manera independiente a Newton, el Cálculo Diferencial e Integral en el año 1675, su enfoque fue esencialmente geométrico, algebraico y lógico, a diferencia del de Newton que fue físico. Su principal interés estuvo centrado en la manera de combinar los símbolos matemáticos para llegar a conceptos más elaborados.

Algunos de los trabajos que se conocen de Leibniz son dos artículos en el *Acta Eruditorum* después de 1684 y 1686, el primero de Cálculo Diferencial denominado *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangetibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (Un nuevo método para máximos y mínimos, y también para tangentes, que no se ve obstruido por las cantidades fraccionarias ni por las irracionales) y el segundo de Cálculo Integral denominado *Sobre una geometría oculta*.

Leibniz utilizo las series de potencias para solucionar ecuaciones diferenciales y por último, para representar las curvas. En lo siguiente mostraremos cómo Leibniz descubrió la serie para representar la curva $y = sen(\theta)$.

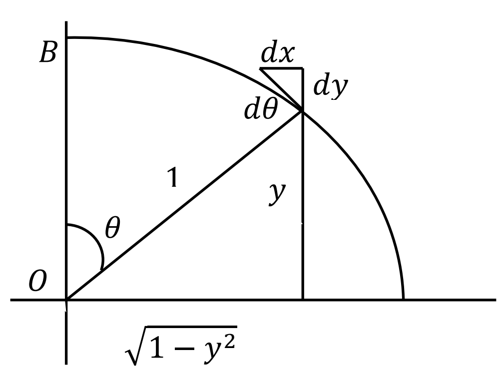


Ilustración 16: Desarrollo del seno

Sea la ilustración 14, el gráfico de la circunferencia con centro en O y radio unitario, donde $P = (x, y)$ y θ es el ángulo que formado por POB.

Por semejanza de triángulos tenemos que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}. \qquad (\mathbf{1})$$

Luego por el teorema de Pitágoras tenemos que,

$$(d\theta)^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \qquad (\mathbf{2})$$

Ahora si elevamos al cuadrado la relación **(1)** y despejamos $(dx)^2$ obtenemos que $(dx)^2 = \frac{y^2}{1-y^2}dy^2$; luego sustituyamos en la relación **(2) y** deducimos que $\frac{y^2}{1-y^2}dy^2 + dy^2 = (d\theta)^2$. Multiplicando a ambos lados por $(1-y^2)$, se concluye que $y^2dy^2 + (1-y^2)dy^2 = (d\theta)^2(1-y^2)$, luego por propiedad distributiva $y^2dy^2 + dy^2 - y^2dy^2 = (d\theta)^2 - y^2(d\theta)^2$; cancelando y agrupando términos semejantes concluimos que,

$$dy^2 + y^2d\theta^2 = d\theta^2.$$

La cual es una ecuación diferencial que se cumple si $y = sen\theta$. Posteriormente, para solucionar esta ecuación Leibniz considera $d\theta$ es constante y saca diferenciales de ambos términos de la igualdad, así:

$d(dy^2 + y^2d\theta^2) = d(d\theta^2)$, $\quad d(dy^2 + y^2d\theta^2) = 0$ luego $d(dy.dy + y^2d\theta^2) = 0$ $dy(ddy) + dy(ddy) + 2ydy\, d\theta^2 = 0$ como consecuencia $2dy(d\, dy) + 2y\, dy\, d\theta^2 = 0$ lo cual organizándolo como el cociente diferencial queda

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = -y.$$

Que es la ecuación diferencial de segundo orden de $y = sen\theta$. Luego Leibniz considera la serie de potencias con coeficientes indeterminados

$$y = sen\,\theta = b\theta + c\theta^3 + d\theta^5 + e\theta^7 + f\theta^9 + g\theta^{11} + \cdots$$

Considera potencias impares porque la función $y = sen\theta$ es impar y considera el término constante igual a cero porque $sen(0) = 0$. Posteriormente, sacando diferenciales (lo cual, modernamente es equivalente a derivar) dos veces a esta expresión, se obtiene que

$$\frac{dy^2}{d\theta^2} = 3.2.\,c\theta + 5.4.\,d\theta^3 + 7.6.\,e\theta^5 + 9.8.\,f\theta^7 + 11.10.\,g\theta^9 + \cdots$$

Que debería ser igual a $-y = -b\theta - c\theta^3 - d\theta^5 - e\theta^7 - f\theta^9 - g\theta^{11} - \cdots$

Luego igualando los coeficientes $3.2.\,c = -c, 5.4.\,d = -d, 7.6.\,e = -e, 9.8.\,f = -f, 11.10. = -g$. De donde $b = 1$ por ser condición inicial, $c = -\frac{1}{3!}, d = -\frac{1}{5!}, e = -\frac{1}{7!}, f = -\frac{1}{9!}, g = -\frac{1}{11!}, \ldots,$ y la alternación de los signos en la siguiente fórmula corresponde a que el primer coeficiente es negativo al igual que el segundo y la multiplicación de éstos dos hace que el nuevo coeficiente sea positivo y así sucesivamente.

$$sen(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \frac{\theta^{11}}{11!} + \cdots$$

Como consecuencia se puede analizar que Leibniz obtiene por su método derivadas la misma serie que Newton ya había encontrado por su método del binomio.

De esta forma observamos que la curva $y = sen(\theta)$ se puede aproximar mediante la siguiente serie:

$$y = sen(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \frac{\theta^{11}}{11!} + \cdots$$

Con la información presentada, se puede afirmar que para Leibniz las curvas se pueden considerar como polígonos de infinitos lados con longitudes infinitesimales.

Nota: Para obtener mayor información sobre otros matemáticos que aportaron al desarrollo histórico de la noción de curva ver anexo 7.

4.7 Aportes realizados por Johann Bernoulli

Johann Bernoulli (1667-1748) nació en Basilea, Suiza. Fue matemático, médico y filólogo. Sus estudios abarcan la Física, la Química, la Astronomía y evidentemente las Matemáticas. Fue el hermano menor de Jakob Bernoulli.

En 1696 en la revista *Acta Eruditorum* Johann presentó un reto a los matemáticos de la época, el cual era: "*Determinar la curva por la que un cuerpo desciende en el menor tiempo por el efecto de la gravedad*" (Salazar, 2011, pág. 63), es decir, encontrar la curva que debe seguir un punto C que se mueve sobre dos puntos A y B en un plano vertical, de tal forma que comienza en A y alcanza B en el tiempo más corto bajo su propia gravedad.

Se cree que Johan imaginó los puntos A y B situados a diferentes alturas por encima del suelo y no puestos directamente uno encima del otro. De esta manera, se puede afirmar que, existen una cantidad infinita de curvas diferentes que conectan estos dos puntos, desde una línea recta hasta un arco de círculo, etc. Luego Johann afirmó "*Para evitar un juicio precipitado, aunque la línea recta AB es ciertamente el camino más corto entre los puntos A y B, no es el camino que se recorre en el tiempo más corto. Sin embargo, la curva ACB, cuyo nombre daré si ningún otro la descubre antes de finales de este año, es una curva bien conocida de los geómetras*" citado por (Salazar, 2011, pág. 66).

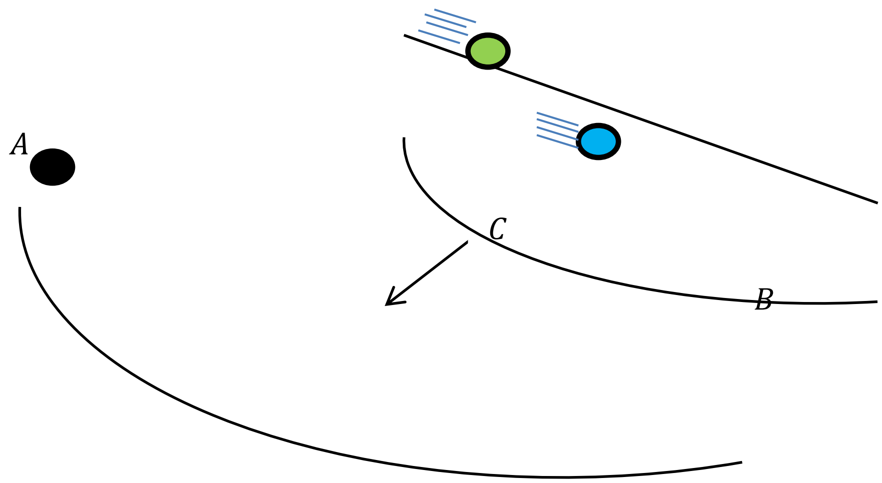


Ilustración 17: braquistócrona

Se considera que en el momento que Johann Bernoulli propuso el reto, Sir Isaac Newton se encontraba en sus labores en la casa de la moneda y como él mismo admitía, ya no tenía la agilidad mental que lo caracterizó como científico.

Para estos tiempos Newton vivía en Londres con su sobrina Catherine Conduitt, quien comenta la historia:

"*Cuando Bernoulli envío el problema, sir Isaac Newton estaba ocupado en una acuñación masiva y no volvió a casa hasta las cuatro desde la torre con un tremendo cansancio, pero no durmió hasta que lo resolvió hacia las cuatro de la mañana*" citado por (Salazar, 2011, pág. 67).

Newton resolvió el problema en cuestión de horas, cansado afirmo "*No me gusta ser…fastidiado por extranjeros en materias matemáticas*." citado por (Salazar, 2011, pág. 67).

