ECOLOGÍA DEL CONCEPTO DE VOLUMEN EN UNA INSTITUCIÓN ESCOLAR: UNA APROXIMACIÓN DESDE LA TAD

Deysi Lorena Cano Díaz

0838473

Andrea Ruco Gómez

0747960

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LÍNEA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI, SEPTIEMBRE DE 2014

ECOLOGÍA DEL CONCEPTO DE VOLUMEN EN UNA INSTITUCIÓN ESCOLAR: UNA APROXIMACIÓN DESDE LA TAD

Deysi Lorena Cano Díaz

0838473

Andrea Ruco Gómez

0747960

Trabajo de grado presentado como requisito para acceder al título de

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

WILDEBRANDO MIRANDA VARGAS

Tutor

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LÍNEA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI, SEPTIEMBRE DE 2014

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: ***1.*** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

TÍTULO DEL TRABAJO:	ECOLOGÍA DEL CONCEPTO DE VOLUMEN EN UNA INSTITUCIÓN ESCOLAR: UNA APROXIMACIÓN DESDE LA TAD.							
Se trata de:	*Proyecto* [ ]			*Informe Final* [x]				
Director:	*Wildebrando Miranda Vargas*							
1er Evaluador:	*Alexander Parra*							
2do Evaluador:								
Fecha y Hora	*Año:*	*2014*	*Mes:*	*Septiembre*	*Día:*	*8*	*Hora:*	*4:30 pm*

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	*Código*	*Programa Académico*
Deysi Lorena Cano Díaz	0838473	3469
Andrea Ruco Gómez	0747960	*3487*

EVALUACIÓN

Aprobado	*X*	*Meritorio*		*Laureado*	
Aprobado con recomendaciones		*No Aprobado*		*Incompleto*	

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de* ________________ *(máximo un mes)* ***ante****:*

Director del Trabajo		*1er Evaluador*		*2do Evaluador*	

En el caso que el Informe Final se considere ***Incompleto****, se da un plazo de máximo de* ________________ *semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:*

Año:		*Mes:*		*Día:*		*Hora:*	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

FIRMAS:

Wildebrando Miranda Vargas	*Alexander Parra*	
Wildebrando Mir		
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

OBSERVACIONES:	X	**RECOMENDACIONES:**		**RAZÓN DEL DESACUERDO – ALTERNATIVAS:**	

(si se considera necesario, usar hojas adicionales)

a) *En los aspectos que tienen que ver con la forma, se sugiere:*

- Revisar la tabla de contenido en donde en el capítulo 2 hay algunas inconsistencias con la nomenclatura.

- Revisar las tildes en algunas palabras.

- Revisar la bibliografía final donde aparecen algunos textos que no se visualizan en el documento y viceversa.

- Mejorar algunas de las figuras cuya resolución no es la más óptima.

b) *Sugerencias y aportes:*

- Revisar en algunas partes la redacción para que la coherencia sea mucho mejor. En algunas partes se repiten ideas que se pueden sintetizar en una sola y en otras la redacción da lugar a interpretaciones que no son las que las autoras desean plantear.

- En los objetivos mirar la acción principal que recae sobre la ecología planteada en el trabajo.

- Se podría ampliar en la justificación la argumentación que hay en la interpretación de las gráficas estadísticas con relación a las pruebas SABER.

- En el marco teórico falta realzar el papel de la TAD en el trabajo. Por ejemplo, se puede dar énfasis a los niveles de codeterminación. Justificar las razones del porqué se ponen ciertas tipos de obras matemáticas. En síntesis, hay que ampliar algunas ideas de la TAD para que el trabajo pueda ser más comprensible para el lector. En la parte histórica hay que revisar algunas ideas que no están muy bien explicadas, al igual que algunas nomenclaturas de los símbolos que pueden llegar a ser ambiguos. Revisar algunas de las caracterizaciones del concepto de volumen en física.

- ampliar el análisis de la coherencia vertical y horizontal.

- En las tareas y las soluciones que se proponen aclarar algunos enunciados que pueden llegar a causar confusión.

- En los análisis igualmente ampliar algunas ideas para que el trabajo quede más claro.

- En las conclusiones se ve coherencia con el trabajo, aunque se pueden mejorar aspectos de la redacción y se podría incluir algunos aspectos no mencionados en el análisis ecológico.

Wildebrando Miranda Vargas	*Alexander Parra*	
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

2

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar queremos agradecerle a Dios por la oportunidad de ingresar a la Universidad del Valle para realizar nuestros estudios profesionales y además por dotarnos de perseverancia y paciencia en este proceso.

Este trabajo no habría sido posible sin la influencia directa o indirecta de muchas personas a las que agradecemos profundamente por estar presentes en las distintas etapas de su elaboración, así como en el resto de nuestras vidas.

Le agradecemos al profesor Wildebrando Miranda, por su confianza, colaboración y apoyo en el proceso de realización de nuestro trabajo de grado.

A la señora Mariana Sáiz, por facilitarnos material para el desarrollo y estructuración de nuestro trabajo.

A todos los docentes de la Universidad del Valle que compartieron sus conocimientos, dentro y fuera de clase, haciendo posible que nuestra formación profesional se resuma en satisfacciones académicas e inquietudes insatisfechas en continua indagación..

A nuestros amigos y compañeros. A quienes trabajaron con nosotras hombro a hombro durante este tiempo poniendo lo mejor de su energía y empeño por el bien de nuestra formación profesional, a quienes compartieron su confianza, tiempo, y los mejores momentos que vivimos durante esta etapa como estudiantes de pregrado, dentro y fuera del campus.

Por último a nuestras familia y seres más queridos, en especial a nuestros padres y parejas por no perderse un sólo día de nuestra vida alegrándola y apoyándonos incondicionalmente.

Deysi Lorena Cano Díaz
Andrea Ruco Gómez

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

Este trabajo, se apoya en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y se plantea como un trabajo de tipo exploratorio, donde dará cuenta de la ecología que se presenta en el nivel de la Obra Matemática Propuesta (OMp) con relación a la enseñanza del volumen en una institución escolar de la ciudad de Cali.

A partir del estudio de algunos fenómenos didácticos como la atomización del proceso de enseñanza, el autismo temático, dicho análisis pondrá en evidencia las restricciones o limitaciones que desde el nivel de la OMp son atribuidas al tratamiento que se le da en la escuela a dicho objeto matemático y que en gran medida delimitará su puesta en el aula como objeto de aprendizaje. Para lo cual, se elaboró una Obra Matemática de Referencia (OMr) con el apoyo de algunos estudios teóricos al respecto y que permitió realizar el análisis como un contraste entre OMr y OMp. Se realizó una revisión a los documentos curriculares de carácter oficial, el plan de área de matemáticas y la guía escolar de grado 9° del colegio Parroquial Nuestra Señora de los Andes.

En el desarrollo de este trabajo se evidencia la ausencia en el plan de área y la guía escolar de elementos claves para abarcar la relación del concepto de volumen (desde una visión estática o dinámica), aunque cabe resaltar que en la guía escolar se presenta una posible relación del volumen de un cubo con las funciones cúbicas.

Palabras clave: Ecología, Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Volumen, autismo temático, atomización de la enseñanza, Obra Matemática (OM), Obra Matemática propuesta (OMp), Obra Matemática referenciada (OMr). Ministerio de Educación Nacional (MEN), Enunciado Matemático (Em).

INTRODUCCIÓN

Una de las principales preocupaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) son las condiciones de existencia que limitan o posibilitan la enseñanza de un concepto a nivel institucional.

En ese sentido, se encamina hacia una reflexión sobre la enseñanza del volumen. Por eso es coherente identificar la ecología respectivamente en la introducción del volumen en una institución escolar pensando en la importancia que despliegan las Obras Matemáticas Propuestas desde el currículo, y realizando entonces un contraste de estas obras con las obras matemáticas propuestas desde los documentos de ley, el plan de área de dicha institución escolar y las guías de estudio.

Pero para una mejor comprensión del principal objetivo de este proyecto, compartiremos la definición de ecología presentada por Barquero (2009):

> En lugar de plantear los problemas de enseñanza y aprendizaje en términos de qué hacer para que tal o cual noción, actividad o problemática puedan enseñarse o aprenderse mejor y, en consecuencia, investigar las dificultades que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas buscando la manera de superarlas, la TAD se pregunta cuáles son las *condiciones* que permiten, facilitan o favorecen que determinadas actividades matemáticas y didácticas puedan desarrollarse (existir, tener lugar, o "vivir") en un determinado entorno institucional (la escuela primaria, la escuela secundaria, la universidad, un entorno profesional determinado o la sociedad en general) y cuáles son las *restricciones* que dificultan, entorpecen o incluso impiden la puesta en práctica de estas actividades. (p. 6).

De esta manera se entiende la pertinencia que tiene la ecológica con este trabajo, ya que ésta permite cuestionar los modelos dominantes sobre la forma de interpretar los fenómenos didácticos. No se trata entonces de un cuestionamiento trivial, dado que la existencia de las matemáticas en la escuela obedecen a múltiples razones que en todo caso son legitimadas por la misma sociedad, y pretender que su permanencia en el tiempo pueda ser eterna, además de ingenuo, resulta carente de todo rigor profesional y significaría renunciar a construir la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

Ahora bien, para poder explicitar la ecología en la institución escolar, se hace fundamental tener en cuenta las obras matemáticas que se proponen para la enseñanza, puesto que de ellas surgen los diferentes cuestionamientos, tareas, técnicas, etc., que hacen parte de la base para introducir el concepto de volumen en la escuela.

