ANÁLISIS HISTÓRICO – EPISTEMOLÓGICO DE LA INICIACIÓN DE LA COMBINATORIA

CASO: COMBINACIONES

DIANA MILAGROS PARRA VARGAS

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI

2015

ANÁLISIS HISTÓRICO – EPISTEMOLÓGICO DE LA INICIACIÓN DE LA COMBINATORIA

CASO: COMBINACIONES

DIANA MILAGROS PARRA VARGAS

Código: 1231052

Trabajo de grado presentado en el programa académico Licenciatura en Matemáticas y Física como requisito para optar al título de Licenciada en Matemáticas y Física

DIRECTOR

Rubén Darío Corrales Velasco

CODIRECTOR

Daniel Arbeláez Rojas

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2015

CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

RESUMEN

La historia mostrará un panorama general cronológico referente a la iniciación de la combinatoria que se ha clasificado por siglos, a conveniencia para exhibir momentos contundentes en la constitución de las ideas que se desarrollaron en el estudio de estructuras discretas y las relaciones a través de sus operaciones. Las interrelaciones entre los elementos de un conjunto originan cambios en su estructura y es así que se empieza a vislumbrar la estirpe, es decir, las raíces o naturaleza de la que gozan las combinaciones.

Es desde oriente, a través de la cultura china en tiempos legendarios que se encuentran las evidencias de elementos primigenios de la combinatoria con el primer cuadrado mágico. Las reglas principales del cálculo de permutaciones, variaciones y combinaciones están a cargo de los matemáticos hindúes y judíos. Pero el camino hacia el reconocimiento de la combinatoria como un campo digno de estudio formal lo preparan los matemáticos Fermat y Pascal a través de sus correspondencias buscando la solución al problema del reparto. El punto cúspide se genera con las obras de Gottfried Wilhelm Leibniz y Jacobo Bernoulli. El primero es el autor de *Disertatio de arte combinatoria* donde introduce el término “Combinatoria” como actualmente se conoce. Además, Leibniz realiza la construcción sistemática del conocimiento combinatorio que se había obtenido hasta la época. De otro lado, es la obra magna *Ars Conjectandi (Arte de conjeturar)* de Jacobo Bernoulli donde la combinatoria se vuelve la base para la resolución de algunos problemas de probabilidad de aquel tiempo.

PALABRAS CLAVE:

Combinatoria, cronología, triangulo aritmético, orden, repetición, combinaciones.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se inscribe en la línea de investigación de Historia y educación matemática considerando un enfoque de corte epistemológico con el propósito de ahondar en la combinatoria y sistematizar las ideas principales para establecer el derrotero de las combinaciones, comúnmente filiada a la probabilidad. Es amplia la discusión frente a la relación Historia – Educación Matemática, en este trabajo de grado se consideran los siguientes aspectos como elementos motivadores.

1. Constructo Histórico: las ideas y aportes provenientes de matemáticos de diferentes latitudes y de todas las épocas, son una herencia intelectual en el edificio de las matemáticas.

2. Estudios histórico-epistemológicos: permiten indagar, rastrear y concluir algo acerca de elementos del pasado que aporten a la enseñanza de las matemáticas en relación con algún tema en particular.

3. Autores destacados: se reconoce que los aportes matemáticos de autores como Pingala, Papus, Bhaskara, Levi ben Gerson, Tartaglia, Cardano, Briggs, Fermat, Pascal, Leibniz y Jacobo Bernoulli permitieron dar paso a la construcción recursiva de nuevas teorías como el cálculo de probabilidades, el análisis combinatorio y conceptos matemáticos, entre ellos combinaciones, permutaciones y variaciones.

A partir de esto se propone mostrar una indagación histórica que permita dar cuenta del proceso de transformación que sufrieron los conjuntos discretos[1] cuando a través de las relaciones entre los elementos y sus operaciones, surge el cambio de sus estructuras; más concretamente, ver el nacer de la institucionalización de las combinaciones y los diferentes problemas y dificultades que se podían solucionar con la misma. Este análisis se realiza en el marco de los trabajos de Levi, Cardano, Briggs, Fermat, Pascal, Leibniz y Jacobo Bernoulli.

[1] Entiéndase discreto como finito o infinito numerable. Ver página 94 en la sección *combinatoria* para contextualizar este término.

Los referentes bibliográficos serán fuentes principales como *Pascal´s Arithmetical Triangle* de (Edwars, 1987) y *Razonamiento Combinatorio* de (Batanero, Godino, & Navarro - Pelayo, 1996) . Es importante resaltar aquí que la primera referencia bibliográfica *Pascal´s Arithmetical Triangle* de (Edwars, 1987) es el corazón o la motivación de este trabajo dado que alrededor del 70% está estandarizada a los aportes, comentarios y sugerencias que realiza el autor. La notación para el tratado de Pascal es recopilada de *Pascal´s Arithmetical Triangle*, (pág. 60 – 68); los aspectos generales de la vida de Pascal también son recopilados de ahí (pág. 27) y la articulación de los números combinatorios, los números binomiales y los números figurados igualmente son recopilados del libro (Seis primeros capítulos). El trabajo de (Edwars, 1987) es una joya no solo a nivel histórico sino también a nivel matemático, en él se puede contemplar la rigurosidad de las ideas de un constructo sociocultural de hombres de toda la historia que en algún momento, ya sea por una necesidad, por situaciones fenomenológicas o por el simple placer de los juegos o retos que encierran la ontología de los objetos matemáticos, pensaron en cuestiones combinatorias. La segunda referencia bibliográfica conectó la combinatoria y su uso con los diferentes campos de investigación. Además, permitió visualizar un panorama general del desarrollo histórico de la combinatoria.

También se consultaron unas fuentes segundarias como *A history of probability and statistics and their applications before 1750* de (Hald, 1990) y el capítulo *Teoría matemática elemental de la probabilidad* del libro Azar y probabilidad[2] de (Godino, Batanero, & Cañizares, 1996).

[2] Para una descripción más detallada de las referencias bibliográficas diríjase al capítulo II de este trabajo, sección Metodología.

1. CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los lineamientos curriculares proponen tres aspectos fundamentales para organizar el currículo los cuales son: Los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto. Dentro de los procesos generales que son los que tienen que ver con el aprendizaje, se encuentran el razonamiento y la resolución de problemas. Ahora, interiormente en los conocimientos básicos que son los que tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de la matemática, se encuentra el pensamiento aleatorio y sistemas de datos. Además, dentro del contexto que tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende se encuentra las situaciones problemáticas: de las mismas matemáticas, de la vida diaria o de otras ciencias. Es así, como la enseñanza de la combinatoria, la cual brinda el contexto según los lineamientos y desarrolla el razonamiento y la resolución de problemas; se hace presente en el currículo colombiano dado que ella se encuentra en el interior del pensamiento aleatorio y los sistemas de datos por medio de la enseñanza de la probabilidad, la cual fundamenta sus conceptos en la combinatoria. De otro lado, los estándares de competencias caracterizan al pensamiento aleatorio como una fuente de estudio del azar, de la incertidumbre y de la ambigüedad. El uso que tiene el pensamiento aleatorio es de total relevancia en la sociedad para poder tomar decisiones en ciertas situaciones. Además, ayuda a interpretar, analizar y utilizar los resultados que se publiquen en periódicos o revistas, que se presenten en televisión o que aparezcan en pantalla. La combinatoria juega un papel fundamental en el concepto de espacio muestral para luego definir el concepto de probabilidad. Lo anterior se puede evidenciar como un primer aspecto combinatorio y en ese orden de ideas se puede entender que la combinatoria precede al concepto de probabilidad.

Al iniciar el curso de probabilidad, varios autores y profesores recurren a dos conceptos, el primero es el de “experimento aleatorio”; fácilmente aceptado entre los estudiantes; pero de inmediato aparece un problema de tipo epistemológico y es el de definir el espacio muestral (que es el segundo concepto). Es en este momento del curso cuando una alusión a lo combinatorio resulta ser sumamente útil y efectivo.

> *"Por ello, no es ya necesario aprender las fórmulas y procedimientos matemáticos para calcular la media o la mediana, la varianza o la desviación estándar, sino avanzar gradualmente en el desarrollo de habilidades combinatorias para encontrar todas las situaciones posibles dentro de ciertas condiciones, estimar si son o no igualmente probables y asignarles probabilidades numéricas."* (MEN, Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, 2006, pág. 66)

Uno de los problemas fundamentales en la enseñanza de la combinatoria es que está desligada al razonamiento que se debería tener de los problemas propuestos y está más sujeta a los procesos algorítmicos, cosa bastante lamentable dado que a pesar de que se tienen herramientas necesarias no se está desarrollando pensamiento aleatorio. Luego, es pertinente citar:

> "*La Combinatoria es un contenido que presenta bastante dificultad para estudiantes de los diferentes niveles educativos (Navarro-Pelayo, 1994 y Roa, 2000), es un contenido que suele enseñarse de forma aislada de los demás temas que componen el currículo y eso ha provocado, en ocasiones, que el tema no se enseñe y, cuando se enseña, que se enfatice solo en aspectos de tipo algorítmico*. (Batanero, Godino, & Navarro - Pelayo, 1996)

No es secreto para la educación Colombiana que lo anteriormente dicho se replica en este país e inclusive en los textos guías, el pensamiento estocástico o aleatorio siempre se encuentra al final de las unidades; razón por la cual muchas veces ni siquiera es tenido en cuenta. Frente a lo anterior es pertinente mirar un ente fundamental al respecto de la educación matemática y su evaluación:

- Las Pruebas del ICFES o Pruebas de Estado que se diseñan, aplican y analizan bajo la dirección del Servicio Nacional de Pruebas, SNP, del ICFES. Los resultados de esas pruebas han tenido gran influencia en la determinación de lo que se enseña, en la estratificación académica de los colegios y en la carrera que puede seguir un bachiller en la universidad.

Según el Informes de resultados de evaluaciones nacionales, el Informe nacional de resultados de SABER 5o. y 9o., 2009 donde expone los resultados de los estudiantes de quinto y noveno grados en matemáticas reveló a través de un ejemplo de nivel avanzado para quinto grado, que desarrollando tareas que llevan a la interpretación del grado de probabilidad de un evento aleatorio, los alumnos tienen dificultades enormes.

El ejemplo era el siguiente:

Nivel de desempeño: avanzado

Ejemplo 3. Juego en clase

La profesora Nancy quiere hacer un juego con sus estudiantes, que consiste en sacar sin mirar, una balota de una bolsa. La bolsa tiene 4 balotas blancas y 2 balotas negras, de igual forma y tamaño.

El número de posibilidades de sacar una balota negra es

A. la mitad del número de posibilidades de sacar una balota blanca.
B. el doble del número de posibilidades de sacar una balota blanca.
C. la tercera parte del número de posibilidades de sacar una balota blanca.
D. igual al número de posibilidades de sacar una balota blanca.

Características del ítem

Nivel	Avanzado
Competencia	Comunicación
Componente	Aleatorio
Afirmación	Expresar el grado de probabilidad de un suceso
Respuesta correcta	**A**
Porcentaje de respuestas en la opción correcta	29,31%
Porcentaje de respuestas en las opciones no válidas	B: 22,50% C: 22,79% D: 22,41%

Figura 1 SABER 5o. y 9o., 2009 RESULTADOS NACIONALES

En este sentido, la distribución de las respuestas entre los distractores de la pregunta muestra una proporción muy alta con respecto a la respuesta correcta, lo cual es muy preocupante. Cabe resaltar que para resolver el problema propuesto por la profesora es indispensable el uso de la combinatoria.

Luego, una proporción muy baja de estudiantes se ubica en el nivel avanzado: al finalizar la básica secundaria sólo tres de cada 100 son capaces de encontrar probabilidades utilizando técnicas de conteo.

No son solamente los estudiantes que finalizan la educación básica y media, los únicos que arrastran con conocimientos deficientes o nulos en los aspectos combinatorios. Algún profesor universitario se quejaba de que varios de sus estudiantes de último año de ingeniería no hubiesen podido resolver un problema planteado en las pruebas de Estado de hace varios años:

Considere los nueve puntos de la figura:

0	0	0
0	0	0
0	0	0

Indique cuántos triángulos, que tienen como vértices los puntos de la figura, se pueden armar.

Posiblemente si la autonomía de pensamiento se ve eliminada por el mecanismo frente a la comprensibilidad, la Educación Matemática habrá fallado en la relación saber – estudiante – profesor. Una evidencia de esto es palpable cuando al estudiante se le presenta un problema en algún contexto determinado, en donde las aplicaciones prácticas acuden a la ciencia matemática, y sencillamente, una falta de comprensión de las nociones, difícilmente, permitirán entrever el vínculo existente entre las matemáticas y la experiencia.

Por tanto, se hace necesario poder comprender cuáles son los elementos de causalidad que permitan entender por qué las nociones matemáticas son lo que son, entendiendo que éstas llevan a cuestas una historia que a todos, como futuros educadores matemáticos, les debe interesar en pro de que el estudiante mejore sus niveles de comprensión.

Por todo lo anterior y bajo el interés de esta investigación, la exploración será guiada bajo la siguiente pregunta:

¿Una lectura cuidadosa de los historiadores de la probabilidad como Hald y Edwards permite encontrar recursos didácticos y proponer un mejor entendimiento de las prácticas pedagógicas en combinatoria y probabilidad?

En este trabajo se reporta un problema histórico de evolución de conceptos que tiene relación con el trayecto que va desde la composición o el cambio de las estructuras discretas a partir de operaciones al concepto de combinaciones mezclando aspectos filosóficos y epistemológicos. La idea central de este trabajo es develar las combinaciones a través de sus propiedades, mostrar las relaciones con el triángulo aritmético y los números combinatorios, y este problema se enmarca en un ámbito central de la epistemología como lo es la instauración y evolución de los conceptos. En otras palabras, con este trabajo se pretende ver en la historia los momentos claves que marcaron los derroteros de la combinatoria y hacer una recopilación de las ideas para llegar al concepto de las combinaciones.

JUSTIFICACIÓN

Los desarrollos de la matemática corresponden esencialmente a tres procesos fundamentales: Medir, contar y ordenar.

> *"Hemos atravesado más de veinticinco siglos describiendo y analizando el esfuerzo humano por constituir un aparato teórico, propio de las matemáticas, mediante el cual introducir, de manera formal, los procesos de medir y contar*" (Recalde L. , 2007)

El proceso de contar viene siendo estudiado por la comunidad matemática en la búsqueda de poder relacionar los objetos. ¿Cuánto hay? fue la pregunta que abrió la investigación del arte de contar. Diferentes culturas se enfrentaron a esta actividad como respuesta a necesidades de la humanidad en determinado contexto social. Culturas como los mediterráneos: los sumerios, los semitas, los babilonios, los egipcios, los griegos y los romanos. De otro lado, también se encuentran las culturas orientales como: los hindúes, los chinos y los árabes. Con respecto al continente americano se destacan culturas como: los mayas y los incas. De lo anterior se podría pensar que los números naturales estuvieron inmersos en cualquier cultura a través de sus distintas representaciones o sistemas numéricos, estos sistemas se puede considerar aportes a la matemática, pero que definitiva todos ellos encerraban el conjunto matemático de los números naturales. Autores como (Frediani & Tenorio, 2004) indican que la arqueología confirma que la idea de número y su utilización surge en el mundo hace más de 30.000 años, siendo incluso muy posible que los ordinales precedieran a los cardinales, dado que el número se presenta primero como una necesidad para ordenar, y luego para contar o medir. Al parecer la necesidad de ordenar surge como respuesta al orden de participación en ceremonias religiosas de los antepasados y la necesidad de contar o medir magnitudes se muestra cuando se quería crear una estructura social organizada. En conclusión, querer hablar del origen de los números es encumbrar una historia de la época antigua. En el siglo XIX emerge la teoría de conjuntos gracias a los estudios de George Cantor (1845 – 1918). A través de la teoría de conjuntos se inicia el estudio formal de los subconjuntos y partir de estos viene ligado el problema de demostrar la existencia de subconjuntos de elementos de un conjunto finito dado y que satisfacen ciertas condiciones entonces se podría decir que la teoría de conjuntos con el formalismo moderno a luz de hoy puede ser otra presentación del conteo hacia la combinatoria. Al respecto, es pertinente citar a (Recalde L. , 2011):

> "*Del mismo modo que el método analítico nos suministró algunas herramientas teóricas y procedimentales para la solución del problema de la medida, el enfoque conjuntista en matemáticas nos proporcionó los enlaces necesarios para acoplar las actividades de medir, contar y ordenar.*"

Luego, es la matemática discreta[3] quien se encarga de contar y clasificar los subconjuntos de un conjunto finito dado y que pueden satisfacer ciertas condiciones. Una vertiente para solucionar la pregunta ¿cuánto hay? y el problema de los subconjuntos y modernamente hablando, el cardinal de los subconjuntos, es la combinatoria, dado que ésta estudia cómo se puede contar y disponer elementos de un conjunto. Es así que se puede notar la fuerte relación de este concepto con las más cotidianas situaciones que el ser humano pueda llegar a tener. Por ejemplo: En un grupo de 60 estudiantes, ¿de cuántas formas diferentes puedo realizar grupos de 12 para obtener equipos de futbol?

De otro lado, la percepción sociocultural es tan importante de resaltar que según los lineamientos curriculares:

> "…, *vale la pena destacar especialmente cómo a partir de estas investigaciones se ha podido establecer el hecho de que diferentes culturas han llegado a desarrollos matemáticos similares trabajando independientemente y que han realizado actividades matemáticas semejantes, como el contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar,*

[3] Ver página 94 en la sección *combinatoria* para la definición de este término.

actividades éstas que resultan ser universales. Estos elementos analizados en profundidad han permitido a su vez identificar componentes epistemológicas del conocimiento matemático." (MEN, Lineamientos curriculares., 1998, pág. 15)

La matemática ha sido a través de los años un constructo sociocultural que ha permitido el estudio de las relaciones humanas a través de la solución de problemas planteados frente a las necesidades del hombre. Siendo la educación un ente fundamental en el desarrollo social, la matemática y en particular la combinatoria; toman un lugar relevante en la escuela dado que a partir de su aprendizaje se potencializa el razonamiento, habilidad trascendental para la resolución de problemas tanto en las diferentes áreas del conocimiento como también en la vida cotidiana.

Finalmente, se debe tener presente que la combinatoria no sólo debe ser relacionada con la probabilidad sino también con muchas otras ramas de la matemática e inclusive con diferentes campos de investigación como lo son la física, la ingeniería, la biología la química, etc.

"*La presentación que hace Feller de algo tan sumamente serio, como son las concepciones de Einstein, de Maxwell, de Bose, Dirac acerca de la distribución de partículas en un espacio, no son más que problemas de urnas y balotas. Son por supuesto, relativamente fáciles de entender y de una profunda belleza. Creo que a un estudiante sensible a la física, frente a un escenario como el que plantea Feller, cuya fundamentación es relativamente sencilla llevarla a un plano pedagógico, es decir argumentativo, le sacaría un gran provecho intelectual. Pero no solamente es en la física y en la biología.*

La ingeniería moderna está impregnada de elementos combinatorios: las redes telemáticas, los viajes espaciales, la fotografía, la escanografía, la transmisión de imágenes de Marte, la epidemiología del Sida, todos estos problemas tienen una profunda naturaleza aleatoria y combinatoria. Las nuevas profesiones: ingeniería de sistemas, ingeniería electrónica, ingeniería de materiales, el diseño industrial, el diseño arquitectónico, por supuesto la estadística y muchas más tiene entre sus presupuestos ciertas destrezas y una de ellas, muy importante, el del arte de contar y de combinar." (Arbelaéz, 2013)

Ampliando un poco lo anterior, se puede mostrar grosso modo algunos campos de investigación donde la combinatoria ha participado con el propósito de defender la utilidad de esta disciplina en otras disciplinas.

LA COMBINATORIA EN DIFERENTES CAMPOS DE LA INVESTIGACIÓN.

En el proceso de contar se ven evidenciadas muchas necesidades no sólo de las matemáticas sino también de diferentes disciplinas que ahondan en la inquietud de sus problemas. De hecho, en la vida diaria, la actividad de contar juega un papel rotundo y fundamental dado que desde temprana edad el ser humano se enfrenta a preguntas como: ¿Cuántos dedos tienes en la mano? ¿Cuántas monedas tienes en el bolsillo del pantalón? ¿Cuántos años tienes?, etc. No solamente se habla de la cantidad sino también de las posibles maneras o consecuencias de ciertos eventos, como por ejemplo: Al lanzar una moneda al aire ¿Qué posibilidad de resultados puedes obtener cuando ella caiga?; y si lanzas un dado ¿Qué posibilidad de resultados puedes obtener? ¿Son los mismos resultados de la moneda? ¿Cuántos resultados tiene el experimento de la moneda? ¿Cuántos el del dado? Preguntas como las anteriores que indagan sobre el *cuanto* o *las posibles maneras de* también se ven inmersas en los quehaceres diarios, en las relaciones familiares y en la sociedad. Es por todo lo anterior que la combinatoria toma un lugar fundamental en la escuela y se hace necesaria una profunda reflexión sobre la misma.

La combinatoria en la matemática.

No hay evidencia más fuerte que la misma ciencia de las Matemáticas para entender el papel relevante de la combinatoria y su influencia en el desarrollo de otras ramas de la misma ciencia. Las primeras nociones de contar nacen de las inquietudes de las matemáticas.

La combinatoria en el análisis matemático: El estudio del triángulo aritmético fue de vital interés para matemáticos prestigiosos como Cardano, Briggs y Pascal. Con las diferentes indagaciones de estos pensadores, se fueron dejando huellas para el análisis y su desarrollo. Newton (1642 - 1727) leyendo los trabajos de Wallis (1616 – 1703) llega a dos grandes declaraciones de una belleza indudable para la comunidad matemática.

- El teorema del binomio:

  $$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}x^3 + \cdots + x^n, n \in \mathbb{N}$$

- El análisis mediante series infinitas y su consistencia interna al álgebra realizada con un número finito de operaciones.

  Las derivadas de orden superior vienen estrechamente relacionadas con el desarrollo en serie de la potencia del binomio a través de la integral con el cálculo combinatorio.

La combinatoria en Álgebra: Contemporáneo con Newton, Leibniz (1646 – 1716) en sus trabajos llega a un majestuoso hallazgo y establece las bases de lo que son los determinantes, que luego con el tiempo serán un instrumento de total relevancia para las matemáticas. De otro lado, los trabajos de Lagrange (1736 – 1813) fueron importantes para Galois (1811 – 1832) quien se apoyó de éstos iniciando su investigación en teoría de grupos sobre permutaciones de las raíces de una ecuación polinómica.