Posteriormente en 1697 Johann obtuvo cinco soluciones al reto que había planteado, la suya propia, la de Leibniz, la de su hermano Jakob, la del marqués de L′ Hopital y una solución anónima, un tanto misteriosa con un sello inglés, al abrirlo Johann encontró la solución correcta, que solo podía haber provenido de un gigante de su talla en la persona de Isaac Newton. Aunque sin firma la solución tenía la inconfundible señal de un genio. Se considera que Johann extrañado y asustado por ésa solución afirmo "*reconozco al león por sus garras*" citado por (Salazar, 2011, pág. 68).

Johann dio solución al problema propuesto generando una curva denominada braquistocróna (de la palabra del griego Braquistos: Que significa el más breve y Cronos: Que significa tiempo), se trata de una cicloide.

La solución que él realizo la presentó en un artículo titulado *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus.* En la misma *Acta Eruditorum* y se considera que en éste artículo se inicia una nueva disciplina de las Matemáticas denominada el cálculo de variaciones. Johann mostro que la solución al problema propuesto era el arco de una cicloide invertida que pasa por A y tiene su punto más bajo en B. Ya que Huygens había descubierto que si un punto cae, en caída libre, siguiendo una cicloide desde su punto más alto al punto más bajo, el tiempo de caída no depende del punto donde se inició el movimiento (curva tautocróna).

Nota: Recordamos que la braquistócrona es la misma cicloide, para ver las propiedades de ésta curva, mirar las propiedades de la cicloide.

4.8 Las curvas mediante series de potencias

En resumen, de acuerdo a lo antes estudiado, se puede afirmar que con los estudios sobre las velocidades de los cuerpos, las tangencias (hallar la recta tangente a una curva dada) y las cuadraturas (hallar el área bajo una curva), la concepción de curva adquiere una significación diferente, ya que con el manejo de elementos como indivisibles, cantidades infinitamente pequeñas, incrementos evanescentes, cantidades despreciables, fluxiones, diferenciales, cocientes incrementales, límites, triángulos característicos, área bajo una curva, etc., se posibilita la génesis de nuevas técnicas y métodos infinitesimales que permiten solucionar de forma sorprendente antiguos y nuevos problemas, tales como las tangencias, rectificaciones, cuadraturas, curvaturas, máximos y mínimos, centros de gravedad, etc., que conducen bajo una visión de generalización y unificación; a la creación de un algoritmo universal que se llama Cálculo Diferencial e Integral. Así, al aplicar todas estas concepciones al estudio de las curvas se posibilita una noción y una representación de las curvas, diferente a las ya abordadas, y ésta es, la consideración de una curva como la trayectoria de un punto en movimiento continuo que manifiesta el permanente flujo de las cosas que están afectadas por el tiempo. Ésta sirve para explicar los fenómenos de cambio que se producen en la realidad, tales como: La velocidad, la aceleración, la temperatura, el calor, la presión de fluidos, la caída de los cuerpos, etc. De igual forma, se desarrolla una herramienta conceptual que permite acoger una gran cantidad de curvas que habían sido excluidas de la Geometría por Descartes, las cuales eran las curvas mecánicas.

Esta herramienta conceptual se conoce como series de potencias.

> Todo lo que el análisis común (Algebra) realiza por medio de ecuaciones con un número finito de términos, este nuevo método puede siempre conseguir lo mismo por medio de ecuaciones infinitas, de tal forma que no he tenido ninguna duda en darle así mismo el nombre de análisis. Porque el razonamiento de éste no es menos cierto que el otro; ni las ecuaciones menos exactas: Aunque nosotros los mortales cuya potencia de razonamiento, está confinada dentro de estrechos límites, no podemos expresar ni concebir todos los términos de las series infinitas como para conocer exactamente a partir de ellas las cantidades que deseamos… para terminar, podemos considerar todo esto como perteneciente al Arte Analítica, con cuya ayuda pueden ser determinadas de una manera exacta y geométrica, las áreas, longitudes, etc., de curvas. Sir Isaac Newton, Citado por (Pérez J. , 2010).

Esta era la concepción que tenía Newton sobre la introducción del método de representar las curvas mediante las series de potencias, afirmando que los resultados que se obtienen son los mismos, solo que las ecuaciones del nuevo método son infinitas contrario a las ecuaciones finitas del antiguo método.

Los matemáticos de esta etapa de las historia identificaron que las curvas mecánicas eran como las demás y como tal, no había porque hacer la distinción que realizaba Descartes. En consecuencia, éstas curvas debían ser estudiadas con los mismos métodos. Así: “Se considera las funciones (curvas) representables como series de potencias, cuyos coeficientes definen la derivada en los distintos órdenes” (Espinoza, 2008).

Las series de potencias, además de representar curvas, sirven para solucionar ecuaciones diferenciales y para hallar cuadraturas, de igual forma, permiten extender los algoritmos de cálculo de una manera sistemática a todo tipo de curvas, tanto geométricas como mecánicas. Las cuales, con estos estudios pasan a ser curvas algebraicas y curvas trascendentes. De esta manera, las curvas algebraicas se entienden como aquellas curvas que son expresables mediante potencias racionales de x y y a través de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Mientras que las curvas trascendentes, son aquellas que no son algebraicas.

CAPITULO 5: CONCLUSIONES.

En estas conclusiones pretendemos realizar una síntesis de cómo ha variado la noción de curva en las tres etapas básicas, las cuales son: La etapa de la representación sintética con los antiguos griegos, la etapa de la representación analítica mediante ecuaciones algebraicas con Rene Descartes y la etapa de la representación analítica mediante series de potencias.

También realizamos un contraste del cambio que ha tenido la noción de curva desde la representación mediante series de potencias, hasta la noción actual. De igual forma, realizamos un análisis de las categorías ontológicas que (Gardies, 2001) identificó como las actividades intelectuales recurrentes en la geometría griega.

- **Etapa de la representación sintética de las curvas con los antiguos griegos**

En esta etapa, que en nuestro estudio se inicia con los filósofos presocráticos y finaliza con las concepciones de Pappus y Apolonio, se entiende la curva como una construcción, en la cual, primero se dan algunos objetos necesarios para su construcción tales como puntos, líneas, superficies, ángulos, límites de figuras, diámetros, etc. Y luego se enuncian unas definiciones que cumplen estos objetos, posteriormente se deducen unas propiedades que no necesitan ninguna demostración para verificar su veracidad, las cuales toman el nombre de axiomas y postulados (que se consideran a priori), y por último, mediante deducción lógica se expresan otras propiedades que se deducen de los axiomas y postulados, las cuales necesitan de una construcción geométrica o de una demostración algebraica para determinar su veracidad y usan el nombre de proposiciones o teoremas. Así, cuando hablamos de la representación sintética de la noción de curva estamos hablando de aquella curva que es una línea continua que tiene longitud y que se obtiene por una construcción que se realiza mediante la intersección de: Superficies, figuras geométricas, cuerpos geométricos y un plano con un sólido.

Estas curvas se crearon con el objetivo de modelizar las regularidades que se producen en la realidad y los procedimientos matemáticos que dan cuenta de ellas son las razones entre longitudes, entre áreas, las proporciones y las semejanzas entre figuras. Esta noción de curva admite curvas cerradas o abiertas, y se construye mediante la regla no graduada y el compás. De igual forma, esta noción de curva se caracteriza porque parte de unas hipótesis básicas para posteriormente deducir la tesis, es decir, deducir lo que se quiere probar o lo que se quiere construir.

- **Etapa de la representación analítica de las curvas mediante ecuaciones algebraicas con Rene Descartes**

En esta etapa se realizó una división y caracterización de las curvas, y por ende de la noción de curva, ya que Descartes identificó dos tipos de curvas que en su naturaleza eran totalmente diferentes, las cuales eran: Por un lado, aquellas que se obtenían como resultado de la intersección de figuras geométricas, de cuerpos geométricos y de planos con sólidos que denominó curvas geométricas y fueron reconocidas como el lugar geométrico de un punto que se mueve de manera continua y que representa la solución de una ecuación algebraica que ha sido obtenida mediante definiciones o propiedades de las figuras geométricas. Estas curvas, según Descartes, se caracterizan porque pueden trazarse punto a punto mediante la regla (no graduada) y el compás, y por otro lado, tenemos el otro tipo de curvas, el cual está constituido por aquellas curvas que se generan mediante la cinemática, es decir, se generan haciendo uso de conceptos de Física, tales como, velocidad (tanto constante como variable), aceleración, posición, movimiento rectilíneo uniforme, movimiento circular uniforme y movimiento angular, de esta manera, para la generación de estas curvas también se hacía uso de propiedades geométricas como el paralelismo, la perpendicularidad, la semejanza y las razones entre áreas. Estas curvas las denominó curvas mecánicas porque se forman por el movimiento de un punto sometido a varios movimientos simultáneos e independientes, pero este tipo de curvas no fueron admitidas en la Geometría, porque según Descartes no existían herramientas físicas que permitieran trazarlas completamente como un movimiento continúo. Ya que éstas, no se podían trazar con la regla no graduada y el compás. De igual forma, no se tenía una herramienta conceptual que diera cuenta de ellas, así, la herramienta conceptual con la que se contaba en ese momento eran las ecuaciones algebraicas, las cuales no podía describir este tipo de curvas completamente. Estas curvas se crearon con el objetivo de solucionar los tres problemas clásicos de la Geometría, a saber, la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo.

Son ejemplos de curvas algebraicas las líneas rectas, las circunferencias, las secciones cónicas y la hipopede, entre otras. Son ejemplos de curvas mecánicas; la espiral, la cuadratriz, la trisectriz, la concoide, la cisoide, entre otras.