En ese sentido, este trabajo se articuló en 5 capítulos, permitiéndonos una mejor comprensión de la ecología identificada:

En el primer capítulo, se presentan algunos trabajos referenciados como antecedentes, a nivel local e internacional que abordan las distintas perspectivas de la enseñanza del volumen, también se presentan el planteamiento del problema, el objetivo general y especifico, en los cuales se basa este trabajo y por último la justificación que esboza la importancia de este tipo de trabajos.

En el segundo capítulo, se abordan elementos teóricos desde la TAD en donde se identifican fenómenos de la enseñanza como el autismo escolar y la atomización del proceso de enseñanza (Gascón, 1998), se plantea el concepto OM y la importancia de esta en nuestro estudio, se muestra el análisis de la coherencia vertical y horizontal para el concepto de volumen, se plantea la OMr basados en la idea de que el volumen se puede ver desde una postura estática o una dinámica, para la construcción de esta se retoma la propuesta de García & Calvo (2007) y Sáiz (2002) a través de la historia del cálculo y la geometría y se muestra los niveles de codeterminación, enfocándonos en el primer nivel conformado por la sociedad y la escuela.

En el tercer capítulo se explicita la metodología del trabajo, que presenta tres fases, en la primera se amplia y refina el marco teórico, se explicitan los referentes empíricos (documentos curriculares, plan de área y guía escolar), en la segunda, dirigida a la construcción de la OMr y por último la tercera está relacionada en el análisis del contraste de la OMr y la OMp. Además de una caracterización de la institución.

En el capítulo cuatro, se presenta el análisis realizado al plan de área de matemáticas y la guía escolar usada en la institución; este análisis se realiza teniendo en cuenta los referentes teóricos del capítulo dos y la problemática planteada en el capítulo uno con el fin de hacer explícita la ecología sugerida en dichos referentes con relación al volumen.

Por último, en el capítulo cinco, se encuentran las conclusiones que responden a nuestra hipótesis de trabajo y la bibliografía utilizada. Además se anexan imágenes de la guía de texto del grado 9° y 5º.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA
OBJETIVO GENERAL
OBJETIVO ESPECÍFICO
JUSTIFICACIÓN

1.1 ANTECEDENTES

En la investigación, encontramos varios trabajos que nos hablan de la construcción del concepto de volumen, sin embargo, pocos de ellos se han trabajado desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Desde esta perspectiva, algunos trabajos han desarrollado el concepto de función, proporcionalidad, divisibilidad, números enteros, entre otros. Igualmente se resalta que no todos los trabajos se enmarcan desde el estudio de un concepto matemático como tal. También existen trabajos que se centran en el análisis de procesos o fenómenos didácticos muy puntuales como es el caso del proceso de algebrización de las matemáticas escolares, o el papel de la modelización en las matemáticas universitarias. Lo cual es importante pues permite ver la problemática más allá de una mera explicitación de las dificultades de enseñanza-aprendizaje en una institución escolar. De la literatura revisada, muchas de las investigaciones realizadas están diseñadas bajo un modelo más teórico sobre el concepto de volumen, donde algunos autores asumen el rol de identificar cuáles son los problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

De esta manera, los trabajos referenciados como antecedentes, la mayoría, desde el pensamiento métrico, son demostrativos más que todo por el énfasis puesto en la enseñanza del concepto de volumen o por el tratamiento matemático que se le da.

A nivel local, referenciamos algunos de esos trabajos realizados en el Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle, los cuales se titulan:

- La medida de sólidos en los libros XI y XII de los Elementos de Euclides (García & Calvo, 2007)
- Aportes a la construcción de la noción de estimación a partir de la matemática de los albañiles (Rey & Narváez, 2010).

En el trabajo de García & Calvo (2007), en la línea de historia de las Matemáticas del Área de Educación Matemática, se analizó la noción de volumen; tema que en su versión primigenia aparece en los *Elementos* de Euclides en relación con la medida relativa de sólidos. Todo esto debido a que generalmente en el bachillerato no se le da la importancia como tal al concepto de volumen, sino que solo se remite a la memorización de fórmulas. Este documento reporta que:

> …A través de la historia se pueden evidenciar algunas dificultades implícitas en la instauración de una teoría de la medida para figuras de tres dimensiones, en contraposición con la manera algorítmica y mecánica en la cual aparecen en los textos escolares. (García & Calvo, 2007, p.9).

Este trabajo muestra la construcción matemática del concepto de volumen a través de los libros XI y XII de Euclides, que en nuestro caso aportará elementos para construir la OMr dado que en dicho estudio pueden rastrearse algunos modelos que logran circundar en la enseñanza del concepto de volumen.

La tesis elaborada por Rey & Narváez (2010), es un trabajo de investigación de carácter etnomatemático, el cual tiene como propósito brindar una situación problema que contribuya a la construcción de la noción de estimación de longitudes por parte de estudiantes de grado 6º y 7º, tomando como base los elementos obtenidos de un trabajo de campo realizado. Esta es una observación de los procesos matemáticos y entrevistas a albañiles de un bajo grado de escolaridad. La situación propuesta en este trabajo nos resulta útil a la hora de examinar la ecología institucional (en este caso el universo de los albañiles) en la construcción del concepto de volumen, que en gran medida delimita la puesta en escena de las actividades propuestas. En este trabajo no se cuestiona el modelo institucional sobre el que reposa el concepto (Volumen) por lo que nuestro trabajo intenta avanzar en la caracterización de una obra matemática en dicha dirección.

A nivel nacional e internacional, los trabajos de investigación referenciados son:

- Red conceptual para el concepto volumen (Sáiz, 2002)
- Transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del volumen (Sáiz, 2005)
- El volumen ¿ Por dónde empezar? (Sáiz, 2007)

- Sistema métrico en el desarrollo del pensamiento matemático (Latorre, 2009)

En el trabajo de Sáiz (2002), se aborda una *red conceptual sobre el concepto volumen* donde se afirma que: "*Desde esta perspectiva la red se convierte en una herramienta de apoyo didáctico si se busca enriquecer el campo semántico personal de los alumnos en relación con el concepto volumen*" (p.145).

En este artículo se presentan algunos ejemplos de situaciones cotidianas, donde se plantean problemas relacionados con el volumen, en los cuales se observa que las situaciones presentadas son de dos tipos: comparaciones y mediciones; relacionadas con los acercamientos cualitativos y los acercamientos cuantitativos respectivamente. Los acercamientos cualitativos pueden realizarse por medio de tres tipos de procesos: estimación, comparación directa e indirecta; en los acercamientos cuantitativos se requiere fijar una unidad de medida, observando así el volumen como un número.

Entre lo planteado por los acercamientos y los diferentes modelos presentados de actividades posibles, se promueve la distinción entre forma y volumen por parte de los estudiantes, dado que existe una tendencia en ellos al no reconocer que sí hay cierta cantidad de volumen en una vasija y lo traslado a otra que tiene forma distinta, el volumen sigue siendo el mismo.

En el (2005) Sáiz, después de haber presentado los diferentes acercamientos mediante los cuales se pueden presentar problemas relacionados con el concepto volumen, la autora se centra en mostrar a los docentes las diferentes concepciones que existen sobre el volumen, exhibiendo además algunas de las dificultades que se presentan en su enseñanza.

En síntesis de los trabajos de Sáiz (2002-2007), la autora subraya que con sus proyectos ha querido exponer:

- La diversidad y complejidad del objeto mental volumen.
- Que es importante tener en cuenta una red de definiciones y significados del volumen y que es fundamental enriquecerlo.

- Un modelo de enseñanza del volumen en la escuela primaria.
- Las dificultades que existen al momento de enseñar el concepto de volumen, especialmente cuando no hay una claridad conceptual por parte de los profesores al momento de transmitirlo a sus estudiantes.

De esta manera la autora muestra la complejidad en la enseñanza de dicho concepto, las dificultades cognitivas que se han logrado detectar en los niños con respecto al concepto y los modelos de enseñanza que se proponen por los expertos.

Para este trabajo, el aporte más importante de Sáiz está fundamentado en la manifestación de la diversidad de definiciones y significados del objeto matemático estudiado. Ya que permite tener claridad conceptual de la noción a trabajar.

En Latorre (2009) se aborda el aprendizaje de las matemáticas a través del pensamiento métrico; en la investigación, se desarrollan 3 estructuras: **la estructura de clase** en el sistema métrico, entendiendo como clase, el conjunto de objetos que cumplen con una serie de normas y condiciones, donde los objetos métricos de conocimiento son las magnitudes y unidades de medida, también está **la estructura operativa**, en que las operaciones hacen referencia a medir y a conservar cantidades continuas y discretas, y por último **la estructura relacional**, en la cual las relaciones métricas se refieren a orden, equivalencia, proposición y variaciones relativas. Es decir, que dentro de una clase de matemáticas, cualquiera que sea la noción que se esté enseñando, se deben establecer relaciones con las demás unidades métricas; por ejemplo, muchos estudiantes consideran que 1000 litros es más que 1 metro cúbico, donde se manifiesta una comparación absoluta entre las cantidades numéricas ignorando las unidades de medida y sus equivalencias.