La combinatoria en la Geometría:

Una gran variedad de transformaciones fueron estudiadas a través de métodos combinatorios durante la segunda mitad del siglo XIX. Es más, relaciones y propiedades de los cuerpos en los espacios de un número cualquiera de dimensiones se puede enunciar utilizando un algoritmo combinatorio de la geometría moderna; a tal punto que “actualmente existen libros de geometría en los que en lugar de líneas y figuras, sólo se utilizan letras, índices y fórmulas combinatorias” (Colerus, 1973, pág. 93). Respectivamente, en la actualidad, es posible interpretar geométricamente muchos problemas combinatorios y hallar soluciones a los mismos empleando conceptos geométricos finitos (Ribnikov, 1988). Para profundizar más frente a la relación geometría – combinatoria se recomienda al lector interesado el texto *Combinatorial geometry in the plane* de (Hadwiger & Debrunner, 1964).

La topología combinatoria o analysis situs.

Rama de las matemáticas que se puede definir según (Collette, 1985, pág. 537): “es el estudio de los aspectos cualitativos intrínsecos de las configuraciones espaciales que permanecen invariantes frente a transformaciones biunívocas” Inicia con el problema de los puentes de könisburg propuesto por Euler (1707 – 1783), quien inicia también la teoría de grafos. Euler se ocupó en diferentes campos, entre ellos, la Combinatoria; en su artículo sobre Partición y descomposición de enteros positivos en sumandos se encuentran las bases para el método de funciones generadoras siendo éstas fundamentales para el cálculo de configuraciones combinatorias. Escribió una notación esencialmente moderna del número combinatorio, como es $\left(\frac{m}{n}\right)$, aunque la notación actual es debida a Adreas von Ettinghausen (1796 – 1878).

La combinatoria en la Probabilidad.

Existe una fuerte relación entre la combinatoria y la probabilidad dado que siempre que se desea calcular el espacio muestral de un experimento se recurre a la combinatoria para poderlo obtener. Al respecto señala (Heitele, 1975), la combinatoria no es solo un auxiliar en el cálculo de probabilidades, sino que existe una interrelación estrecha entre la idea de experimento compuesto a partir de un espacio muestral discreto y las operaciones combinatorias.

La combinatoria también se aplica en las matemáticas recreativas. Uno de los escritores de la matemática recreativa más famosos del siglo XX, Martin Gardner ha dejado numerosos artículos de corte combinatorio. También se aplica la combinatoria en la teoría de números, lógica y teoría de autómatas y lenguaje, ciencias de la computación, la investigación de operaciones tienen como sustento lógico el cálculo combinatorio; etc.

Un famoso autor norteamericano, Donald Knuth, autor de la célebre obra: “The art of computer programming” (4 tomos) plantea en el primer capítulo de su primer tomo la importancia que los números combinatorios habrán de tener en todo el resto de su obra y le encarece al lector dedicarle un buen tiempo al cabal entendimiento de las nociones e identidades combinatorias que se encontrarán en el centro de las proposiciones, conceptos, ejercicios, problemas y tópicos de investigación que se estudiarán en toda la obra.

La combinatoria en otras disciplinas.

El estudio de *las diferentes formas de agrupar y de contar,* también se contempla y se investiga en las siguientes disciplinas[4] que posiblemente se han remitido a la combinatoria para solucionar sus inquietudes.

[4] La descripción de cada aplicación de la combinatoria en las diferentes disciplinas es tomada de forma absolutamente literal del libro (Batanero, Godino, & Navarro - Pelayo, Razonamiento Combinatorio, 1996)

La combinatoria en la física:

El modelo de las particiones tiene aplicaciones fundamentales en la mecánica, termodinámica y estática. Como ejemplo, citamos[5] los modelos de Bose – Einstein y Fermi – Dirac para la mecánica de partículas. El problema del aislamiento es importante para la explicación del comportamiento macroscópico de la materia sobre la base de los hechos conocidos a niveles moleculares o atómicos. La enumeración de simetrías es fundamental para la cristalografía. La enumeración de caminos arbitrarios es básica en la teoría de la difusión, que comprende el movimiento Browniano y la física del estado sólido.

La combinatoria en la química.

La enumeración de posibles moléculas orgánicas, la búsqueda de los isómeros de una molécula dada y la topología de la estructura molecular son problemas fundamentales de naturaleza combinatoria.

George Pólya es el autor de un teorema, titulado, el teorema de enumeración de Pólya, el cual hace alusión a encontrar el número de isómeros que podría tener una molécula orgánica compleja. Desde esa época, alrededor de 1940, los químicos orgánicos se interesaron por la combinatoria.

La Teoría de Pólya es un método general para contar el número de posibles configuraciones sobre un objeto geométrico teniendo en cuenta sus simetrías.

La introducción a la enumeración del teorema de Pólya inicia de la siguiente forma:

"Este artículo presenta una continuación del trabajo hecho por Cayley. Cayley investigó repetidamente problemas combinatorios relativos a la determinación del número de ciertos árboles. Algunos de sus problemas se prestan a interpretación química: el número de árboles en cuestión es igual al número de ciertos (teóricamente posibles) compuestos químicos . . ." (Pólya, 1937)

[5] Aquí y en cualquier parte de este trabajo donde se encuentren palabras con pronombres en primera y segunda persona es porque el párrafo es estrictamente literal. Todo lo demás está escrito en tercera persona.

Enumeración de moléculas orgánicas.

La enumeración de grafos tiene por objeto encontrar el número de grafos no isomorfos que poseen unas determinadas características. Este problema fue iniciado por Cayley para, resolver el problema de enumeración de hidrocarburos, que son compuestos químicos que sólo constan de carbono e hidrógeno. Entre ellos se encuentran los hidrocarburos con todas las uniones sencillas entre los átomos de carbono, pudiendo n tomar cualquier valor a partir de 1. Su fórmula es C_nH_{2n+2}.

Los compuestos que siendo diferentes responden a la misma forma molecular (igual fórmula empírica), se denominan isómeros. La figura 2 representa los isómeros del butano (C_4H_{10}):

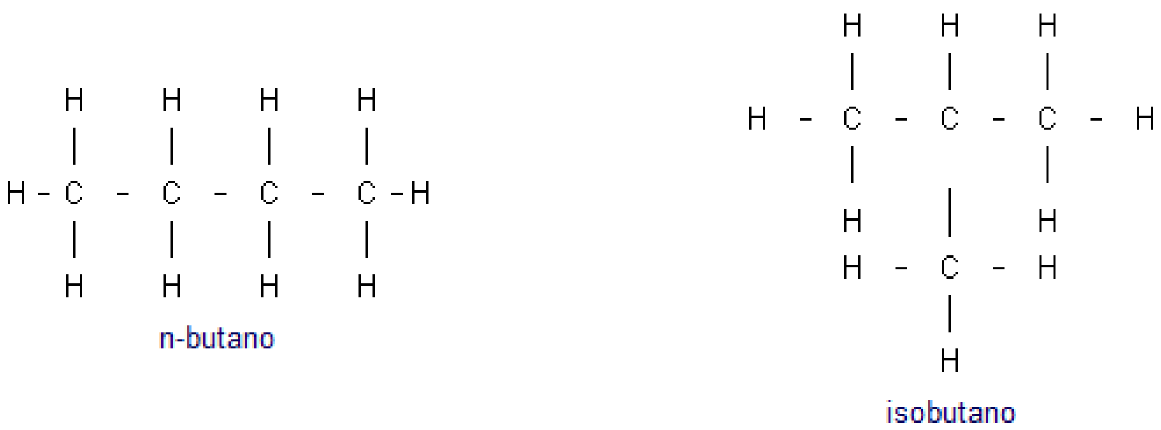


Figura 2. Representación del butano.

Amabas contienen la misma fórmula química C_4H_{10} , sin embargo, sus moléculas se agrupan de forma diferente. Estas dos estructuras de igual fórmula química C_4H_{10} son dos ejemplos de isometría de posición u ordenación.

La combinatoria en la biología.

La enumeración de posibles tipos de organismos, el estudio de la difusión de epidemias, las pruebas de medicinas u otros productos a través de los diseños de experimentos que emplean los cuadrados latinos y gran parte de la Genética utilizan estas técnicas.

La combinatoria en la Economía y Gestión.

Se estudian problemas de optimización de la producción, transporte, emplazamiento, asignación de tareas, distribución y empaquetado, etc., que tienen naturaleza combinatoria.

Hasta aquí, se plasmaron las diferentes disciplinas que utilizan la combinatoria para dar soluciones a determinadas cuestiones. La intensión de exponer esa gama de campos es manifestar la importancia, el papel y el lugar que juega la combinatoria en ellos.

Luego, se debe tener presente que las implicaciones de la combinatoria y su aplicabilidad en otros campos no ha sido un objeto de análisis extenso y con ello se han podido perder elementos vitales para su enseñanza y aprendizaje. Es decir, es un área de poca investigación en Educación Matemática y esto se puede evidenciar con los pocos proyectos tanto de pregrado o posgrado de la Universidad del valle. Luego, el pensamiento estocástico y los sistemas de datos, propuesto por el Ministerio de Educación Nacional, van quedado aislado y a pesar de que se brinden espacios en eventos que van dirigidos a la educación estadística como por ejemplo: Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Congreso Colombiano de Matemática, Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Primer encuentro de educación estocástica, etc.; son muy poco concurridos ya sea por falta de información al respecto o en el peor de los casos, por falta de formación.

Una necesidad urgente es crear grupos en Educación Estadística para desarrollar una línea de investigación donde se genere una disciplina más compacta y pueda aportar a la formación docente. La probabilidad y la estadística, desafían la intuición y en ocasiones no basta con tener conocimientos de estas áreas. La historia de la probabilidad y de la combinatoria ofrece un amplio panorama de los hechos, conjeturas y problemas desafiantes donde los conceptos fueron evolucionando a través del tiempo y no fueron aceptados absolutamente desde el momento de su origen. Al llevar los conceptos al aula, se presentan los obstáculos que tal vez surgieron a través de la concepción y evolución de los mismos y es por ello que se presentan aspectos históricos y epistemológicos, en el sentido de Batanero (Batanero & Serrano Romero, La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas, 1998):

> *Las cuestiones epistemológicas ocupan un lugar fundamental en la reflexión de las personas interesadas por el aprendizaje de las matemáticas. Ello es debido a que los obstáculos surgidos históricamente en la formación de los conceptos se reproducen, con cierta frecuencia, en los alumnos. Otras veces, los estudios de tipo epistemológico*

pueden ayudar a comprender las dificultades de los alumnos en el uso de los conceptos para la resolución de problemas.

Es evidente y necesario para el aprendizaje que la formación docente esté caracterizada por ese devenir histórico y particular de los objetos relacionados con la combinatoria. El propósito es formar docentes y estudiantes críticos en la sociedad cambiante y así entender y reconocer la combinatoria como un agente potencial del pensamiento matemático. Luego, la creación de una línea de investigación en Historia de la Probabilidad, la estadística y la combinatoria tiene una necesidad de seguir *bogando mar adentro* en Colombia desde lo disciplinar, didáctico, histórico y tecnológico en pro de fortalecer en el quehacer profesional del docente[6].

OBJETIVOS

Objetivo General

Realizar un análisis histórico – epistemológico de la evolución de la combinatoria teniendo como eje central el trabajo de Pascal en búsqueda del surgimiento de las combinaciones; con el propósito de plantear una sugerencias de enseñanza.

Objetivos Específicos

- Reconocer las raíces de la noción de combinaciones y presentar un panorama general histórico de la combinatoria para identificar los elementos primigenios que surgieron frente a la actividad del conteo.

- Establecer el desarrollo historiográfico en términos de notación moderna de la noción de combinaciones desde los trabajos de Pascal hasta la conceptualización de Gottfried Wilhelm Leibniz y Jacobo Bernoulli con el fin de presentar la propuesta de Pascal en su Tratado del triángulo aritmético y contrastar con los trabajos realizados por Leibniz y Bernoulli.

[6] Parafraseo tomado del trabajo de maestría de (Díaz, 2013)

- Caracterizar y mostrar las propiedades de los números combinatorios a partir de las relaciones o estudios de estructuras[7] discretas para conocer su comportamiento y poderlos instaurar.

- Identificar elementos principales en la composición o el cambio de las estructuras discretas a partir de operaciones, más específicamente en la noción de combinaciones con la intensión de sugerir algunas pautas o elementos para la enseñanza de las combinaciones.

2. CAPITULO II

METODOLOGÍA

El desarrollo del trabajo es de tipo histórico – epistemológico y va dirigido, de acuerdo con los lineamientos curriculares de Colombia, al pensamiento estocástico; más concretamente, al concepto de combinaciones. La metodología de este trabajo sera de carácter arqueológico[8]. Al respecto es pertinente citar a (Díaz, 2013):

"*Para adentrase entonces en esta visión, se utilizará un modelo de metodología de carácter arqueológico. Durante el transcurso de esta indagación, se harán explícitos algunos conceptos claves que irán surgiendo paralela y necesariamente como lo es orden, repetición, subconjuntos, entre otros.*"

A través de la búsqueda desde la concepción de las combinaciones hasta su institucionalización, se rastrearon elementos claves para producir una historiografía. Para ello se tomó como fuentes principales a *Pascal´s Arithmetical Triangle* de (Edwars, 1987) buscando las relaciones de los números combinatorios y coeficientes del triángulo aritmético. Es relevante afirmar que los aportes del autor son de una elegancia histórica indudable. Es un texto académico que debe ser de consulta tanto por profesores como estudiantes por su intencionalidad de abordar diferentes tópicos. Es así, que éste permite un análisis más

[7] Ver página 93 en la sección *combinatoria* para la definición de este término.

[8] Entiéndase como el estudio de los cambios conceptuales que se producen desde las ideas previas hasta las actuales, a través de huellas registradas y conservadas al pasar del tiempo.

detallado de los trabajos de Tartaglia, Cardano, Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli, entre otros. La correspondencia entre Pascal y Fermat son claves para ir vislumbrando el uso de la combinatoria en la solución al *problema del reparto* y con ello rastrear tiempos de solución, acuerdos, desaciertos e interpretaciones novedosas dadas a los problemas y sistematización de métodos de solución. De otro lado, se consultó a *Razonamiento Combinatorio* de (Batanero, Godino, & Navarro - Pelayo, 1996) con el propósito de relacionar la combinatoria no solo con diferentes ramas de las matemáticas sino también con diferentes campos de investigación, esto se encuentra incluido en la justificación de este trabajo. El desarrollo de primer objetivo de este trabajo fue permitido gracias a este libro. También se consultaron fuentes segundaria como *A history of probability and statistics and their applications before 1750* de (Hald, 1990) que siendo contemporáneo con el libro de (Edwars, 1987), muestra un gran compendio de los trabajos de muchos matemáticos que pensaron en la combinatoria. Para efectos de este trabajo, el libro de (Hald, 1990) se utilizó como referencia para introducir una evidencia del aporte de las demostraciones de Pascal con respecto a las relaciones entre los números combinatorios, figurados y binomiales.

Finalmente, el libro *Azar y probabilidad* de (Godino, Batanero, & Cañizares, 1996) permitió, a través de la sección *Teoría matemática elemental de la probabilidad,* el desarrollo del capítulo IV de este trabajo que se refiere a la combinatoria y sus elementos de estudio.

A partir de la lectura analítica de estos libros y tomando en cuenta los elementos de causalidad ventilados en la historiografía, se identificaron elementos epistemológicos, que permitieron visualizar algunos aciertos y dificultades inherente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las combinaciones.

El primer objetivo específico de este trabajo se desarrolló gracias a la breve sección titulada Surgimiento de la Combinatoria: *primeros problemas* consignados en *Razonamiento combinatorio* de (Batanero, Godino, & Navarro - Pelayo, 1996). En este trabajo se adaptó la organización por medio de siglos para contemplar mejor los tiempos de desarrollo de las correspondientes ideas y su contexto.

El segundo objetivo específico de este trabajo se desarrolló utilizando el libro *Obras matemáticas* sección *Tratado del triángulo aritmético* de (Alvarez, Martínez, & Torres, 1995) del cual se tomó el enunciado de las diecinueve consecuencias junto al problema final que plantea Pascal. De otro lado, gracias a los grandes aportes realizados por el libro *Pascal´s Arithmetical Triangle* de (Edwars, 1987) se desarrolló la parte matemática de cada proposición y el contraste de los números combinatorios, binomiales y figurados. También se tomaron los trabajos de Leibniz y Bernoulli del citado libro. La solución del problema final que plantea pascal fue tomada de (Edwars, 1987).

El tercer objetivo específico de este trabajo se desarrolló con base en los conceptos de combinatoria dados por (Ribnikov, 1988) y (Feller, 1973) y lo referente a las reglas del producto, las combinaciones, variaciones y permutaciones fue tomado del libro *Azar y Probabilidad* de (Godino, Batanero, & Cañizares, 1996).

Las pautas de enseñanza son unas recopilaciones de las reflexiones obtenidas de este trabajo que se sugieren o se presentan como unos indicios para abordar las combinaciones, más que una propuesta estructurada como tal de enseñanza.

Finalmente se obtienen unas conclusiones de todo lo estudiado tanto en la historia como la matemática y la enseñanza que se puede presentar con base en las indagaciones que se tenían y las deducciones que se lograron. Todo es un conglomerado de resultados que en su mayoría convergen en el concepto de combinación, objetivo general de este trabajo.

3. CAPÍTULO III

PANORAMA GENERAL HISTORICO SIGLO XXII AC - SIGLO XVII

Según investigaciones realizadas ya sea por antropólogos como por historiadores, la combinatoria ha sido un interés del ser humano desde hace tiempo y nace frente a la necesidad de saber la forma de seleccionar o elegir parejas de un determinado conjunto de elementos. Todas las posibilidades son calculadas a través de la enumeración. Diferentes culturas y distintas dudas o cuestiones permitieron la exploración y esto permitió la indagación de otros aspectos y actividades bien definidas.

Los elementos primigenios sobre este interés se remontan desde tiempos milenarios. Consecuentes con el análisis que se busca hacer en este trabajo, es importante conocer el trayecto de la combinatoria, la cual tiene ciertos atisbos desde los antiguos chinos:

Siglo XXII AC – Los Cuadrados mágicos.

Los cuadrados mágicos son ejemplos de los más antiguos que existen sobre problemas de combinatoria. Ellos aparecen y fueron la base del famoso libro místico chino I – Ching escrito en Japón.

Al parecer el primer cuadrado mágico se registra con el diagrama de Lo Shu de la antigua china. Dicho cuadrado tenía el siguiente arreglo[9]:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Al respecto (Biggs, 1979) afirma:

"*There is little doubt that the first recorded example of a magic square is the Lo Shu diagram of the ancient chinese*."

Los cuadrados mágicos son arreglos rectangulares de $n \times n$ donde se disponen los números desde 1 hasta n^2 en las casillas de tal forma que la suma horizontal, vertical y diagonal siempre sea un número constante. Se le llamaba constante mágica debido al sentido místico que tenían los cuadrados.

Es importante resaltar aquí que los cuadrados mágicos son un primer registro de estudio para la combinatoria dado que ellos están constituidos por ser un arreglo de elementos de un conjunto finito que responde a una determinada condición.

También, (Collette, 1985) comenta que las cuestiones combinatorias se describen en los primeros documentos chinos que remontan a partir del siglo III a.C, siendo el "Pa Kua" uno

[9] Para ampliar información dirigirse a (Needham, 1959, pág. 57)

de los más antiguos donde se exhibe un problemas sobre el cálculo del número de permutaciones de una serie de segmentos dispuestos alrededor de un círculo.

Figura 3. Pa kua, trigramas del I Ching.

Un aspecto relevante tiene que ver con el libro chino "El precioso espejo de los cuatro elementos" escrito por Chu Shi-Chieh en 1303 (¡hace más de 700 años!) donde aparece un diagrama que en Occidente será conocido como triángulo aritmético, en el que figuran diferentes desarrollos binomiales hasta la potencia octava. El texto chino es el de mayor importancia a nivel histórico y algo sorprendente que escribe es que el triángulo era conocido más de dos siglos antes.

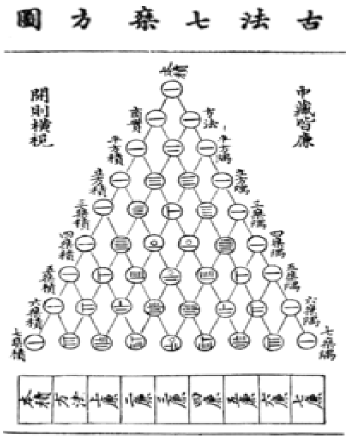


Figura 4. El antiguo gráfico del método de los siete cuadrados multiplicadores.

Siglo V A.C – Los Números triangulares.

La escuela pitagórica es conocida históricamente por ser una de las precursoras de la matemática demostrativa. Para nadie es un secreto de los grandes aportes a la humanidad que esta comunidad de ciencia dejó. Entre sus aportes están las reglas acerca del total de puntos necesarios para formar números triangulares, los cuales responden a la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$ y se generaban al añadir los mismos consecutivamente de tal suerte que dibujan un triángulo. Más adelante se conocerá la relación del triángulo aritmético con los números combinatorios.

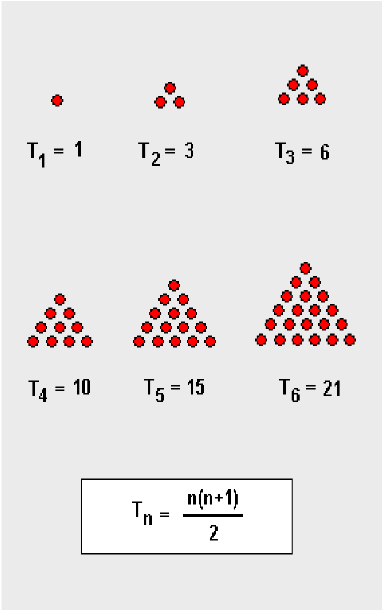


Figura 5. Números Triangulares.

Siglo III A.C – Regla para combinaciones de n sílabas.

Nace la regla llamada "Meru Pastrara" que fue dada por el escritor Pingala (200 a. C, aprox.) y ésta calculaba el número de combinaciones n sílabas tomadas de una en una, de dos en dos, etc.

Siglo IV – Permutaciones y combinaciones.

Xenócrates de Calcedonia es a quien se le atribuye el primer intento por resolver un problema de permutación. Papus plantea y soluciona un problema de combinatoria el cual estaba direccionado al cálculo del número de intersecciones de n rectas no paralelas, de las cuales no más de dos se cortan en el mismo punto. Es así, que a través de números triangulares, usando la regla aditiva $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, llega a la solución general del problema de las combinaciones de n elementos tomados dos a dos. Cabe resaltar que en el trabajo de Euclides ya se encontraba el teorema del binomio para $n = 2$.

El libro hebreo Sefer Yetzirah escrito entre los años 200 y 600 d.C, contiene la **noción de permutación.**

Siglo XII – Indicios de reglas para calcular "variaciones" (con y sin repetición) y "combinaciones".

Surge en la India el interés por los problemas de combinatoria. Es el matemático Bhaskara (1114 – 1185 aprox.) quien explora este campo y plantea las reglas. Al respecto de ello escribe:

"Este tipo de ideas es útil en versificación para:

Hallar variaciones de diferentes metros.
En música para analizar el esquema de las variaciones musicales
En Medicina para hallar las combinaciones posibles de sabores diferentes"

En su obra *lilavati*, (Bhaskara, 1150) utiliza la regla de Pingala. En un capítulo dedicado a la combinatoria, enuncia una regla para hallar el número de colocaciones de n cosas de una clase y $(m - n)$ de otra, es decir, por primera vez se vislumbra el problema de la distribución de objetos o partición de conjuntos. Afirma también que las selecciones de n objetos entre m dados coinciden con ese número.

