

## **ACTIVIDADES DE GEOMETRÍA Y MATEMÁTICA APLICADA**

ROSA MARÍA ROS

*La geometría está en general ausente de los currículos de secundaria. Este artículo presenta una propuesta para aproximarse a la geometría al amparo de la astronomía. Un concepto clave, el concepto de ángulo, es aquí abordado desde perspectivas tan aparentemente remotas como la construcción de una maqueta del horizonte local y la lectura comprensiva de fragmentos escogidos de la novela "Robinson Crusoe".*

### **INTRODUCCIÓN**

Los temas de Geometría están bastante olvidados en los currículos de secundaria en muchos países. Considero que esta omisión es un error, y que resulta necesario desarrollar el razonamiento espacial en el alumnado.

En este artículo se presenta una propuesta para abordar el estudio de algunos conceptos geométricos en superficies esféricas. En concreto, la propuesta alude a las ideas de arco y ángulo en dos contextos: la esfera terrestre y la esfera celeste. Dichos contextos permiten trabajar con un contenido geográfico y astronómico para no quedarse en los conceptos geométricos y evitar así caer en la excesiva abstracción que se achaca a la matemática, y que la hace ser percibida por el público como una ciencia sin contacto con la realidad.

### **REFLEXIONES INICIALES**

En un video que se presentó en las Séptimas Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (VII JAEM, Madrid, 1995) se mostraba una encuesta en una calle cualquiera de una ciudad española. Se preguntaba: ¿son las matemáticas necesarias en nuestra sociedad? La gran mayoría de las personas contestaba que sí, muy convencidos, mas cuando el encuestador especificaba para qué eran éstas necesarias, casi todas respondían, "para pagar las cuentas", "administrar sus gastos" y poco más.

Muchas veces los alumnos preguntan: ¿para qué sirven las matemáticas?". Conmigo no hicieron una excepción y, hace unos cuantos años, mis alumnos de secundaria también me preguntaron lo mismo. En esas ocasiones, yo intenté responder de una forma razonada, con una buena lista de apli-

caciones que estuvieran a su alcance. Pero sus comentarios, e incluso sus miradas, resultaron escépticas. Alguna vez, supongo que escarmentada por casos previos, respondí: “Para nada, no sirven para nada”. Entonces descubrí que esas eran palabras mágicas. La reacción fue general, auténtica y rápida: “Sí, sí sirven”, dijeron. Uno indicó: “Mi hermano, que estudia economía, necesita matemáticas”. “Ah, sí. Para economía sí hacen falta”, repliqué. Otro dijo: “Mi primo estudia para ser ingeniero y tiene muchas asignaturas de matemáticas”. “Sí, claro, a los ingenieros también les hacen falta”, añadí yo. Resultó que sabían que eran precisas para estudiar psicología, biología, etc. Bueno, pareció que para casi todo eran imprescindibles. Esta vez tuve la impresión de que se lo creían. Lo habían descubierto ellos. La verdad es que aquel día salí contenta del aula, pero después pensé que esto no era suficiente. Parecía que el estudio de las matemáticas podía justificarse por el estudio de otras materias, pero me preguntaba: ¿sólo para eso sirven las matemáticas? En el mundo real, ¿no hay matemáticas? Como ya se ha mencionado antes, de acuerdo al video de las JAEM, todos tienen claro que las matemáticas son necesarias para llevar la contabilidad, para compraventas, pero ¿para qué más? Sí, está claro que si lees un periódico o ves la televisión aparecen estadísticas y diversos temas relativos a presupuestos: se trata de conteos. Pero, ¿y la geometría? ¿está la geometría en la calle? Bueno, sí, las papeleras, las señales de tráfico, los grandes edificios modernos son cilindros, conos, ortoedros,... Pero se ha llegado a estos objetos por un proceso cultural. ¿Hay matemáticas en la naturaleza? ¿Hay algún concepto matemático más intrínseco, no tan superficial?

Mi formación como matemática y astrónoma me dio la respuesta. Sí, el universo está lleno de geometría. La tierra es una esfera, y nuestra posición sobre ella se determina mediante ángulos. Pero, ¿qué es un ángulo? Nuestra posición, al observar el cielo y el movimiento del sol y la luna, podría corresponder con el centro de una esfera. Pero realmente en la esfera nuestra situación y la dirección a tomar vienen determinados por ángulos desde ese centro. Esto es geometría y geometría real y útil. Sirve para orientarnos y llegar con más facilidad a otro lugar, o simplemente llegar. Si un día nuestros alumnos van de excursión y se pierden, esta geometría puede ayudar a salvar sus vidas. ¿Y los mapas? Sí, los mapas también son geometría. La proyección de una superficie esférica sobre un plano permite continuar trabajando el concepto de ángulo y añadir nuevas consideraciones mucho más complicadas que se escapan de los límites de la secundaria. Bueno, mi conclusión fue que es importante que los estudiantes descubran las matemáticas en su entorno y que para esto había que integrar la vida real a las clases de matemáticas.

## LA PROPUESTA

En mi país, el estudio de la geometría se ha sustituido por el estudio de otros contenidos. Así la mayoría de los alumnos de secundaria les cuesta bastante trabajo manejar los conceptos de la geometría plana y es complejo y prácticamente inviable para ellos, utilizar conceptos de geometría en la tercera dimensión, como por ejemplo los relacionados con una superficie esférica. En particular, un concepto como el de ángulo, que requiere un proceso de aprendizaje elaborado, no llega a asumirse con profundidad. Los alumnos son capaces en general de dibujar un ángulo como dos segmentos que se cortan, pero de ésto a comprender el concepto hay un trecho.