- **Etapa de la representación analítica de las curvas mediante series de potencias**

Esta etapa la desarrollamos desde Nicolaus Mercator hasta Johan Bernoulli. En esta etapa, con el devenir del Cálculo Integral y Diferencial, producto de abordar problemas de rectificaciones, longitudes de curvas, cuadraturas, curvaturas, tangencias, centros de gravedad, etc., se concibe una noción de curva asociada a la variación, es decir, a los fenómenos que continuamente están sujetos al cambio, con la introducción de un elemento primordial para abordar estos problemas como es el tiempo, el cual se convierte en un elemento universal para estudiar todos los fenómenos de la naturaleza que implique el cambio (movimiento). En este sentido, se entiende la curva como la trayectoria que sigue un punto en movimiento continuo que manifiesta el permanente flujo de los fenómenos de la naturaleza afectados por el tiempo. Así, las curvas se utilizan para explicar fenómenos como los siguientes: la velocidad, aceleración y posición de un cuerpo, la temperatura, el calor, la presión, la caída de los cuerpos, etc.

También es en esta etapa donde se crea un herramienta conceptual capaz de acoger un sin número de curvas que habían sido excluidas de la Geometría, las cuales se conocieron con el nombre de curvas mecánicas. Esta herramienta conceptual se conoce como las series de potencias, las cuales permiten aproximar tanto como se quiera una curva determinada y aparte de representar las curvas, las series de potencias sirven para solucionar ecuaciones diferenciales, para hallar cuadraturas, etc. Y es aquí donde podemos evidenciar las representación analítica de la curvas mediante las series de potencias.

- **Contrastes**

Modernamente una curva se define como una aplicación continua $\varphi: I \rightarrow \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$, donde I es un intervalo de $\boldsymbol{R}$. Así, si $I = [a, b]$ los puntos $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$ son los extremos de la curva, es decir, $\varphi(a)$ es el extremo inicial y $\varphi(b)$ el extremo final; y cuando $\varphi(a) = \varphi(b)$ diremos que la curva es cerrada. (Ivorra, 2011, pág. 191).

Consideramos que la noción moderna de curva es diferente a la noción de curva que se admite en la etapa de la representación de las curvas mediante las series de potencias, que va desde Nicolaus Mercator hasta Johan Bernoulli, porque en la noción moderna de curva se utilizan conceptos matemáticos ya consolidados, como es el caso de Número Real, intervalo, continuidad, límite, función, puntos extremos de una curva, función de variable real, funciones componentes, función continua, espacio tridimensional, etc. Los cuales son consolidados con el establecimiento del Calculo Diferencial e Integral, de esta manera, los conceptos matemáticos ya consolidados posibilitan una noción de curva más amplia que la que se tenía anteriormente, pero aclaramos que esto es solo en cuanto a notación, porque en cuanto al enunciado verbal, consideramos que es el mismo porque en ambos la curva es la trayectoria de un punto en movimiento continuo sujeto al tiempo.

- **Tematización y generalización en el desarrollo histórico de la noción de curva**

De manera concreta, recordamos que la generalización y la tematización son dos procedimientos matemáticos que: El primero, nos permite redefinir o extender una propiedad geométrica hasta un nivel epistemológico superior al que inicialmente se tenía y se produce debido a los desarrollos de dicha propiedad y el segundo (tematización), nos permite elegir una propiedad geométrica como un objeto matemático independiente de cualquier referente sustancial, es decir, nos permite elegir una propiedad geométrica como un objeto matemático autónomo. Es importante decir, que muchas generalizaciones no conducen a una tematización, pero que las tematizaciones si se pueden generalizar.

Estamos de acuerdo con (Gardies, 2001) cuando considera que el procedimiento matemático recurrente en las matemáticas griegas es la generalización, ya que estos matemáticos toman las propiedades geométricas y a partir de ellas, desarrollan otras, que tienen un estatus ontológico superior al que tenían las inicialmente dadas (generalización), pero no crean ningún objeto matemático nuevo (tematización). Así, en cuanto a la noción de curva, podemos decir que en las matemáticas griegas sólo podemos identificar el procedimiento de generalización, ya que la curva se entiende como una línea continua que tiene longitud y que se obtiene por una construcción, la cual se realiza mediante la intersección de: Superficies, figuras geométricas, cuerpos geométricos, planos con sólidos. Los procedimientos matemáticos que dan cuenta de ellas son las razones entre longitudes y áreas, de igual forma, las proporciones y las semejanzas entre figuras. Ésta es la noción que va a permanecer a lo largo de todas las matemáticas griegas, ya que no se elige la curva como un objeto matemático nuevo, si no que siempre ésta depende de la intersección de planos, de conos o de figuras.

Según la información presentada podemos afirmar que la tematización se identifica en Descartes, cuando considera que las curvas son ecuaciones algebraicas.

> Para encontrar todas las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con los de las líneas rectas… (citado por (Gonzales, 2007, pág. 220)).

Lo que Descartes está considerando en la cita anterior, es que; para conocer las propiedades de las curvas, solamente hay que saber la relación que tienen todos los puntos de éstas con sus coordenadas, es decir, solamente es necesario conocer su ecuación.

Así, "la ecuación de la curva es un elemento esencial para desentrañar las propiedades y elementos de una curva" (Gonzales, 2007, pág. 220).

Por otro lado, consideramos que las ecuaciones algebraicas son objetos matemáticos autónomos e independientes; porque Descartes las dotó de una estructura de orden y medida, en la cual definió la extracción de la raíz cuadrada e interpretó las cuatro operaciones básicas de la Aritmética, a saber; la suma, la resta, la multiplicación, la división y además, añadió la radicación. De igual forma, estableció la cerradura para la multiplicación de segmentos, asunto de vital importancia para todo su estudio. Así, aquello que no había sido más que una propiedad de la sección de un cono, para el caso de las cónicas, se convierte en este nuevo objeto matemático, las ecuaciones algebraicas. Es aquí donde se sustituye la curva como construcción por la curva como ecuación.

> Analizando lo complejo a partir de lo simple, dirá Descartes. Y lo simple en la Geometría cartesiana, es la recta, cuya interacción en sucesivas dimensiones

(largo, ancho, altura) proporciona un principio ordenador, el sistema de coordenadas cartesianas, con respecto al cual las curvas son expresables unívocamente mediante ecuaciones. Citado por (Gonzales, 2007, pág. 221).

De igual forma, lo que Apolonio denominó Symptoma de la cónica, que representa la forma retórica de la ecuación de una curva, evoluciona hacia la ecuación algebraica de la curva.

Es tal la tematización presente en Descartes, que aparte de considerar que la parábola tiene la ecuación $y^2 = px$, para la hipérbola $y^2 = px + \frac{p}{d}x^2$ y para la elipse $y^2 = px - \frac{p}{d}x^2$ considera que estas ecuaciones son casos particulares de la ecuación general de segundo grado, que la podemos expresar así:

$$ay^2 + bx^2 + cxy + dx + ey + c = 0$$

Y es aquí donde consideramos que hubo una generalización de una tematización, la cual se evidencia cuando partiendo de la tematización representada en la ecuación particular de la parábola, hipérbola y elipse, se identifica que estas ecuaciones son casos particulares de la ecuación general de segundo grado. Así, se generaliza la ecuación particular de cada cónica por la ecuación general de segundo grado.

Pero la tematización realizada por Descartes no fue suficiente para acoger a todas las curvas en la Geometría, ya que dejó por fuera a las curvas mecánicas, razón por la cual, los matemáticos se vieron obligados a desarrollar una noción matemática que permitiera acoger en la Geometría a este tipo de curvas, que estaban totalmente excluidas de ella.

Esta noción matemática fue las series de potencias, de esta manera, se evidencia que las curvas pasaron de ser representadas por ecuaciones algebraicas de un número finito de términos, a ser representadas mediante ecuaciones algebraicas con un número infinito de términos, es decir, la curva que antes era una ecuación algebraica finita, pasa a ser, una ecuación de infinitos términos. Este proceso nos lleva a una segunda tematización en el desarrollo histórico de la noción de curva, porque las series de potencias, debido a sus desarrollos, se eligieron como objetos matemáticos autónomos que no necesitan de ningún referente para su utilización. En consecuencia, las curvas se identificaron como series de potencias.

6 ANEXOS

En los siguiente Anexos se presenta una visión moderna (información con terminología y resultados modernos) sobre algunos de los resultados obtenidos por los matemáticos antiguos en cuanto a su concepción de la noción de curva.

A.1 Trisectriz

Ecuaciones de la trisectriz

Consideremos como eje de abcisas positivas AD y como eje de ordenadas positivas AB (ver ilustración 8), ambas con origen en A. Los puntos P y B se mueven de tal forma que recorren en tiempos iguales fracciones de espacios iguales por hipótesis. De esta manera tenemos que $\frac{DE}{BD} = \frac{AP}{AB}$ luego $\frac{(AB)\Theta}{(AB)\frac{\pi}{2}} = \frac{AP}{AB}$ pero como $AB = 1$ se deduce que $AP = \frac{2\,\Theta}{\pi}$.

Ecuación en coordenadas polares

Recordemos que las coordenadas polares son de la forma Z (ρ, Ө) donde Z es un punto distinto al origen, ρ la distancia desde el origen hasta Z y Ө el ángulo que forma ρ con respecto al eje X positivo.