Un dato importante es saber que en tiempos de Bhaskara ya se conocía la regla que da el número de permutaciones de n elementos y es sorprendente saber que el caso particular para $n = 6$ ya había sido tratado por Chakravarti aproximadamente en el siglo IV a.C.

En el mundo árabe nuestro tema de interés era tratado por dos corrientes independientes según cuenta (Edwars, 1987). Una de ellas eran los Lingüistas quienes miraban el Análisis Combinatorio como un medio para resolver un problema práctico. La otra corriente eran los algebristas quienes a través de sus estudios sobre ecuaciones y el problema de extracción de raíces, encontraban en el Análisis combinatorio una herramienta técnica para resolver sus problemas teóricos.

No obstante, la primera obra árabe de Análisis Combinatorio data alrededor de 1140 y es un trabajo no encontrado de Al – Hayyam. Por ese tiempo, Rabbi ben Ezra en la búsqueda de hallar el número de combinaciones de 7 cosas tomadas n cada vez, utilizó el mismo método que Pingala. En su exploración se dio cuenta que todos los coeficientes eran divisibles por siete, un caso particular del resultado general de Leibniz.

Es aproximadamente en 1140 en España, que Rabbi usa el mismo método Hindú *Meru Pastrara* para hallar la solución. Las 7 cosas fueron los 6 planetas conocidos y el sol; una representación tabulada del método de enumeración de ben Ezra es dada en la siguiente figura para el caso $r = 3$:

567	467	367	267	167
	456	356	256	156
	457	357	257	157
		345	245	145
		346	246	146
		347	247	147
			234	134
			235	135
			236	136
			237	137
				123
				124
				125
				126
				127
1	1	1	1	1
	2	2	2	2
		3	3	3
			4	4
				5
1	+ 3	+ 6	+ 10	+ 15 = 35

Figura 6. La enumeración de las 35 maneras en que 3 planetas pueden ser elegidos de 7, numerado 1234567, dispuestos para exhibir el razonamiento de Rabbi ben Ezra

Siglo XIV – Reglas principales sobre permutaciones y combinaciones.

El matemático y astrónomo judío Levi Ben Gerson (1288 – 1344) radicado en Francia alrededor de 1321, escribió reglas principales de cálculo (ya conocidas por hindúes) sobre las permutaciones y combinaciones. En notación moderna, se expresarían de la siguiente forma:

1. $n!$ para el número de permutaciones de n cosas.
2. $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$ para el número de variaciones de n cosas tomadas r a r.
3. Para el número de combinaciones:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots\cdot r}$$

La inducción matemática fue utilizada para la validez de las dos primeras expresiones. La tercera se deriva de ellas por división.

Algo importante que resaltar es que Levi hizo una original contribución que fue argumentar la igualdad del número de colocaciones de n cosas de una clase y $n-r$ de otra, es decir, la propiedad: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ la cual implícitamente se encierra el modelo de partición de un conjunto.

Siglo XVI – Estudio del Triángulo aritmético.

De otro lado, en occidente los juegos de azar son los motivadores para el estudio de la combinatoria. Tartaglia (1499 – 1557) extendió la tabla de los números figurados a más de tres dimensiones.

Cardano (1501 – 1576), apoyado por la obra *General trattato di numeri et misure* de Tartaglia deduce los coeficientes de $(a+b)^n$ y le da solución a la ecuación cúbica, resultado relevante para el álgebra.

> *"Su contemporáneo y antagonista Cardano (1501 – 1576), en su obra General trattato di numeri et misure, deduce la simetría de la forma general para el triángulo y obtiene los coeficientes de $(a+b)^n$ mediante la regla de la adición; dando solución a la ecuación cúbica*. (Batanero, Godino, & Navarro - Pelayo, Razonamiento Combinatorio, 1996, pág. 20)

Al parecer la relación de Tartaglia y Cardano no era la mejor dado que se generó una disputa frente a la solución de la ecuación de tercer grado. Supuestamente el motivo del enojo fue la publicación del *Ars Magna* en 1545 de Cardano donde no se le reconoce a Tartaglia como autor de algunos métodos de la resolución para determinados tipos de ecuaciones cúbicas o de tercer grado.

Las relaciones o conexiones que hubiera entre números figurados y números combinatorios, no fueron del interés de Cardano; pero Briggs (1561 – 1631) fue quien se ayudó de los trabajos de Cardano y llegó a tal conexión. Otro aporte de Cardano también fue el resultado de que el número de combinaciones de n cosas tomadas $1\ a\ 1, 2\ a\ 2, \ldots n\ a\ n$, era igual a $2^n - 1$.

Siglo XVI – Atisbos de la combinatoria como rama de las matemáticas.

Dos grandes matemáticos hacen presencia notable en el tema de interés de este trabajo. Las contribuciones de Fermat (1601 – 1661) y Pascal (1623 – 1662) dan un giro relevante a la combinatoria. Es a través de los juegos de azar donde se visualiza los principios para determinar el número de combinaciones de elementos de un conjunto finito. Los contextos de juegos de azar son la fundamentación para la teoría de la probabilidad. Es por ello, la gran conexión que la mayoría de personas le dan a esta última con la combinatoria.

Es así, que los trabajos de estos matemáticos, reconocen el análisis combinatorio como un nuevo campo de la matemática digno de un estudio formal y se deja de ver como el dominio de un conjunto de técnicas o prácticas en la solución de una tipología de problemas.

La formulación de los principios fundamentales para la combinatoria fue dada gracias a las contribuciones de Pascal. Alrededor de 1654, su amigo, el caballero de Méré planteó un juego de dados el cual fue el germen de las correspondencias entre Pascal y Fermat, las cuales se constituyen el punto de partida para la elaboración del Tratado del triángulo aritmético y sus tratados anexos. En él, reposan diversos problemas de la teoría de números: Números figurados, órdenes numéricos, divisibilidad, etc. También se encuentran aplicaciones a la resolución de problemas de combinaciones, a la determinación equitativa de la apuesta en juegos de azar. Es interesante saber que Pascal en sus estudios, publica como aplicación un tratado sobre la construcción de cuadrados mágicos. A pesar de que el triángulo aritmético ya fuera conocido, es Pascal quien estudia sus propiedades sistemáticamente, encuentra las conexiones, relaciones y aplicaciones de las combinaciones con la disposición de números y en el cálculo de probabilidades le da utilización para la solución de problemas.

Siglo XVII – La combinatoria como disciplina científica[10].

El inicio de la combinatoria como disciplina científica reposa sobre los trabajos de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) y Jacobo Bernoulli (1654 – 1705). El primero es el autor de *Disertatio de arte combinatoria* donde **introduce el término "Combinatoria"** como actualmente se conoce. Además, Leibniz realiza la construcción sistemática del conocimiento combinatorio que se había obtenido hasta la época. Por su parte, Bernoulli a través de la obra *Ars Conjectandi (Arte de conjeturar)* establece nociones de probabilidad

[10] Cuando se habla de disciplina científica se hace alusión a ser rama de las matemáticas.

donde es necesario introducir un buen número de nociones básicas de combinatoria. Es así como Bernoulli considera en su obra que la combinatoria es la base para resolver problemas probabilísticos teóricos de aquella época.

Hasta este momento se ha hecho un recorrido cronológico sobre la combinatoria buscando indagar sobre sus raíces e intentando discernir los diferentes registros en determinadas épocas y culturas sobre la actividad del conteo.

La combinatoria y sus objetos de estudio (variaciones, combinaciones y permutaciones), a diferencia de muchos conceptos matemáticos, no nace necesariamente como una necesidad fenomenológica[11] puesto que a través de indagaciones sobre juegos de dados, cartas o repartos, se obtienen correspondencias y resultados fructíferos que abrieron las puertas a la investigación de esta importante y actual disciplina.

Es significativo resaltar aquí, para efectos de este trabajo, que disciplina será entendido como rama y que ambos términos no se diferencian.

Ahora se abordará el estudio de los números figurados indagando sobre su caracterización y escrutando una forma recursiva de poderlos generar.

Los números figurados son de una relevancia absoluta dado que son ellos el enlace más largo que establece Pascal, en su tratado del "*triángulo aritmético*" con los antiguos. Dicho enlace llega hasta los pitagóricos, 540 años A. C.

LOS NÚMEROS FIGURADOS

La representación del entero positivo n se puede pensar como n objetos, por ejemplo piedras, todas por igual. Al encontrarse esas piedras en una bolsa, la posición de cada piedra no significa nada. Ahora, si la mente trae una imagen donde esas piedras son extendidas sobre una tabla o suelo entonces fácilmente se podrían mirar y contar. Los números figurados son números naturales que representan figuras y dependiendo de la forma, ellos serán clasificados.

[11] Entiéndase necesidad fenomenológica como necesidades del mundo físico o fenómenos de la naturaleza.

Clasificación de los números figurados.

Los pitagóricos consideraban patrones triangulares y cuadrados. A partir de sus estudios y preocupaciones postularon la correspondiente clasificación de los números llevando inmediatamente a una teoría de números.

Antes de pasar a caracterizar los números triangulares y cuadrados a través de una relación de recursividad, se debe esclarecer la notación que se utilizará. Esta notación pertenece o se encuentra en el libro *Pascal´s Arithmetical Triangle* de (Edwars, 1987):

f_k^l representa el $l-ésimo$ número figurado de la $k-ésima$ dimensión.

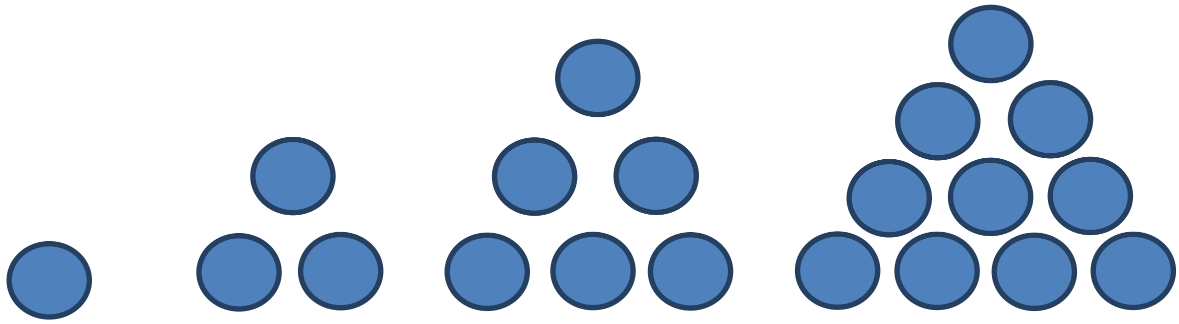
Caracterización	$k-ésima$ dimensión	Nombre
f_1^l	$1-ésima$ dimensión	Números Naturales
f_2^l	$2-ésima$ dimensión	Números Triangulares
f_3^l	$3-ésima$ dimensión	Números Tetraédricos
f_4^l	$4-ésima$ dimensión	Números Dimensión 4
f_5^l	$5-ésima$ dimensión	Números Dimensión 5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f_k^l	$k-ésima$ dimensión	Números Dimensión k

Ejemplo:

f_1^l : representa el l número figurado de la $1-ésima$ dimensión. Es decir: $f_1^1=1,\ f_1^2=2, f_1^3=3,\dots,f_1^l=?$ No es extraño observar que $f_1^l=l$; en pocas palabras es una sucesión de números naturales. La idea de ahora en adelante es mirar qué ocurre cuando se sube de dimensión. Todo esto se irá vislumbrando a través del desarrollo de este capítulo.

Los números triangulares

Los números triangulares son números naturales que representan en su forma geométrica un triángulo. Los números triangulares se generan al añadir los mismos naturales consecutivamente de tal suerte que el número triangular n tiene en su base un punto más que el número triangular $n-1$.



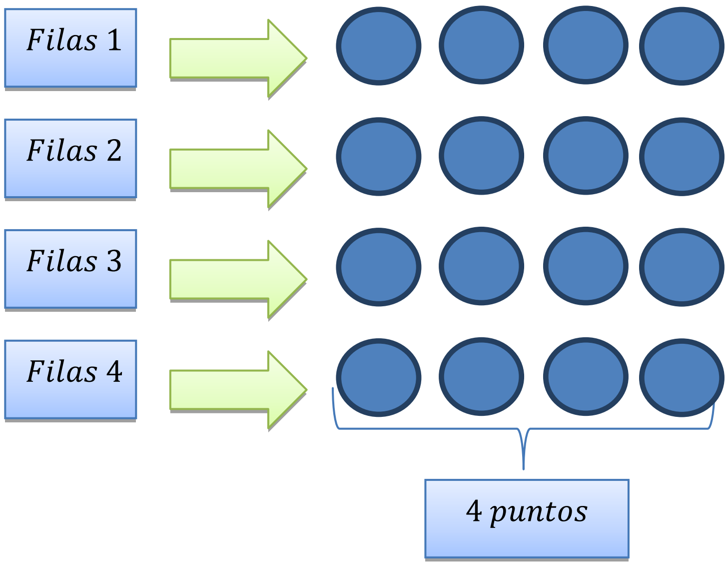
$f_2^1 = 1$	$f_2^2 = 3$	$f_2^3 = 6$	$f_2^4 = 10 \quad \ldots f_2^l = ?$
$f_2^1 = 1$	$f_2^2 = 1 + 2$	$f_2^3 = 3 + 3$	$f_2^4 = 6 + 4 \ldots f_2^l = ?$
$f_2^1 = 1$	$f_2^2 = f_2^1 + 2$	$f_2^3 = f_2^2 + 3$	$f_2^4 = f_2^3 + 4 \ldots f_2^l = ?$
$f_2^1 = 1$	$f_2^2 = f_2^{2-1} + 2$	$f_2^3 = f_2^{3-1} + 3$	$f_2^4 = f_2^{4-1} + 4 \ldots f_2^l = ?$

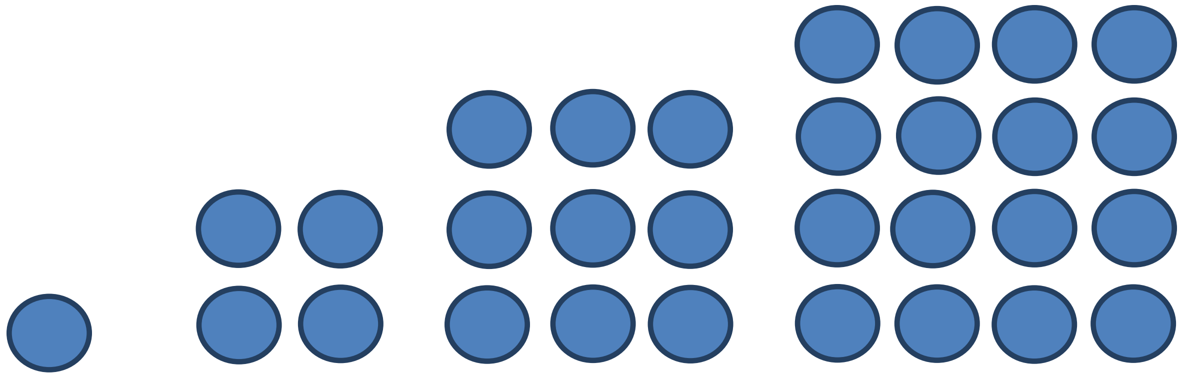
$$\boldsymbol{f_2^l = f_2^{l-1} + l} \quad (\mathbf{1})$$

Números Cuadrados.

Los números cuadrados son números naturales que representan en su forma geométrica un cuadrado. El $l-ésimo$ número cuadrado se compone de l filas cada una de l puntos.

Ejemplo: Cuarto número cuadrado de 4 filas cada una con 4 puntos.





$1^2 = 1$ $2^2 = 4$ $3^2 = 9$ $4^2 = 16$ ...

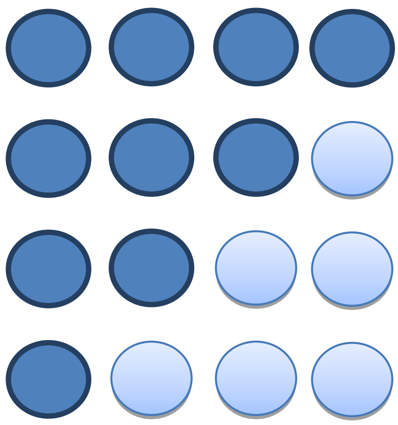
$l^2 = \underbrace{l + l + l \ldots + l}_{l - veces}$

En este punto no es de interés mostrar cómo se generan los números cuadrados dado que su representación geométrica brinda la forma recursiva de los mismos. El tratamiento de los números cuadrados para este trabajo será bajo la propiedad que ellos tienen con respecto a los números triangulares y es la siguiente:

"La suma de números triangulares sucesivos es un cuadrado".

$$\boldsymbol{f_2^l + f_2^{l-1} = l^2} \quad \textbf{(2)}$$

La propiedad anterior ya era conocida por Theon de Smyrna y Nicomachus (Nicomachus od Garesa, 100).



Números triangulares sucesivos (Aquí 6 y 10) adicionados juntos forman un número cuadrado (Aquí 16)

Despejando $\boldsymbol{f_2^{l-1}}$ en $(\mathbf{2})$ se tiene que:

$$\boldsymbol{f_2^{l-1} = l^2 - f_2^l}$$

y reemplazando en $(\mathbf{1})$ $\boldsymbol{que\ es\ f_2^l = f_2^{l-1} + l}$

se obtiene:

$$\boldsymbol{f_2^l = \left(l^2 - f_2^l\right) + l}$$

$$\boldsymbol{2f_2^l = l^2 + l}$$

$$\boldsymbol{f_2^l = \frac{l(l+1)}{2}} \quad (\mathbf{3})$$

Con la ecuación 3 se ha llegado a una fórmula de recursividad para los números triangulares.

Los argumentos en el cálculo combinatorio se pueden clasificar en dos categorías: Los argumentos recursivos (indirectos, que se construyen tal como lo hacían los pitagóricos y que bien ilustra Edwards) y los argumentos combinatorios, que se construyen en forma directa, mediante una fórmula argumentada. Se puede decir que un argumento combinatorio es aquél que utiliza bien sea el principio de la suma, bien sea el principio de la multiplicación o bien sea otros argumentos combinatorios.

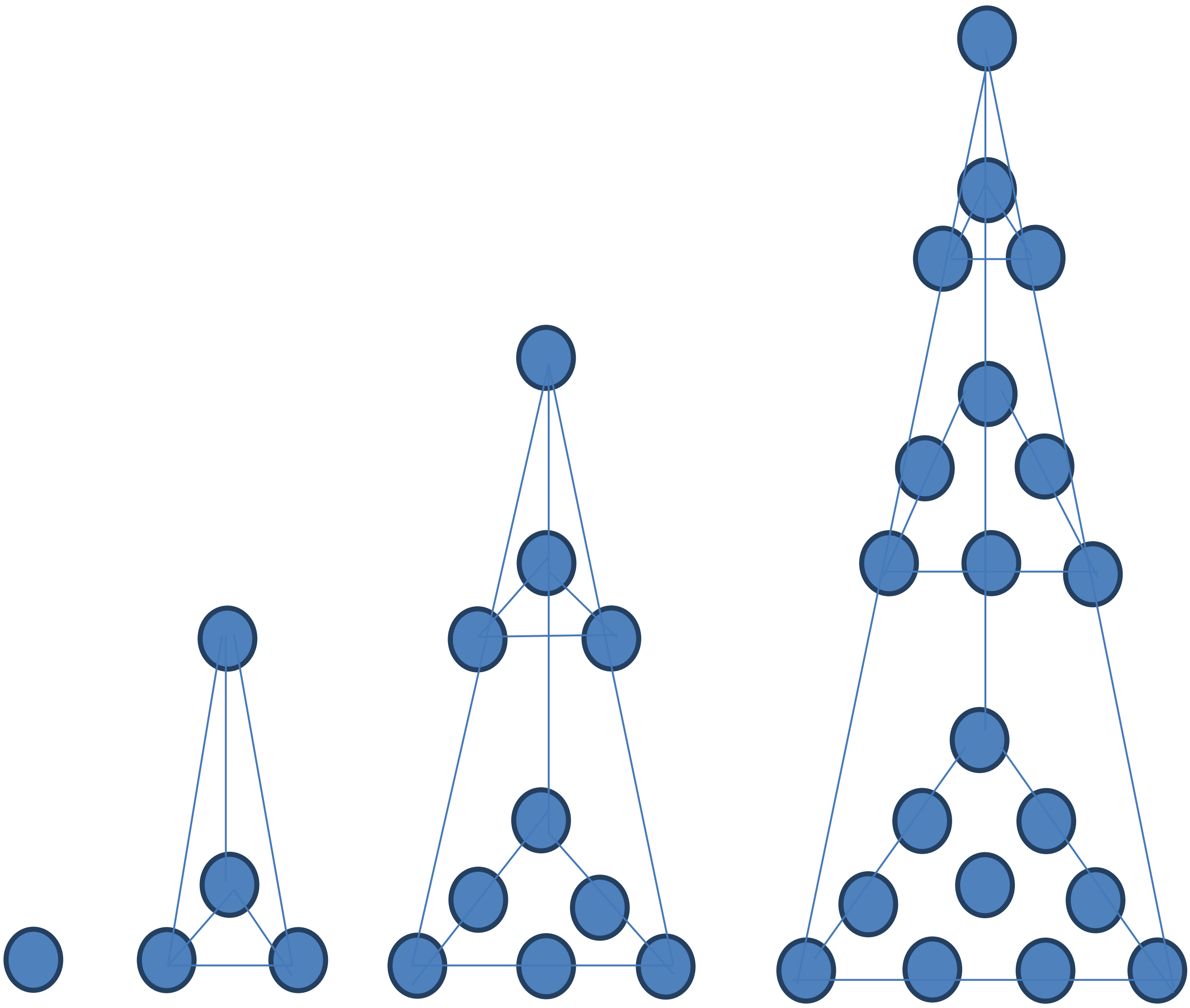
Por ejemplo un argumento combinatorio indirecto para encontrar la suma de los primeros n enteros, es primero encontrar el promedio de su progresión aritmética, que es $\frac{1+n}{2}$ dado que siempre se debe sumar el primero y último número de la progresión y dividirlo entre 2; y luego multiplicar ese promedio por el número de elementos n, lo que deja como resultado la fórmula (3). Estos argumentos indirectos constituyen el núcleo del trabajo de los matemáticos como Fermat, Pascal y Bernoulli.