La propuesta que se presenta en este artículo pretende aproximarse al concepto de ángulo en contextos relacionados con la vida real, e incluye las siguientes actividades: un resumen inicial acerca de las coordenadas sobre la esfera; la construcción y manejo de una maqueta del horizonte local donde se integran conceptos matemáticos vistos en ese resumen; la extrapolación de esta situación local a un caso remoto (el de Robinson Crusoe), a modo de evaluación, para verificar la asimilación de los contenidos; la construcción de un medidor de ángulos, trabajo que ofrece al enseñante un conjunto de recursos para utilizar en el aula con el objetivo de actuar sobre conceptos a distintos niveles.

Para empezar la idea es proponer al alumnado que responda el cuestionario a continuación, con el objeto de indagar más acerca de la problemática previamente percibida:

- ¿Sabrías decir qué es un ángulo?
- Dibuja dos ángulos que sean iguales pero de distinto “tamaño”. (El tamaño se refiere a la longitud de los segmentos que determinan el ángulo).
- Dibuja dos ángulos distintos pero de igual “tamaño”.
- ¿Qué diferencia hay entre ángulo y arco?
- ¿Qué es la latitud y la longitud? (Se supone que estos conceptos han sido estudiados previamente en otras asignaturas).

### Objetivos

Los objetivos específicos que se intentan alcanzar en los alumnos con las actividades propuestas se enuncian enseguida.

En cuanto al logro de objetivos conceptuales se espera que el estudiante, sea capaz de:

- Responder significativamente a la pregunta de qué es un ángulo, yendo más allá de su trazo.
- Diferenciar ángulo y arco.
- Definir los conceptos de latitud y longitud, ascensión recta y declinación.

Por lo que concierne a objetivos procedimentales se espera que sea capaz de:

- Manejar y medir ángulos.
- Comparar y relacionar ángulos desde el exterior e interior de la superficie esférica.
- Tomar fotografías regulando el punto de observación y los tiempos de exposición.
- Construir ángulos sobre una maqueta.

En relación con objetivos actitudinales la expectativa es que sea capaz de:

- Percibir contactos de las matemáticas con la realidad.
- Sentir la necesidad de las matemáticas en nuestro entorno natural y en nuestra sociedad.
- Observarse a sí mismo como a un usuario de matemáticas.
- Distinguir entre la percepción de una realidad y la propia realidad, aprovechando aquí el soporte de la astronomía.

## **DESARROLLO DE LA PROPUESTA**

### **Coordenadas sobre la esfera**

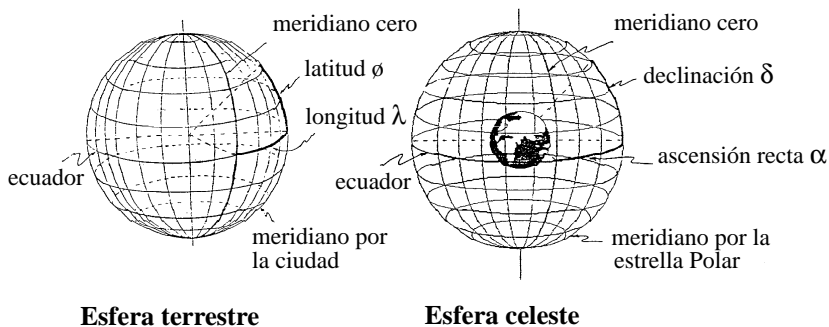
Los casos específicos de la esfera terrestre y celeste sirven para introducir el manejo de coordenadas sobre la esfera. La esfera terrestre no es necesario definirla. Sí es necesario mencionar que la esfera celeste constituye una entelequia: no es real, pero continuamos usándola por comodidad de manejo. La esfera celeste es la “esfera de cristal” donde, en la antigüedad, se decía que estaban pegadas las estrellas. Ahora sabemos que dicha esfera no existe y que las estrellas no están a igual distancia de nosotros pero, intuitivamente, si observamos el cielo tenemos esa percepción del universo. Y como tal vamos a continuar utilizando dicho concepto.

Iniciaremos pues el trabajo recordando el concepto de eje de rotación de las esferas terrestre y celeste. Al girar la tierra sobre sí percibimos un movimiento relativo de la esfera celeste respecto al mismo eje. Este movimiento,

aunque no es real (sabemos que realmente es la tierra la que gira de oeste a este) lo percibimos como si giraran las estrellas de este a oeste respecto al eje de rotación terrestre, también llamado “eje del mundo”.

Perpendicularmente al eje del mundo por el centro de la tierra (que por definición también es el centro de la esfera celeste) se sitúa el plano del ecuador que corta ambas esferas en dos circunferencias máximas llamadas ecuador terrestre y celeste respectivamente. Estas circunferencias máximas son una referencia para situar un punto sobre la esfera. Otra referencia es cualquier meridiano (circunferencia máxima perpendicular al ecuador pasando por los polos norte y sur). Como son todos iguales, se selecciona el meridiano cero de la tierra, es decir, el que pasa por la ciudad de Greenwich. En el caso de la esfera celeste el meridiano cero es el que pasa por el punto Aries (intersección del ecuador celeste con la trayectoria anual del sol sobre la bóveda celeste o elíptica).