Sen (Ө) = $\frac{AP}{\rho}$ pero cómo $AP = \frac{2\,\Theta}{\pi}$ se deduce que Sen (Ө) = $\frac{\frac{2\,\Theta}{\pi}}{\rho}$ despejando ρ obtenemos que $\rho = \frac{2\Theta}{sen(\Theta)\pi}$ es decir $\rho = \frac{2\Theta}{\pi}\frac{1}{sen(\Theta)}$ que es la ecuación buscada.

Ecuación en coordenadas paramétricas

Considerando que en coordenadas paramétricas $x = \rho\cos(\Theta)$ y $y = \rho\,\mathrm{sen}(\Theta)$ obtenemos que $x = \frac{2\Theta}{\pi}\frac{1}{sen(\Theta)}\cos(\Theta)$ y $y = \frac{2\Theta}{\pi}\frac{1}{sen(\Theta)}\mathrm{sen}(\Theta)$ de donde se deduce que $x = \frac{2\Theta}{\pi}cot(\Theta)$ y $y = \frac{2\Theta}{\pi}$ que es la ecuación buscada.

Ecuación en coordenadas cartesianas

Como $\rho = \frac{2\Theta}{\pi}\frac{1}{sen(\Theta)}$ de igual forma $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y Sen (Θ) = $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ luego $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2\ arcosen(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})}{\pi}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ de donde $\pi y = 2\ arcosen(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ o lo que es lo mismo $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = sen(\frac{\pi y}{2})$ que es la ecuación buscada.

A.2 Cuadratriz

Demostración de la cuadratura del círculo con la cuadratriz.

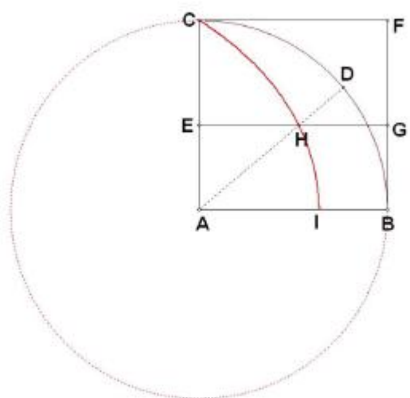


Ilustración 18: Cuadratura del círculo

1) La propiedad que permite cuadrar el círculo es que $\frac{\widehat{CB}}{AB} = \frac{AB}{AI}$ donde $\widehat{CB}$ es el arco de la circunferencia.
2) $\widehat{CB} = r\Theta$ donde Θ es el ángulo que recorre AB hasta llegar a AC. (por la ecuación del movimiento circular) De aquí se obtiene que $\widehat{CB} = 1(\frac{\pi}{2})$ de lo cual se deduce que $\widehat{CB} = \frac{\pi}{2}$ porque $r = AB = 1$ y $\Theta = \frac{\pi}{2}$.
3) Reemplazando los resultados de (2) en (1) se obtiene que $\frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{1}{AI}$ realizando las multiplicaciones correspondientes obtenemos que $AI = \frac{2}{\pi}$.

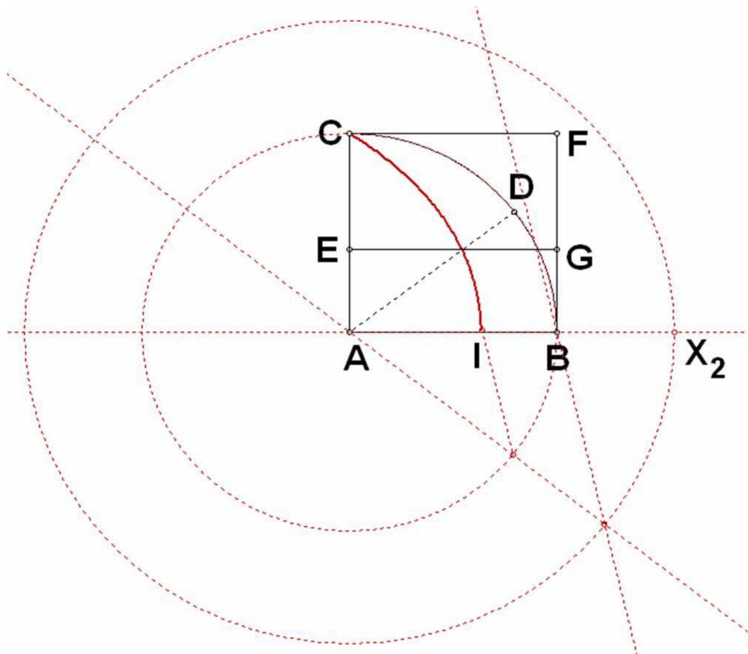


Ilustración 19: Cuadratura del círculo

Continuar con la ilustración 11.

4) Tomando la siguiente proporción $\frac{AI}{AB}=\frac{AB}{AB+x_2}$ y considerando que $AI=\frac{2}{\pi}$ y que $AB=1$ tenemos que $\frac{\frac{2}{\pi}}{1}=\frac{1}{1+x_2}$ de lo cual se deduce que $(1+x_2)\frac{2}{\pi}=1$ y en consecuencia $1+x_2=\frac{\pi}{2}$.

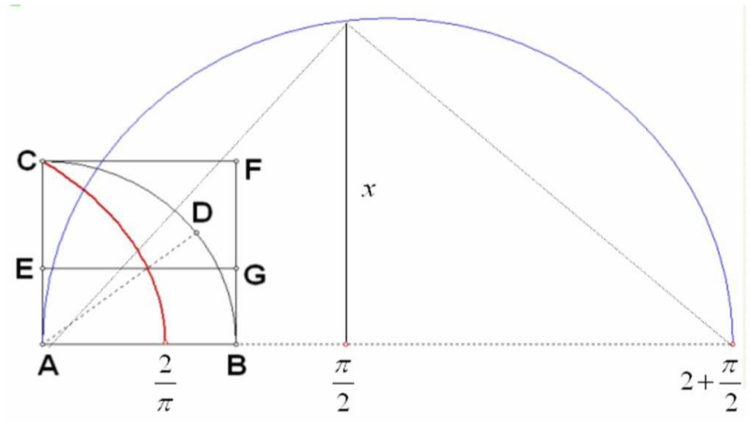


Ilustración 20: Cuadratura del círculo

Continuar con la ilustración 12.

5) A $1 + x_2$ lo vamos a sustituir por $\frac{\pi}{2}$ y donde estaba AI por $\frac{2}{\pi}$ posteriormente a $\frac{2}{\pi}$ le vamos a sumar 2 unidades y construimos la circunferencia con centro en el punto medio entre en A y $2 + \frac{\pi}{2}$.
6) Luego trazamos el segmento x que va desde el punto $\frac{\pi}{2}$ hasta la circunferencia con centro en el punto medio entre en A y $2 + \frac{\pi}{2}$.
7) Luego vamos a aplicar el **teorema de la altura**: En un triángulo rectángulo el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa (que se demostrará posterior a esta demostración). $\frac{x}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{x}$ de lo cual se deduce que $x^2 = 2(\frac{\pi}{2})$ y en consecuencia $x^2 = \pi$ por lo tanto $x = \sqrt{\pi}$. De aquí que el cuadrado formado por x tiene igual área a π que es la misma área que el círculo. Tal como lo evidencia la ilustración 13.

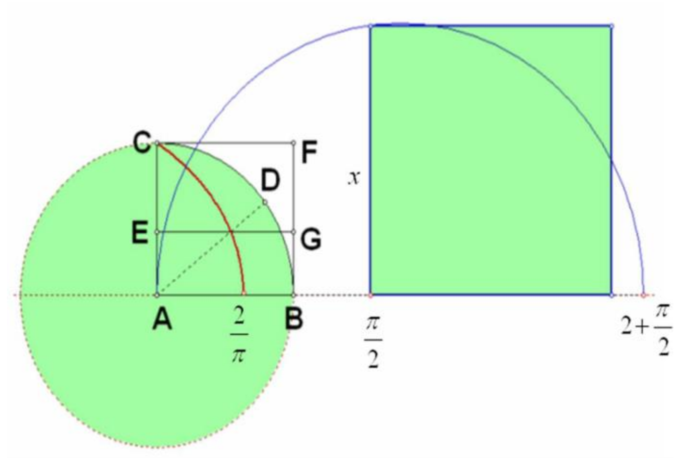


Ilustración 21: Cuadratura del círculo

Teorema**:** En un triángulo rectángulo el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

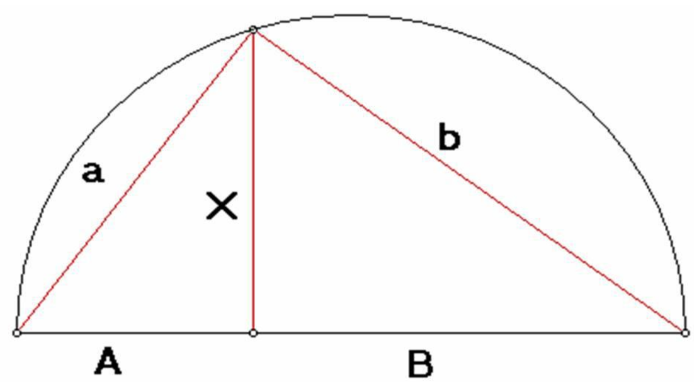


Ilustración 22: Demostración

Demostración:

Tenemos que según la figura por el teorema de Pitágoras $x^2 = a^2 - A^2$ y de igual manera $x^2 = b^2 - B^2$ y si sumamos $2x^2 = a^2 + b^2 - B^2 - A^2$ **(1)** por otro lado $a^2 + b^2 = (A + B)^2$ desarrollando el binomio $a^2 + b^2 = A^2 + 2AB + B^2$ luego reemplazando en **(1)** obtenemos que $2x^2 = A^2 + 2AB + B^2 - B^2 - A^2$ y operando deducimos que $2x^2 = 2AB$ dividiendo por 2 a ambas lados $x^2 = AB$ de lo cual se deduce que $\frac{x}{A} = \frac{B}{x}$.