Otro argumento combinatorio se logra cuando se responde a la pregunta sobre la sucesión de enteros $1, 2, 3, \ldots, n, n+1$; tenemos dos casillas; en las cuales colocamos dos dígitos diferentes de la sucesión. En la primera casilla siempre colocamos el menor. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer? Hay dos maneras de responder (típico de un argumento combinatorio); primera manera: si en la primera casilla colocamos 1, en la segunda podemos colocar $2, o\ 3\ o \ldots o\ n+1$ (es decir n números de la sucesión), si en la primera casilla colocamos 2, entonces en la segunda casilla podemos colocar $3, o\ 4\ o \ldots o\ n-1$ números de la sucesión (es decir $n-1$ números de la sucesión) y así sucesivamente; entonces para llenar esas dos casillas lo podemos hacer de $n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$; la segunda manera de verlo es: saco de una urna (que contiene la sucesión) dos números sin remplazo, coloco el menor en la primera casilla. Entonces el número de formas que en que se puede hacer eso es C_2^{n+1}, entonces se deduce que $n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = C_2^{n+1}$

Un tanto similar a los números triangulares, se procederá para llegar a una ecuación de los números tetraédricos. Es decir, se inició con una sucesión donde todos sus elementos eran el número 1. Se sumaron dichos elementos y su resultado genero los números naturales que al ser sumandos generan los números triangulares y finalmente al añadir los números triangulares se obtendrán los números tetraédricos. A continuación se describe el proceso.

Números Tetraédricos.

Los números tetraédricos son números naturales que representan en su forma geométrica un tetraedro. Los números tetraédricos se generan al añadir los números triangulares consecutivamente de tal suerte que el número tetraédrico n tiene en su base un punto más que el número tetraédrico $n-1$.



$f_3^1 = 1 \qquad f_3^2 = 4 \qquad f_3^3 = 10 \qquad f_3^4 = 20 \; \ldots f_3^l = ?$

$f_3^1 = 1 \qquad f_3^2 = 1 + 3 \qquad f_3^3 = 4 + 6 \qquad f_3^4 = 10 + 10 \ldots f_3^l = ?$

$f_3^1 = 1 \qquad f_3^2 = f_3^1 + 3 \qquad f_3^3 = f_3^2 + 6 \qquad f_3^4 = f_3^3 + 10 \ldots f_3^l = ?$

$f_3^1 = 1 \qquad f_3^2 = f_3^1 + f_2^2 \qquad f_3^3 = f_3^2 + f_2^3 \qquad f_3^4 = f_3^3 + f_2^4 \ldots f_3^l = ?$

$f_3^1 = 1 \qquad f_3^2 = f_3^{2-1} + f_2^2 \qquad f_3^3 = f_3^{3-1} + f_2^3 \qquad f_3^4 = f_3^{4-1} + f_2^4 \ldots f_3^l = ?$

$$\boldsymbol{f_3^l = f_3^{l-1} + f_2^l \quad (4)}$$

Nicomachus dio los números tetraédricos (“Piramidales triangulares” como oposición a pirámides con bases cuadradas u otras bases) como:

“1, 4, 10, 20, 35, 56, 84,… ”

formados por la regla anterior de los números triangulares:
“1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,… ”

que estos mismos se formaron de los enteros
“1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,… ”

quienes son, por supuesto, formados por la aplicación de la regla misma a la secuencia:
“1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,… ”
Pero ni Nicomachus ni Theon dieron estos números en forma tabular:

					l				
		1	2	3	4	5	6	7	…
	0	1	1	1	1	1	1	1	...
k	1	1	2	3	4	5	6	7	…
	2	1	3	6	10	15	21	28	…
	3	1	4	10	20	35	56	84	…

Figura 7. Parte del triángulo figura: los números figurados en 0, 1, 2 y 3 dimensiones.

Ni tampoco aplicaron la regla de formación a los números tetraédricos para producir otra fila, que tendrá correspondencia al procedimiento más allá de 3 dimensiones.

Frente a lo escrito en el párrafo anterior se puede pensar que tal vez en ese momento de la historia se conservaba una fuerte conexión con respecto al referente geométrico y a lo mejor fue eso lo que no permitió que estos autores subieran de dimensión dado que ese resultado carecería de ontología con respecto a dichos objetos y su figura.

Pensando los números figurados con herramientas del hoy sin tener en cuenta el referente geométrico, se podría perfectamente obtener que:

$$\boldsymbol{f_4^l = f_4^{l-1} + f_3^l} \quad (\mathbf{5})$$

$$\boldsymbol{f_5^l = f_5^{l-1} + f_4^l} \quad (\mathbf{6})$$

Y si se busca la generalización de manera recurrente, se consigue:

$$f_k^l = f_k^{l-1} + f_{k-1}^l \quad (7)$$

Resumiendo un poco los resultados obtenidos con base en las fórmulas recurrentes o inductivas se puede escribir lo siguiente:

Números triangulares:

$$\boxed{f_2^l = f_2^{l-1} + f_1^l = f_2^{l-1} + l = \frac{l(l+1)}{2} \quad (3)}$$

Números Tetraédricos:

$$\boxed{f_3^l = f_3^{l-1} + f_2^l \quad (4)}$$

Números Dimensión 4:

$$\boxed{f_4^l = f_4^{l-1} + f_3^l \quad (5)}$$

Números Dimensión 5:

$$\boxed{f_5^l = f_5^{l-1} + f_4^l \quad (6)}$$

$$\vdots \quad = \quad \vdots$$

Números figurados ó números Dimensión k:

$$\boxed{f_k^l = f_k^{l-1} + f_{k-1}^l \quad (7)}$$

donde $f_k^1 = f_0^l = f_0^1 = 1; l = 2, 3, 4, \ldots; k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\boxed{f_k^l = \sum_{i=1}^{l} f_{k-1}^i \quad (8)}$$

$$f_k^l = \underbrace{f_{k-1}^1 + f_{k-1}^2 + f_{k-1}^3 + \cdots + f_{k-1}^{l-1}}_{f_k^{l-1}} + f_{k-1}^l$$

$$f_k^l = f_k^{l-1} + f_{k-1}^l$$

Sumar todos los números figurados de cierta dimensión, da como resultado el número figurado en la siguiente dimensión.

La historia es un ir y volver en el tiempo pues se hace pertinente esta revisión para conectar los posibles hechos frente a determinado tema.

Respecto a la combinatoria, que es el interés de este trabajo, se tiene muestra de un papiro que existe de la Antigua Egipto (500 A.C) que evidencia las siguientes fórmulas para la suma de los primeros números triangulares y tetraédricos.

Suma de Números naturales $\Rightarrow$ $$\frac{l(l+1)}{2}$$

Suma de Números Triangulares $\Rightarrow$ $$\frac{l(l+1)}{2} \cdot \frac{(l+2)}{3}$$

Guillings escribe que:

Suma de Números Tetraédricos $\Rightarrow$ $$\frac{l(l+1)}{2} \cdot \frac{(l+2)}{3} \cdot \frac{(l+3)}{4}$$

La generalización de los números figurados a 4 o más dimensiones en occidente está a cargo de Niccoló Tartaglia en 1523 mientras enumeraba el lanzamiento de dados, aunque su tabla fue publicada en 1556.

Es pertinente aclarar aquí que el triángulo aritmético conocido como el triángulo de Pascal, es prácticamente de Tartaglia dado que fue él quien extendió la tabla a más dimensiones pero se apoyó en trabajos y hallazgos de otros pensadores, y aseguró que podría ir hasta el infinito. No obstante, Pascal es quien se da cuenta de muchas propiedades que tiene el triángulo aritmético y por ello recibe muchas veces el nombre del triángulo de Pascal; pero toda esta discusión será planteada en capítulos posteriores.

Frente a lo anterior, (Casalderrey, 2000, pág. 158) comenta:

“Tartaglia habla de este triángulo en su General tratto di numeri et misure (Venecia 1556 – 1560). Hay que señalar de todas formas dos cosas: primero, que la fama por la difusión de este triángulo la comparte también con Blaise Pascal (1623 – 1662, de hecho, en muchos

manuales aparece denominado como el Triángulo de Pascal y, segundo, tampoco en este caso fue Tartaglia su primer descubiertos ya que aparece en trabajos anteriores de otros autores"

El análisis crucial del lanzamiento de dados de uno o más al mismo tiempo resuelto con completa generalidad al realizar números de lanzamientos desordenados de n dados (incluso 10.000, dice el autor) y la extensión de la tabla de números figurados a más de tres dimensiones fue hecho por Tartaglia *"en el primer día de Cuaresma, 1523, en Verona"* Esto se encuentra descrito en la segunda parte de su *General trattato di numeri, et misure*[12] publicado en 1556.

Prima eglie manifesto che vn sol dato puo variar in 6 modi per esser di 6 fazze, ouer di 6 bale, nellequali sono 6 ordini di numeri, cioe 1.2.3.4.5.& 6.come in figura vedi.

Ma per trouar in quanti modi puo variar il getto di duoi dati trouai che raccogliendo tutte le vnita, che sono da 1 per fino in 6.nella sopra notata progression continua, che fanno 21.& cosi in 21 modo trouai poter variar il getto di duoi dati.

Tre dati poi ponno variar il lor getto nella summa di questi 6 termini di progressione 1.3.6.10.15.21. laqual summa sara 56.

Li 4 dati ponno variar il lor getto nella summa di questi altri 6 termini di progressione 1.4.10.20.35. 56.laqual summa sara 126.

Li 5 dati ponno variar il lor getto nella summa di questi altri 6 termini di progressione 1.5.15.35.70. 126.laqual summa sara 252.

Li 6 dati ponno variar il lor getto nella summa di questi altri 6 termini di progressioni 1.6.21.56.126. 252.laqual summa sara 462.

Li 7 dati ponno variar il lor getto nella summa di questi 6 termini di progressione 1.7.28.84.210.462. laqual summa sara 792.

Li 8 dati ponno variar il lor getto nella summa di questi 6 termini di progressione 1.8.36.120.330. 792.laqual summa sara 1287.

Ma a volerti mo dichiarare minutamente in scrittura l'origine di tutti li sopra notati 6 termini di progressioni bisognaria formarui sopra vn libro, ma accioche in parte resti satisfatto, sappi che ogni vna di dette progressioni si forma dalla progressione anciana, & la prima progressione viene a esser di 6 termini di vna vnita per termine in questa forma 1.1.1.1.1.1.et cosi la summa di questi 6 termini di progressione puo variar il getto di vn dato solo, come vedi in figura. Et nota che l'ultimo termine di ciascuna di dette progressioni vien a esser la summa della anciana progressione, come nella figura puoi vedere, & cõ tal ordine potrai saper li 10000 dati in quanti modi ponno variar il lor getto.

per 1 dato	1	1	1	1	1	1
per 2 dati	1	2	3	4	5	6
per 3 dati	1	3	6	10	15	21
per 4 dati	1	4	10	20	35	56
per 5 dati	1	5	15	35	70	126
per 6 dati	1	6	21	56	126	252
per 7 dati	1	7	28	84	210	462
per 8 dati	1	8	36	120	330	792

Il fine del primo libro.

Figura 8. Parte de la página de General trattato de Tartaglia de 1556 dando el número de maneras que n dados pueden caer

[12]Para ampliación de este hecho remitirse a (Tartaglia, 1556), Parte II, folio 17r

Los estudios de las caídas de dados se inician con las maneras en que pueden caer 3 de ellos. En el texto de (Spirto, 1535) titulado *Libro della ventura*, se encuentra la siguiente figura para 56 lanzamientos de 3 dados:

111	116	336	553	651	541
222	221	441	554	652	542
333	223	442	556	653	543
444	224	443	661	654	531
555	225	•	•	641	532
666	226	•	•	642	521
112	331	445	662	643	431
113	332	446	663	631	432
114	334	551	664	632	421
115	335	552	665	621	321

Figura 9. La enumeración de 56 lanzamientos de 3 dados dada en el Libro della Ventura[13]

Fue un golpe de genialidad en Tartaglia que le permitió mirar el problema de una manera mucho más provechosa, señalando como se sigue:

"Un dado puede caer en 6 maneras, donde las 6 caras inscritas son 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Para encontrar de cuántas maneras pueden caer dos dados indistinguibles, se suma la sucesión anterior y se obtiene 21 maneras. Tres dados pueden caer en el número de maneras dadas dando la suma de 6 términos de la sucesión 1, 3, 6, 10, 15, 21, que es 56; cuatro dados sumando 1, 4, 10, 20, 35, 56 para dar 126". Y así procede Tartaglia hasta ocuparse de 8 dados, donde se detiene para dar su regla general, ilustrada por una tabla (ver figura 7). "Cada número de la sucesión es formado por la anterior sucesión, mientras que la primera sucesión es formada por 1, 1, 1, 1, 1, 1, así que en efecto la suma de esos seis términos da el número de lanzamientos de un solo dado. El último término de cada sucesión es la suma de la sucesión anterior, como se puede ver en la figura".

[13] Los puntos indican los errores que se quitaron de la tabla original.

Aunque Tartaglia no ofrece ninguna explicación de su planteamiento, se vuelve relativamente sencillo si se organizan los números de la figura 10 clasificándolos en una enumeración en la cual los dígitos del 1 al 6 son introducidos sucesivamente.

111	211	311	411	511	611
	221	321	421	521	621
	222	322	422	522	622
		331	431	531	631
		332	432	532	632
		333	433	533	633
			441	541	641
			442	542	642
			443	543	643
			444	544	644
				551	651
				552	652
				553	653
				554	654
				555	655
					661
					662
					663
					664
					665
					666
1	3	6	10	15	21

56 ways in all

Figura 10. La enumeración de 56 lanzamientos de 3 dados arreglados para exhibir el presunto razonamiento de Tartaglia

Al parecer Tartaglia procedió de la manera anterior, es decir, se considera como una posible manera de razonar.

Tartaglia no comentó sobre el hecho de que las cuatro primeras filas de la figura (9) daban los números figurados; él debía saber eso porque su regla de formación es exactamente la misma que la de Nicomachus, y él describe los números triangulares al comienzo de Libro 1 de la segunda parte de *General trattato.* Su hábito de no dar referencias cruzadas incluso extendiendo y omitiendo algún comentario sobre el hecho que los números contenidos en el triángulo binomial (figura 12) dado en su Libro 2 son exactamente los indicados en el Libro 1 en conexión con la enumeración del lanzamiento de dados. Es imposible creer que no fuera consciente de la identidad. Junto con el trabajo de Apianus[14] titulado *Arithmetic* de 1527, Tartaglia y Apianus son considerados los autores principales de este triángulo binomial y su regla de adición de nuevo, habiendo tenido ya una versión del triángulo aritmético en un contexto combinatorio.

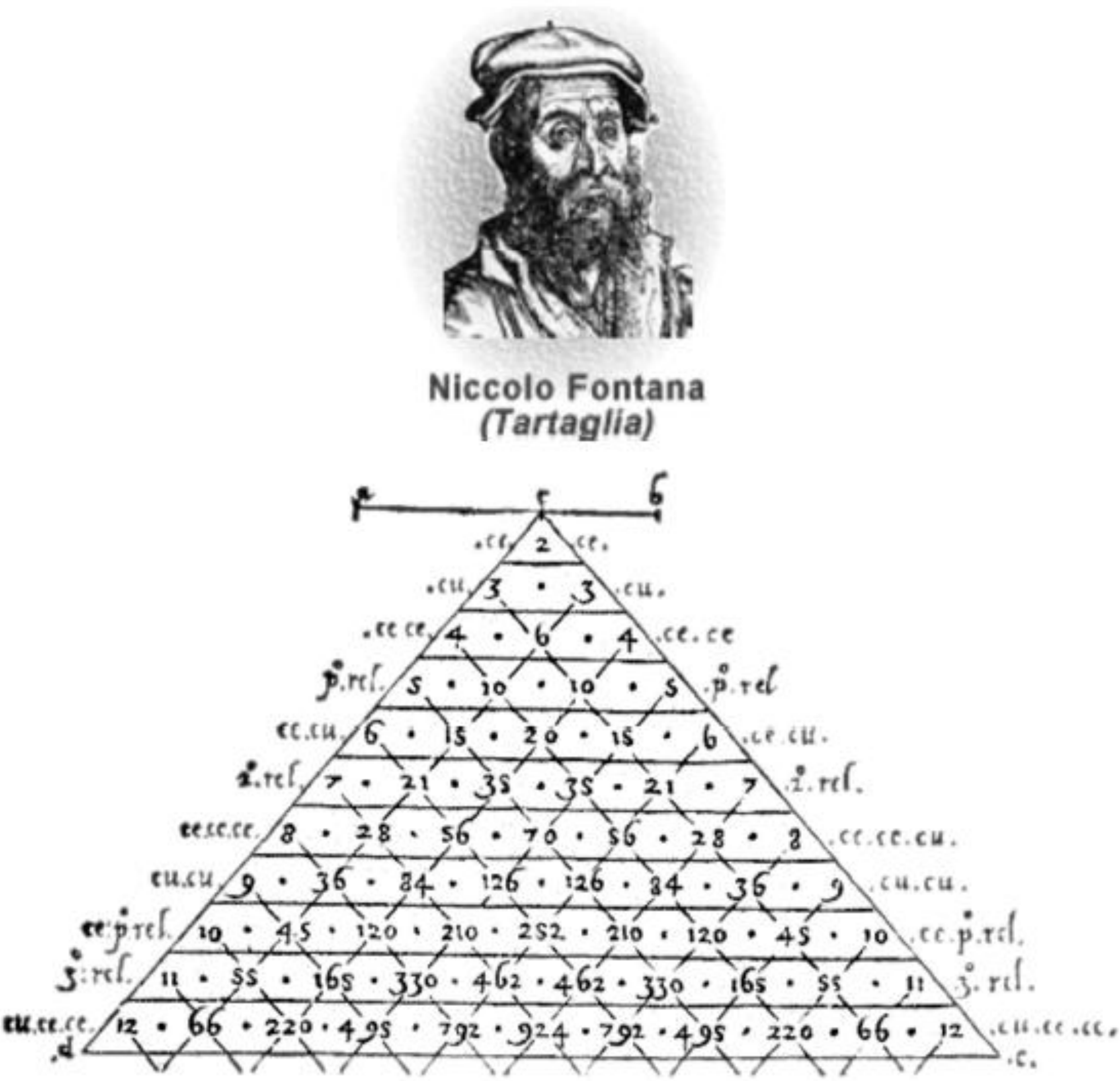


Figura 11. El triángulo binomial del General trattato de Tartaglia (1556)

[14]Para ampliación de este hecho remitirse a (Smith, 1925, pág. 509)

Así procedió Nicolo Tartaglia, partícipe de la solución de la ecuación cubica, contribuye una de las piedras angulares del análisis combinatorio, y también contribuye en la conexión extendida del triángulo figurado por aplicación continúa de las reglas clásicas para generar números figurados.

A su contemporáneo Gerolamo Cardano se le debe no solo el origen del cálculo de probabilidades, pero, desde 1570, un impreso del número de combinaciones de n diferentes cosas tomadas r a la vez[15]. En esencia Cardano invita a suscribirse con la regla de Narayana:

$$C_r^n = f_r^{n-r+1} \quad (9)$$

aunque sin alguna demostración.

La ecuación (11) que se encuentra posteriormente, está dada en el *Ganita de Kaumudi* de Narayana. El *Ganita kaumudi* es un comentario sobre el *Lilavati* de Bhaskara[16], que contenía la formula combinatoria (como se mirará más adelante) y Narayana notó la equivalencia entre los números figurados y la fórmula para los números combinatorios de diferentes cosas tomadas muchas al tiempo.

Cardano adiciona además la manera para obtener el número combinatorio C_r^n del anterior C_{r-1}^n

$$C_r^n = \frac{n-r+1}{r} C_{r-1}^n \quad (10)$$

Esto le permite generar el número sucesivo de combinaciones de n cosas tomadas $1, 2, 3, 4, \ldots$ a la vez por aplicación repetida de (10); o en otras palabras él da la regla Hindú:

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot r} \quad (11)$$

[15]Para ampliación de este hecho remitirse a (Cardano, 1570)
[16] Para ampliación de este hecho remitirse a (Srinivasiengar, 1967, pág. 94)

Jerónimo Cardano

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
3	6	10	15	21	28	36	45	55		
4	10	20	35	56	84	120	165			
5	15	35	70	126	210	330				
6	21	56	126	252	462					
7	28	84	210	462						
8	36	120	330							
9	45	165								
10	55									
11										

Figura 12. El triángulo combinatorio de Cardano en Opus novum de 1570

En efecto, en 1150 Cardano usa la regla (11) para enumerar todas las posibles maneras en que $n = 20$ cosas pueden ser combinadas (acortando su cálculo usando $C_r^n = C_{n-r}^n$)

Lo interesante que cuenta de Cardano no es solo que en adelante esta regla estaba disponible en una obra estándar, pero que al dar (10) al mismo tiempo que señala que los números combinatorios son simplemente los números figurados (9), él da (15), que es la relación que se describe de los números figurados, la cual se evidenciará más adelante con la *Trigonometria Britannica* de (Briggs, 1633) y entonces (16) también.

Cardano también apreció que la suma de los números combinatorios para un n dado (excluyendo el primero) era

$$\sum_{r=1}^{n} C_r^n = 2^n - 1 \qquad (12)$$

De otro lado, en 1544 en Alemania, Stifel da una forma del triángulo figurado extendido en conexión con la extracción de raíces. La extracción de raíces cuadradas correspondía al método clásico de la identidad Euclidiana $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ en la forma $(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)b$. Para las raíces cúbicas el método correspondiente se basa en $(a+b)^3 = a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)b$ y fue conocido en oriente antes de aparecer en Italia en los trabajos de Fibonnacci[17] en 1202. Stifel aplica el método de raíces a grados arbitrarios, para lo cual él necesitaba encontrar los números binomiales del grado correspondiente. Stifel desarrolla su propio triangulo figurado y a partir de éste obtiene los números binomiales.

Der Ander theyl

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	156	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870

Es kan aber ein fleissiger Leser/ diser tafel brauch leichtlich sehen/ aus den gesetzten satzungen der puncten/ Item auch wie sich die zalen der tafel aus einander finden/ wer sich aber selbs nicht kan drauß verrichten/ mag jm solliche zeygen lassen/ wie ich denn gnugsam dauon geschriben hab in meiner Latinischen Arithmetica.

Figura 13. Versión de Stifel del triángulo figurado (1545).

El triángulo es resultado de tomar en la primera columna, los números naturales, en la segunda los números triangulares, en la tercera los números tetraédricos; encontrados

[17] Para ampliación de este hecho remitirse a (Smith, 1925, pág. 148)

aplicando la ecuación (7) y así sucesivamente. La particularidad radica en la escalonada del triángulo la cual se genera tomando cada columna y dos lugares más debajo de cada una de ellas, en el tercer lugar o fila, el número correspondiente será el mismo en la siguiente columna, es decir, la columna siguiente se encabezará por el número correspondiente al tercer lugar en la columna anterior. Ej: En la columna 1, el tercer lugar le corresponde el número 3 que es el mismo que encabeza la columna 2.

Por su método de construcción, se puede decir que Stifel ha apreciado la siguiente igualdad:

$$f_m^m = f_{m-1}^{m+1} \qquad (13)$$

Entonces, usando su tabla encuentra los números binomiales que él necesitaba para la extracción de raíces, Stifel extiende el triángulo por la simetría involucrada a través de su método de construcción.