Con esta referencia, ecuador y meridiano cero, todo punto sobre la esfera celeste se determina con un par de ángulos: uno sobre el ecuador desde el meridiano cero hasta el meridiano del lugar del que queremos determinar la posición, y el segundo ángulo sobre el meridiano del lugar desde el ecuador hasta el lugar considerado. Estos ángulos son análogos a los que se definen en la superficie terrestre como longitud  $\lambda$  y latitud  $\phi$ , sobre la esfera celeste reciben los nombres de ascensión recta  $\alpha$  y declinación  $\delta$  (Figura N° 1).



*Figura N° 1. Coordenadas geográficas y ecuatoriales sobre las respectivas esferas terrestre y celeste*

La longitud está comprendida entre  $0^\circ \leq \lambda \leq 180^\circ$  E o entre  $0^\circ \leq \lambda \leq 180^\circ$  W y la latitud entre  $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ , mientras que la ascensión recta está comprendida entre  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$  y la declinación entre  $-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ . La ascensión recta tiene un único sentido de giro que va desde  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , mientras que la longitud va de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  hacia el este E o bien de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  hacia el oeste W. Es costumbre presentar ambos ángulos en minutos y segundos en

lugar de grados, minutos y segundos de arco. Así la ascensión recta está entre  $0h \leq \alpha \leq 24h$  y la longitud está entre  $0h \leq \lambda \leq 12h$  E o bien entre  $0h \leq \lambda \leq 12h$  W. Es fácil identificar la relación que hay entre longitud y ascensión recta y entre latitud y declinación.

Una forma sencilla de manejar estas coordenadas que sirve para insistir en los conceptos de ángulo y arco, es el uso de una bola maciza de corcho o icopor que al cortarla muestra los ángulos que sitúan un punto de la superficie y los arcos correspondientes sobre ecuador y meridianos (Figura N° 2).

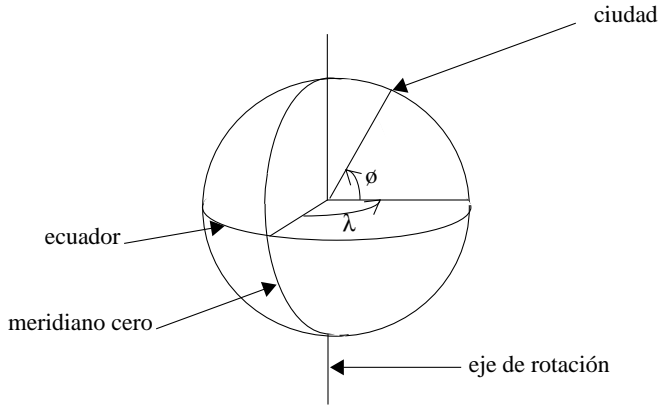


Figura N° 2. Ángulos interiores de una esfera maciza

## Nuestra posición respecto a las dos esferas

Nuestra percepción de las estrellas del firmamento no es independiente de nuestra posición sobre la tierra. Realmente nuestra situación difiere respecto a ambas esferas. Estamos situados sobre el globo terrestre, por tanto observamos la tierra desde su superficie, pero también estamos situados dentro de la esfera celeste, en su centro. La percepción que tenemos de ambas es completamente distinta (Ros, 1998). Observamos la esfera terrestre desde fuera y en cambio observamos la esfera celeste desde dentro. Así nuestra percepción de los ángulos centrales vuelve a modificarse. Para salvar el problema a la vez que comprenderlo mejor vamos a realizar la experiencia de construir una maqueta que permita visualizar la esfera celeste “desde fuera” a la vez que conservamos nuestra posición interior para poder comparar mejor el problema de las dos esferas. Además, de esta forma podemos intuir en el cielo la posición de los diferentes elementos utilizados como referencia en la introducción de las coordenadas: el eje de rotación terrestre o eje del mundo, el meridiano del lugar de observación, el ecuador celeste, etc.

Comenzaremos nuestro trabajo situando una cámara fotográfica sobre un trípode nivelado, en algún lugar del centro de enseñanza donde estudien nuestros alumnos y que disponga de un horizonte despejado de obstáculos; algún punto del techo suele servir para ello. En el lugar elegido donde se monta el trípode conviene señalar con pintura la posición precisa de las patas del trípode para realizar actividades posteriores.

Seguidamente, tomaremos un conjunto de fotografías del horizonte empezando con un encuadre determinado, y cuidando que al fotografiar la zona contigua el nuevo encuadre se superponga un poco con el anterior y así hasta dar la vuelta completa. Se vigilará para que siempre se superpongan un poco los distintos encuadres con el objetivo de que, reveladas las fotografías, podamos pegarlas una a continuación de la otra (superponiendo zonas comunes) hasta obtener una cinta de fotografías en forma de cilindro. Al haber nivelado el trípode hemos obtenido fotografías del horizonte visible desde el lugar de observación.