Por esta razón, en este trabajo la OMr está fundamentada en la historia y epistemología del concepto, y también de algunos aspectos didácticos.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

A través de algunas investigaciones como la realizada por diferentes autores (Latorre, 2009; Rey & Narváez, 2010; García & Calvo, 2007; Sáiz, 2002, 2007) se manifiesta que existen dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto matemático volumen, debido a que no se tienen claras las relaciones que se pueden establecer entre: perímetro-área-volumen, volumen-capacidad, volumen-masa y volumen-peso; considerando así que el concepto puede ser visto en diferentes áreas (física, biología, química, lenguaje, matemáticas, etc.) como estático, donde el objeto no está sometido a cambios, en el sentido de las propiedades que pueden experimentar cuando se realiza una u otra transformación.

Además, en muchas ocasiones tanto docentes como estudiantes lo ven simplemente como un valor numérico y no como una variación, es decir, como algo estático del cual solamente se puede obtener una cuantía numérica constante. Este hecho según Sáiz (2005), en diferentes momentos es generado por los mismos docentes dentro del aula de clase, por no establecer adecuadamente las relaciones mencionadas anteriormente, aunque pensamos que las causas también puede rastrearse en la misma historia de las matemáticas.

En este sentido, este trabajo explicita las condiciones institucionales que permiten o no trabajar dicho objeto en la institución escolar. Para ello se analiza cuáles son las características ecológicas que limitan o posibilitan el desarrollo de la OMp. Con base en lo anterior se planteó el siguiente interrogante:

¿Cuál es la ecología que se presenta en las obras matemáticas propuestas en una institución escolar con respecto a la introducción del concepto de volumen?

Con este proyecto se busca analizar los diferentes fenómenos didácticos relativamente universales que se presentan en una institución escolar, como lo son: la atomización del proceso de enseñanza y la reducción del significado del concepto matemático volumen a aspectos estáticos alejados de una noción de cambio que caracteriza el desarrollo de las matemáticas actuales en nuestra sociedad.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo general

- Identificar la ecología de las Obras Matemáticas Propuestas (OMp) que se presente en una institución escolar de Educación Básica Secundaria con relación a la introducción del concepto de volumen.

1.3.2 Objetivos específicos

- Explicitar una Obra Matemática de referencia (OMr) que modela el conocimiento a ser enseñado sobre el concepto matemático de volumen.

- Describir y analizar la OM propuesta (OMp) presente en los referentes curriculares, plan de área y guías de estudio de una institución escolar.

- Contrastar la OMr con la OMp del concepto de volumen.

1.4 JUSTIFICACIÓN

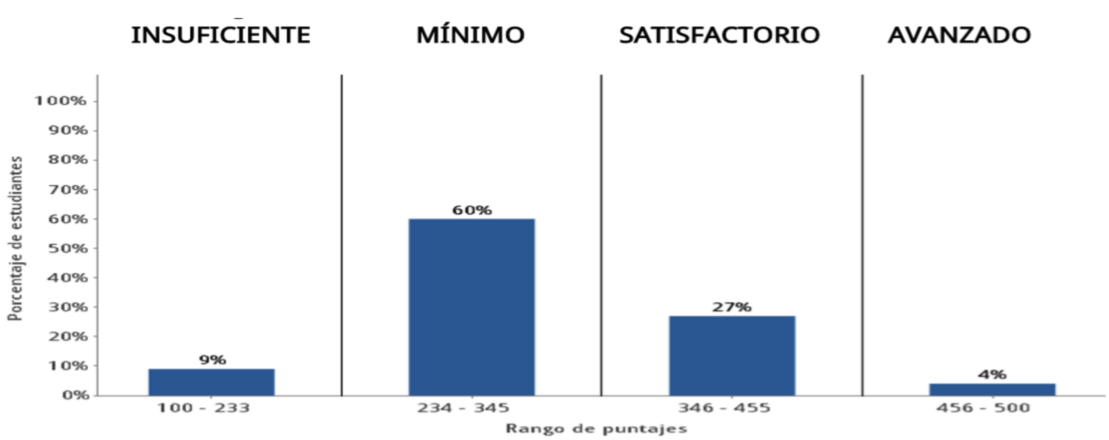
Son muchas las razones que permiten ver la importancia de este trabajo. Entre ellas se encuentran las que se relacionan con el saber matemático que se da en las instituciones escolares, el cual a partir de la TAD debe estar centrado en la parte de análisis didáctico y la reflexión sobre los diferentes fenómenos didácticos que permiten el desarrollo del concepto aquí trabajado, pasando por aquellas razones que llevan a un replanteamiento del currículo, donde realmente el concepto de volumen solo se ve como una relación trivial entre magnitudes numéricas.

Se hace un aporte para la reflexión de las diferentes problemáticas referente a las representaciones y las funciones cubicas relacionadas con el concepto volumen desde la

TAD, no porque sea la única forma de enseñar o aprender el concepto, sino porque se considera que es necesario identificar y analizar las condiciones o fenómenos que limiten o posibiliten la emergencia del concepto matemático, además es importante analizar el sentido que tienen las OM que se indican realizar desde el currículo propuesto para la institución escolar, debido a que cuando se plantean estas obras matemáticas, no se cuestiona sí los elementos que conforman la obra propuesta son los más indicados para el proceso de enseñanza del volumen y no se toman en consideración los complejos procesos de transposición didáctica; así pues el análisis de las "*obras matemáticas*" propuestas por el currículo es de gran importancia, debido a que por medio de estas se brindan unas pautas para la enseñanza de las matemáticas en el seno de una institución, las cuales permitirán hacer un análisis del trabajo que se realizar de manera integrada en la escuela, encontrando las razones de ser y el sentido de lo que se enseña.

Existe además una preocupación de nuestra parte sobre por qué los estudiantes de 9° se les dificulta dominar el concepto matemático de volumen, siendo que este aparece en los planes de estudio de la Institución Escolar Arquidiocesana seleccionada, desde 2° de primaria hasta 9° grado de secundaria (NOVENO), de una manera continua. Esto se ve reflejado en las pruebas externas (ICFES, 2013) realizadas a las instituciones escolares.

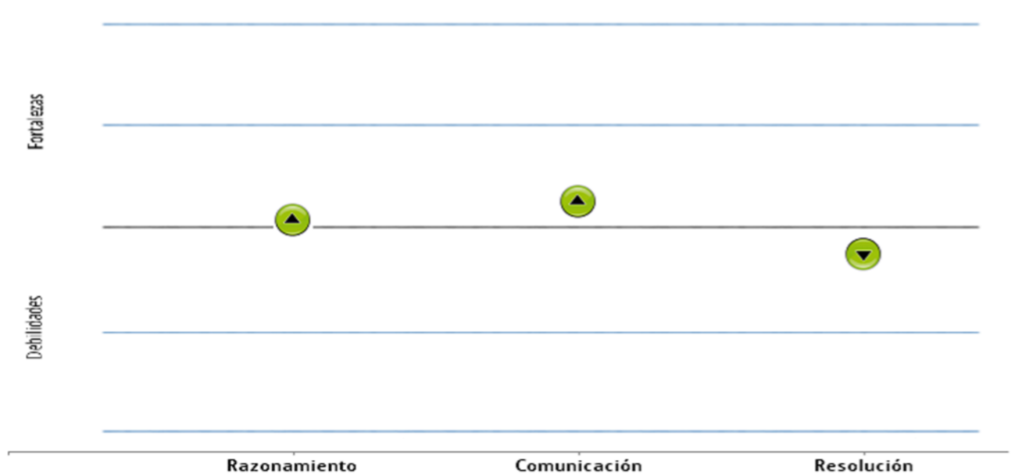
En la siguiente figura se muestra una distribución porcentual de los niveles de desempeño de los estudiantes de grado noveno del Colegio Parroquial Nuestra Señora de los Andes (ICFES, 2013).



Gráfica 1. Distribución porcentual de los estudiantes según niveles de desempeño en matemáticas, noveno grado (ICFES, 2013).

Podemos observar que un 69% presentan un nivel de desempeño mínimo e insuficiente en el área de matemáticas, un 27% en satisfactorio y 4% en avanzado, mostrando así que más de la mitad de los estudiantes poseen dificultades en la compresión para el desarrollo de estas pruebas.

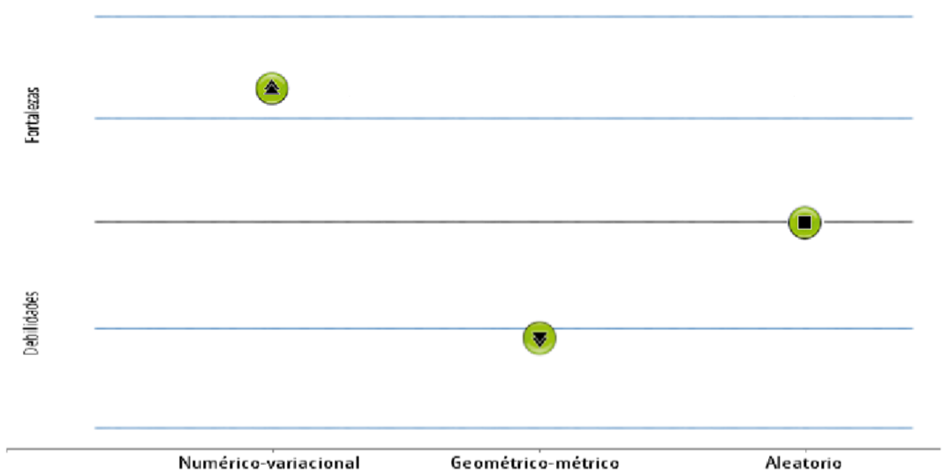
Al profundizar en las competencias y componentes que evalúa la prueba se pueden evidenciar con mayor razón las debilidades y fortalezas en dichos componentes:



Gráfica 2. Fortalezas y debilidades evaluadas en las Competencias Matemáticas del grado noveno (ICFES, 2013)

En la gráfica 2 se evidencia, que los estudiantes presentan fortaleza en Razonamiento y argumentación, la comunicación, representación y modelación, pero tienen falencias en el planteamiento y resolución de problemas.