Si la identidad de los números binomiales y los números figurados según la ecuación:

$$\binom{n}{r} = f_r^{n-r+1} \qquad (14)$$

se puede decir que ha tenido un hallazgo en occidente, seguramente fue gracias a Stifel.

De otro lado, (Oughtred, 1631) señala explícitamente la identidad de los números figurados y los números binomiales en su *Clavis Mathematicae*. Oughtred se graduó de Cambridge en 1596 y se convirtió en un influyente profesor privado de matemáticas, incluyendo a John Wallis entre sus pupilos[18] mientras Newton poseía una copia de la tercera edición de *Clavis Mathematicae* (Oughtred, 1652). Los anteriores enlaces son importantes en la convergencia de las ideas y sus contextos.

En el año de la publicación del libro de Oughtred, 1631, Henry Briggs, muere dejando en manuscrito su *Trigonometria Britannica*, que fue publicada por su amigo Henry Gellibrand dos años después[19]. El manuscrito de Briggs contiene una introducción donde un capítulo de ésta es sobre el triángulo figurado que Briggs llama el "*Abacus* ΠΑΓΧΡΗΣΤΟΣ" o "calculadora de muchos usos" Referencia a los números como números figurados, Briggs

[18] Para ampliar información dirigirse a (Cajori, 1916)
[19] Para ampliar información dirigirse a (Briggs, 1633)

señala sus usos en la expansión binomial y en cálculos trigonométricos y da la regla de la adición

$$f_k^l = f_k^{l-1} + f_{k-1}^l \quad (7)$$

pero a continuación hace un importante paso al señalar (en palabras) que:

$$kf_k^l = lf_k^{l+1}, k = 2,3,4, \dots \quad (15)$$

La aplicación repetida de la ecuación (7) permitió a Briggs encontrar números en el triángulo aritmético sin tener la necesidad de llenarlo todo. Dicha aplicación es equivalente a:

$$f_k^l = \frac{l(l+1)(l+2)\dots(l+k-1)}{k(k-1)(k-2)\dots 1} \quad (16)$$

donde, $f_0^{l+k} = 1$, aunque Briggs procede de lado usando una combinación de la regla aditiva (7) y multiplicativa (15); sustituyendo por f_{k-1}^l en (16) entonces se tiene que:

$$f_{k-1}^l = \frac{l(l+1)(l+2)\dots(l+k-2)}{(k-1)(k-2)\dots 1} \quad (17)$$

Luego, sustituyendo (17) en (16) se puede ver que:

$$f_k^l = \frac{(l+k-1)}{k} f_{k-1}^l \quad (18)$$

Briggs, habiendo sido profesor de geometría en Greham College, London, desde 1596 a 1619 (a partir de ahí, fue profesor en Oxford), pudo haber tenido familiaridad con los grandes escritores italianos del renacimiento Cardano y Tartaglia y podría haber adquirido su inicial conocimiento del triángulo aritmético desde entonces, pero aunque Cardano dio la ecuación (15) en palabras en 1570, quién lo hizo en un contexto combinatorio fue Briggs.

El manuscrito *De Numeris Triangularibus* de Thomas Harriot, descrito en parte por (Lohne, 1965)[20], es un texto inédito escrito probablemente en 1611 o un poco antes. En él se demuestra un conocimiento de (16) así como de la regla adición de formación de los números figurados, reemplazando en (16) valores de k hasta 7. Entonces reordenando su tabla de números figurados en la tabla de números "binomiales", él notó que las sucesivas filas sumaban $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ y que el número en la $(n+1) - ésima$ fila y $(r+1) - ésima$ columna es

[20] Para ampliar el conocimiento sobre Thomas Harriot también puede consultarse (Lohne, 1979).

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots\cdot r} \qquad (19) = (11)$$

Luego,

$$1, \qquad \frac{n}{1}, \qquad \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \dots, \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots\cdot r}$$

1	= 1						
1	1	= 2					
1	2	1	= 4				
1	3	3	1	= 8			
1	4	6	4	1	= 16		
1	5	10	10	5	1	= 32	
1	6	15	20	15	6	1	= 64

Figura 14. Segunda disposición de Harriot del triángulo aritmético.

La transformación de (16) a (19) que acompaña el cambio de forma de la tabla fue un importante elemento para formular el teorema general[21] del binomio de Newton medio siglo después.

TRATADO DEL TRIÁNGULO ARITMÉTICO

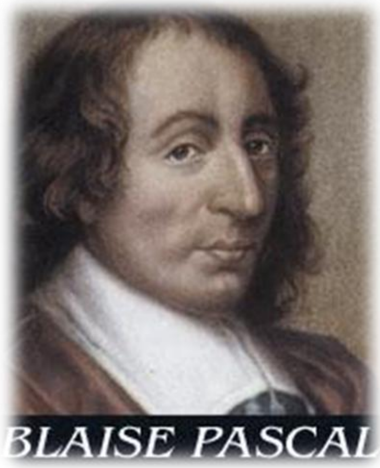
En este apartado se apreciará el bello y estructurado trabajo del Pascal respecto a su tratado del triángulo aritmético que es el corazón y la motivación de este trabajo de grado. Aquí se exhibirán las diecinueve consecuencias del tratado siguiendo el libro *Obras Matemáticas* de (Alvarez, Martínez, & Torres, 1995) y dado que es un trabajo encaminado a la educación más que a la ciencia pura como tal, se propone una visualización de manera gráfica de las anteriores consecuencias sin utilizar las letras como lo hace originalmente Pascal sino utilizando los números como generalmente ha sido divulgado y conocido el triángulo aritmético muchas veces llamado triángulo de Pascal puesto que fue él quien logro conectar las diferentes propiedades o relaciones que existían entre los números figurados denotados por f_k^l donde su significado es el $l-ésimo$ número en la $k-ésima$ dimensión y se calcula sumando los primeros l números con sus anteriores que se encuentran en la

[21] El estudio de la formulación del teorema se sale de los propósitos de este trabajo. Luego, el párrafo es de carácter divulgativo.

$k-1$ $ésima$ dimensión, los números combinatorios denotados por C_r^n donde su significado son las combinaciones de n cosas diferentes tomadas r a la vez y los números binomiales denotados por $\binom{n}{r}$ y su significado son los coeficientes de la expansión de $(a+b)^n$, es decir, los coeficientes que acompañan al término $a^r b^{n-r}$. Además, la función de los colores en todos los triángulos es ilustrar visual e intuitivamente por medio de casos particulares lo que quiere decir cada proposición o consecuencia. La intensión de esto es recordar más rápidamente las consecuencias teniendo un referente visual geométrico.

"*No doubt Pascal knew Mersenne´s books; Pascal´s contributions are thus essentially his proofs and the clear demonstration of the relations between the figurate, binomial, and combinatorial numbers*" (Hald, 1990, pág. 54)

También, siguiendo con el objetivo general de este trabajo, se describirán las diecinueve consecuencias y el problema que propone Pascal utilizando notación moderna que será tomada tanto de *Pascal´s Arithmetical Triangle* de (Edwars, 1987).



"*Prefiero equivocarme creyendo en un Dios que no existe, que equivocarme no creyendo en un Dios que existe. Porque si después no hay nada, evidentemente nunca lo sabré, cuando me hunda en la nada eterna; pero si hay algo, si hay Alguien, tendré que dar cuenta de mi actitud de rechazo*." Blaise Pascal (1623-1662) Científico, filósofo y escritor francés.

La cita anterior muestra la profunda religiosidad de Pascal, más aun, en uno de sus célebres pensamientos, "La apuesta", plantea un remoto inicio en el concepto contemporáneo de "la teoría de la decisión" según lo anota el filósofo e historiador (Hacking, 1975), en su libro "Emergencia de la probabilidad"

Blaise Pascal nació el 19 de junio de 1623, en Clermont – Ferrand. Su padre, Etienne, era un próspero magistrado con el título de consejero real y con recursos suficientes para llevar una vida cómoda en el sitio que eligiera. Etienne y Antoinette Begin, su esposa, tuvieron también dos hijas, Gilberte (n. 1620) y Jacqueline (n. 1625). En noviembre de 1631 su Padre se trasladó a Paris con el propósito de asegurar una educación mejor para sus hijos. En 1635 Etienne fue uno de los fundadores de la Academia Marin Mersenne, el mejor intercambio de información matemática en Europa para aquel tiempo. A su academia informal, él introdujo a su hijo a la edad de catorce (14) años y Blaise inmediatamente puso su nueva fuente de conocimiento a un buen uso, produciendo (a los dieciséis (16) años) su famoso *Ensayo para las cónicas* basado en los trabajos de Desargues, otro miembro fundador de la academia[22].

Pascal probablemente escribió su libro en noviembre de 1654. El estímulo de su interés fue la combinatoria para él lograr la solución al juego del problema de los puntos, el cual había sido tratado por Pacioli, Tartaglia y Cardano. Brevemente, el problema consiste en la división de las apuestas entre dos jugadores cuando el juego se dejó sin terminar.

La información que se contempla a continuación con base en el tratado del triángulo aritmético, sus cambios, ediciones, estructuras y demás; fue obtenida del libro *Pascal´s Arithmetical Triangle* de (Edwars, 1987).

El *Traité du triangle arithmétique, aved quelques autres petits traitez sur la mesme matiére,* publicado en 1665, se compone de cuatro extensiones. Las hojas impresas se encontraron entre los artículos de Pascal después de su muerte; una página titulada, *Avertissement,* y una lista de contenidos se añadieron, junto con una figura de un triángulo dibujada de un borrador de Pascal, y en conjunto entonces se encuadernó y se vendió.

La primera extensión se compone de 11 páginas y se titula *Traitté du triangle arihmétique;* después la definición del triángulo, contiene 19 corolarios y un problema. La segunda extensión es de 8 páginas, con el corto título *Divers usages du triangle arithmétique,* y tiene dos partes: *Usage du triangle arithmétique pour les ordres numérique,* y *Usage du triangle arithmétique pour les combinaisons.* La tercera extensión es de 16 páginas y también consiste en dos partes: *Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partys qu´on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties* y *Usage du triangle arithmétique pour trouver les puissances des Binomes et Apotomes.* La cuarta extensión comienza con el *Traitté des ordres numériques,* que está en francés, con 11 proposiciones y está seguida por 6 partes en latín, tiene 48 páginas.

[22] Para el lector interesado en profundizar sobre estos primero trabajos matemáticos y geométricos se le sugiere consultar a (Alvarez, Martínez, & Torres, 1995)

Surge la pregunta de ¿cuánto de este material adecuadamente podría considerarse como que comprende el propio *Traité du triangle arithmétique*? La paginación, la tipografía de la sección de encabezamientos y los contenidos en sí mismos, todos apuntan ligeramente a diferentes conclusiones, pero parece razonable considerar que el título de la segunda extensión, *Divers usages du triangle arithmétique,* que está en una portada separada como abarcando las dos secciones de la tercera extensión, aunque la paginación se inicia de nuevo dejando un libro de 36 páginas (una en blanco) en dos partes, cuya descripción podría ser:

Un tratado sobre el triángulo aritmético

por B. Pascal.

Parte I *Un tratado sobre el triángulo aritmético*[23].

Parte II *Usos del triángulo aritmético*

(1) En la teoría de los números figurados
(2) En la teoría de combinaciones.
(3) En la división de la participación de los juegos de azar
(4) En encontrar las expresiones de potencias binomiales.

La parte I y la parte II, sección 1 y 2, al menos debe haber sido completada antes del 29 de Agosto de 1654 porque en esa fecha Fermat escribió a Pascal refiriéndose al *Traités du Triangle arithmétique et de son application,* pero la referencia no necesariamente incluye la Parte II, sección 3 y 4. Éstas son probablemente a más tardar del 29 de julio, pero la sección 3 va más allá que las cartas de Pascal del 29 de julio en la aplicación de la teoría de las combinaciones al problema de los puntos.

Es pertinente decir aquí que en la época de Pascal no se conocían los subíndices. La lectura de los textos de Pascal resulta extraña (casi inusitada) para un estudiante de esta época.

Pascal inicia su tratado dando la definición de *Triángulo aritmético* apoyándose en dos líneas perpendiculares que serán divididas en partes iguales.

[23] La descripción de este trabajo de grado, siguiendo el objetivo general, será centrada en esa parte del tratado sobre el triángulo aritmético.

"*Llamo triángulo aritmético a una figura cuya construcción es tal. Trazo desde un punto cualquiera G, dos líneas perpendiculares una a la otra, GV, $G\zeta$, en cada una de las cuales tomo partes iguales y continuas…..*"

Esas partes iguales serán enumeradas y a aquellos números los llamará *exponentes*. Al unir correspondientemente (1 – 1, 2 – 2, 3 – 3, …) esas divisiones de cada línea con una nueva línea, se creará la *base* de cada triángulo aritmético y determinadas uniones le corresponderían igual número de triángulos y de bases. Por ejemplo al unir (4 – 4) se obtiene cuatro triángulos con cuatro bases (1, 2, 3, 4). Seguidamente Pascal traza por cada punto de división líneas paralelas a los lados y eso genera formación de pequeños cuadrados a los cuales él designará como *células.* Luego define las *células de un mismo rango paralelo* como aquellas células que van de izquierda a derecha y que están entre dos paralelas. De forma similar o análoga define las *células de un mismo rango perpendicular* como aquellas células que van de arriba abajo y se encuentran entre dos paralelas.

Es pertinente decir aquí que las paralelas para definir *células de un mismo rango paralelo* y *células de un mismo rango perpendicular* deben ser consecutivas con respecto a los exponentes. Aunque el libro no lo aclare, se puede crear una dificultad didáctica[24] dado que por ejemplo la paralela que pasa por el punto de división 1 es paralela a aquella que pasa por el punto 3 pero también a la que pasa por el punto 6 ya sea horizontal o verticalmente. No obstante, el libro da un ejemplo nombrando cuales serían esas células pero eso hace que siempre se deba tomar el referente gráfico del triángulo y se perdería un poco la formalidad matemática. Luego, para hablar de células de un mismo rango paralelo o perpendicular correspondientemente, se debe aclarar que las paralelas que pasan por los puntos de división son consecutivas con respeto a los exponentes. Ejemplo: las paralelas horizontales que pasan por los puntos de división 2 y 3 crean células de un mismo rango paralelo, mientras que si se piensa en las paralelas verticales que pasan por los mimos puntos de división entonces se crean células de un mismo rango perpendicular.

Ahora Pascal definirá las células *reciprocas* las cuales serán aquellas que se encuentran en una misma base igualmente distanciadas de sus extremidades, porque el exponente del rango paralelo de una es el mismo que el exponente de rango perpendicular de la otra. Pascal da un

[24] Se entenderá en este trabajo la dificultad didáctica como formas erróneas de interpretación. .

ejemplo con su estilo de letras y lo explica detalladamente. Seguidamente, el autor alude a ciertas propiedades “que son de fácil demostración” entre los exponentes recíprocos y las bases, da alguno ejemplo y finalmente explica el método para encontrar los número que se ponen en cada célula.

EL MÉTODO ES EL SIGUIENTE:

El número de la primera célula que está en el ángulo derecho es arbitrario, pero habiéndose colocado éste, todos los otros están forzados y por esta razón se llama el *generador* del triángulo. Y cada uno de los otros está especificado por esta única regla:

El número de cada célula es igual al de la célula que le precede en su rango perpendicular más aquel de la célula que la precede en su rango paralelo. Así la célula $(3,4)$[25], es decir el número de la célula de la célula $(3,4)$, es igual al de la célula $(3,3)$ más el de la célula $(2,4)$, y así para las demás.

Es prudente señalar aquí que la célula $(3,4)$ le corresponde el número 10, a la célula $(3,3)$ le corresponde el número 6 y a la célula $(2,4)$ le corresponde el número 4. Luego, lo anteriormente dicho por Pascal se puede expresar de la siguiente forma:

$$(3,4) = (3,3) + (2,4) \rightarrow 10 = 6 + 4$$

Finalmente Pascal termina las explicaciones de su tratado diciendo:

> “*De donde se obtiene muchas consecuencias. He aquí las principales donde considero los triángulos cuyo generador es la unidad; pero lo que se dirá conviene a todos los demás.*” (Alvarez, Martínez, & Torres, 1995)

[25] Aquí se introdujo la notación de coordenadas cartesianas con la analogía de que la abscisa es el exponente del rango perpendicular y la ordenada el exponente del rango paralelo. Esto con el objetivo de evitar usar las letras. Así, (a, b) indica $a = Exponente\ de\ rango\ perpendicular$ y $b = Exponente\ de\ rango\ paralelo$

Gráficamente:

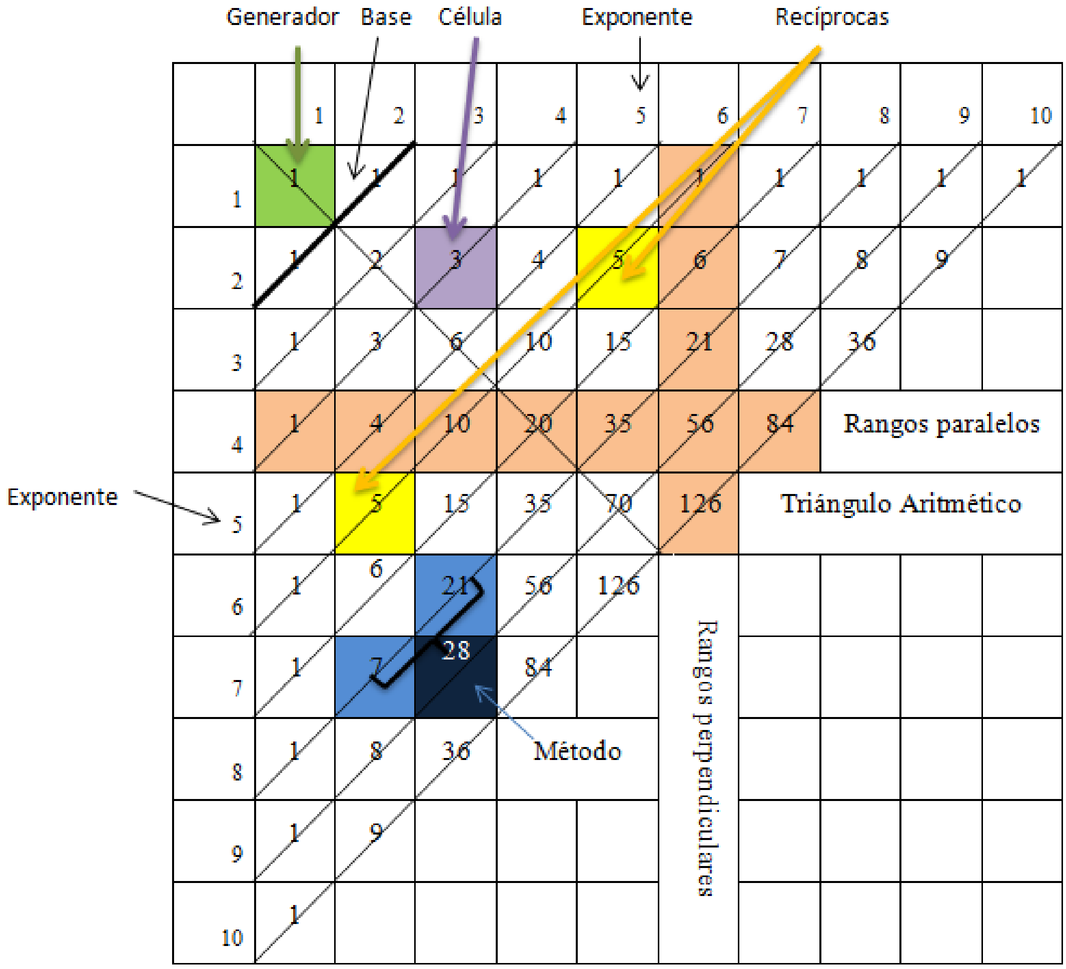


Figura 15. Ilustración de los elementos definidos en el Triángulo Aritmético

La función de los colores en la figura 7 es estrictamente visual para la descripción de los elementos.

Antes de pasar a enunciar las diecinueve consecuencias junto con el problema que propone Pascal, se realizará una explicación de la notación que va ser utilizada. Como se dijo anteriormente, la notación es tomada del libro *Pascal´s Arithmetical Triangle* de (Edwars, 1987) y es la misma que se usó para los números figurados. En efecto, la definición del triángulo está en términos de la fórmula de adición:

$$f_k^l = f_k^{l-1} + f_{k-1}^l \qquad (7)$$

La notación f_k^l tiene la una desventaja puesto que f_k^l hace referencia al $l-ésimo$ número figurado en la $k-ésima$ dimensión (Ver Fig. 6) que se convierte en la $l-ésima$ columna y la $k+1-ésima$ fila en el Triángulo de Pascal, pero parece mejor no introducir otra; esto es, sin embargo, conveniente para recordar y utilizar $\binom{n}{r} = C_r^n = f_r^{n-r+1}$ también.

Obsérvese que la conformación del mismo triángulo aritmético, con su ecuación recursiva, podría interpretarse en un ambiente escolar de la siguiente manera: Una maestra tiene n niños y niñas; se pregunta ¿cuántos grupos de k niños y niñas podría armar? Se le ocurre la siguiente solución: saca a Juan de la clase y arma todos los grupos de k elementos (sin Juan), luego arma todos los posibles grupos (sin Juan) de $k-1$ alumnos y a cada uno de estos grupos le añade a Juan; resultado:

$$\binom{n}{k} = \underset{\boxed{\text{Juan}}}{\binom{n-1}{k-1}} + \underset{\boxed{\text{Sin Juan}}}{\binom{n-1}{k}}$$

Pascal permite que el número de la esquina f_0^1, que él llama el *generador* del triángulo, sea cualquier número entero y no solo 1[26], pero esta generalización no de interés y se entenderá que $f_0^1 = 1$.

Consecuencia primera:

En todo Triángulo aritmético todas las células del primer rango paralelo y el primer rango perpendicular son iguales a la generatriz.

[26] Esta aclaración de la arbitrariedad del generador será efectiva para todas aquellas consecuencias que intervienen con el concepto de unidad que es el mismo generador. En efecto, las consecuencias son: cuarta, octava y novena.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 16. Ilustración consecuencia primera.

La función de los colores es mostrar que tanto las células de la fila 0 como la columna 1 pintados de azul claro son iguales a la célula que contiene la generatriz que se encuentra pintada de color azul oscuro

.

Matemáticamente:

$$f_k^1 = f_0^l = f_0^1 = 1; l = 2,3,4, \dots; k = 1,2,3, \dots$$

Consecuencias segunda:

En todo Triángulo aritmético cada célula es igual a la suma de todas aquellas del rango paralelo precedente comprendidas desde su rango perpendicular hasta el primero inclusive.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 17. Ilustración consecuencia segunda.

La función de los colores es mostrar que la célula de color rojo es igual a la suma de las células de color naranja del tercer rango paralelo.

Matemáticamente:

$$f_k^l = \sum_{i=1}^{l} f_{k-1}^i$$

Consecuencia tercera:

En todo Triángulo aritmético cada célula iguala la suma de todas las células del rango perpendicular precedente, comprendidas desde su rango paralelo hasta el primero inclusive.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 18. Ilustración consecuencia tercera

La función de los colores es mostrar que la célula de color rojo es igual a la suma de las células de color naranja del tercer rango perpendicular.