A continuación dicha cinta de fotografías se montará sobre un cuadrado de madera o cartón sujetándola a él, de forma que las fotografías se mantengan perpendiculares al cuadrado de madera (Figura N° 5). Antes de fijar la cinta de fotografías sobre la base cuadrada, es conveniente dibujar las dos diagonales (perpendiculares entre si) del cuadrado y marcar en una de ellas el norte con N y en el extremo opuesto de esa misma línea el sur con S. También señalaremos el este E y el oeste W en la otra diagonal (desde el norte el este debe estar a la izquierda y el oeste a la derecha). Es necesario disponer de brújula y en el horizonte real, en el techo del centro escolar, observar hacia donde señala la aguja de la brújula, para identificar cuál es el norte, situando ese punto de la cinta de fotos en la N de la correspondiente línea diagonal (o línea norte-sur). Una vez bien sujeta la cinta de fotografías sobre la base de madera, conviene llevarla al techo, al lugar donde se colocó el trípode con la cámara y donde se había marcado la posición de las patas del trípode. Allí observamos y comparamos la posición de los puntos cardinales norte N, sur S, este E y oeste W en la maqueta y en el horizonte real. Conviene destacar puntos especialmente reconocibles en el horizonte de la ciudad. Por ejemplo en Bogotá: los cerros de Monserrate y Guadalupe, la torre de Colpatria, etc.

De nuevo en el laboratorio, donde se ha construido la maqueta vamos a añadir elementos para configurar la esfera celeste (Ros y Lanciano, 1995). En primer lugar situaremos un alambre en la dirección del eje de rotación terrestre o eje del mundo, que actualmente señala en la dirección de la estrella polar. Este alambre debe pasar por el punto de intersección de las dos diagonales y formar un ángulo  $\varnothing$  por encima de la diagonal que señala hacia el norte, donde el ángulo  $\varnothing$  es la latitud del lugar.

La latitud del lugar, o sea el ángulo desde el ecuador terrestre hasta la ciudad coincide con el ángulo desde el horizonte hasta la estrella polar (altura de la polar). Basta considerar que la latitud  $\phi$ , el ángulo entre la plomada y el plano del ecuador, forma el mismo ángulo que el eje del mundo y el plano del horizonte, pues al ser la plomada perpendicular al plano del horizonte y el ecuador perpendicular al eje del mundo, ambos ángulos son iguales (Figura N° 3). Además dicho ángulo es el complementario del ángulo que determina el plano del ecuador con el plano del horizonte. Por tanto para fijar el alambre que represente el eje del mundo hay que conocer la latitud del lugar, que podemos sacar de cualquier libro especializado. Otro procedimiento es obtener la altura de la estrella polar, por observación directa con la ayuda de un cuadrante, si el lector de estas páginas no reside en un lugar cuya latitud local sea muy pequeña.

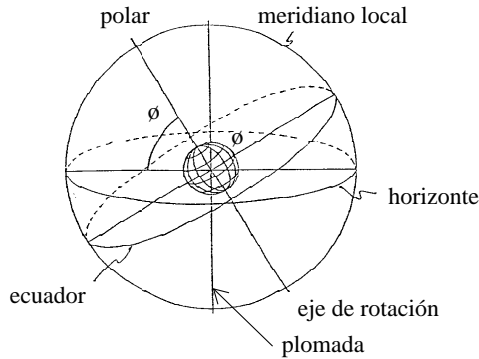
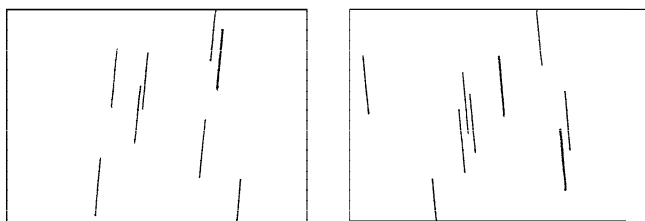


Figura N° 3. Relación entre la latitud del observador y la altura de la polar

Desafortunadamente para conocer latitudes como la de Bogotá, donde la estrella polar está situada casi en el horizonte y normalmente está tapada por un accidente geográfico, este último procedimiento no es adecuado. Veremos después cómo construir un cuadrante de forma fácil, para medir ángulos y obtener la altura de la polar, o de cualquier accidente geográfico o de un edificio. Continuaremos ahora construyendo la maqueta. Pasando por los puntos cardinales norte, sur e incliniendo en el eje de rotación situaremos un alambre dándole la forma de una semicircunferencia de igual diámetro que la circunferencia de la cinta de fotografías. Finalmente perpendicular al eje del mundo, pasando por el punto cardinal este y el oeste situaremos otro alambre en forma de circunferencia, también de igual diámetro visualizando el ecuador celeste. La inclinación de dicho alambre respecto al horizonte debe ser la colatitud  $90 - \phi$  del lugar de observación tal como se indica en la Figura N° 5. Es una experiencia interesante para visualizar la colatitud to-

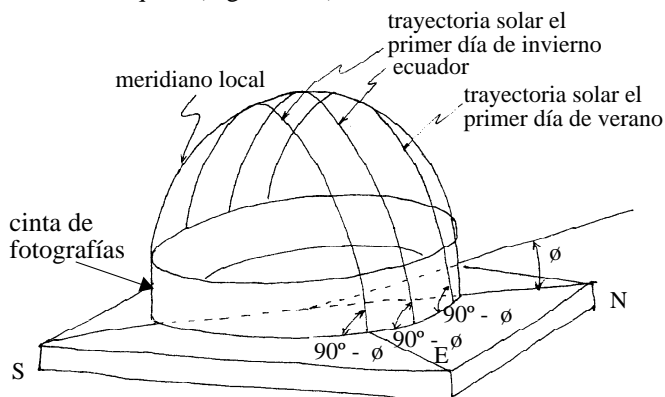


mar un par de instantáneas por la noche, en un lugar con horizonte despejado, de los trazos que producen las estrellas en su movimiento de rotación en torno al eje del mundo. Basta situar la cámara en un lugar próximo a la ciudad (para que la latitud sea casi la misma), pero suficientemente alejado del centro urbano (para evitar la luz ambiental y la contaminación al máximo). Colocaremos la cámara sobre un trípode bien nivelado, a su vez nivelaremos la cámara con un nivel de burbuja y enfocaremos hacia este y oeste, obteniendo tras una exposición de unos 10 minutos dos instantáneas como las de la Figura N° 4.