De igual manera en los componentes matemáticos se observa que los estudiantes son muy fuertes en el componente Numérico-variacional, muy débiles en el componente Geométrico-métrico, y estables en el componente Aleatorio.



Gráfica 3. Fortalezas y debilidades evaluadas en los Componentes Matemáticos del grado noveno (ICFES, 2013)

Al analizar en conjunto los trabajos, resulta problemático que el concepto de volumen que se adscribe al componente Geométrico-métrico presente una tendencia hacia bajos desempeños.

Finalmente, vemos la importancia de este trabajo desde la misma naturaleza de los desarrollos de la TAD. Desde hace algún tiempo, se han realizado en el IEP trabajos con esta mirada. La idea general es que al verlos en conjunto se puedan soportar algunas consecuencias fuertes para el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, se busca encontrar o refutar las pistas que conducen a pensar en la hipótesis sobre la enajenación de los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas en nuestras instituciones escolares (en nuestro caso con el concepto de volumen), en gran parte por la forma en que la ecología restringe una evolución tranquila, rigurosa y útil de las matemáticas que la misma sociedad ha legitimado como forma de estudio en la escuela.

A partir de estas razones se ve la necesidad de indagar sobre la introducción del concepto matemático volumen en la institución escolar, pues esto nos permitiría ver la forma en cómo emerge el concepto y la ecología que la soporta.

CAPÍTULO 2

APROXIMACIÓN TEÓRICA

APROXIMACIÓN TEÓRICA

En este apartado se presentan los elementos teóricos en los cuales se fundamenta la construcción de este trabajo, los cuales, hacen referencia a lo que se plantea en el proceso de enseñanza del concepto matemático volumen en una institución escolar como se muestra a continuación:

- Desde la TAD. Se toman fenómenos de la enseñanza de las matemáticas como lo son: el autismo temático y la atomización del proceso de la enseñanza, que servirán para un análisis posterior del currículo propuesto, pues se precisa en lo que deben permitir las tareas, las cuales deben estar presentes en la construcción de un concepto matemático.
- Perspectiva curricular. Que incluirá una descripción y análisis de los referentes curriculares desde el Ministerio de Educación Nacional (MEN).
- Perspectiva histórico-epistemológica del concepto de volumen: Desarrollada partir de una visión estática o dinámica del concepto trabajado, permitiendo analizar algunas de las etapas históricas como lo son: antes de Newton y Leibniz, después de Newton y Leibniz, el problema de Hilbert, el concepto de volumen en las matemáticas de la actualidad y el concepto de volumen en física.

En este orden, se nombrarán los elementos teóricos, para el análisis de las diferentes OMp desde el currículo en una institución escolar.

2.1 Una mirada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

Se abordan algunos elementos teóricos desde la TAD que nos permiten examinar los datos experimentales que proyecta el análisis de la ecología en la OMp.

La TAD asume un punto de vista científico de los fenómenos didácticos y plantea la necesidad de disponer de modelos para explicar la actividad matemática en contextos institucionales, donde la escuela, la sociedad, la comunidad de educadores matemáticos, entre otros, funcionan como ejemplificaciones del concepto de institución. En la TAD se señalan algunos de esos fenómenos en la enseñanza de las matemáticas que deberán explicarse. Se desea una comprensión cada vez más profunda del papel que juegan las matemáticas en el mundo actual. Algunos de dichos fenómenos son: La desalgebrización del currículo en la secundaria, la irresponsabilidad matemática de los alumnos, la atomización del proceso de enseñanza de las matemáticas, la aritmetización del álgebra escolar, la algebrización del cálculo diferencial escolar, el autismo temático, la enfermedad didáctica, entre otros, de los cuales nos centraremos en 2 de ellos: la atomización del proceso de enseñanza de las matemáticas y el autismo temático, en gran parte porque tal como se mencionó en la justificación, consideramos que además de estar relacionados, podrían dar pistas sobre la enajenación que sufren nuestros actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas materializados en unos planes de estudio rígidos y ausentes en gran parte de problemáticas que trasciendan la mera temática propuesta para ser abordada en el aula.

Recalcamos, que esto último es una conjetura que se viene explorando desde otros trabajos en el IEP y que en un tiempo futuro se podrá reafirmar o rechazar tal cuestionamiento.

- La “atomización del proceso de enseñanza”, hace referencia a que en la escuela los contenidos matemáticos de enseñanza son segmentados a veces sin conexión alguna entre los diferentes niveles educativos (1° a 11°), dando cabida a fenómenos didácticos, que van desde el aislamiento que presentan las cuestiones y problemas matemáticos que se plantean, hasta la desconexión entre los diferentes temas que se estudian en la matemática “escolar” (Bastán. Buffarini. Licera. Rosso, (2008)) de tal forma que las actividades tienden a verse de una forma independiente y así no perder los objetivos a corto, mediano y largo plazo.

- El segundo fenómeno es el “autismo temático”, está relacionado con el anterior y que podemos simplificar como una especie de encierro en los temas, de tal manera que la consecuencia más inmediata es el olvido de las razones de aprender determinado objeto matemático; de esta manera los estudiantes no tienen acceso a la importancia de establecer conexiones entre lo que se aprende y el porqué de lo que se aprende (Gascón, 1998).

2.2 Concepto de Obra Matemática (OM)

El concepto de OM representa uno de los conceptos más importantes en este proyecto. La TAD afirma que toda actividad matemática se puede ver como la construcción de una obra (en el sentido material del término) donde se ponen en juego no solo tareas a las que hay que dar respuesta sino que hay elementos que justifican la elección de técnicas para resolver dichas tareas. Ese doble juego en la actividad matemática hace parte de una dialéctica que se va complejizando a medida que se profundiza en el estudio de una cuestión:

> … Las obras matemáticas son así el resultado final de una actividad matemática que, como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la práctica matemática que consta de tareas (materializadas en tipos de problemas) y técnicas útiles para llevar a cabo dichas tareas, y el discurso razonado sobre dicha práctica que está constituido por dos, el de las tecnologías y el de las teorías… (Gascón, 1998, p.13).

Es decir que en las OM es posible distinguir dos aspectos inseparables que son la praxis y el logos:

- Praxis denominado como el "saber hacer", que enfatiza en un cierto tipo o tipos de tarea(s), además de las técnicas utilizadas para resolverlos.
- Logos o el "saber", muestra los discursos inducidos sobre la práctica realizada.

Desde la TAD se presenta un esquema, donde se muestra la estructura propuesta para el concepto de OM.

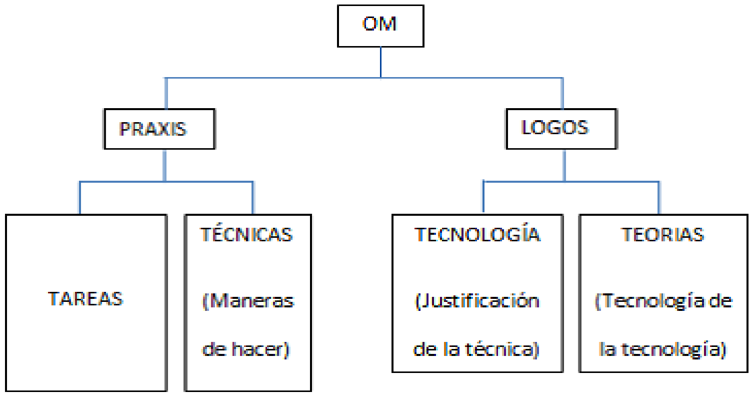


Figura 1. Estructura de la obra matemática

La tarea, se denomina como una acción en un determinado tiempo. Pero dentro de la TAD, la tarea empleada es evidentemente más amplia, se trata de una puesta en práctica, es decir a cuestiones o problemas a los que hay que dar respuesta.

La Técnica se define como una manera de hacer, es decir, un saber hacer un determinado tipo de tarea. Estas están asociadas o responden a un tipo de tareas y hacen su aparición demostrando que están allí con una determinada forma, pues al exponerla, ésta debe ser comprensible y justificada, de manera que al aplicarla tenga validez y su discurso argumente aquellas cuestiones que dan origen a los tipos de problemas. (Gascón, 1998). Pero una técnica puede ser superior a otra, no son estáticas, y pueden existir diferentes técnicas para una tarea.

Luego se tiene la Tecnología, que es el discurso interpretativo y justificativo de la técnica, así como de su ámbito de aplicabilidad o validez.

> Según (Chevallard, 1999) Se entiende por tecnología, y se indica generalmente por θ, un discurso racional –el logos- sobre la técnica -la tekhnê- ô, discurso cuyo primer objetivo es justificar "racionalmente" la técnica ô, para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo T, es decir, realizar lo que se pretende.