A.3 Resultados obtenidos por Menecmo

Duplicación del cubo

Menecmo realizo la duplicación del cubo de dos formas, la primera fue a través de la intersección de dos parábolas y la segunda fue a través de la intersección de una parábola y una hipérbola.

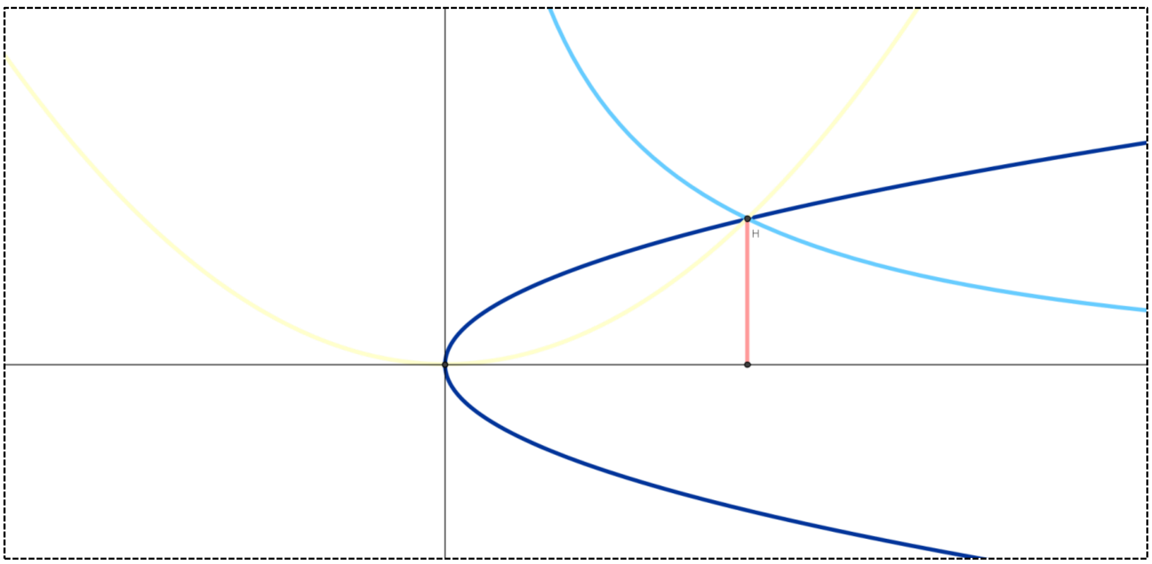


Ilustración 23: Duplicación del cubo

A.4 Duplicación del cubo a través de las dos parábolas

Según la ilustración 16, las curvas a tener en cuenta es la de color amarillo y la de color negro o de igual forma la parábola cuya directriz es paralela al eje x y la parábola cuya directriz es paralela al eje y. Entendiendo que una directriz es una recta perpendicular al eje de simetría y su distancia al vértice de la curva es igual a la distancia del vértice de la curva al foco.

Si queremos duplicar un cubo de arista a construimos dos parábolas, una de lado recto a y otra de lado recto $2a$. Recordemos que el lado recto es una cuerda focal (un segmento de recta que pasa por el foco) perpendicular al eje de la parábola. Supongamos que ambas parábolas tienen vértices en el origen de coordenadas o y también coinciden en el punto $H(x, y)$ y que satisfacen la proporción continúa $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ que ya había enunciado Hipócrates. La parábola cuya directriz es paralela al eje y (de color negro) tiene por ecuación $y^2 = 2ax$ **(1)** y la que tiene directriz paralela al eje x (de color amarillo) tiene por ecuación $x^2 = ay$ **(2)**. Para encontrar las coordenadas de $H(x, y)$ tenemos que despejando y de la ecuación **(2)** se obtiene $y = \frac{x^2}{a}$ y sustituyendo en **(1)** $\frac{x^4}{a^2} = 2ax$ y eliminando x y pasando a multiplicar a^2 se deduce que $x^3 = 2a^3$ y sacando raíz cúbica a ambos lados se obtiene $x = a\sqrt[3]{2}$ y reemplazando éste resultado en **(2)** obtenemos que $y = a\sqrt[3]{4}$ por lo que las coordenadas buscadas son $H(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$. De esta manera la abscisa $x = a\sqrt[3]{2}$ es la arista del cubo buscada.

A.5 Duplicación del cubo a través de la parábola y la hipérbola.

Según la ilustración 16, las curvas a tener en cuenta es la de color amarillo y la de color azul o de igual forma la parábola cuya directriz es paralela al eje x y la hipérbola. La ecuación de la parábola como ya se vio es $x^2 = ay$ **(3)** y la de la hipérbola es $xy = 2a^2$**(4)** despejando y en **(4)** $y = \frac{2a^2}{x}$ y reemplazando en **(3)** obtenemos $x^2 = a(\frac{2a^2}{x})$ y operando $x^3 = 2a^3$ y sacando raíz cúbica a ambos lados $x = a\sqrt[3]{2}$ y reemplazando este resultado en **(4)** se deduce que $y = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$ y en consecuencia $x = a\sqrt[3]{2}$ es la arista del cubo de volumen buscado.

A.6 Aportes realizados por Nicomedes y Diocles.

Nicomedes (280-210 A.C) fue un geómetra griego, su estudio más importante fue el de *las líneas de la Concoide*, el cual contiene el descubrimiento de una curva que él denominó **Concoide** (forma de concha, de ahí su nombre) y además de, el descubrimiento de un instrumento para trazarla, de la cual reconoció tres distintas formas que al parecer son las tres ramas de ésta curva. La Concoide fue utilizada para resolver problemas acerca de la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

La Concoide modernamente la podemos definir como el lugar geométrico de los puntos para los que,

$$|OM| = |OP| + 1$$

O

$$|OM| = |OP| - 1$$

Donde $|OM|$ significa la distancia desde O hasta M.

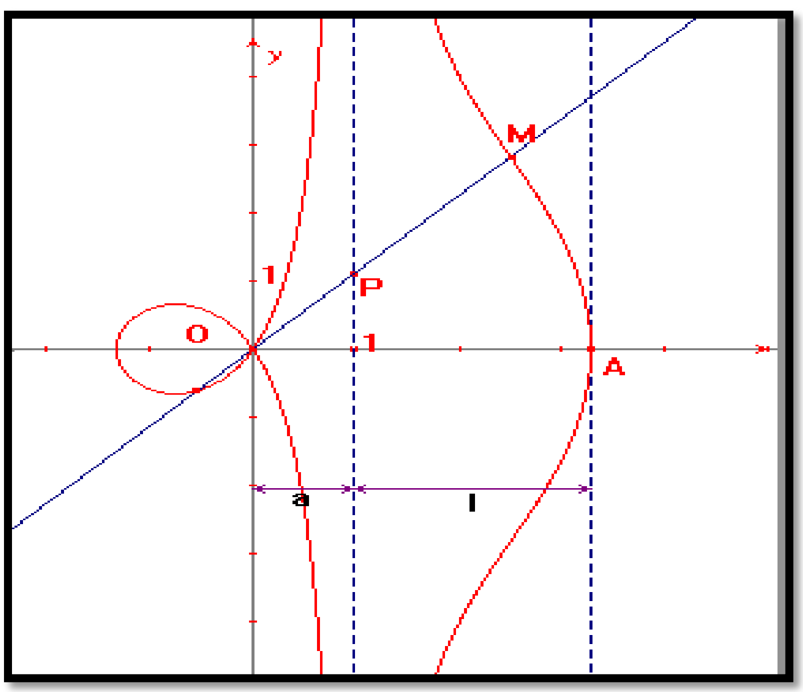


Ilustración 24: Concoide

Para la Concoide se distinguen tres casos, los cuales son: $a > 1$, $a < 1$ y $a = 1$.

Diocles (240-180 A.C) fue un matemático y geómetra de la antigua Grecia, nació en Eubea. Entre sus trabajos están *Sobre los espejos ustorios* (sobre espejos incendiarios), donde introduce con el objetivo de solucionar el problema de la duplicación del cubo, una curva denominada **cisoide** (el término cisoide proviene de la palabra griega kissos, que significa hiedra, por la forma semejante a una hoja de hiedra que adopta la figura limitada por un arco de dicha curva y una semicircunferencia).

Construcción de la cisoide

Dada una circunferencia con centro en 1 y radio λ, y una recta L tangente a ella, se traza las rectas que pasan por el punto O, diametralmente opuesto al de tangencia; estas rectas cortan a la circunferencia en un punto R y a la recta en el punto Q.