*Figura N° 4. Símil de fotografías de los trazos estelares próximos al horizonte o sea al borde inferior de la cinta de fotografías en la zona del este y la del oeste, para un lugar de latitud análogo a Bogotá*

Para dar un tiempo de exposición tan prolongado como el que se mencionó anteriormente y evitar vibraciones hay que usar un disparador de cable. Las fotografías de los puntos cardinales este y oeste nos servirán para determinar la latitud del lugar (Ros, Viñuales y Saurina., 1995), pues el ángulo que forman las trazas con el horizonte es la colatitud  $90 - \phi$ . También, las fotografías nos ayudarán para inclinar correctamente el alambre del ecuador sobre la base de la maqueta (Figura N° 5).



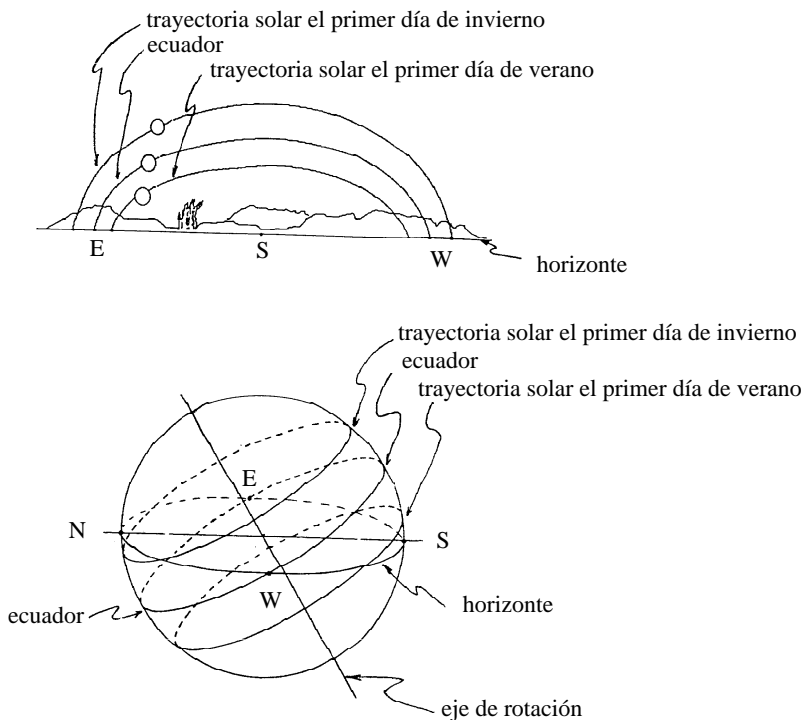
*Figura N° 5. Maqueta del horizonte en Bogotá*

Podemos considerar el sol como una estrella más, que sale y se pone como las restantes, con la salvedad de que como está próxima nos deslumbra y por tanto cuando el sol está sobre el horizonte no podemos ver ninguna otra estrella. Pero además, el sol durante el año varía de declinación  $D$ . El primer día de primavera tiene declinación  $D = 0^\circ$ , o sea, recorre el ecuador, sale por el este y se pone por el oeste. El segundo día de primavera tiene declinación  $D > 0^\circ$  por tanto describe un paralelo un poco por encima del ecuador hacia el norte, y así sucesivamente hasta llegar al primer día de verano en que el sol tiene una declinación máxima  $D = 23^\circ 27'$  y recorre el paralelo más hacia el norte de los posibles. El segundo día de verano tiene una declinación  $D$  algo menor y así hasta el primer día de otoño en que vuelve a tener declinación  $D = 0^\circ$  y recorre el ecuador, volviendo a salir por el este y a ponerse por el oeste (sólo dos días al año el sol tiene este recorrido, los demás sale aproximadamente en la zona del este y se pone en la zona del oeste). El segundo día de otoño comienza a tener una declinación un poco negativa  $D < 0^\circ$  y así hasta llegar al primer día de invierno en que el sol tiene declinación extrema, lo más negativa posible  $D = -23^\circ 27'$ , siendo la trayectoria solar la más próxima al sur. A partir de ahí, el segundo día de invierno el sol comienza ya a aumentar su declinación  $D > -23^\circ 27'$  lentamente hasta volver a tomar  $D = 0^\circ$  el primer día de primavera y repetir el ciclo. Así las trayectorias solares son paralelos encima y debajo del ecuador (Figura N° 6).