Finalmente tenemos la teoría es un discurso especializado, que contiene afirmaciones, definiciones y teoremas, para justificar, explicar e interpretar la tecnología.

Estos elementos están relacionados entre sí, de tal manera que para el desarrollo de un tipo de tarea se requiere de ciertas técnicas, que son sustentadas bajo algunas tecnologías.

Se dice igualmente que aunque normalmente las teorías suelen etiquetarse bajo un nombre (teoría de las proporciones, teoría de grupos, teoría de las funciones, etc.) no es dicha etiqueta lo que caracteriza la Teoría. Es todo el discurso justificativo y demostrativo alrededor de la tecnología que hace comprensible y convincente los enunciados en la obra matemática que se está estudiando.

Del mismo modo es importante mencionar que existen OM que se hacen explícitas en las instituciones de acuerdo a sus características. La noción de praxeología aparece así como una noción genérica cuyo estudio conviene profundizar sobre todo mediante el estudio empírico y el análisis de los datos de observación recogidos. (Chevallard, 1999).

A continuación se enuncia una tipología de las OM que permiten mostrar la pertinencia de los análisis didácticos desde la TAD. Dichas praxeologías (puntual, local, regional y global) tienen el objetivo de tener herramientas para analizar de manera correlacionada los fenómenos didácticos en ámbitos institucionales (Gascón & Bosch, 2009).

> …Las obras matemáticas cuyas praxeología son puntuales hacen referencia a una manera de hacer determinada tarea usando un pequeño conjunto de técnicas para solucionarlas. Cuando los temas que estructuran la enseñanza se articulan en torno a un discurso tecnológico común, habla de una praxeología local. Y por último si las praxeología locales se estructuran en base a una teoría conforman praxeología regionales… (Gascón & Bosch, 2009, p. 92).

Y finalmente, se entiende por praxeología global, la agrupación de praxeología regionales desde la integración de varias teorías.

Se debe mencionar que las praxeología no son únicas en las instituciones, es decir, son relativas a la institución de referencia (Gascón & Bosch, 2009). Una tecnología que funciona como elemento justificador en la institución escolar puede funcionar en la institución universitaria como técnica que hay que justificar. Por ejemplo: el teorema según el cual el valor absoluto de un número real se puede expresar como $|a| = \sqrt{a}^2$, funciona como una definición en la institución escolar, pero en la institución de la matemática y en la universitaria es un teorema que se debe demostrar.

2.3 Los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas ¿Restringen o Facilitan?

La formulación de los Lineamientos y los Estándares se hizo para superar las visiones tradicionales que privilegiaban la simple transmisión y memorización de contenidos, en favor de una pedagogía que permita a los y las estudiantes comprender los conocimientos y utilizarlos efectivamente dentro y fuera de la escuela, de acuerdo con las exigencias de los distintos contextos. (MEN, 2006)

Ahora, la temática para la Educación Matemática en Colombia está guiada por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y por los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), con base en ello, lo que se busca en este trabajo es, sí los Lineamientos y Estándares Curriculares limitan o posibilitan la emergencia del concepto matemático volumen.

Debido al énfasis puesto en el currículo Colombiano sobre la noción de competencia, surge un gran interrogante, qué significa la expresión *ser matemáticamente competente*. Esta noción ampliada de competencia está relacionada con el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo (MEN, 2006). De tal manera que se hace forzoso analizar el currículo obligatorio que se propone en el sistema educativo, es decir, mirar de qué se componen las obras matemáticas seleccionadas asociadas al acto de enseñar un tema en específico, en este caso en el concepto matemático volumen. La visión ampliada del término competencia desde el punto de vista de las matemáticas, remite a examinar la estructura curricular que presentan dichos documentos que se basan en la idea de ejes Conocimientos Básicos, Procesos y Contextos.

Los procesos que se tienen en cuenta son: La formulación, tratamiento y resolución de problemas, la modelación, la comunicación, el razonamiento, la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, en los cuales se muestra la variedad y la riqueza de este concepto para la organización de currículos centrados en el tratamiento de las competencias matemáticas de tal forma que estas involucren los diferentes procesos generales enunciados anteriormente.

En los Lineamientos se proyecta la necesidad de una combinación gradual entre distintos conceptos, procesos y contextos. En esta Ecología, la actividad matemática se toma como un centro de reflexión y por lo tanto se exige que dichas actividades puedan mirarse de manera integrada.

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), presentan dos formas de organización (coherencia horizontal y coherencia vertical), que permiten tener un mejor aprovechamiento de los contenidos temáticos que han sido planteados para la educación de modo preventivo, para que no existan saltos que paralicen la comprensión total de dichos contenidos.

Para efectos de este informe, se esboza una herramienta para el análisis de la coherencia vertical y horizontal de los Estándares Básicos de Competencias de los grados 8° y 9°, que es donde se amplifica este concepto de manera formal en muchas de las instituciones escolares en Colombia.

Grados de escolaridad	Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas
1° a 3°	Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa) y, en los eventos, su duración.
4°a 5°	Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).
6° a 7°	Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.
8° a 9°	Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados. Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
10° a 11°	Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.

Tabla 1. Herramienta para el análisis de la Coherencia Vertical entre los Estándares con relación al volumen. (MEN 2006)

Esta tabla esboza el conjunto de grados haciendo énfasis en el Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas, pasando de reconocer, diferenciar, ordenar, calcular, seleccionar, identificar relaciones, usar técnicas, construir y analizar relaciones, generalizarlas y diseñar estrategias para medir y calcular el volumen. Esto no es otra cosa que el denominado fenómeno de aritmetización del álgebra escolar, en donde a manera de ejemplo, el volumen**No se encuentran elementos de tabla de ilustraciones.** aparecería simplemente como el resultado de una medida muy concreta. La propiedad que más se remite es la medida y el cálculo de este concepto desde el grado 1° de primaria hasta 11° de secundaria, sin hacer una distinción clara de la relación que se podría establecer entre el volumen y capacidad, masa, peso y algunas expresiones algebraicas aunque se menciona para los grados 4° y 5° como propiedad o atributo para diferenciar y ordenar.

Ahora en el planteamiento de la coherencia vertical del MEN (2006), sitúa que en los currículos se establezcan las diferentes relaciones que existen entre los conocimientos, procesos y contextos, sin embargo carece de modelos puntuales de cómo y cuándo hacerlo o por lo menos instaure una posible orientación de cuáles pueden ser aquellas obras matemáticas en las que hay que prestar mayor atención.

En la siguiente tabla se presenta una herramienta para el análisis de la coherencia horizontal, permitiendo verificar si hay correlación del concepto de volumen entre los pensamientos.

Grados de escolaridad	Pensamiento Numérico y Sistemas numéricos	Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos	Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas	Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos	Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos
8° y 9°	Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes	Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).	Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos. Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.	Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones.	Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

Tabla 2. Herramienta para el análisis de la Coherencia horizontal entre los Estándares con relación al volumen. (MEN, 2006)

La tabla anterior muestra que el pensamiento métrico es el eje central que hace referencia a los procedimientos de cálculo válidos para encontrar el volumen de un sólido, articulándose con otros pensamientos y con los estándares mencionados en el pensamiento variacional, en tanto se puede ver el uso de las expresiones algebraicas que se alcanzan a relacionarse con propiedades gráficas y con el pensamiento aleatorio, dado que este sistema permite ver los problemas en diferentes sistemas de representación y el espacial permite verlo haciendo uso de la geometría para objetos tridimensionales. De igual manera los sistemas de medidas se vinculan de manera directa con el pensamiento numérico dado que este sistema permite no solo expresar en notación científica las cantidades de diferentes magnitudes, sino también hacer uso de ellas en nuestra vida cotidiana, por ejemplo, si no tuviéramos herramientas para tomar la medida de objetos y/o lugares y necesitáramos tomar la medida del largo de una pared en cuartas e inicialmente lo hacemos con la cuarta de un niño y luego con la de un adulto obviamente no coincidirán.

Con la coherencia horizontal se muestra la relación entre los diferentes pensamientos, partiendo del estándar que hace referencia a los sistemas de medidas en general, ya que no se explicitan o manifiestan estándares para un sistema numérico en particular.

2.4 Hacia la construcción de una Obra Matemática de Referencia (OMr)

En este apartado, se esbozan algunas reflexiones de tipo epistemológico y algunos elementos teóricos que intentan sustentar la idea de que el volumen se puede ver desde dos posturas.

La primera, dirigida hacia una visión del volumen desde un punto de vista estático que asume este concepto como el resultado de la aplicación de un algoritmo muy puntual materializado normalmente en fórmulas, como se muestra en las tablas 3 y 4 (para cuerpos geométricos y poliedros regulares), el uso de integrales y derivadas como procedimientos mecánicos, el trabajo en dos dimensiones R^2 dejando a un lado R^3 Y R^n y el cálculo de magnitudes físicas como medio de enseñanza para este concepto.

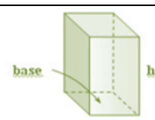
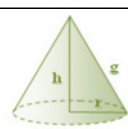
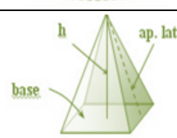
Figura	Esquema	Volumen
Cubo		$V = a^3$
Prisma		$V = \acute{a}rea\ base \times h$
Cilindro		$V = \pi r^2 \times h$
Esfera		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono		$V = \pi \frac{r^2 \times h}{3}$
Pirámide		$V = \frac{\acute{a}rea\ base \times h}{3}$

Tabla 3. Fórmulas de Volúmenes de Cuerpos Geométricos.