Matemáticamente:

$$f_k^l = \sum_{j=0}^{k} f_j^{l-1}$$

Dado el carácter de este trabajo, se recuerda su ánimo pedagógico, se podrían citar algunos argumentos combinatorios que se desprenden de las proposiciones de Pascal.

A la consecuencia tercera y cuarta se les puede encontrar un argumento combinatorio de tipo escolar: Suponga que una maestra que tiene 6 alumnos; le dice a Juan que elabore una lista de todos los grupos de tres estudiantes que pueden conformarse en su pequeño curso. Juan, hábil en matemáticas, escribe primero todos los grupos de tres estudiantes que se pueden armar con el estudiante de mayor estatura del curso, desde el más alto al más bajo; luego escribe los grupos que se pueden armar con el segundo más alto, luego con el tercero más alto, y luego escribe los nombres de los tres estudiantes más bajos del curso. En resumen, Juan escribe: Se observa que este es un argumento similar al que usa Pascal.

Consecuencia cuarta:

En todo Triángulo aritmético, cada célula disminuida por la unidad es igual a la suma de todas aquellas que están comprendidas entre su rango paralelo y su rango perpendicular exclusivamente.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 19. Ilustración consecuencia cuarta.

La función de los colores es mostrar que las células de color naranjas operadas bajo la resta, es decir, $35 - 1$; da como resultado la suma de todas las células de color verde incluyendo la generatriz. Así, $35 - 1 = 34 = 10 + 6 + 3 + 1 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Matemáticamente:

$$f_k^l = \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=0}^{k-1} f_j^i + 1$$

Consecuencia quinta:

En todo Triángulo aritmético cada célula es igual a su recíproca.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 20. Ilustración consecuencia quinta.

La función de los colores es mostrar que las células de color rojo, naranja, verde claro, verde oscuro y rojo oscuro son iguales aludiendo gráficamente a la igualdad de reciprocas.

Matemáticamente:

$$f_k^l = f_{l-1}^{k+1}, \text{ó } \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Consecuencia sexta:

En todo Triángulo aritmético un rango paralelo y uno perpendicular que tienen un mismo exponente están compuestos de células totalmente iguales unas a otras.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 21. Ilustración consecuencia sexta.

La función de los colores es mostrar que las células de color amarillo son simétricas con respecto a exponentes iguales en rangos paralelos y perpendiculares pintados aquí de color naranja.

Matemáticamente:

$$\{f_j^l, l = 1,2,3, \dots\} = \{f_{l-1}^{j+1}, j = 0,1,2, \dots\}$$

Consecuencia séptima:

En todo Triángulo aritmético la suma de las células de cada base es el doble de aquella de la base precedente.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 22. Ilustración consecuencia séptima.

La función de los colores es mostrar que la suma de las células de color azul claro de la base 8 da como resultado dos veces la suma de las células de la base inmediatamente anterior, es decir, la base 7. Análogamente se cumple para la base 4 con la base 3.

Matemáticamente:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2 \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{n-r}$$

Cada número en la base $(n-1)$, argumenta Pascal, es representado dos veces en la base n por virtud de la definición fundamental.

Consecuencia octava:

En todo Triángulo aritmético la suma de células de cada base es un número de la progresión doble que empieza en la unidad y cuyo exponente es el mismo que aquel de la base menos 1.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 23. Ilustración consecuencia octava.

La función de los colores es mostrar que la suma de las células de color azul claro de la base 8 da como resultado $2^{8-1} = 2^7 = 128$ y que la suma de las células de la base inmediatamente anterior, es decir, la base 7 da como resultado $2^{7-1} = 2^6 = 64$. Análogamente se cumple para la base 4 con la base 3.

Matemáticamente:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

Consecuencia novena:

En todo Triángulo aritmético cada base disminuida por la unidad es igual a la suma de todas las precedentes.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 24. Ilustración consecuencia novena.

La función de los colores es mostrar que la suma de las células de color azul oscuro de la base 7 operadas bajo la resta con la unidad, es decir, $64 - 1$; da como resultado la suma de todas las células de color azul claro incluyendo la generatriz.

La siguiente tabla se acoge de acuerdo a los colores presentados en el triángulo anterior.

Base	Suma de células	Total menos la generatriz= Total de todas las precedentes
1	1	
2	1+1=2	
3	1+2+1=4	
4	1+3+3+1=8	
5	1+4+6+4+1=16	
6	1+5+10+10+5+1=32	
7	1+6+15+20+15+6+1=64	64 – 1 = 63 = 32+16+8+4+2+1

Matemáticamente:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 + 1$$

Consecuencia décima:

En todo Triángulo aritmético la suma de tantas células continuas como se quiera en la base, empezando por un extremo, es igual a tantas células de la base precedente más el mismo número excepto una.

Gráficamente:

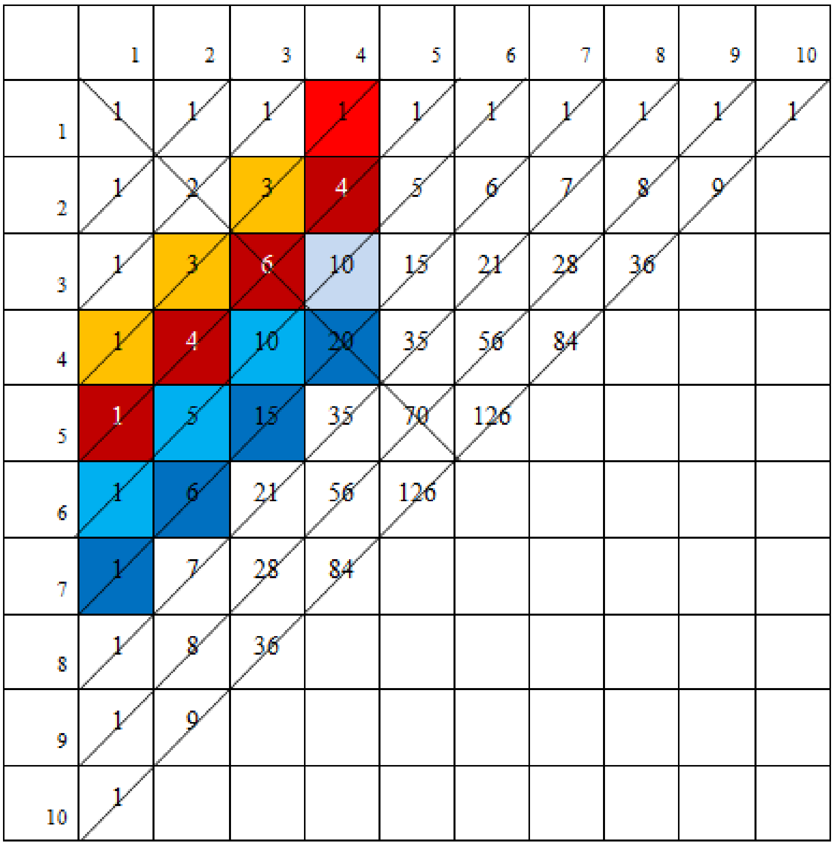


Figura 25. Ilustración consecuencia décima.

La función de los colores es mostrar que la suma de las 4 células de color azul oscuro de la base 7; da como resultado la suma de todas las células de color azul claro incluyendo la célula cielo $(4,3) = 10$ más la suma de las restantes células de color azul claro de la base 6 que en efecto son $(1,6) = 1, (2,5) = 5\ y\ (3,4) = 10$. Análogamente se cumple para la base 4 con la base 3 correspondientes a los colores rojo oscuro, naranja y rojo claro.

La siguiente tabla se acoge de acuerdo a los colores presentados en el triángulo anterior.

Base	Suma de células	Total = Total de la misma cantidad de células precedentes más el mismo número menos una célula.
4	1+3+3+1=8 y 1+3+3=7	8+7=15

5	1+4+6+4	15
6	1+5+10+10 =26 y 1+5+10=16	26+16=42
7	1+6+15+20	42

Matemáticamente:

$$\sum_{r=0}^{s}\binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{s}\binom{n-1}{r} + \sum_{r=0}^{s-1}\binom{n-1}{r}$$

Pascal define *células de la dividente* a aquellas que la línea que divide al ángulo recto por la mitad atraviesa diagonalmente, como las células $(1,1); (2,2); (3,3), etc.$

Consecuencia décima primera:

Cada célula de la dividente es el doble de aquella que la precede en su rango paralelo o perpendicular.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 26. Ilustración consecuencia decimaprimera.

La función de los colores es mostrar que la célula de la dividente de color negro $(2,2) = 2$ es el doble de las células de color azul que se encuentran ubicadas en el rango perpendicular $(1,1) = 1$ y en el rango paralelo $(1,2) = 1$ Análogamente se cumple para las demás células roja, verde y morada oscuro ubicadas en la dividente con sus correspondientes colores naranja, verde claro y morado claro.

La siguiente tabla se acoge de acuerdo a los colores presentados en el triángulo anterior.

Célula de la divídente	Célula Rango Paralelo	Célula Rango Perpendicular
2=2(1)	1	1
4=2(2)	2	2
6=2(3)	3	3
20=2(10)	10	10
70=2(35)	35	35

Matemáticamente:

$$f_k^{k+1} = 2f_k^k = 2f_{k-1}^{k+1}, \text{ó } \binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n-1} = 2\binom{2n-1}{n}$$

Hasta este momento, las consecuencias hacían alusión a las igualdades que se encuentran en el triángulo. Pascal hace una advertencia que las siguientes consecuencias serán basadas en las proporciones donde la consecuencia que sigue será el fundamento, es decir, existe una recursividad.

Advertencia:

"Todas estas consecuencias son sobre el tema de las igualdades que se encuentran en el Triángulo Aritmético. Ahora se van a ver las proporciones de las que la proposición siguiente es el fundamento." (Alvarez, Martínez, & Torres, 1995)

Consecuencia décima segunda:

En todo Triángulo aritmético si se toman dos células contiguas sobre una misma base, la superior es a la inferior como la multitud de células desde la superior hasta lo alto de la base es a la multitud de aquellas desde la inferior hasta abajo inclusive.

Gráficamente:

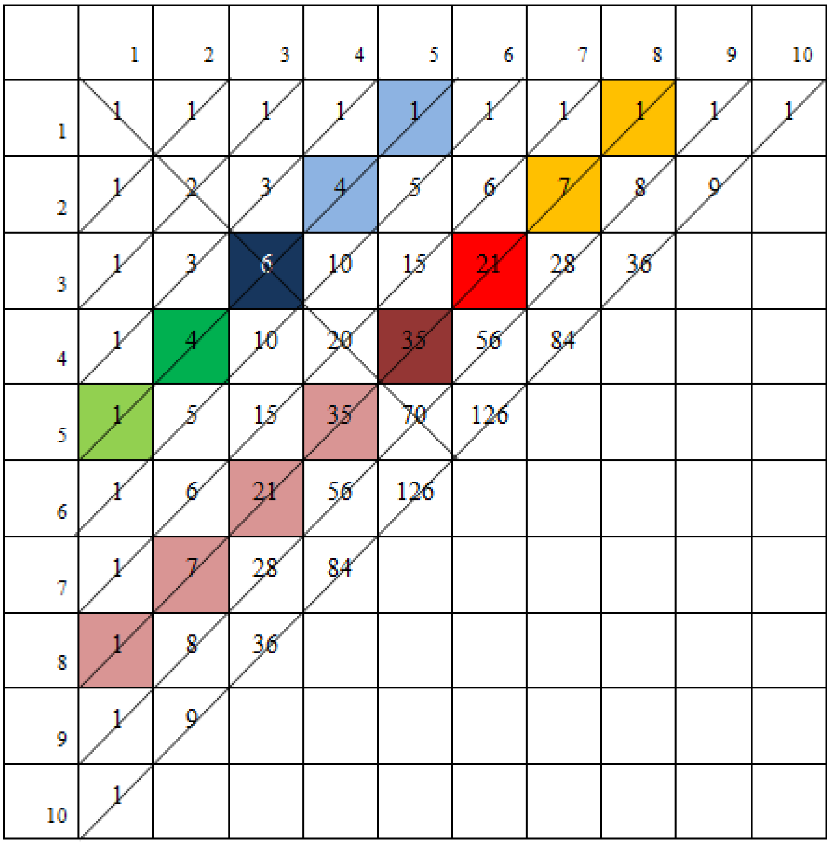


Figura 27. Ilustración consecuencia decimasegunda.

La función de los colores es mostrar que la célula azul oscuro $(3,3) = 6$ es a la célula verde oscuro $(2,4) = 4$ como la cantidad de células desde la azul oscuro hasta las azules claro, es decir, 3 células es a la cantidad de células desde la verde oscuro hasta la verde claro, a saber dos células; todas éstas ubicadas en la base 5 formando la totalidad de la base. Análogamente se cumple para la base 6 entre la célula roja con la célula café y la cantidad de células de color rosado y color naranja respectivamente, todas éstas formando la totalidad de la base.

En términos de proposición:

$$\frac{Célula\ Superior}{Célula\ Inferior} = \frac{Multitud\ de\ células\ desde\ la\ superior\ hasta\ lo\ alto\ de\ la\ base}{Multitud\ de\ células\ desde\ la\ inferior\ hasta\ lo\ bajo\ de\ la\ base}$$

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$$

Matemáticamente:

Sea n la base entonces

$$\underbrace{1, n, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots, \binom{n}{r-1}}_{\boxed{r\ coeficientes}}, \underbrace{\binom{n}{r}, \binom{n}{r+1}, \ldots, \binom{n}{n-3}, \binom{n}{n-2}, n, 1}_{\boxed{(n-r+1)\ coeficientes}}$$

Pascal declara esto, en leguaje de proposición:

$$\binom{n}{r} : \binom{n}{r-1} = (n-r+1) : r$$

o

$$\binom{n}{r} = \frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}$$

En notación de los números figurados:

$$rf_r^{n-r+1} = (n-r+1)f_{r-1}^{n-r+2}$$

o reemplazando $r = k$ y $n - r + 1 = l$,

$$kf_k^l = lf_{k-1}^{l+1}$$

Consecuencia décima tercera:

En todo Triángulo aritmético, para dos células continuas en un mismo rango perpendicular, la inferior es a la superior como el exponente de la base de esta superior al exponente de su rango paralelo.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 28. Ilustración consecuencia decimatercera.

La función de los colores es mostrar que la célula roja $(3,4) = 10$ es a la célula amarilla $(3,3) = 6$ como el exponente de base 5 donde ésta contiene a la célula amarilla, es decir, 5 es al exponente de rango paralelo de la célula amarilla, es decir, 3. Un poco la función de los colores es mostrar que rojo es a amarillo como rojo es a amarillo. Análogamente se cumple para la célula azul oscura y la azul clara respectivamente.

En términos de proposición:

$$\frac{Célula\ Inferior}{Célula\ Superior} = \frac{Exponente\ de\ esa\ base\ superior}{Exponente\ de\ su\ rango\ paralelo}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{70}{35} = \frac{8}{4}$$

Matemáticamente:

$$f_k^l = \frac{l + k - 1}{k} f_{k-1}^l$$

Consecuencia decima cuarta:

En todo Triángulo aritmético, para células continuas en un mismo rango paralelo, la más grande es la precedente como el exponente de la base de esta precedente al exponente de su rango perpendicular.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 29. Ilustración consecuencia decimacuarta.

Esta consecuencia es similar a la anterior, solo que ahora no se piensa en las células continuas de rango perpendicular sino en las células continuas de rango paralelo.

La función de los colores es mostrar que la célula azul $(4,4) = 20$ es a la célula morada $(3,4) = 10$ como el exponente de base 6 donde ésta contiene a la célula morada, es decir, 6 es al exponente de rango perpendicular de la célula morada, es decir, 3. Un poco la función de los colores es mostrar que azul es a morado como azul es a morado. Análogamente se cumple para la célula amarillo y la célula verde respectivamente.

En términos de proposición:

$$\frac{Célula\ más\ grande}{Célula\ Precedente} = \frac{Exponente\ de\ esa\ base\ Precedente}{Exponente\ de\ su\ rango\ Perpendicular}$$

$$\frac{20}{10} = \frac{6}{3}$$

$$\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$$

Matemáticamente:

Notación (Edwars, 1987) :

$$f_k^l = \frac{l + k - 1}{l - 1} f_k^{l-1}$$

Consecuencia décima quinta:

En todo Triángulo aritmético, la suma de las células de un rango paralelo cualesquiera es a la última de este rango como el exponente del triángulo es al exponente del rango.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 30. Ilustración consecuencia decimaquinta.

La función de los colores es mostrar que la suma de las células naranjas, que se encuentran en un mismo rango paralelo (aquí 4), hasta la célula amarilla $(4{,}4) = 20$, considerada como la última, es a esta misma célula amarilla como el exponente naranja del triángulo o la base 7, que es la que contiene a la célula amarilla $(4{,}4) = 20$, es al exponente amarillo del rango paralelo tomado.

En términos de proposición:

$$\frac{Suma\ de\ Células\ de\ un\ rango\ paralelo}{Última\ Célula\ de\ ese\ rango} = \frac{Exponente\ del\ triángulo}{Exponente\ de\ su\ rango\ Paralelo}$$

$$\frac{1+4+10+20}{20} = \frac{7}{4} \quad Entonces\ \frac{35}{20} = \frac{7}{4}$$

Matemáticamente:

$$\sum_{i=1}^{l} f_k^i = \frac{l+k}{k+1} f_k^l$$

Consecuencia décima sexta:

En todo Triángulo aritmético un rango paralelo cualquiera es al rango inferior como el exponente del rango inferior a la multitud de sus células.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 31. Ilustración consecuencia decimasexta.

La función de los colores es mostrar que la suma de las células verdes, que se encuentran en un mismo rango paralelo, en este caso 4, es a la suma de las dos células amarillas que se encuentran en su rango inferior, para este caso 5, como el exponente de rango inferior[27], aquí 5, es a la totalidad de células tomadas en el rango inferior, a saber 2 células (esto se indica con la flecha naranja que se puede visualizar en la figura 23).

[27] Se llega solamente hasta la célula (2,5) = 5 en el rango inferior, dado que para este ejemplo el triángulo aritmético que se considera es aquel que se forma con la base 6.

En términos de proposición:

$$\frac{Cualquier\ rango\ paralelo}{El\ rango\ inferior} = \frac{Exponente\ del\ rango\ inferior}{Mutlitud\ de\ sus\ células}$$

$$\frac{1 + 4 + 10}{1 + 5} = \frac{5}{2} \quad En\ efecto\ \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Matemáticamente:

$$\sum_{i=1}^{l} f_k^i = \frac{k + 2}{l - 1} \sum_{i=1}^{l-1} f_{k+1}^i$$

Consecuencia décima séptima:

En todo Triángulo aritmético, cualquier célula que sea sumada a todas aquellas de su rango perpendicular, es a la misma célula sumada a todas aquellas de su rango paralelo como las multitudes de células tomadas en cada rango.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 32. Ilustración consecuencia decimaséptima.

La función de los colores es mostrar que la célula café $(2,3) = 3$ sumada a las células de color naranja de su rango perpendicular es a la mima célula café $(2,3) = 3$ sumada a la célula de color rojo que se encuentra en su rango paralelo como la totalidad de células tomadas a partir de la célula seleccionada $(2,3) = 3$, es decir 3 células (esto se indica con la flecha amarilla que se puede visualizar en la figura 23) es a la totalidad de células tomadas en el rango paralelo, a saber 2 células (esto se indica con la flecha roja que se puede visualizar en la figura 23).

En términos de proposición:

$$\frac{Cualquier\ célula\ sumada\ a\ su\ rango\ perpendicular}{La\ misma\ célula\ sumada\ a\ su\ rango\ paralelo} = \frac{Múltitud\ de\ células\ en\ rango\ perpendicular}{Mutlitud\ de\ sus\ células\ en\ rango\ paralelo}$$

$$\frac{\mathbf{3} + 2 + 1}{\mathbf{3} + 1} = \frac{3}{2} \quad En\ efecto\ \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Matemáticamente:

$$\sum_{j=0}^{k} f_j^l = \frac{k+1}{l} \sum_{i=1}^{l} f_k^i$$

Consecuencia décima octava:

En todo Triángulo aritmético, dos rangos paralelos, igualmente distantes de las extremidades, son entre sí como la multitud de sus células.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 33. Ilustración consecuencia decimaoctava.

La función de los colores es mostrar que al tomar dos rangos paralelos de un triángulo aritmético distanciados simétricamente con respecto a los extremos de la base, aquí el rango paralelo 2, que contiene las células de color azul claro, está distanciando una célula, saber $(7,1) = 1$, del extremo de la base 7 y rango paralelo 6, que contiene las células de color azul oscuro, está distanciando una célula[28], a saber $(1,7) = 1$, del extremo de la base 7; entonces se cumple la siguiente propiedad: las suma de las células del rango paralelo 6 es a la suma de las células del rango paralelo 2 como la totalidad de células tomadas en el rango paralelo 6, es decir 2 células (esto se indica con la flecha azul oscuro que se puede visualizar en la figura 23) es a la totalidad de células tomadas en el rango paralelo 2, en efecto 6 células (esto se indica con la flecha azul claro que se puede visualizar en la figura 23).

En términos de proposición:

$$\frac{Rango\ paralelo\ \ distanciado\ a\ su\ extremidad}{Rango\ paralelo\ igualmente\ distanciado\ a\ su\ extremidad} = \frac{Multitud\ de\ células\ de\ rango\ del\ numerador}{Mutlitud\ de\ células\ del\ rango\ del\ denominador}$$

[28] Aquí es una célula puede ser 2, 3,… células siempre y cuando cumpla la propiedad.

$$\frac{1+6}{1+2+3+4+5+6}=\frac{2}{6} \quad En\ efecto\ \frac{7}{21}=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$

Matemáticamente:

$$\sum_{i=1}^{l} f_k^i = \frac{l}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} f_{k-1}^k$$

Consecuencia última:

En todo Triángulo aritmético dos células continuas que están en la dividente, la inferior es la superior tomada cuatro veces, como el exponente de la base de esta superior a un número mayor que la unidad.

Gráficamente:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	1	3	6	10	15	21	28	36		
4	1	4	10	20	35	56	84			
5	1	5	15	35	70	126				
6	1	6	21	56	126					
7	1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Figura 34. Ilustración consecuencia decimaúltima.

La función de los colores es mostrar que al tomar células continuas de la dividente, se obtiene la siguiente propiedad: La célula amarilla $(4,4) = 20$, aquí la inferior, es a cuatro veces la célula verde continua $(3,3) = 6$, aquí la superior, es decir, $4 \times 6 = 24$ como el exponente de base 5, donde está contenida la célula verde, es decir, 5 es a este mismo más la unidad, es decir, 5+1.