A raíz de lo señalado, nos interesa tomar dos instantáneas de posiciones extremas del sol en la salida y/o en la puesta, el primer día de verano y de invierno. Con la localización de las salidas y/o puestas del sol se fijan alambres relativos a la trayectoria solar de un año en la maqueta construyendo paralelos al ecuador (con igual inclinación que la de la figura 4) que corresponden a declinaciones  $|D| = 23^\circ 27'$ . También se pueden obtener fotografías de la salida y/o puesta del sol en primavera y/u otoño y comprobar la posición del ecuador construido antes. Hay que insistir en que es necesario, para comparar el material, sacar las fotos con el trípode y la cámara situados en la misma posición que cuando se efectuaron las fotografías del horizonte, la cual se marcó con pintura.

Una vez confeccionada la maqueta, nuestro objetivo es visualizar los ángulos “desde dentro de la esfera celeste y desde fuera de la esfera terrestre”. La trayectoria del sol en el año se puede imaginar en la maqueta con la ayuda de las trayectorias de alambre y se puede imaginar sobre la esfera celeste en las observaciones diarias.

A partir de la maqueta se puede observar que en latitudes como la de Bogotá, próximas al ecuador ( $\phi \approx 0^\circ$ ), la duración de la trayectoria del sol sobre el horizonte, es decir la duración del día es casi igual durante el año y por tanto no se producen días largos en verano y cortos en invierno, lo cual sí se



*Figura N° 6. Ambas figuras representan la zona de trayectorias solares a lo largo de un año*

da en ciudades con una latitud media. En la figura se percibe la distinta duración de los días. También cabe construir una maqueta para latitudes próximas al polo ( $\theta \approx 90^\circ$ ) y explicar el fenómeno del sol de medianoche.

### **El caso de Robinson Crusoe**

Hemos mencionado antes que en latitudes como la de Bogotá, donde la estrella polar esta casi en el horizonte, la determinación de la latitud a través de la altura de la polar no es factible. Una forma distinta de hacerlo puede leerse en el libro *Robinson Crusoe* de Daniel Defoe:

Nos hicimos a la vela el mismo día en que embarqué, costeando hacia el norte para luego rumbo al Africa cuando estuviéramos a los diez o doce grados de latitud norte, que era el camino seguido en aquellos tiempos. A los doce días cruzamos la línea y nos encontramos, según la última observación que alcanzamos a hacer, a unos

siete grados veintidós minutos norte cuando un violento tornado o huracán...

... según mis cálculos, había arribado en la forma narrada a tan tórrida isla un 30 de septiembre, cuando el sol en su equinoccio otoñal estaba casi sobre mi cabeza, de donde calculé que me hallaba a una latitud de nueve grados veintidós minutos norte...

... se trataba de los grandes movimientos y el reflujo del enorme río Oroonoko, ya que como terminé por saber nuestra isla se hallaba en el gran golfo de su desembocadura. La tierra que se alcanzaba a ver hacia el oeste y el noroeste era la gran isla de Trinidad...

Según dice el propio Robinson el barco en que navegaba entró en la tempestad del naufragio cuando estaban muy próximos al ecuador cerca de Africa. Calcula que alcanza la isla donde tanto tiempo permanece, unos días después del primer día de otoño: así sabe que la declinación del sol debe ser prácticamente nula. Supongamos efectivamente que  $D = 0^\circ$ . Usando un cuadrante que había salvado del naufragio midió la altura del sol. La pregunta clave es: ¿cuál fue el valor que obtuvo si dedujo que la latitud de la isla era  $\phi = 9^\circ 22'$ ? La respuesta a esa pregunta nos sirve de “barómetro” de si los alumnos tras la construcción de la maqueta han asimilado el manejo de ángulos. En la Figura N° 7 se ve claramente que la altura que obtuvo Robinson para el sol fue de  $80^\circ 38'$ , pues el primer día de otoño el sol recorre el ecuador ( $D = 0^\circ$ ) y el ángulo determinado por la altura del sol cuando pasa por encima de él, es  $90 - \phi$ . Así, si  $90 - \phi = 80^\circ 38'$  la latitud de la isla es  $\phi = 9^\circ 22'$ .

Hasta aquí hemos calculado sólo la latitud, por tanto sólo sabemos una, de las dos coordenadas de posición de la isla. La isla debe estar situada sobre el paralelo  $9^\circ 22'$  norte, pero al desconocer su longitud no podía saber donde se encontraba. Podía estar próximo a Africa, América o perdido en medio del océano. Con la ayuda de los mapas de navegación que salvó y gracias a la observación del reflujo de un gran río, Robinson pudo deducir que debía estar cerca de América y en particular de la desembocadura del Orinoco, el único gran río próximo a la latitud obtenida (Ros, 1995).

## Construcción de un cuadrante

Para efectuar algunas de las experiencias detalladas con anterioridad (calcular la altura del sol o la altura de la estrella polar) es necesario disponer de algún instrumento de medir ángulos. Un instrumento muy sencillo que nos permite lograr esto es el cuadrante (Broman et al., 1988). A continuación mostraremos dos procesos para construirlo, pero veamos antes cual es el principio geométrico que permite hacer la medición.