Modernamente la Cisoide se define como el conjunto de los puntos P tales que

$$|OP| = |RQ|$$

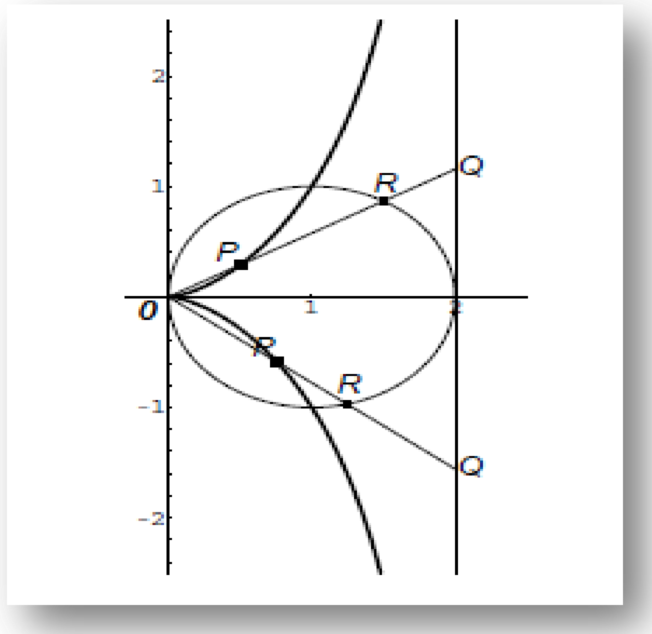


Ilustración 25: Cisoide de Diocles

A.7 Resultados obtenidos por Arquímedes

Trisección del ángulo mediante la espiral

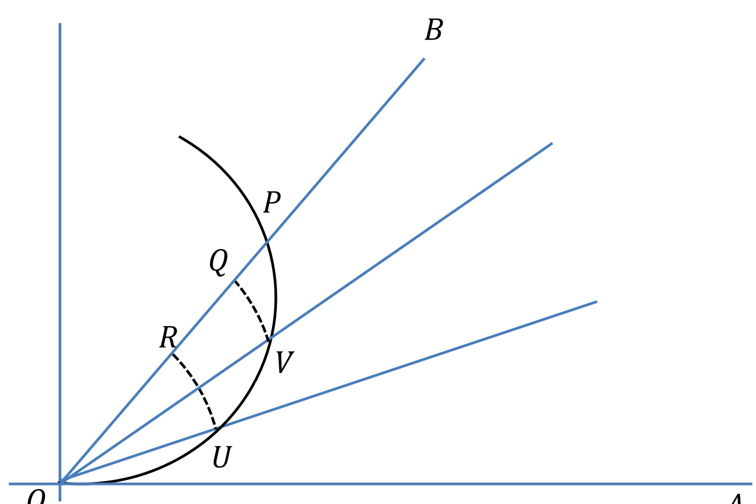


Ilustración 26: Trisección del ángulo.

Situamos el ángulo AOB de tal forma que el vértice y el lado inicial OB coincidan con el origen O de la espiral y la posición inicial OA de la semirrecta que gira.

- Sea P el punto de intersección del segundo lado del ángulo con la Espiral.
- Dividimos el segmento OP en tres partes iguales por medio de los punto R y Q. Por el teorema de Tales.

Cuadratura del círculo mediante la espiral

- Sean OR y OQ las circunferencias de centro O y radios OR y OQ. Porque un centro y un radio determinan una circunferencia.
- Estas circunferencias cortan a la Espiral en los puntos U y V, entonces las semirectas OU y OV trisecan al ángulo AOB. Donde P es la intersección de la Espiral con el Triángulo.

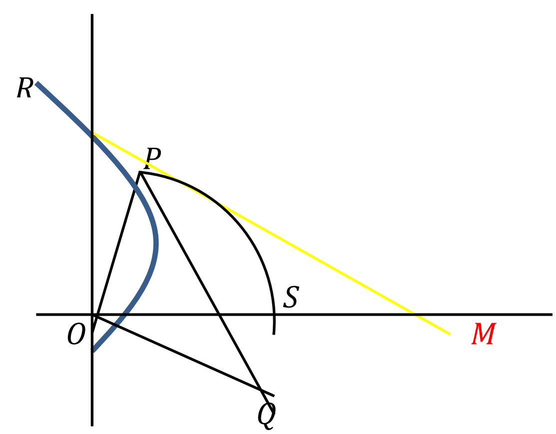


Ilustración 27: Cuadratura del círculo.

- Trácese por un punto P de la Espiral OPR la tangente PQ, y sea Q el punto de intersección de esta tangente con la recta OQ (conocida como la subtangente polar del punto P) perpendicular al radio vector OP por el origen O.
- Por la proposición 20, ya mencionada se deduce que el segmento OQ es igual a la longitud del arco PS de la circunferencia de centro O y radio OP.

A.8 Ecuación de la catenaria

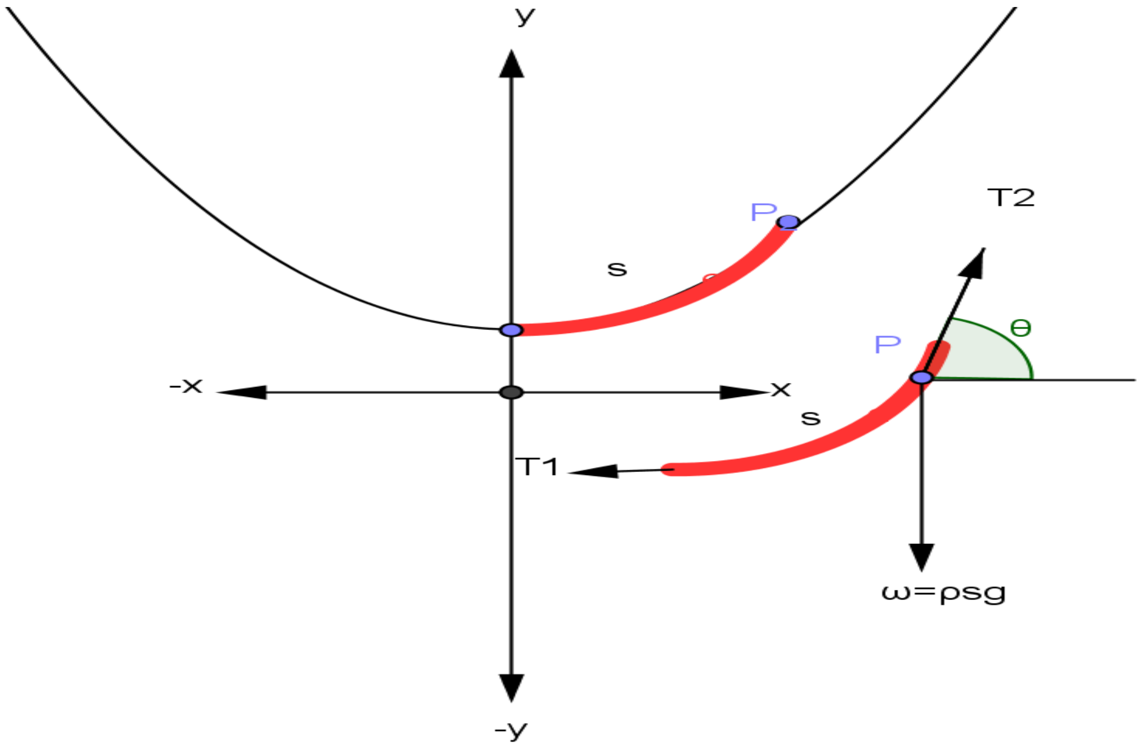


Ilustración 28: Diagrama de fuerzas en la catenaria

Aplicando la segunda ley de Newton e identificando las fuerzas que actúan se tiene que

$$T_1 = T_2 \cos(\theta) \text{ y } T_2 sen(\theta) = \rho s g$$

De donde se deduce que $tan(\theta) = \frac{\rho s g}{T_1}$ luego podemos afirmar que $T_1 \frac{tan(\theta)}{\rho g} = s$, es decir, que la longitud de arco s medida desde el punto más bajo a cualquier punto en la Catenaria, es proporcional a la tangente del ángulo que se forma entre la tangente horizontal (ya que la tangente en el punto más bajo es horizontal) y la tangente en el extremo superior. En cualquier punto de la Catenaria y esa constante de proporcionalidad es $a = \frac{T_1}{\rho g}$. Posteriormente obtenemos que $a \tan(\theta) = s$, pero además sabemos que $\tan(\theta) = \frac{dy}{dx}$ luego tenemos que $s = a\ \frac{dy}{dx}$ **(1)**

La longitud de arco s tiene como base un triángulo rectángulo, de lo cual se deduce que $ds^2 = dx^2 + dy^2$ **(2)**, por lo que si elevamos al cuadrado en **(1)** obtenemos que $s^2 = a^2 \frac{dy^2}{dx^2}$ **(3)** luego operándola ecuación **(2)** y **(3)** deducimos que $s^2 + a^2 = a^2 \frac{ds^2}{dx^2}$

$$\frac{dx^2}{a^2} = \frac{ds^2}{s^2 + a^2}$$

$$\frac{dx}{a} = \frac{ds}{\sqrt{s^2+a^2}} \quad \textbf{(4)}$$

Resolviendo esta integral por sustitución trigonométrica tenemos que:

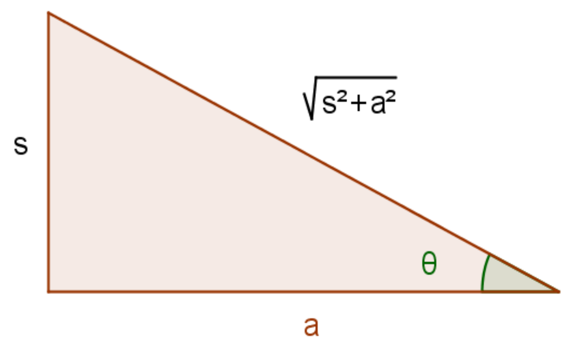


Ilustración 29: Triángulo para la sustitución trigonométrica

$\tan(\theta) = \frac{s}{a}$ Luego $s = a\ \tan(\theta)$ y $ds = a\sec(\theta)^2\, d\theta$ y sustituyendo en **(4)** deducimos que

$$\frac{dx}{a} = \frac{a\ \sec(\theta)^2\ d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2(\theta) + a^2}}$$

$$\frac{dx}{a} = \frac{a\ \sec(\theta)^2\ d\theta}{\sqrt{a^2\left(1 + \tan^2(\theta)\right)}}$$

$$\frac{dx}{a} = \frac{a\ \sec(\theta)^2\ d\theta}{\sqrt{a^2(\sec(\theta)^2\ )}}$$

$$\frac{dx}{a} = \frac{a\ \sec(\theta)^2\ d\theta}{a\sec(\theta)}$$

$$\frac{dx}{a} = \sec(\theta)\, d\theta$$

$$\int \frac{dx}{a} = \int \sec(\theta)\, d\theta$$

$$\frac{x}{a} = \log|\sec(\theta) + \tan(\theta)|$$

$$\frac{x}{a} = \log\left|\frac{\sqrt{s^2 + a^2}}{a} + \frac{s}{a}\right|$$

$$\frac{x}{a} = \log\left|\frac{\sqrt{s^2 + a^2} + s}{a}\right|$$

$$\frac{x}{a} = \log\left|\sqrt{s^2 + a^2} + s + \frac{1}{a}\right|$$

$$\frac{x}{a} = \log\left|\sqrt{s^2 + a^2} + s\right| + \log\left(\frac{1}{a}\right) \textbf{(5)}$$

$$e^{x/a} = \left(\sqrt{s^2 + a^2} + s\right)\frac{1}{a} (\textbf{6})$$

Si multiplicamos por (-1) la ecuación número **(5)**, deducimos que

$$-\frac{x}{a} = -\log\left|\sqrt{s^2 + a^2} + s\right| - \log\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$-\frac{x}{a} = \log\left(\sqrt{s^2 + a^2} + s\right)^{-1} + \log\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}$$

$$-\frac{x}{a} = \log\left(\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2} + s}\right) + \log(a)$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = \frac{a}{\sqrt{s^2 + a^2} + s}$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = \frac{a}{\sqrt{s^2 + a^2} + s} \times \frac{\sqrt{s^2 + a^2} - s}{\sqrt{s^2 + a^2} - s}$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = \frac{a(\sqrt{s^2 + a^2} - s)}{s^2 + a^2 - s^2}$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = \frac{a(\sqrt{s^2+a^2}-s)}{a^2}$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = \frac{-s+\sqrt{s^2+a^2}}{a} \ (\mathbf{7})$$

Sumando las ecuaciones número **(6)** y número **(7)** tenemos que

$$e^{x/a} + e^{-\frac{x}{a}} = \frac{\sqrt{s^2+a^2}+s}{a} + \frac{-s+\sqrt{s^2+a^2}}{a}$$

$$e^{x/a} + e^{-\frac{x}{a}} = \frac{2\sqrt{s^2+a^2}}{a} \ \mathbf{(8)}$$

Ahora si despejamos dy en la ecuación número **(1)** obtenemos que $dy = \frac{s\,dx}{a}$ **(9)** y despejando dx en la ecuación número **(4)** $dx = \frac{a\,ds}{\sqrt{s^2+a^2}}$ y reemplazando en **(9)** deducimos que

$$dy = \frac{sds}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

Y solucionando la anterior ecuación diferencial se concluye que

$$y = \sqrt{s^2+a^2} \ (\mathbf{10})$$

Reemplazando la ecuación número **(10)** en la **(8)** podemos concluir que

$$e^{x/a} + e^{-\frac{x}{a}} = \frac{2y}{a} \ \ (\mathbf{11})$$

Despejando y de la ecuación **(11)** se obtiene que

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

O mediante funciones hiperbólicas

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Por tanto la ecuación de la Catenaria es

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Propiedades de la catenaria

- La longitud de un arco de la catenaria medida a partir de su cima $(x = 0)$ mide $s = a\, senh(\frac{x}{a})$.
- La relación de la longitud de arco s, y su ordenada y, es: $s^2 + a^2 = y^2$.
- El área del rectángulo mixtilíneo entre la curva, el eje de las abscisas, el eje de Las ordenadas y la vertical al punto de la curva considerado, tiene por valor $S.a$.
- Leonhard Euler (1707-178) mostro en 1744 que una Catenaria rotada alrededor de su asíntota genera un catenoide, la única superficie de revolución mínima.
- Su envoluta es la tráctriz.

Catenaria en contexto

En Estados Unidos, más específicamente, en la ciudad de St. Louis Missouri en el Antiguo Palacio de justicia existe un arco con la forma de Catenaria invertida que mide 192 metros, tanto de alto como de ancho. El interior del arco es de hueco y contiene un sistema de transporte, escaleras de emergencia y un área de observación en la cima. Fue diseñada por el arquitecto finlandés-americano Eero Sarinen en 1947.

A.9 Aportes realizados por Gilles persone de Roberval

Roberval (1602-1675). Fue un matemático francés, realizo trabajos sobre el sistema del universo. Se considera que fue Galileo Galilei quién en 1599 acuñó el término cicloide y se encargó de estudiar por primera vez el área que encierra un arco de cicloide en base a consideraciones de carácter mecánico. Posteriormente el francés Marín Mersene fue quien propuso a Roberval el problema de hallar el área encerrada bajo una nueva curva denominada la cicloide, la cual modernamente se entiende como el lugar geométrico que describe un punto de una circunferencia que rueda sobre una recta sin deslizarse.

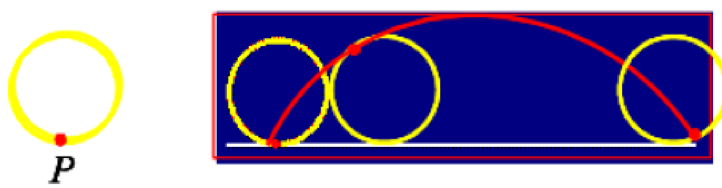


Ilustración 30: cicloide

Roberval soluciono el problema que le había planteado Mersenne y encontró un método para halla su tangente a través de una composición de movimientos.

Ecuaciones paramétricas de la cicloide

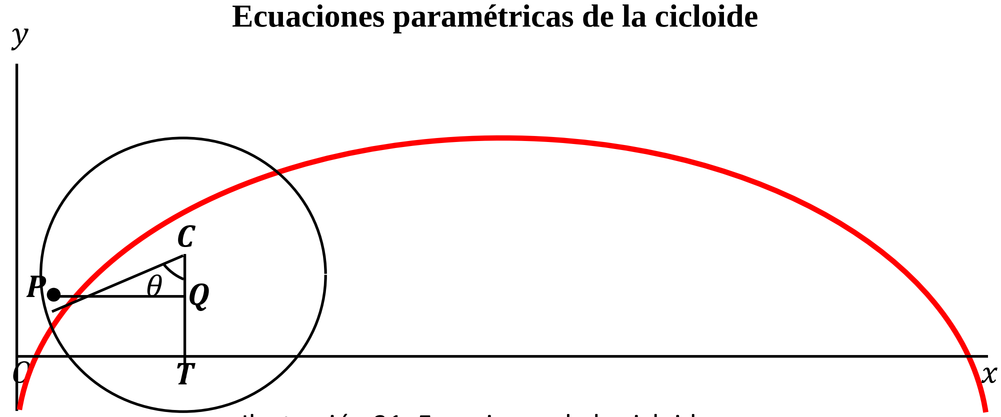


Ilustración 31: Ecuaciones de la cicloide

Para deducir las ecuaciones cartesianas de la Cicloide, Roberval parte de las ecuaciones paramétricas, considerando que:

$$OT = r.\theta$$
$$PQ = r.Sen(\theta)$$
$$CQ = r.Cos(\theta)$$

De lo cual se deduce que, para las ecuaciones cartesianas se tiene que hallar primero las coordenadas rectangulares del punto P considerando que $P = (x, y)$. Así:

$x = OT - PQ$ De igual forma $y = CT - CQ$

Y reemplazando deducimos que

$$x = r\theta - r.Sen(\theta)$$
$$y = r - r.Cos(\theta)$$
Con $0 \leq \theta \leq 2\pi$

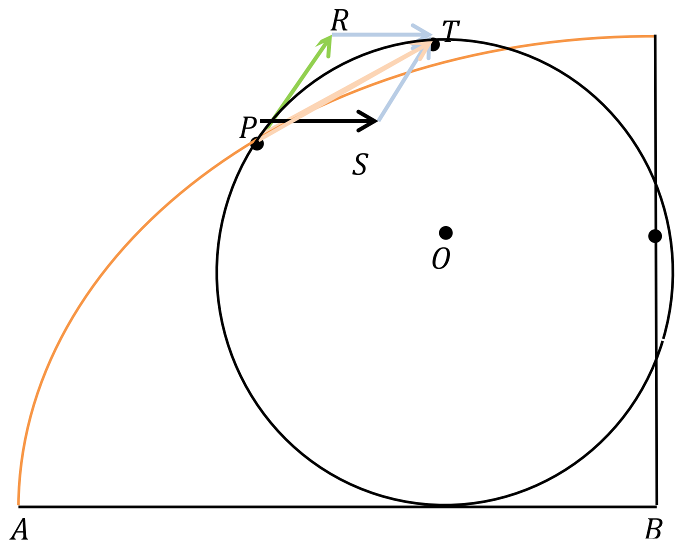


Ilustración 32: Tangente a la cicloide

Roberval *considera una curva como la trayectoria de un punto móvil que obedece a dos movimientos simultáneos y también considera la recta tangente como la dirección del movimiento en ese punto* (Pérez J. , 2010, pág. 26). Así, para hallar la tangente a la cicloide Roberval considera un punto P de la cicloide sometido a dos movimientos simultáneos, uno de traslación con el círculo y el otro de rotación, ambos con velocidades iguales.