Figura	Esquema	Volumen
Tetraedro		$V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Octaedro		$V = 2\sqrt{3}a^2$
Hexaedro		$V = a^3$
Dodecaedro		$V = \dfrac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$
Icosaedro		$V = \dfrac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3$

Tabla 4. Fórmulas de Volúmenes de Poliedros.

La segunda, desde un punto de vista que podría llamarse "Dinámico" que asume el concepto de volumen como un proceso en constante cambio, donde las fórmulas no son estáticas sino que adquieren un carácter funcional (es decir, relacionado con el concepto de función cubica) donde las variables independientes y dependientes explicitan el movimiento a medida que se manipulan sus valores numéricos y los parámetros, la definición del volumen por medio de la axiomática y el límite, establecer relaciones para calcular el volumen de objetos tridimensionales mediante el uso de cuerpos geométricos y poliedros conocidos y el fortalecimiento y enriquecimiento de las definiciones y relaciones del volumen con la física.

Para ello se retoma la propuesta de García & Calvo (2007), Sáiz (2002) para la construcción de una OMr que explica algunos de los elementos que convendrían ser parte de la enseñanza del volumen y los elementos que permiten construir o relacionar el volumen con otros conceptos como capacidad, masa y el peso.

Dentro del currículo se deben estipular las obras matemáticas que aprueben forjar o crear dichas construcciones de tipo epistemológico para descubrir la razón de ser de estos objetos y el porqué de la necesidad de estudiar el concepto de volumen relacionado con otros conceptos.

Ahora, para abordar esta obra partiremos de la cuestión generatriz (Q_0) que planteamos así: *¿Qué elementos teóricos y tecnológicos permiten abarcar todos los significados de volumen en un ambiente institucional?* Consecuentemente, sabemos que Q_0 no puede ser abordada completamente si no se discriminan las sub-cuestiones de Q_0 que permitirán exponer un nivel de cuestiones más concretas que puedan explicar la emergencia del volumen con relación a las funciones cubicas.

Para abordar estas sub-cuestiones netamente formales que componen la estructura del concepto de volumen, se hace necesario describir algunas de ellas que permita hacer una construcción más apropiada para el concepto. Existen algunos interrogantes que se deben plantear para abordar el volumen de una manera más completa y rigurosa, esas preguntas se mencionan a continuación:

$Q_{1:}$ ¿Qué papel desempeña la construcción del concepto de volumen a través de la historia y cuál puede ser su aporte a la construcción de una OMr?

Q_2: ¿Se enseña el concepto de volumen relacionado con capacidad, masa y peso?

Q_3: ¿Se establecen relaciones entre el concepto de volumen, las funciones cúbicas y los objetos tridimensionales?

Según la TAD, para responder este tipo de cuestiones se necesita de modelos que puedan explicar las tendencias o las ideas dominantes en las matemáticas propuestas no solo como objeto de enseñanza sino como objeto de estudio en sí misma para dar respuesta a preguntas de las que inicialmente no se dispone de una contestación inmediata.

En la construcción de la OMr, será el examen que desde algunos referentes históricos y de actualidad permitan poner en evidencia los modelos en la construcción del concepto de volumen y que por ahora hemos sintetizado en dos miradas: Estática y Dinámica.

Las propiedades que se mencionan a continuación y que relacionan al volumen dentro del cálculo, la geometría y la física no se pueden describir en un plano solo aritmético.

En la revisión y análisis de documentos (*El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto matemático volumen y su enseñanza*. (Sáiz, 2005); *El volumen ¿Por dónde empezar*. (Sáiz, 2007), entre otros) donde encontramos que el concepto de volumen se puede rastrear desde dos fuentes una es a través de la historia del cálculo y la otra en el desarrollo de la geometría, aunque en algunas ocasiones estas dos se entrelacen.

A continuación se mencionan algunos ciclos históricos y las relaciones que se pueden establecer, en la construcción de este concepto y al final se presenta una tabla comparativa de la visión estática y dinámica del volumen en cada uno de esos periodos.

- Antes de Newton y Leibniz.
- Después de Newton y Leibniz.
- El problema de Hilbert.
- El concepto de volumen en las matemáticas hasta el (2002).
- El concepto de volumen en física.

➢ Antes de Newton y Leibniz

Se puede decir que el cálculo se desarrolló en el siglo XVII d.C. Pero cabe aclarar que los problemas que dieron origen al concepto de volumen, surgieron 18 siglos antes de nuestra era en el campo de la geometría.

> …aquella época, las matemáticas que hoy se conocen son las que se conservan en las tablas babilónicas y los papiros egipcios. Respecto al volumen, en las primeras se encuentran varios problemas prácticos en los que se requiere calcular el volumen de sólidos geométricos sencillos. En cuanto a los egipcios, la fórmula para obtener el volumen de una pirámide truncada aparece en el papiro de Moscú (1890 a.C.) y el cálculo del volumen de un cilindro como el producto del área de la base por la altura se encuentra en el papiro de Rhind (Gillings, 1982, pág. 146).

Los historiadores coinciden en que los conocimientos geométricos de los babilónicos y egipcios constan de ser problemas ligados a la vida real, tales como calcular el volumen de sólidos o pirámides, para la construcción de estos.

Ahora, para la construcción de la pirámide truncada según Gillings (1982), se cree que los egipcios conocían la fórmula de $V = \frac{1}{3} a^2 h$ (demostrada por los chinos y por Ver Van der Waerden, 1983), para calcular el volumen de una pirámide cuadrangular y opina que de esta se pudo deducir el volumen de la pirámide truncada $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$ utilizada en la actualidad, pero es un hecho que no deja de sorprender ya que los egipcios no contaban con un proceso de inferencia que no es inmediato y con las habilidades para desarrollar esos cálculos algebraicos.

Malkevitch (1988), es uno de lo que ha estudiado los orígenes de los poliedros como objetos geométricos. Estos están relacionadas con el cálculo del volumen y menciona tres relaciones: la primera es la fórmula del volumen de una pirámide truncada que aparece en el papiro de Moscú; la segunda es el conocimiento de Demócrito (500 a.C.) de que el volumen de una pirámide es la altura por un tercio del área de la base y la demostración realizada por Eudoxo (409-356 a.C.) y la tercera hace referencia a las discusiones de Euclides acerca del volumen de los prismas y pirámides en el Libro XII de Los Elementos (Sáiz, 2002).

Eudoxo demuestra la fórmula de Demócrito utilizando el método exhaustivo, este método podría decirse que consistía en calcular áreas y volúmenes, descomponiendo los cuerpos o figuras en partes o regiones más sencillas de áreas o volúmenes conocidos.

> Euclides (323-285 a.C.) describe dicho método de manera más rigurosa en el Libro X de Los Elementos, donde lo demuestra y lo llama lema de exhaución. En el Libro XII lo usa para demostrar fórmulas con las cuales obtiene el volumen de prismas y pirámides. El método de Eudoxo puede considerarse un antecedente del cálculo aunque no usa explícitamente una teoría de los límites (Kline, 1990, pág. 50)

En el libro XII de Euclides, muestra la proposición XII, 2 *"Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros"* y XII, 7 *"Un prisma triangular se descompone en tres pirámides triangulares equivalentes"* que sirven como herramientas para demostrar la proposición XII, 10 *"Un cono es la tercera parte de un cilindro de la misma base y la misma altura."* Para ello utiliza lo que conocemos como el método exhaustivo.

En la proposición XII, 18 *"Las esferas son entre sí como las razones triplicadas de sus diámetros"* se da la relación de proporcionalidad que existe entre la esfera y el diámetro, no se indica una fórmula para el volumen a diferencia de cómo se realiza en la actualidad $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Para la suma de volúmenes se parte de una definición tácita de sólidos en este caso la suma de paralelepípedos y la duplicación de un cubo.

- ✓ ***Suma de Volúmenes***

La suma de volúmenes que se plantea en los libros de los Elementos de Euclides XI y XII es determinada por unas características especiales, como los son tener la misma altura y una cara en común. Según este método es imposible lograr que la suma de dos cubos sea un cubo. Este método es utilizado en las demostraciones de algunas proposiciones 25, 28, 31, 32, 33 y 39 del libro XI. En la proposición 25 del libro XI, se suman los paralelepípedos *LOXQPK*, *KPQRVAB* y *AVRBGEFU* para formar el paralelepípedo *LEFUXO*.

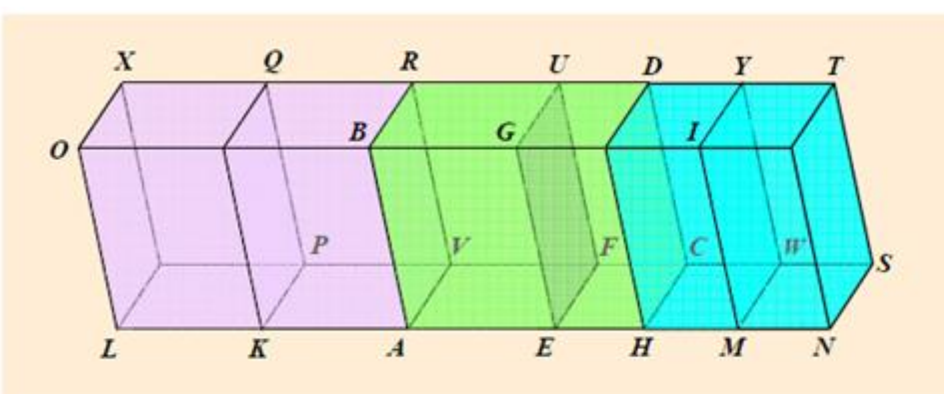


Figura 2. Suma de volúmenes.