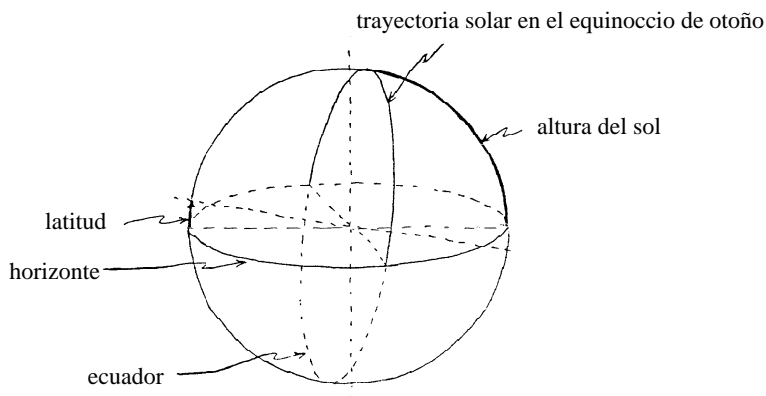


Figura N° 7. Trayectoria solar que observa Robinson el primer día de otoño

Supongamos que queremos obtener el ángulo que da la altura de una estrella. Usaremos un instrumento con visor y un cuarto de círculo graduado (de ahí viene el nombre), en cuyo centro sujetaremos una plomada. El ángulo determinado por la visual y el horizonte es el mismo que el determinado por la plomada y la línea origen de los ángulos, por ser el visor perpendicular al origen de los ángulos, y la plomada perpendicular al horizonte (Figura N° 8).

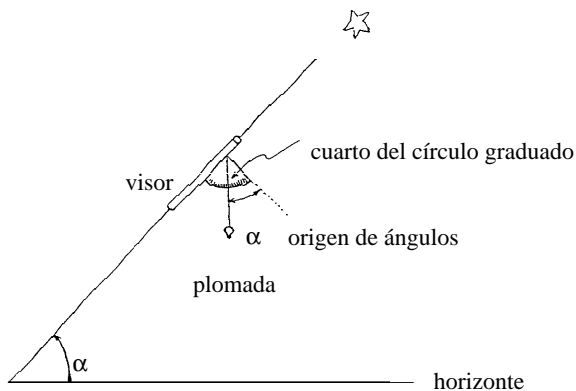
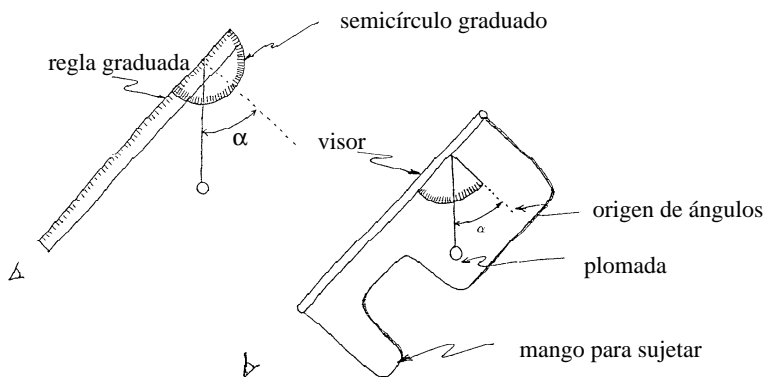


Figura N° 8. Observación de la altura de un astro usando un cuadrante

El cuadrante más sencillo se construye sujetando con cinta adhesiva una regla a un semicírculo graduado y sujetando un bramante o hilo con un peso colgando (Figura N° 9). Hay que cuidar que el origen del ángulo sea perpendicular a la arista de la regla, y hacer la lectura del ángulo desde el origen de los ángulos (donde está el 90).

Si queremos perfeccionar el esquema anterior se puede diseñar un cuadrante más sofisticado (Figura N° 9). Usaremos un rectángulo de unos 15 por 20 cm en madera no gruesa, de 6 o 8 milímetros. En esta madera sujetaremos un pitillo de los usados para refrescos, como visor, mediante una hoja de papel adhesivo. En la madera también, fijaremos un cuarto de círculo graduado que quede perpendicular al visor. En el origen de los ángulos con un clavo fijaremos una plomada para obtener finalmente el cuadrante deseado.



*Figura N° 9. Dos modelos de construcción de un cuadrante*

El interés de este instrumento no se reduce a medir alturas de astros: puede servir para calcular alturas de edificios, montañas, etc., y realizar ejercicios de trigonometría en temas variados.

## LOGROS ALCANZADOS

En general tras el desarrollo de las actividades descritas los estudiantes se han mostrado convencidos de la conveniencia de saber matemáticas porque las ven integradas a su mundo, y porque les sirven para entender mejor el comportamiento de su entorno inmediato (Ros, 1998a). Su apreciación de la realidad del cielo visible es diferente. Vieron la oportunidad del uso de la

esfera celeste no sólo como modelo espacial donde los astros se encuentran, sino también como soporte de una interesante visualización con vertientes cuantificables. La esfera ya no es un mero modelo, se ha convertido en algo real: un cuerpo respecto al cual puedes estar dentro o fuera.

Los estudiantes se sintieron involucrados no sólo en su propio aprendizaje sino en el proceso de la enseñanza para sí mismos y para sus compañeros. El hecho de personalizar el manejo de ángulos a través del propio horizonte y de construir la maqueta los ha llevado a sentirse interesados y motivados en el estudio, en todos los casos.