En términos de proporción:

$$\frac{20}{4(6)} = \frac{5}{5+1} \quad En\ efecto\ \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

Matemáticamente:

$$f_k^{k+1} = 4\frac{2k-1}{2k} f_{k-1}^{k}$$

Hasta este punto, se han evidenciado las diecinueve consecuencias del triángulo aritmético. Al final del tratado se encuentra enunciado un problema que plantea Pascal y se lee así:

PROBLEMA

Dados los exponentes de los rangos perpendiculares y paralelos de una célula, encontrar el número de la célula sin utilizar el Triángulo aritmético.

Gráficamente:

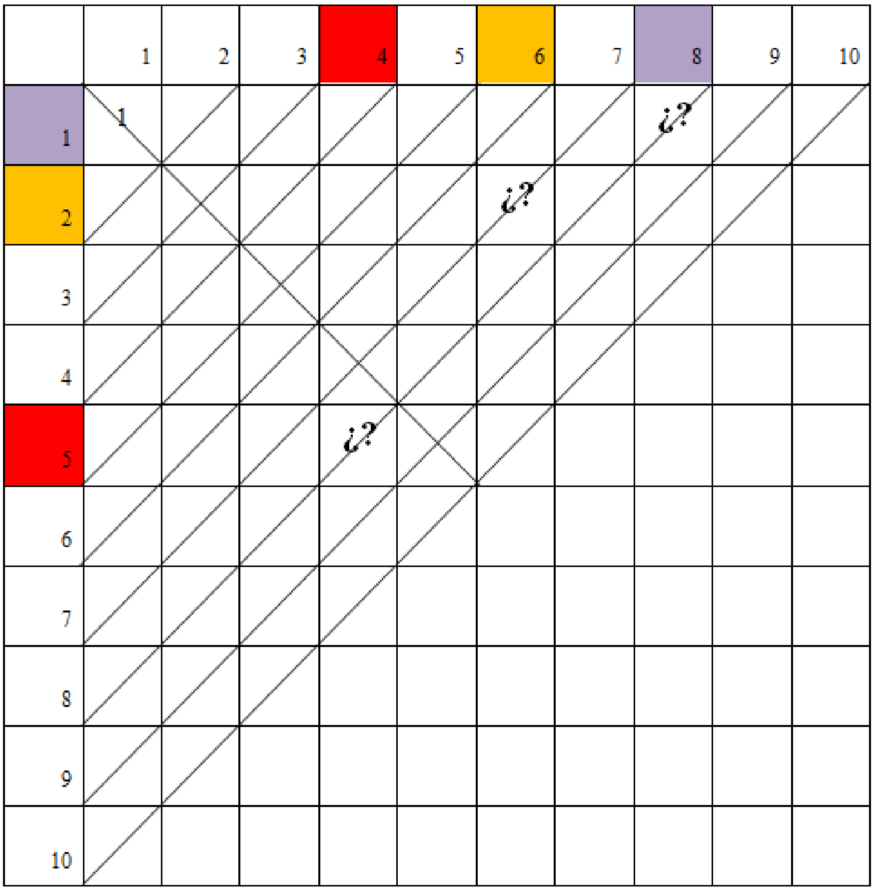


Figura 35. Ilustración problema.

La función de los colores es mostrar que al conocer el exponente de rango paralelo y el exponente de rango perpendicular de una célula, se desea saber el número que le corresponde a esa célula. Por ejemplo, para los exponentes de rango paralelo y perpendicular de color rojo se desea saber qué número debe ir en la célula $(4,5)$. Análogamente se comporta para los rangos perpendiculares y paralelos de colores naranja y morado. El signo de interrogación en las células representa esa pregunta que se desea contestar. En efecto, $(4,5) =¿?$ para el color rojo, $(6,2) =¿?$ para el color naranja y $(8,1) =¿?$ para el color morado.

Matemáticamente:

Dado l y $k+1$, encontrar f_k^l

SOLUCIÓN:

Por consecuencia 12,

$$kf_k^l = lf_{k-1}^{l+1}$$

Así que

$$f_{k-1}^{l+1} = \frac{k}{l} f_k^l$$

y

$$f_k^l = \frac{k+1}{l-1} f_{k+1}^{l-1}$$

que, aplicando recursividad, da:

$$f_k^l = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)\dots(k+l-1)}{(l-1)(l-2)(l-3)\dots 1} \qquad (20)$$

Si Pascal hubiera procedido recursivamente al otro lado de la base él habría encontrado el resultado equivalente, directamente por simetría, que (Edwars, 1987) obtienen formalmente aplicando la consecuencia quinta y así reemplazando $k+1$ por l y $l-1$ por k sobre la parte derecha de (20) se obtiene:

$$f_k^l = \frac{l(l+1)(l+2)\dots(l+k-1)}{k(k-1)(k-2)\dots 1} \qquad (21) = (16)$$

Es pertinente aclarar aquí que la igualdad que se da en (20) y (21) con respecto al último término, es decir, $(k+l-1) = (l+k-1)$ es porque:

Si $k+1 = l$ y $l-1 = k$ entonces $k = l-1$ y $l = k+1$. Reemplazando en el último término $k = l-1$ en (9) se obtiene $k+k = 2k$ Pero $2k = 2(l-1) = 2l-2 = l+l-1-1 = l-1+(l-1) = l-1+k = l+k-1$. Así, se obtiene la igualdad en (10)

Como se puede ver, con el problema que propone Pascal al final de su tratado y a través de su solución es una recursividad sin necesidad de utilizar el triángulo aritmético para hallar el número correspondiente a la célula pedida, esto muestra la gran compilación o deducción de todo su trabajo, es decir, su fundamental inducción sobre cada consecuencia permite una abstracción de uso del triángulo y un resultado matemáticamente hermoso sin lugar a dudas dado que en su tiempo no existía la notación utilizada anteriormente.

La intensión de escribir las consecuencias en notación matemática es la de explorar todo el constructo teórico e inductivo que realiza Pascal en su tratado llegando a la fórmula general de número figurados a través del problema planteado al final de este.

Para terminar el análisis del trabajo de Pascal se evidenciará a continuación la igualdad que el autor hizo frente a los números combinatorios con los números figurados y a través de ésta se obtendrá la fórmula general de las combinaciones:

En la sección 2 anteriormente descrita, Pascal aplica el triángulo aritmético a la teoría de combinaciones. El siguiente lema hace parte de dicha sección:

Lema: el número de combinaciones de $(n+1)$ cosas tomadas $(r+1)$ todas al tiempo es igual a la suma del número de combinaciones de n cosas tomadas r a la vez y el número de combinaciones de n cosas tomadas $r+1$ tomadas a la vez, o

$$C_{r+1}^{n+1} = C_r^n + C_{r+1}^n \quad (22)$$

Por considerar algo en particular sobre $(n+1)$ cosas: C_r^n da el número de combinaciones que se contienen, mientras que C_{r+1}^n da el número que se excluyen, los dos números juntos dan el total. Pascal no da una demostración formal por inducción pero usa el argumento anterior con $n = 3$ y $r = 1$, indicando esta generalidad. Luego, se puede decir que para el cálculo combinatorio dicha generalización se considera relevante y válida para el contexto de la época. Él entonces aplica el Lema en la demostración que esos números combinatorios son los números en el triángulo aritmético.

$$C_r^n = f_r^{n-r+1} \quad (23) = (9)$$

Después, para el problema II de su tratado usa el resultado anterior (11) y acopla esto con:

$$f_k^l = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)\dots(k+l-1)}{(l-1)(l-2)(l-3)\dots 1}, \qquad (24)$$

el principal resultado de la Parte I, para dar, colocando $k = r$ y $l = n - r + 1$ como siempre,

$$C_r^n = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)\dots n}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\dots 1} \qquad (25)$$

La anterior fórmula, por supuesto, es la regla Hindú en la versión C_{n-r}^n

Se le recuerda al lector que la regla Hindú es:

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot r} \qquad (26) = (11)$$

Pascal termina su tratado con un comentario escribiendo que él ha decido finalizarlo con ese resultado ("no sin pensar, porque tengo muchos resultados adicionales"), él añade que su amigo M. de Gaigniéres le comunicó una transformación de su regla y le solicitó encontrar la demostración. Dicha transformación corresponde a la siguiente:

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot r} \qquad (26)$$

"Reflexioné sobre el problema, pero, alarmado en su dificultad, pensé apropiado dejar la demostración de ésta a su autor; sin embargo, gracias al triángulo aritmético, una manera fácil se abrió" Pascal entonces observa, por supuesto, que por simetría del triángulo, (16) podría haber sido utilizada con (23) para obtener (26), en lugar de (24) que fue la que él usó y lo llevó a (25). En otras palabras, Pascal reorganizó la equivalencia de las dos formas dadas anteriormente, es decir, $C_r^n = C_{n-r}^n$

Para observar el trabajo de Leibniz se seguirá tomando el libro (Edwars, 1987), base de este trabajo, como fuente principal y como fuente secundaria se tendrán en cuenta algunas hechos que plantea el documento *Leibniz y los múltiples "usos" de su arte combinatoria. Aspectos matemáticos* de (Charles, 2013) el cual es confiable puesto que en él se ha realizado un estudio exhaustivo al libro original *Dissertatio de Arte Combinatoria* de (Leibniz, 1666)[29]. En el anterior documento se presentan algunos elementos que son de interés para este trabajo.

[29] No se observó el libro Dissertatio de Arte Combinatoria de Leibniz dada la complejidad del idioma puesto que es latín y éste no es manejado por quien realiza este trabajo.

Al parecer en el libro de Leibniz se encuentran algunas matemáticas pero con respecto al tema de interés de este trabajo, sí se presentan combinaciones, variaciones y permutaciones. Son doce problemas que se encuentran en el libro y en su análisis no se encuentran fórmulas, solo un triángulo aritmético para calcular las particiones de un conjunto.

"*También calculará combinaciones y variaciones y en ellas se interesará enseguida por la posibilidad de repetición de algunos de los elementos, lo cual por supuesto complica la situación*." (Charles, 2013, pág. 187)

Leibniz a través de sus ideas del todo y las partes, enuncia la diferencia entre combinaciones y variaciones.

También, Leibniz desarrolla un teorema sobre la suma de términos consecutivos de una serie de diferencias, el cual es interesante de observar dada la sencillez y belleza que encierra frente a una aritmética entre números cuadrados y números impares. Por ello se dejará evidenciado a continuación:

Sea la siguiente sucesión: $a_o, a_1, a_2, \dots, a_n$ Se define las primeras diferencias de la siguiente forma:

$$d_i = a_i - a_{i-1}, i = 1, 2,3, \dots, n.$$

Entonces,

$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = (a_1 - a_o) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0,$

O la *suma de diferencias consecutivas es igual a la diferencia entre el primer y último término de la sucesión original.* Entonces, dada las diferencias de los números cuadrados

$$0,1,4,9,16, \dots, n^2 \; con \; n = 0,1,2,3 \dots$$

son números impares consecutivos

$$1,3,5,7,9, \dots ,2n - 1 \; con \; n = 1,2,3, \dots$$

Entonces se sigue que la suma de los primeros n números impares es n^2

Lo anterior se puede deducir aplicando el teorema reemplazando los números como sigue:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = (1 - 0) + (4 - 1) + \cdots + (n^2 - (n - 1)^2) = n^2 - 0 = n^2.$$

Para complementar lo anterior se destacan los siguientes tres aspectos del trabajo de Leibniz:

1. La demostración directa combinatoria de la relación de adición en el Triángulo Aritmético $C_{r+1}^{n+1} = C_r^n + C_{r+1}^n$, apareció bajo su nombre solo un año después de que apareciera bajo el nombre de Pascal.
2. Una tabla que explica cómo las diez combinaciones de cinco cosas tomadas tres a la vez ($C_3^5 = 10$) puede ser derivada de las combinaciones de dos, tres y cuatro cosas tomadas dos a la vez ($C_2^2 + C_2^3 + C_2^4$=1+3+6=10)
3. La observación (sin demostración) que si n es primo entonces divide a $\binom{n}{r}$ para todo r entre 1 y $n-1$, un resultado observado para $n = 7$ por Rabbi ben Ezra aproximadamente en 1140[30].

   Si n es primo, y $r < n$, y n y $r!$ no tienen factores comunes entonces:

   $$\binom{n}{r} = n \cdot \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}, \qquad 1 \leq r \leq (n-1)$$

   donde la segunda parte del producto debe ser un entero.

Leibniz continúa el trabajo sobre problemas combinatorios toda su vida (Knobloch, 1973, págs. 59-90)[31] En algún momento antes de agosto de 1673 él escribió una nota *De numeris combinatoriis*[32], en la cual la observación más interesante es la relación:

$$f_k^l = 1 \cdot f_{k-2}^l + 2 \cdot f_{k-2}^{l-1} + 3 \cdot f_{k-2}^{l-2} + \cdots + l \cdot f_{k-2}^1, \quad l \geq 1, k \geq 2 \qquad (27)$$

(en notación moderna, f_k^l siendo $l - esimo$ número figurado en la dimensión k como en la figura 6). Entonces los números triangulares son sucesivamente $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$, $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6$, y los números tetraédricos son números sucesivamente $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$, $1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 10$, etc. Leibniz observa la relación para los números tetraédricos por medio de un diagrama de puntos similar en forma al de la figura 6: note como fácilmente esto se puede ver con el número tetraédrico $35 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1$. En efecto (27) es naturalmente más pensada como algo que surge de una doble aplicación de:

$$f_k^l = \sum_{i=1}^{l} f_{k-1}^i \qquad (28) = (8)$$

[30] (Rabinovitch, 1973, págs. 145 - 7), (Smith, 1925, pág. 525)
[31] Los manuscritos de Leibniz se han publicado por (Knobloch, 1976)
[32] (Knobloch, 1976, págs. 10-15), (Knobloch, 1973, págs. 60-3)

Un total de $(s+1)$ aplicaciones de (28) conduce a la expansión de un número figurado f_k^l en términos del producto interno de los primeros l números en cada una de las dos filas del triángulo figurado, el orden de los números en la segunda fila se invierte, a saber:

$$f_k^l = f_s^1 \cdot f_{k-s-1}^l + f_s^2 \cdot f_{k-s-1}^{l-1} + f_s^3 \cdot f_{k-s-1}^{l-2} + \cdots + f_s^l \cdot f_{k-s-1}^1,$$
$$l \geq 1, \qquad s \geq 0, \qquad k \geq s+1$$

Leibniz no parece haber conocido esta expansión completa.

Según (Maistrov, 1974): los trabajos posteriores de Leibniz incluyen "consecuencias para el número de resultados (sin repetición) con 1, 2, 3, etc., dados que pueden ser expresados de la siguiente manera

1 dado $\binom{6}{1} = 6$

2 dados $\binom{1}{0}\binom{6}{1} + \binom{1}{1}\binom{6}{2} = \binom{7}{2} = 21$

3 dados $\binom{2}{0}\binom{6}{1} + \binom{2}{1}\binom{6}{2} + \binom{2}{2}\binom{6}{3} = \binom{8}{3} = 56$

y así sucesivamente hasta 6 dados" que es la solución correcta al problema de Tartaglia.

De la misma forma como se abordó las fuentes del trabajo de Leibniz, se realizará para el trabajo Ars Conjectandi de Jacob Bernoulli con la gran ayuda nuevamente del libro base de este trabajo *Pascal´s arithmetical triangle* de (Edwars, 1987) .

La parte I de *Ars Conjectandi* es un comentario al libro *De ratiociniis in aleae ludo* de Huygens que había aparecido en 1657. Primero Bernoulli da con anotaciones las proposiciones de I – IX de Huygens acerca del problema de puntos, después en la proposición VII el adiciona una tabla para la división entre dos jugadores cuya derivación está dada en la Parte II, mientras que la tabla para tres jugadores dada después de la proposición IX es propiamente de Huygens. En las proposiciones X – XIV el lanzamiento de dados es considerado, después de sus anotaciones sobre la proposición XII Bernoulli dedica una sección a desarrollar la distribución binomial para posibilidades generales, encontrando la expresión para obtener al menos m sucesos en n ensayos.

La parte II de *Ars Conjectandi* es *The Doctrine of Permutations and Combinations (La doctrina de las permutaciones y combinaciones)* y muestra que Bernoulli no estaba familiarizado con el *Tratado* de Pascal. Aunque él se refiere a la edición de 1679 de las correspondencias de Fermat, solo menciona a Van Schooten, Leibniz, Wallis y Prested como sus antecesores la teoría combinatoria, y después cuando se habla de los números figurados, él adiciona los nombres de Faulhaber, Remmelin y Mercator, pero nunca Pascal.

En el capítulo I de la Parte II reposan las preocupaciones sobre permutaciones y da las usuales reglas $n!$ y $\frac{n!}{a!b!c!}$; el capítulo II es sobre las reglas combinatorias 2^n-1 y 2^n-n-1. El capítulo III de Bernoulli es sobre combinaciones de diferentes cosas tomadas $1, 2, 3, \ldots$, al tiempo y sobre los números figurados. Siguiendo los patrones de enumeración y con base en el siguiente arreglo, deduce la regla 2^n-1:

$$\begin{array}{llllllll}
a \\
b & ab \\
c & ac & bc & abc \\
d & ad & bd & cd & abd & acd & bcd & abcd \\
. & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Como se puede ver hay un primer par (ab) en la segunda fila, dos en la tercera (ac) y (bc), tres en la cuarta $(ad), (bd), (cd)$, y así sucesivamente, donde el par en cada pila es formado por la adición de la letra inicial de la fila de la letra sola de la fila precedente. Similarmente, las tripletas son formadas por adición de la letra inicial de la fila de los pares de la precedente fila y así sucesivamente para órdenes mayores de combinaciones.

El arreglo puede ser visto agrupadamente así:

$$\begin{array}{llllllll}
a \\
b & ab \\
c & (ac & bc) & abc \\
d & (ad & bd & cd) & (abd & acd & bcd) & abcd \\
e & (4\ pares) & & (6 \text{ tripletas}) & & (4\ cuadruplos) & & abcde \\
. & . & . & . & . & . & . & .
\end{array} \quad (29)$$

Es ahora bastante claro que los números de solitarias (primera columna) forman la serie $(1,1,1,1 \ldots)$, los números de parejas (segunda columna) forman la serie $(1,2,3,4 \ldots)$ por la suma de la serie de solitarios, los números de la tripleta (tercera columna) forman la serie

(1,3,6,10 ...) por la suma de las series de dobles, las series sucesivas son, por supuesto, los números figurados como Bernoulli notó cuando el construye su tabla de combinación.

Tabula

Combinationum, ſeu Numerorum Figuratorum.

Exponentes Combinationum.

Numeri Rerum Combinandarum.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5.	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
6.	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
7.	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
8.	1	7	21	35	25	21	7	1	0	0	0	0
9.	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
10.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
11.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
12.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Figura 36. El triángulo combinatorio de James Bernoulli en Ars Conjectandi de 1713

Note que la tabla tal y como está no da C_r^n, en la $n-ésima$ fila y la $r-ésima$ columna: ese lugar, como puede verse en (29), da el número de combinaciones de orden r (*"exponentes"* es la palabra usada por Bernoulli, que la tomó de *Ars Combinatoria* de Leibniz junto con la forma del triángulo aritmético) que se pueden formar de n cosas tomadas *y que incluye lo último.* A fin de encontrar C_r^n se debe formar la suma como indica Bernoulli y por lo tanto mirar en la fila $(n+1)$ y columna $(r+1)$. La esencia del método de Bernoulli es:

$$C_r^n = \sum_{i=r-1}^{n-1} C_{r-1}^i \, , con\; C_0^1 = 1\; para\; todo\; n. \qquad (30)$$

Bernoulli fue consiente inmediatamente, por supuesto, que él había tratado con números figurados, (30) es justo (8), o la consecuencia segunda de Pascal. Él escribe esto sobre el triángulo aritmético: "Esta tabla tiene propiedades verdaderamente excepcionales y admirables porque además de ocultar dentro de sí los misterios de las combinaciones, es conocida por todos los expertos en las partes más altas de las matemáticas y también alberga los más importantes secretos de todo el resto de la asignatura"[33] Él entonces lista veinte "hermosas propiedades" del triángulo, más bien como Pascal las había hecho, y concluye con la demostración de la regla de multiplicación de formación

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot r}$$

que originalmente pensó. Esto es interesante, que justo como Pascal había fracasado en encontrar la explicación combinatoria para la regla, se supone que Bernoulli le sucedió algo similar, porque ciertamente él habría dado un conocimiento de esto, en lugar de su larga prueba directa.

Inmediatamente después de la prueba de la regla multiplicativa de Bernoulli, en un *escolio*[34], la usa para la suma de las potencia de enteros. Fermat se contentó implicando, en 1636, que la suma de algunas potencias podría ser encontrada usando una regla dada por él, pero él explícitamente solo dio la suma de las potencias cuartas.

4. CAPÍTULO IV

En este capítulo se pretende contextualizar al lector sobre cómo es entendida la combinatoria en términos modernos, dando una definición groso modo de la misma y mostrando sus elementos de estudio como lo son las variaciones, las combinaciones y las permutaciones. La intensión de este capítulo es responder al cuarto objetivo específico de este trabajo.

COMBINATORIA

No existe una definición corta o de diccionario frente a ¿Qué es la combinatoria? sino más bien acercamientos a este "concepto" con respecto a su estudio o sus aplicaciones. Haciendo esta aclaración, en este trabajo la *combinatoria* será entendida según (Ribnikov, 1988),

"*La Combinatoria, o Análisis Combinatorio como históricamente se le conoce, estudia los conjuntos discretos y las configuraciones que pueden obtenerse a partir de sus elementos*

[33] (Bernoulli, 1713, pág. 88)
[34] (Bernoulli, 1713, págs. 95 - 8)

mediante ciertas transformaciones que originan cambios en la estructura o la composición de los mismos. La estructura de estos conjuntos puede ser muy compleja dependiendo de las relaciones existentes entre sus elementos."

El libro de (Ross, 1998) hace una presentación de la combinatoria o el análisis combinatorio a través de un problema de probabilidad sobre el funcionamiento de un sistema de antenas[35] y afirma que muchos de estos problemas son resolubles por medio del conteo de las diferentes maneras en que ocurre un evento.

"*De lo anterior vemos que sería útil tener un método eficaz para contar el número de formas en que pueden ocurrir cosas. De hecho, muchos problemas en la teoría de la probabilidad se pueden resolver simplemente contando el número de diferentes maneras en que puede ocurrir un determinado evento. La teoría matemática de conteo se conoce formalmente como Análisis combinatorio*" (Ross, 1998, págs. 1-2)

La combinatoria pertenece a la matemática en un área llamada las matemáticas discretas donde éstas se encargan de estudiar los conjuntos discretos, es decir, finitos o infinitos numerables. Por su parte, la combinatoria estudia la enumeración, construcción y existencia de propiedades de configuraciones que satisfacen ciertas condiciones establecidas.

Es relevante decir aquí que para poder caracterizar los números combinatorios se debe estudiar las estructuras discretas que serán entendidas en este trabajo como las combinaciones, permutaciones y variaciones. Para lograr abordar dicho estudio se debe hacer bajo unas reglas básicas del conteo; una de ellas es la llamada regla de producto que será definida a continuación según la presentación que realiza (Godino, Batanero, & Cañizares, 1996):

[35] La intensión de esta cita no es mostrar como tal el problema de probabilidad sino la definición de combinatoria que le atribuye el autor del libro. Para lector interesado, consultar la introducción del libro de (Ross, 1998).