En la figura 3, se observa la suma de volúmenes a través del uso de paralelepípedos que comparten la misma altura y una cara en común, pero que limitan la suma de volúmenes de figuras que no compartan la misma altura y no tengan una cara en común.

- ✓ ***El doble de un cubo***

En la actualidad se sabe que para duplicar el volumen de un cubo se debe "construir" un segmento de longitud igual a raíz cubica de dos, lo que es imposible usando regla y compás. A continuación se muestra la duplicación de un cubo de lado a y volumen a^3.

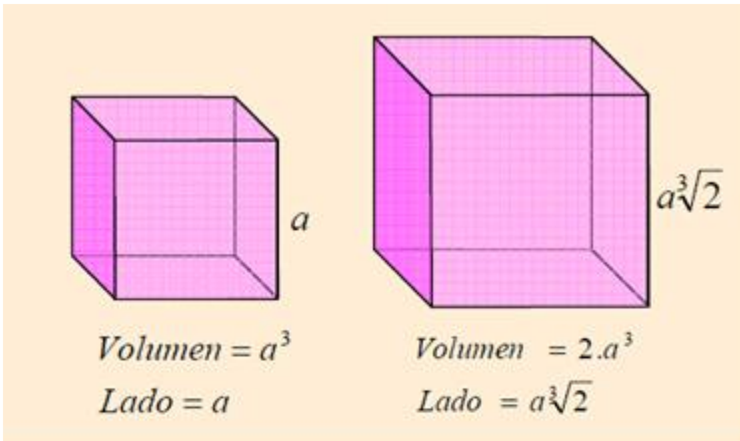


Figura 3. Doble del volumen de un cubo

Estos dos planteamientos como lo son la suma de volúmenes y el doble de un cubo, tienen solución a medida que se utilicen procesos algorítmicos, ya que para el primer caso debe cumplirse que los objetos tengan la misma altura y compartan una misma cara y para el segundo caso debe cumplirse que para construir el doble del cubo inicial, debe trazarse un segmento que sea igual a la raíz cubica de dos por el segmento del primer cubo.

En el libro XII de Euclides se estudian las áreas de círculos y los volúmenes de los sólidos más corrientes; para ello se basa en procedimientos "infinitesimales", que se remontan a Eudoxio y su método exhaustivo. Siguiendo así:

La proporcionalidad entre los círculos y los cuadrados construidos sobre sus diámetros

En los libros XI y XII, Euclides establece algunas proporciones que se pueden dar entre magnitudes de distinta naturaleza, tal como lo había hecho en el libro VI, al relacionar los triángulos y sus bases. En este sentido, Euclides no establece medidas absolutas, sino que desarrolla una teoría de medida de volúmenes a través de razones y proporciones, por ejemplo, “las esferas son entre sí como las razones triplicadas de sus diámetros” (Proposición XII, 18).

Como podemos apreciar, la geometría euclidiana constituye la simiente de la noción de medida volumétrica que se tiene en la actualidad. Un aspecto que no podemos pasar por alto es que en Euclides no existe una noción de medida absoluta. Euclides mide una magnitud desconocida comparando con magnitudes conocidas, ésta es una teoría de la medida relativa, ya que para llegar a la comprensión de la noción de volumen, se debe hacer comparación entre objetos tridimensionales, y así finalizar con el conocimiento implícito que subyace en la medida absoluta.

Más adelante, Arquímedes (250, a.C.) utiliza el método mecánico donde involucra el peso y el centro de gravedad, para el cálculo del volumen de un cuerpo X, él, utiliza otros dos cuerpos B y C tal que, se conocen sus volúmenes y de B se conoce su centro de gravedad. Arquímedes calcula un volumen desconocido en términos del volumen de otros cuerpos conocidos, permitiéndole encontrar áreas y volúmenes de figuras más complejas que las pensadas por Eudoxio.

- **Después de Newton y Leibniz.**

En la época de Newton (1642–1727) y de Leibniz (1646–1716) quienes son considerados los inventores del cálculo el cual se fundamenta en la derivada y la integral, estando ligados a problemas de obtención de longitudes de arco, áreas de regiones en superficies y volúmenes de cuerpos. De tal manera que con la integración es posible calcular el volumen de un cuerpo que este acotado por dos superficies y así obtener el volumen de un sólido de revolución. La siguiente definición de volumen (tomada de Marsden y Tromba, 1991, pág. 330):

Sea D una región en el plano, y R un rectángulo que contiene a D. Sea $f = R \rightarrow \Re$ continua y f^* la función tal que:

$f^*(x,y) = f(x,y)$, si $(x,y) \in D$ y $f^*(x,y) = 0$ si $x \notin D$

Defínase $\int_D f(x,y)dA = \int_D f^*(x,y)dA$

Con esta definición, si $f(x,y) \geq 0$ en D, el valor de la integral corresponde al volumen de la región tridimensional entre la gráfica de f y D (ver Figura 5).

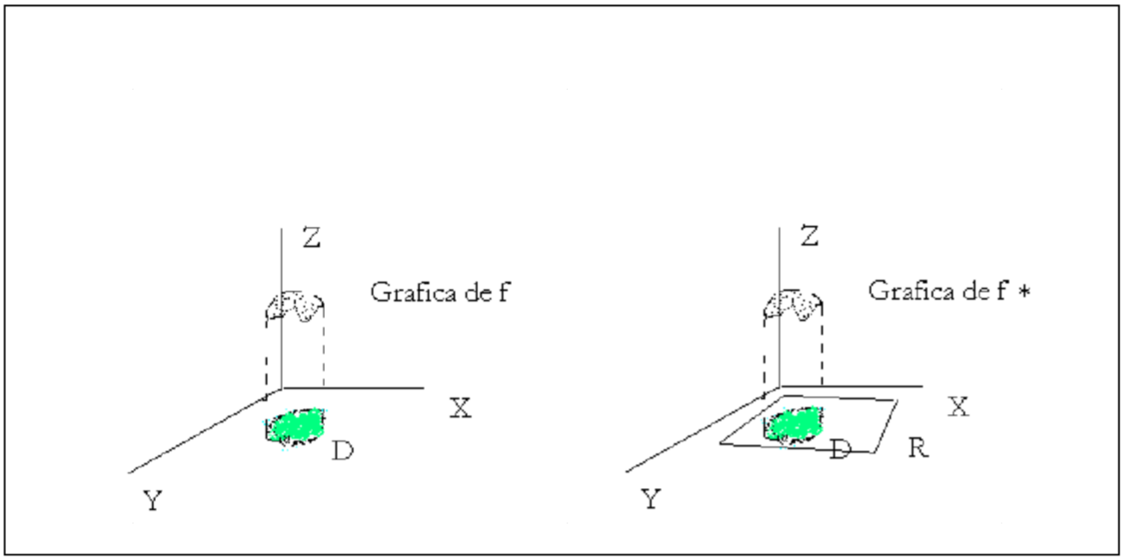


Figura 4. Integral de Superficie (Marsden y Tromba, 1991, pág. 331)

Se pretende mostrar cómo en el estudio formal del cálculo, suceden también procesos de cálculo bidimensionales, centrando la atención en dos parámetros donde involucran tipos de unidades, uno de longitud y otro de área, los cuales permiten determinar el volumen de un cuerpo.

- **El tercer problema de Hilbert.**

Hilbert planteo 23 problemas relacionados con el área de Ciencias Naturales, entre ellos encontramos el número tres que está relacionado con el concepto de volumen y este dice así *"Dados dos poliedros de igual volumen, ¿es siempre posible cortar el primero en una cantidad finita de piezas poliédricas que puedan ser ensambladas de modo que quede* *armado el segundo?"*. Él, advierte que en la geometría plana, una vez obtenido el área de un rectángulo, se puede calcular el área de cualquier figura poligonal sin necesidad de recurrir a un proceso de límite; es decir, es viable partirla en un número finito de partes y organizarlos de tal forma que se obtenga otra figura poligonal cuya área sea conocida. Pero Dehn demostró que la fórmula para conseguir el volumen de una figura en 3D usando los métodos de descomposición no funciona. De tal manera que este resultado solo se puede formalizar a través del proceso de límite.

El problema de Hilbert muestra una particularidad del concepto volumen si se le compara con el área y pone de manifiesto la riqueza y complejidad de ese concepto. (Sáiz, 2002)

- **El concepto de volumen en las matemáticas hasta el (2002)**

Existen varias formas para definir el concepto matemático volumen, una de estas es por medio de la axiomática (tomada de Sáiz, 2002, pág. 37):

Sea M un conjunto de subconjuntos de $\Re^3$.

Sea v una función real definida sobre M tal que:

a) La función v es no negativa.

Esto es, si $P < M$, entonces $v(P)$ es mayor o igual que cero.

b) La función v es aditiva.