Los alumnos han extendido las ideas “geográficas” que poseían acerca de meridianos, paralelos, longitud y latitud a sus correspondientes en la bóveda celeste, por natural analogía mediante el uso de la maqueta de orientación. Son ahora capaces de determinar alturas y acimudes de astros. Esta capacidad de transferencia habla de la consecución de un aprendizaje no meramente superficial sino de cariz significativo. El adecuado uso de la maqueta por parte de los estudiantes es indicio de que ellos se orientan mejor y mi experiencia me muestra que incluso en años posteriores dicho sentido de orientación se conserva. Además, la construcción de ángulos, que los alumnos habían medido de diversas formas previamente, les condujo a entender bien el concepto, pues es importante manejar un ángulo para entender lo que significa éste. Se observa que ya son capaces de manejarlo al poner en estación un telescopio ecuatorial o un teodolito, orientarlo según el eje de rotación terrestre, situarlo correctamente introduciendo la latitud del lugar y usarlo después para hacer observaciones. Dado que los estudiantes han aumentado el número de conceptos conocidos y que éstos han sido asimilados con profundidad, la formación en geometría se ha vuelto más sólida. Esto es cierto incluso para algunos alumnos que ya poseían los conceptos básicos.

La constatación por parte de los alumnos de que ellos mismos son capaces de generar elementos (v.gr. fotografías) e incluso instrumental (v.gr. cuadrantes) que permiten apoyar un mayor y/o mejor conocimiento de la realidad que les envuelve, fue sumamente gratificante. En este ámbito, que se percataran de que hay recursos que facilitan una mayor precisión (un disparador de cable, su propio cuidado) fue también interesante.

La actividad realizada con el libro de Robinson Crusoe se llevó a cabo en diferentes cursos unos de los cuales habían experimentado con la maqueta y otros no. Los resultados fueron mejores en el primer caso. En el segundo, a veces no conseguían ni desbrozar las cuestiones a estudiar. Como quien dice no sabían ni empezar y mi impresión fue que su aprendizaje teórico no se aplicaba fácilmente a un caso real.

## REFLEXIONES FINALES

La principal dificultad al experimentar las distintas actividades es el problema del tiempo. Si se quiere desarrollar todo lo propuesto es posible que sea necesario reducir los contenidos. La actividad que requiere más tiempo es la elaboración de la maqueta, pero aún así es de interés llevarla a cabo, pues sirve como forma de potenciar el contacto con la realidad, de la que tanto carece la clase de matemáticas. Además esta actividad se muestra especialmente eficaz en aquellos alumnos que tienen más dificultades para manejar conceptos abstractos.

La experiencia se presta para trabajar en grupos y para motivar la discusión entre alumnado, donde el profesor ejerce un papel de moderador, más o menos activo, según las características del grupo.

Usualmente a los estudiantes les gusta el hecho de construir objetos con las manos. Estas construcciones tienen la ventaja de que se pueden llevar a cabo fuera del aula y usualmente es un trabajo para casa que ellos suelen hacer con muchas más ganas que resolver unos ejercicios. En general les resulta más interesante trabajar con problemas reales como calcular la altura del edificio donde estudian que con ejercicios cuyos enunciados figuran en un libro, como resolver un triángulo tipo.

Aunque en mi caso no consideré necesario hacerlo, el cuestionario inicial de diagnóstico puede volverse a hacer para una oportuna verificación de los cambios conseguidos.

Dependiendo del tipo de formación que se pretenda, la actividad puede ajustarse a lo que se quiera. Por ejemplo en España en donde los estudios de secundaria consideran también contenidos técnicos, algunos docentes han ligado la maqueta con la construcción de edificios teniendo en cuenta la orientación de éstos según la trayectoria solar. Con ello se ha logrado el interés de la mayoría de los alumnos que ven así un ejemplo sorprendente para ellos, de matemáticas aplicadas.

Además de romper una lanza a favor de la geometría, y en particular de la geometría sobre superficies no planas, un objetivo de la propuesta es el manejo de conceptos matemáticos en contacto con la realidad. Con lo expuesto se pretende también animar al profesor a usar más geometría, ejemplos matemáticos de la vida real y en fin, a realizar actividades variadas.

Para concluir, lo aquí propuesto puede sintetizarse con las palabras de Confucio (siglo IV): Lo oyó, y lo olvidó. Lo vio y lo recordó. Lo hizo y lo comprendió.



## REFERENCIAS

- Broman, L., Estalella, R. y Ros, R.M. (1988). *Experimentos de Astronomía*. Madrid: Editorial Alhambra.
- Ros, R. M. (1998). Orientation inside and outside the celestial sphere. En R.M. Ros (Ed.), *Proceedings of the 2nd EAAE International Summer School*, Barcelona: Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad Politécnica de Cataluña.
- Ros, R. M. (1998a). Teaching astronomy at secondary school level in Europe. En L. Gouguenheim, D. McNally y J. Percy (Eds.), *New trends in astronomy teaching*. London: Cambridge University Press.
- Ros, R. M. (1995). *Astronomía, libros y aventuras*. Barcelona: Universidad Politécnica de Catalunya.
- Ros, R. M. y Lanciano, N. (1995). El horizonte en la Astronomía. *Astronomía, Astrofotografía y Astronáutica*. Barcelona. p. 76. 17, 20
- Ros, R. M., Viñuales, E. y Saurina, C. (1995). *La fotografía una herramienta para hacer astronomía*. Zaragoza: Mira Editores.

*Rosa María Ros*  
*Departamento de Matemática Aplicada y Telemática*  
*Universidad Politécnica de Catalunya.*  
*Campus Nord, Modulo C3,*  
*Jordi Girona 1-308034*  
*Barcelona*  
*España*