"Al aplicar la regla de Laplace[36]*, se presenta a menudo el problema de calcular el número de elementos de un cierto subconjunto del espacio muestral. Podemos utilizar, en este caso, el cálculo combinatorio. Seguiremos la exposición de los libros de* (Feller, 1973) *y* (Engel, 1975)*."*

Regla del producto

Si disponemos de dos conjuntos de m y n elementos, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$, es posible formar $m \times n$ parejas diferentes de la forma (a_i, b_j), en las que el primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo elemento al segundo conjunto.

Se pueden formar $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r$ grupos diferentes tomando un elemento de cada uno de los conjuntos $A, B, \ldots, X$, si éstos constan de $n_1, n_2, \ldots, n_R$ elementos, respectivamente.

En el análisis combinatorio, interesa deducir el número de muestras diferentes que pueden formarse a partir de un conjunto dado. Podemos distinguir entre muestreo con y sin reemplazamiento, según que cada elemento de la población pueda formar o no parte en la muestra más de una vez.

Por otro lado, es preciso distinguir entre muestras ordenadas y no ordenadas. Una muestra se llama ordenada, cuando el orden en que han sido extraídos sus elementos es fundamental, y es, por tanto, tenido en cuenta. En este caso, dos muestras formadas por los mismos elementos, pero variando en el orden, son consideras distintas. Cuando el orden no influye, de modo que dos muestras son diferentes sólo si difieren en algún elemento, las muestras se llaman no ordenadas.

De acuerdo con la clasificación anterior, a partir de un conjunto o población de n elementos, podemos formar cuatro tipos de muestras o grupos de tamaño r. En el estudio combinatorio clásico estos grupos reciben el nombre de variaciones con o sin repetición y combinaciones con o sin repetición.

[36] La regla se refiere a que cuando se realiza un experimento aleatorio y el espacio muestral tiene todos los sucesos elementales equiprobables entonces la probabilidad de un suceso S es:

$$P(S) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles\ del\ experimento}$$

Variación sin repetición de n elementos tomados r a r

Son las diferentes muestras ordenadas sin reemplazamiento de tamaño r que pueden extraerse de la población de tamaño n. Para formar las variaciones de n elementos de orden 1 hay n posibilidades. Para formar las de orden 2, aplicando la regla del producto, y puesto que no podemos tomar el elemento ya elegido, hay $n(n-1)$ posibilidades. En general, si denotamos por $V_{n,r}$ el número de variaciones sin repetición de n elementos tomados r a r se verifica:

$$V_{n,r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \tag{1}$$

La fórmula (1) también puede presentarse como sigue:

n	$\times$	$(n-1)$	$\times$	$(n-2)$	$\times \ldots \times$	$(n-r+1) =$
Primera Posición		Segunda Posición		Tercera Posición		r- ésima Posición

$$(n)(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \times \frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)\ldots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Un caso especial de las variaciones sin repetición es cuando $n = r$. En dicho caso, obtenemos todas las maneras posibles de colocar **(permutaciones)** n elementos, siendo la expresión (1) de la forma:

$$V_{n,n} = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Al número $V_{n,n}$ se le llama factorial de n y se representa por $n!$ Por convenio se admite que $0! = 1$

Variación (disposición) con repetición de n elementos tomados r a r

Son las distintas muestras ordenadas de tamaño r que pueden extraerse a partir de una población de n elementos, cuando el muestreo se efectúa con reemplazamiento. Si llamamos $VR_{n,n}$ al número de variaciones con repetición de n elementos tomados r a r, aplicando la regla del producto se deduce:

$$VR_{n,n} = n^r$$

Combinaciones sin repetición de n elementos tomados r a r

Son las diferentes muestras no ordenadas sin reemplazamiento de r elementos, que pueden formarse a partir de n individuos dados. Denotaremos por $C_{n,r}$ o $\binom{n}{r}$ al número de combinaciones de n elementos tomados r a r. Para calcular su valor, basta tener en cuenta que cada muestra no ordenada sin reemplazamiento de tamaño r puede dar lugar a $r!$ muestras ordenadas con reemplazamiento distintas permutando sus elementos. Por tanto:

$$\binom{n}{r} r! = V_{n,r};$$

y de aquí se deduce:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Los números $\binom{n}{r}$ reciben el nombre de números combinatorios y tienen, entre otras, las propiedades siguientes:

$$1. \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

$$2. \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$3. \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

Demostración:

1. Por definición se tiene que:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1(n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$
$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,(0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

   Luego,

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

2. Por definición se tiene que:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}\ por\ prop.conmutativa\ en\ los\ enteros$$

   De otro lado, por definición:

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\big(n-(n-r)\big)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-n+r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

   Así, por transitividad de las entre $\binom{n}{r}$ y $\binom{n}{n-r}$, se obtiene:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

3. Por definición se tiene que:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$\binom{n}{r+1} = \frac{n!}{(r+1)!\,\big(n-(r+1)\big)!}$$

Al sumar $\binom{n}{r}$ y $\binom{n}{r+1}$ se obtiene:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r+1)!\,\big(n-(r+1)\big)!}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n!\,(r+1)!\,\big(n-(r+1)\big)! + n!\,r!\,(n-r)!}{r!\,(n-r)!\,(r+1)!\,\big(n-(r+1)\big)!}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n!\,(r+1)r!\,(n-r-1)! + n!\,r!\,(n-r)(n-r-1)!}{r!\,(n-r)!\,(r+1)!\,(n-r-1)!}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n!\,r!\,(n-r-1)!\,[(r+1)+(n-r)]}{r!\,(n-r)!\,(r+1)r!\,(n-r-1)!}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n!\,r!\,(n-r-1)!\,[n+1]}{r!\,(n-r)!\,(r+1)r!\,(n-r-1)!}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{n!\,[n+1]}{(n-r)!\,(r+1)r!}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \frac{(n+1)!}{(n-r)!\,(r+1)!}$$

De otro lado, por definición:

$$\binom{n+1}{r+1} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,\big((n+1)-(r+1)\big)!} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n+1-r-1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!} = \frac{(n+1)!}{(n-r)!\,(r+1)!}$$

Así, por transitividad de las entre $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$ y $\binom{n+1}{r+1}$, se obtiene:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

Esta última propiedad se utiliza para calcular los números combinatorios recurrentemente, formando el llamado triángulo de Tartaglia, dos de cuyos lados son iguales a uno, y el resto de los números se calcula como suma de los dos situados inmediatamente encima de él (Fig. 5)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Figura 37.Triángulo de Tartaglia.

Combinaciones con repeticiones

Por último, si suponemos que en una muestra no ordenada se permite el reemplazo de elementos, obtenemos las combinaciones con repetición. Puede mostrarse que el número de combinaciones con repetición de m elementos tomados n a n es:

$$CR_{n,r} = C_{n+r-1,r}$$

La siguiente tabla resume las principales fórmulas para contar. Es importante aclarar que $\boldsymbol{n}$ representará una colección de objetos distintos. Las fórmulas cuentan el número de formas para seleccionar, u ordenar, con o sin repeticiones, $\boldsymbol{r}$ de esos $\boldsymbol{n}$ objetos.

El orden es significativo	Se permiten repeticiones	Tipo de resultado	Fórmula	Posición en el texto
Sí	No	Permutación	$p(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}\ , 0 \leq r \leq n$	94
Sí	Sí	Disposición	$n^r; n,r \geq 0$	95
No	No	Combinación	$C(n,r) = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{r},\ 0 \leq r \leq n$	95
No	Sí	Combinación con repetición	$\binom{n+r-1}{r}, n,r \geq 0$	98

RECOMENDACIONES DE ENSEÑANZA

En este apartado se plasmaran algunas pautas para la enseñanza de las combinaciones. Más que una guía estructurada, se quiere vislumbrar algunos indicios de cómo enseñar estos conceptos. En efecto, se sugiere las siguientes ilustraciones o entradas para la enseñanza de las combinaciones con base en las observaciones realizadas a lo largo de este trabajo de grado:

1. Contextualizar ejemplos de la vida real donde se aplique la combinatoria. Ej: Juegos de chance, loterías, baloto, cartas de poker, lanzamiento de monedas, lanzamiento de dados, filas en el banco, filas en el colegio, competencia de carreras, etc. Esto se hace con el propósito de mostrar que el conteo hace parte no solo de las necesidades básicas del hombre sino que también forma parte de la recreación o placer que se puede generar con los juegos de chance o probabilidad que aunque no se habló en este trabajo de cómo fue naciendo el estudio del azar, las correspondencias entre Pascal y Fermat son evidencias de planteamientos que surgieron en reuniones de gozo entre el círculo de matemáticos franceses de la época, es decir, que esas indagaciones no responden precisamente o necesariamente a problemas fenomenológicos.

2. Utilizar la aritmética y geometría de los números figurados, como se manejó en el *capítulo III* sección *Números figurados* de este trabajo, con el propósito de encontrar la fórmula recurrente de la sumatoria de los números naturales, triangulares, tetraédricos y así sucesivamente generalizar llegado al hermoso resultado con la sumatoria de los números figurados en cualquier dimensión.

3. Manipular los números figurados para hacer una introducción a la sucesión de números naturales, triangulares y tetraédricos con el fin de realizar una tabla como la de la figura 6 de este trabajo y a partir de ella explicarles a los estudiantes cómo la suma de los números naturales, son los números triangulares y que la suma de los triangulares son los tetraédricos y así darles herramientas para que ellos traten de expresar la suma de los números tetraédricos y con ello extender el triángulo hasta obtener el triángulo de Pascal.

4. Presentar las consecuencias del tratado del triángulo aritmético con las visualizaciones a partir de las gráficas que se plantearon en el *capítulo III* sección *Triangulo aritmético.* Proponer a los estudiantes buscar patrones a partir de los colores que se ven pintados e intentar que ellos puedan a partir de casos particulares y sus exploraciones, llegar a la generalización de la propiedad.

5. Con el acompañamiento guía del profesor formular matemáticamente las consecuencias que se presentaron con la metodología del punto 3 de esta propuesta. Es pertinente aclarar que la formulación matemática es tediosa y por ello es fundamental que el docente juegue un papel de mediador entre la actividad planteada y el trabajo de los estudiantes para alcanzar este propósito.

CONCLUSIONES

1. Los inicios de la combinatoria se remontan a tiempos legendarios empezando en China con los cuadrados mágicos, pasando luego por la escuela pitagórica con respecto al estudio de los números figurados. Algunos indicios a las reglas combinatorias están a cargo de los hindúes pero los judíos son quienes sistematizan el conocimiento de la época. Dos siglos después los trabajos de Tartaglia permiten la generalización del triángulo aritmético a más de tres dimensiones. Además los trabajos de Cardano permiten evidenciar los coeficientes de $(a+b)^n$ aunque es realmente Briggs quien encuentra una conexión entre los números figurados y los números combinatorios. Finalmente Fermat y Pascal dan un estatus relevante al análisis combinatorio a través de sus soluciones a problemas que se plantearon en aquellos tiempos.

2. La consecuencia decima segunda vista en términos modernos deja entrever el pensamiento combinatorio de Pascal y también lo que hoy en día se define como $\binom{n}{r}$. Al parecer Pascal tenía en su mente una de las reglas fundamentales del conteo.

3. En el tratado del triángulo aritmético se logró articular inductivamente las consecuencias de manera que al solucionar el problema final que plantea Pascal se consigue llegar a la generalización de los números figurados. Es relevante señalar que para obtener dicha generalización se hace necesario recurrir a la consecuencia quinta y por simetría alcanzar el resultado.

4. Pascal es quien logra conectar a los números figurados, los números combinatorios y los números binomiales. Es por ello y por su tratado del triángulo aritmético que comúnmente se suele llamar al triángulo el triángulo de Pascal.

5. A través de la idea del triángulo aritmético con sus celdas pintadas para cada consecuencia, se puede plantear una reestructuración de la enseñanza de la combinatoria que estimule a los estudiantes a tratar de llegar, por medio de observaciones, a los resultados que Pascal logró. Referente a esta conclusión se hace una invitación al lector de este trabajo que tenga intención de aplicarlo en su clase a incluir en el plan de área la enseñanza del triángulo aritmético desde las consecuencias de Pascal y sus relaciones encontradas. Podría imaginar un laboratorio donde los estudiantes coloreen las consecuencias y vislumbren lo que éstas encierran. Lo anterior podría generar un ambiente más divertido y creativo en el aula.

6. A pesar de que los enunciados de problemas combinatorios suelen ser sencillos y atractivos, sus soluciones son, en muchos casos, complejas y difíciles de obtener lo cual evidencia y hace advertencia de la seriedad y dificultad del "mero" conteo.

7. Podría ser interesante e importante introducir estas ideas combinatorias en los ambientes escolares colombianos donde están ausentes. Posiblemente en el país existan innumerables establecimientos escolares en donde los estudiantes egresados no conocen la diferencia entre una combinación y una permutación. La incorporación de la combinatoria en el pensum escolar, con seguridad contribuye a mejorar la calidad de la educación matemática.

8. El articular los números figurados en las clases permite entrever la integración de patrones numéricos que se desprenden de disposiciones geométricas a través de una aritmética. Así, el estudiante puede irse familiarizando con las generalizaciones e ir adquiriendo ciertos indicios de abstracción frente a determinados objetos matemáticos y las propiedades que en ellos se cumplen.

9. La realización de este trabajo dejó como resultado un poster titulado "*Algunos aspectos cronológicos de la combinatoria*" que fue expuesto en el Primer encuentro de educación estocástica desarrollado los días 10, 11 y 12 de septiembre de 2014 y que tuvo lugar en la universidad Nacional de Bogotá. Dicho poster se encuentra anexado a este trabajo. También se puede encontrar en las memorias del

evento el desarrollo de la propuesta. El link es el siguiente: http://encoedest.org/Memorias1ECEE2014.pdf

BIBLIOGRAFÍA

Alvarez, C., Martínez, R., & Torres, C. (1995). Tratado del triángulo aritmético. En MATHEMA, *Obras Matemáticas (Selección de textos)* (págs. 53-65). México, D.F.: Facultad de Ciencias, UNAM.

Arbelaéz, D. (2013). Cuentas Claras. En D. Arbelaéz, *Notas de clase del seminario de historia de la probabilidad.* Cali: Universidad del Valle.

Batanero, C., & Serrano Romero, L. (1998). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO* , 15-28.

Batanero, C., Godino, J., & Navarro - Pelayo, V. (1996). *Razonamiento Combinatorio.* España: Síntesis S.A.

Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi.* Basilea: Facsimile reprint: Bruxelles: Culture et Civilisation (1968).

Bhaskara. (1150). *Lilavati.* (C. (1817), Trad.)

Biggs, N. L. (1979). The roots of combinatorics. *Historia Mathematica , 6*, 109 - 136.

Briggs, H. (1633). *Trigonometria Britannica.* Goudae: Petrus Rammasenius.

Cajori, F. (1916). *William Oughtred.* Chicago: Open Court.

Cardano, G. (1570). *Opus novum de proportionibus numerorum.* Basilea.

Casalderrey, F. M. (2000). *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano.* España: Nivola.

Charles, M. s. (2013). VII Congreso internacional de historia de la estadística y de la probabilidad. *Leibniz y los múltiples "usos" de su arte combinatoria. Aspectos matemáticos* (págs. 187 - 208). San Sebastian: AHEPE.

Colerus, E. (1973). *Breve historia de las matemáticas.* Barcelona: Graó.

Collette, J. P. (1985). *Historia de las Matemáticas* (Vol. I y II). México: Siglo XXI.

Díaz, D. (2013). *Análisis histórico - epistemológico del surgimiento de la esperanza matemática.* Cali: Universidad del Valle.

Dickson, L. (1919, 1920, 1923). I. Divisibility and Primality. II. Diophantine Analysis. III. Quadratic and Higher Forms. En L. Dickson, *History of the Theory of Numbers.* (Vol. I). Washington: Carnegie Institution.

Edwars, A. W. (1987). *Pascal´s Arithmetical Triangle.* London: Charles Griffin.

Engel, A. (1975). The probabilistic abucus. *Educational Studies in Mathematics , 6*, 1-22.

Feller, W. (1973). *Introducción a la teoria de probabilidades y sus aplicaciones.* México: Limusa - W Wiley.

Frediani, E., & Tenorio, Á. (2004). Los sistemas de numeración maya, azteca e inca. En *Lecturas Matemáticas* (Vol. 25, págs. 159 - 190). Sevilla, España: Universidad Pablo de Olavide.

Godino, J., Batanero, C., & Cañizares, M. (1996). Teoría matemática elemental de la probabilidad. En J. Godino, C. Batanero, & M. J. Cañizares, *Azar y Probabilidad* (págs. 144-152). Madrid : Síntesis S.A.

Hacking, I. (1975). *The Emergence of Probability.* Cambridge University Press.

Hadwiger, H., & Debrunner, H. (1964). *Combinatorial geometry in the plane.* New york: Holt, Rinehart and Winston.

Hald, A. (1990). *A history of probability and statistics and their applications before 1750.* New York: Wiley.

Hald, A. (1990). The Foundation of Probability Theory by Pascal and Fermat in 1654. En A. Hald, *A history of probability and statistics and their applications before 1750* (págs. 42-64). New York: Wiley.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics , 6*, 187 - 205.

Knobloch, E. (1976). Die mathematischen Studien von G.W Leibniz zur Kombinatorik . En E. Knobloch, *Studia Leibnitiana Supplementa, XVI.* Wiesbaden : Steiner.

Knobloch, E. (1973). Die mathematischen Studien von G.W. Leibniz zur kombinatorik. En E. Knobloch, *Studia Leibnitiana Supplementa, XI.* Wiesbaden : Steiner.

Leibniz, G. (1666). *Dissertatio de Arte Combinatoria.* Berlin: Sämtliche Schriften und Briefe.

Lohne, J. A. (1979). A survey of Harriot´s scientific writings. *Arch. Hist. Exact Sci , 20*, 265 - 312.

Lohne, J. A. (1965). Thomas Harriot als Mathematiker. *Centaurus , 11*, 19 - 45.

Maistrov, L. E. (1974). *Probability Theory: A Historical Sketch.* New York: Academic Press.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas.* Bogotá.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares.* Bogotá.

Needham, J. (1959). Science and Civilisation in China. En *Mathematics and the Sciences of the Heavens and the earth* (Vol. 3). London: Cambridge University.

Nicomachus od Garesa. (100). Introduction to Aritmetic. (M. D´Ooge, R. F.E., & K. L.C., Trads.) New York: Macmillan (1926).

Oughtred, W. (1631). *Clavis Mathematicae.* London: Harper.

Oughtred, W. (1652). *Clavis Mathematicae* (3rd end ed.). Oxoniae: Lichfield.

Pólya, G. (1937). Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. *Acta Matemática* , 145 - 254.

Rabinovitch, N. L. (1973). *Probability and Statistical Inference in Ancient and Medieval Jewish Literature.* University of Toronto Press.

Recalde, L. (2011). La emergencia de la teoría de conjuntos. En L. Recalde, *Lecciones de historia.* Cali: Universidad del Valle.

Recalde, L. (2007). Las raíces históricas de la integral de Lebesgue. *Matemáticas: enseñanza universitaria* , 103-127.

Ribnikov, K. (1988). *Análisis combinatorio.* Moscú: Mir.

Ross, S. M. (1998). *A first course in probability.* New Jersey: Prentice - Hall, inc. .

Ryser, H. J. (1963). *Combinatorial Mathematics.* New York : The Mathematical Association of America.

Smith, D. E. (1925). *History of Mathematics, II: Special Topics of Elementary Mathematics.* Repriend New York and London : McGraw - Hill.

Spirto, L. (1535). *Libro della Ventura.* Romae: Antonio Blado.

Srinivasiengar, C. N. (1967). *The History of Ancient Indian Mathematic.* Calcutta: World Press.

Sylla, E. (2014). Tercentenary of Ars Conjectandi (1713): Jacob Bernoulli and the Founding of Mathematical Probability. *International Statistical Review , 82* (1), 27 - 45.

Tartaglia, N. (1556). *General trattato di numeri, et misure.* Vinegia.

ANEXO:

Primer Encuentro Colombiano De
Educación Estocástica
2014
La enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la estadística

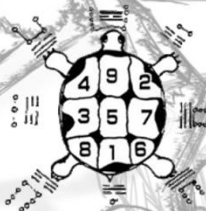
ALGUNOS ASPECTOS CRONOLÓGICOS DE LA COMBINATORIA

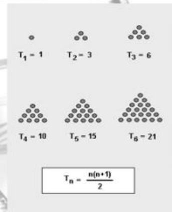
Parra Vargas, Diana Milagros
diana.parra.vargas@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle
Cali (Colombia)

Moran Pizarro, Daniel Steven
daniel.moran@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle
Cali (Colombia)

Siglo XXII AC – Los Cuadrados mágicos

La leyenda cuenta que el emperador chino Yu (2200 a.C) encontró en el caparazón de una tortuga sagrada un cuadrado mágico (Ryser, 1963). Los cuadrados mágicos son arreglos rectangulares de donde se disponen los números desde 1 hasta en las casillas de tal forma que la suma horizontal, vertical o diagonal siempre sea un número constante.








Siglo V A.C – Los Números triangulares

Entre sus aportes están las reglas acerca del total de puntos necesarios para formar números triangulares, los cuales responden a la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$. y se generaban al añadir los mismos consecutivamente de tal suerte que dibujan un triángulo.

Siglo XIV – Reglas principales sobre permutaciones y combinaciones.

Levi Ben Gerson (1288 – 1344) escribió reglas principales de cálculo (ya descubiertas por hindúes) sobre las permutaciones y combinaciones.

$$n!$$
$$n(n-1)\ldots(n-r+1)$$
$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3.r}$$



Siglo XVI – Estudio del Triángulo aritmético.

Tartaglia (1499 – 1557) extendió la tabla de los números figurados a más de tres dimensiones. Cardano (1501 – 1576), deduce los coeficientes de $(a+b)^n$ y le da solución a la ecuación cúbica. Briggs (1561 – 1631): Conexión de los números figurados y los números combinatorios.

Siglo XVI – Atisbos de la combinatoria como rama de las matemáticas.

Los trabajos de Fermat y Pascal dan reconocimiento al análisis combinatorio como un nuevo campo de la matemática digno de un estudio formal y se deja de ver como el dominio de un conjunto de técnicas o prácticas en la solución de una tipología de problemas.

Siglo XVII – La combinatoria como disciplina científica.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Se le debe la construcción sistemática como rama de las matemáticas. Jacobo Bernoulli (1654 – 1705) a través de la obra *Ars Conjectandi* (Arte de conjeturar) establece nociones de probabilidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C., Godino, J., Navarro, V. (1996). Razonamiento Combinatorio. Madrid: Síntesis S.A.

Edwards, A.W.F. (1987): Pascal´s Arithmetical Triangle. London: Charles Griffin.

Hald, A. (1990). A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750. Hoboken, NJ: Wiley.