Según va rodando sobre la recta AB el círculo generador, en el punto P es arrastrado horizontalmente, mientras que al mismo tiempo, gira alrededor de O, que es el centro del círculo. Posteriormente se traza por P un segmento horizontal PS para representar el movimiento de traslación, y otro segmento igual PR tangente en P al círculo generador para representar la rotación alrededor de O. Como $PS = PR$ lo cual indica que el movimiento de traslación es igual al movimiento de rotación se tiene que la bisectriz PT del ángulo SPR nos dará la dirección del movimiento real del punto P en ese instante, luego PT es la tangente a la cicloide.

Esta forma de hallar la tangente a una curva mediante consideraciones mecánicas ya había sido abordada por Arquímedes cuando le hayo la tangente a la espiral.

Propiedades de la cicloide

- La longitud de un arco de Cicloide es $8a$.
- Si $a = h$, el área bajo un arco de Cicloide es $3\pi a^2$.
- Su envolvente es otra Cicloide en posición diferente.
- Es tautocróna, lo cual implica que si dos partículas con la misma masa caen en un arco de cicloide invertida desde diferentes alturas entonces éstos alcanzan el punto más bajo del arco en el mismo tiempo.
- Es braquistocróna, lo cual implica que es la curva del más rápido descenso. Es decir, es el camino que une dos puntos fijos que debe seguir una partícula para recórrelo en un tiempo mínimo.

A.10 Aportes realizados por Christian Huygens

Huygens (1629-1695) nació en La Haya, Holanda. Fue un gran físico, matemático y astrónomo. También hizo grandes aportes a la teoría de la luz, a la Astronomía y se le atribuye la creación de un cronómetro portátil y la construcción del reloj de péndulo, además realizó diversas mejoras al telescopio las cuales le permitieron descubrir los anillos de Saturno y un satélite de éste planeta, el cual es el mayor y el más brillante que tiene este planeta y se le denominó Titán. También descubrió la nebulosa de Orión.

Entre sus obras están *Horologium* publicado en 1659, *Horologium oscillatorium* (el reloj de péndulo) de 1673, *Systema Saturnium, sive de Causis mirandorum Saturni phaenomenon* publicado en 1659, *Astrocopia compendiaria* publicada en 1684, además del famoso libro de óptica *Traité de la Lumiére* (Tratado de la luz) publicado en 1690 y también escribió el primer tratado de cálculo de Probabilidades: *De Ratiociniis in ludo aleae* (Sobre los razonamientos relativos a los juegos de azar).

Se considera que el matemático Jakob Bernoulli en su artículo en las *Actas Eruditorum* de Leibniz en 1690 lanzo un reto para demostrar la potencia de su nuevo Cálculo. Este reto, que representaba un desafió para todos los matemáticos y físicos de la época, era descubrir la ecuación de la curva que se forma al suspender de dos puntos en una cuerda de peso uniforme. La curva era conocida como cadeneta o curva funicular, la cual describía la forma que asume una cadena perfectamente flexible e inextensible de densidad uniforme colgando de dos soportes y accionada por la gravedad.

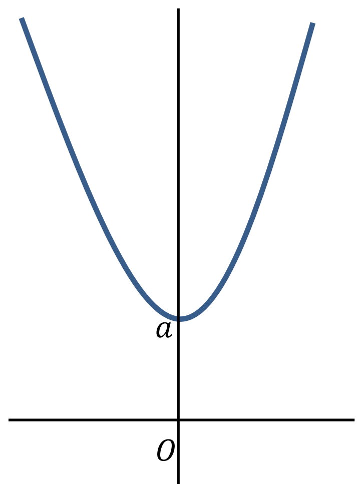


Ilustración 33: catenaria

Se entiende que fue Christian Huygens quien la denomino catenaria (del latín catena que significa cadena) y a demás encontró la verdadera ecuación de ésta curva, ya que otros matemáticos la habían hallado erróneamente.

Nota: Para ver más información sobre la catenaria ver anexo número 6.

7 BIBLIOGRAFIA

Alvarez, C. (2000). *Descartes lector de Euclides. En: Descartes y la ciencia del siglo XVII.* México: Siglo XXI editores.

Arazena, V. (1998). Las curvas mecánicas en la geometría griega. La Cuadratriz de Dinóstrato. *SUMA*(28), 31-36.

Arboleda, L. C. (2014). *Analisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas.* Cali-Valle.

Bachellar, G. (2000). *La formación del espíritu científico.* (J. Babini, Trad.) México. D.F: Siglo veintiuno editores.

Bombal, F. (2012). La cuadratura del círculo: Historia de una obseción. (U. Complutense, Ed.) *14 programa de promoción de la cultura científica y tecnológica., 106*(2), 241-28.

Boyer. (1949). *the history of Calculus.* New York: Dover Publications, Inc.

Boyer. (1986). *Historia de la matemática.* (I. John Wiley & Sons, Trad.) Madrid: Alianza Universidad Textos.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* (I. John Wiley & Sons, Trad.) Madrid: Alianza Universidad Textos.

Descartes, R. (1947). *La geometría.* (P. R. Soler, Trad.) Argentina: Epasa Calpe.

Durán, A. J. (2003). Sobre la historia del concepto topológico de curva. 19.

Espinoza, &. o. (2008). *Fundamentos del Cálculo.* GARABATOS.

Euclides. (1991). *Elementos.* (M. L. Puertas, Trad.) Madrid, España: Gredos.

Fernández, M. (2009). *Galeria de curvas en el plano.* Tesis de maestria, Universidad Nacional Autonoma de México, Facultad de ciencias.

Gardies, J. (2001). *La tematización en matemáticas.* (F. Galvez, Trad.)

Gardues, J. (2001). *La tematización en matemáticas.* (F. Galvez, Trad.)

Gonzales, P. M. (Mayo de 2007). Raíces Históricas y trascendencia de la geometría análitca. *Sigma*(30).

González, P. M. (1995). La Matemática vertebradora de la cultura. Barcelona.

Heath, T. (1912). *The works of Archimedes.* Cambridge.

Heath, T. (1940). *The thirteen book of Euclides Elements* (Second Edition ed.). New York: Dover Publications.

Ivorra, C. (2011). Análisis Matemático.

Manzo, S. (1998). Notas sobre el corpuscuslarimo, la causalidad, y el movimiento en el timeo de Platón. *LLULI, 21*.

Menor, I. S. (2004). *Las Matemáticas en Grecia durante 800 a.C-600 d.C.* Ingeniería Técnica Agraria, Real.

Parra. (2009). Arquímedes: Su vida, obras y aportes a la matemática moderna. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 9*(1).

Parra, E. (2009). Arquímedes: Su vida, obras y aportes a la matemática moderna. *Revista digital matemática, educación e internet., 9*(I). Obtenido de Revista digital matemática, educación e internet.

Peña, A. &. (2009). *La constitución histórica del objeto cónica: un estudio desde Apolonio hasta Descartes.* Universidad del valle, Cali.

Perez. (6 de Julio de 2007). Malditos sean la regla y el compás. Granada, España.

Pérez, A. (2004). *Curvas con historia: De las cónicas a las ecuaciones de las flores.* Universidad de Cataluña., Departamento de Mateáticas, Estadística y Computación., Cataluña.

Pérez, A. (2006). *Curvas en la naturaleza.* Institución de educación superior Salvador Dalí.

Perez, A. S. (Escritor). (2000). *Orden y caos: La busqueda de un sueño* [Película]. RTVE.

Pérez, J. (2010). Orígenes del Cálculo Diferencial e Integral I: De la Matemática griega a los antecedentes del Cálculo.

Perga, A. (1998). *Las cónicas. Libros I-III.* (C. Taliferro., Trad.) Nuevo México: San Fe.

Perga, A. o. (1998). *Conics.* (C. Taliaferro., Trad.) New México: Green Lion Press: Santafe.

Platon. (1992). *Dialogos, libro VI.* Gredos.

Puertas, M. (1991). *Euclides Elementos.* Biblioteca clásica. Madrid: Gredos. S.A.

Puertas, M. (1991). *Euclides Elementos. Libros I-VI.* Biblioteca clásica. Madrid.: Gredos S.A.

Puertas, M. (1991). *Euclides Elementos. Libros X-XIII.* Biblioteca Gredos. Madrid.: Gredos S.A.

Rivera, A. (2006). *Historia de las matemáticas.*

s.a. (miercoles de noviembre. de 2013). *Tipos de Obstáculos.* Recuperado el 3 de 11 de 2013, de htt://aportes.educ.ar/matematica/popup/tipos de obstaculos.php

Salazar, W. (2011). *Introducció al cálculo a través de algunas curvas especiales*. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de ciencias, escuela de física., Medellin.

Senior, L. d. (Octubre de 2009). Los axiomas en Geometría. (S. M. Mexica, Ed.) (62).

Spinoza. (s.f). *Los principios de la filosofía cartesiana.*

Vera, F. (1970). *Cientificos griegos.* Madrid España: Aguilar.