Esto es, si $P\ y\ Q\ \in M$ y no tienen ningún punto interior común, entonces $P \cup Q \in M$ y $v(P \cup Q) = v(P) + v(Q)$.

c) La función v es invariante bajo traslaciones (desplazamientos paralelos).

Esto es, si $P \in M$ y P' es la imagen de P al aplicarle una traslación, entonces $P' \in M$ y $v(P) = v(P')$.

d) La función v es normalizada.

Es decir, el cubo unidad $Q \in M$ y $v(Q) = 1$.

Una función con las propiedades descritas en a), b), c) y d) se llama volumen.

Al exponer esta definición, hecha de manera axiomática se hace necesario demostrar la existencia del conjunto M y una función v que satisfaga las propiedades enunciadas.

Otra forma de definir el volumen es de manera constructivista como lo hace Boltianskii (1978). Considera un mosaico de tres dimensiones o una descomposición del espacio en cubos congruentes donde

> …el k-ésimo mosaico es el sistema de cubos en el que es descompuesto el espacio por los planos $x = p/10^k$, $y = q/10^k$ y $z = r/10^k$ donde p, q y r toman todos los valores enteros. Esto permite considerar los límites
>
> $$\underline{v}(P) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_k}{10^{3k}}\right), \quad \overline{v}(P) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{b_k}{10^{3k}}\right)$$
>
> donde a_k es el número de cubos del k-mosaico contenidos en P y b_k es el número de cubos del k-mosaico que tienen puntos en común con P (Boltianskii, 1978, págs. 42–43).

Es decir, si ambos límites armonizan se dice que P es medible o cubicable. A este número obtenido se le denota $v(P)$ y se le llama el volumen de P.

Para los fines que atañen a este trabajo, se utilizará otra definición como la que utilizan Antoniovskii et al. (1990). Estos autores, utilizan una colección de sólidos que los denominan “cubicables”. Entre ellos se elige un cubo E, como patrón, el cual es llamado cubo unidad de volumen. Para cada sólido cubicable A, se le asigna un número positivo mediante la función $V(A)$ llamado volumen del sólido. Donde la función $V(A)$ debe cumplir las siguientes propiedades:

1. *Normalización:* $V(E) = 1$. El volumen del cubo unidad es 1.
2. *No negatividad:* $V(A) > 0$. El volumen es una función positiva.
3. *Congruencia:* Si $A = B$, entonces $V(A) = V(B)$. Si dos sólidos son congruentes entonces sus volúmenes son iguales.

4. *Aditividad:* Si $A = B \cup C$, y $B \cap C = \emptyset$ entonces $V(A) = V(B) + V(C)$. Si un sólido está compuesto de dos sólidos ajenos B y C, entonces el volumen del primero es la suma de los volúmenes de B y de C.

Esta última definición del concepto matemático volumen, se integran algunos elementos y algunas implicaciones para la enseñanza. Esta idea se ampliará en el contraste de las OMr y OMp.

- **El concepto de volumen en física.**

Considerando el volumen como parte de los conocimientos de la física, esté tiene significados de naturaleza muy diferentes a los expuestos en los párrafos anteriores. A continuación se establecerán las siguientes relaciones.

- Volumen y capacidad.
- Volumen y masa.
- Volumen y peso.

✓ **Volumen y capacidad**

La forma de algunos recipientes les permite contener líquidos o sustancias, de estos se puede medir su capacidad y su volumen, también se puede determinar el volumen del contenido. Por ejemplo, si tenemos un balde vacío, este posee un volumen, ya que este ocupa un lugar en el espacio, se puede medir también su capacidad y el volumen del liquido vertido en el. Pero existen cuerpos a los cuales se les puede medir su volumen pero no se les puede determinar su capacidad, es el caso de una piedra.

A partir de lo anterior se puede decir que; la capacidad es una propiedad que tienen ciertos cuerpos de poder contener cierta cantidad de alguna cosa hasta un límite determinado, su unidad de medida es en litros (L) y el volumen indica cuánto puede contener o guardar un recipiente y su unidad de medida es el m^3. Por tales razones, los diferentes significados de capacidad pueden formar parte del campo semántico personal del concepto volumen en un individuo (Sáiz, 2002).

- ✓ **Volumen y masa.**

La diferencia entre el volumen y la masa es que: el volumen es la extensión de un cuerpo en tres dimensiones; largo, ancho y alto, mientras que la masa expresa una cantidad de materia y es propiedad intrínseca de un cuerpo, que mide su inercia, es decir, la resistencia del cuerpo a cambiar su movimiento. Su unidad de medida más común es el kilogramo (kg).

- ✓ **Volumen y peso.**

El concepto de volumen está conectado con el peso, ya que este es una de las propiedades de los materiales que se incluye en la red conceptual para la enseñanza a través del componente de comunicación y el análisis de los datos obtenidos. El peso de una partícula es la fuerza con que está es atraída a la tierra. Es decir, corresponde a la fuerza gravitatoria que un kilogramo (1 kg) de masa le provoca una aceleración de un metro por segundo al cuadrado ($1\ m/s^2$). Su unidad de medida es el Newton (N), pero hay diferencia entre la masa y el volumen.

La OMr proyectada refleja que conocer y diferenciar las interpretaciones y definiciones diversas del volumen a través de sus relaciones nos ayuda a disminuir la problemática esencial de ver el volumen como fórmulas para calcular medidas de cantidades de diferente magnitud. Ahora para hacer emerger la OM que desea estudiarse, se hace posible cuestionarse el modelo epistemológico de referencia y permite ver las limitaciones y potencialidades de uno u otro acercamiento.

De esta manera, nos mantenemos coherentes con la propuesta de explorar este estudio del concepto de volumen entorno a la visión dinámica y estática, de tal manera que se elaboró la tabla 5, con el objetivo de mostrar cuándo el concepto de volumen se percibe desde una de estas dos visiones, en cada uno de los momentos histórico- epistemológicos abordados.

	Visión estática del volumen.	Visión dinámica del volumen.
Antes de Newton y Leibniz.	El uso de fórmulas para calcular el volumen de poliedros regulares permitiendo resolver problemas ligados a la vida real como la construcción de pirámides.	Se establecen relaciones entre el área y el volumen, ya que para medir magnitudes desconocidas se utilizaban medidas conocidas de objetos, para ello se basa en procedimientos "infinitesimales", el método exhaustivo y mecánico.
Después de Newton y Leibniz.	El uso de las integrales y derivadas para calcular el volumen de cuerpos.	El uso de las funciones para calcular el volumen de un sólido de revolución en un plano tridimensional, donde no hay una unidad de medida especifica.
El problema de Hilbert.	Si este problema se visualiza en R^2, tendría solución y se haría uso de él sin movilizar el cálculo de volumen en otras dimensiones.	No se puede establecer una relación de volúmenes entre algunas figuras tridimensionales.
El concepto de volumen en las matemáticas hasta el (2002)	Se vuelve estático cuando hacemos uso solamente del resultado final.	Se establecen definiciones del volumen por medio de la axiomática, el límite y las funciones.
El concepto de volumen en física.	Calcular medidas de diferentes magnitudes.	Se enriquecen las definiciones del concepto de volumen por medio de las relaciones con la capacidad, la masa, el peso, el principio de Arquímedes y las funciones cúbicas.

Tabla 5. Visión estática y dinámica del volumen en algunos momentos histórico-epistemológico.

De este modo, la visión dinámica y estática han estado presentes en los momentos histórico-epistemológicos abordados en la tabla anterior, permitiendo de algún modo conocer que el volumen no abarca tan solo las medidas del largo, ancho y alto de un objeto tridimensional, sino que también está relacionado con otros conceptos como el área, masa, peso, etc., y que se puede utilizar dentro del contexto para dar solución a diferentes situaciones problemas que se nos planteen.

2.5 Niveles de Codeterminación.

Chevallard propone como niveles de codeterminación, la forma de estructurar las razones matemáticas a asimilar y estilos de organizar el estudio de las mismas en la escuela (Gascón, 2003).

Sociedad → Escuela → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión.

En la jerarquización se evidencian tres niveles de concreción[1], el primer nivel está conformado por la *Sociedad* y la *Escuela*, el segundo nivel por la *Disciplina*, *Área* y el *Sector*, en el tercer nivel está el *Tema* y la *Cuestión*. Él, exhibe que en cada uno de estos niveles se presentan limitaciones para el proceso de enseñanza, reduciéndola a un tema en cuestión, donde este pierde su sentido científico y su relación con su naturaleza, disipando su esencia dentro de la educación y una desconexión en el proceso educativo. Ahora cuando esta conexión se pierde se llega a una cuestión "cerrada en sí misma" y, por tanto, "muerta" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 118).

En este trabajo se analiza la incidencia de la sociedad y la escuela en el desarrollo del volumen en el aula de clase, permitiéndonos observar las limitaciones o posibilidades que nos ofrece este nivel para la enseñanza de este concepto matemático, tomando como referentes los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), los Lineamientos Curriculares (1998), el plan de área de la institución escolar y la guía escolar.

[1] Un documento concreto, de propuestas globales, vinculantes y realistas al servicio de la comunidad educativa.

Se diseñó un diagrama del concepto de volumen teniendo en cuenta los niveles de codeterminación, para poder analizar cuáles son las condiciones que posibilitan o limitan la enseñanza de este:

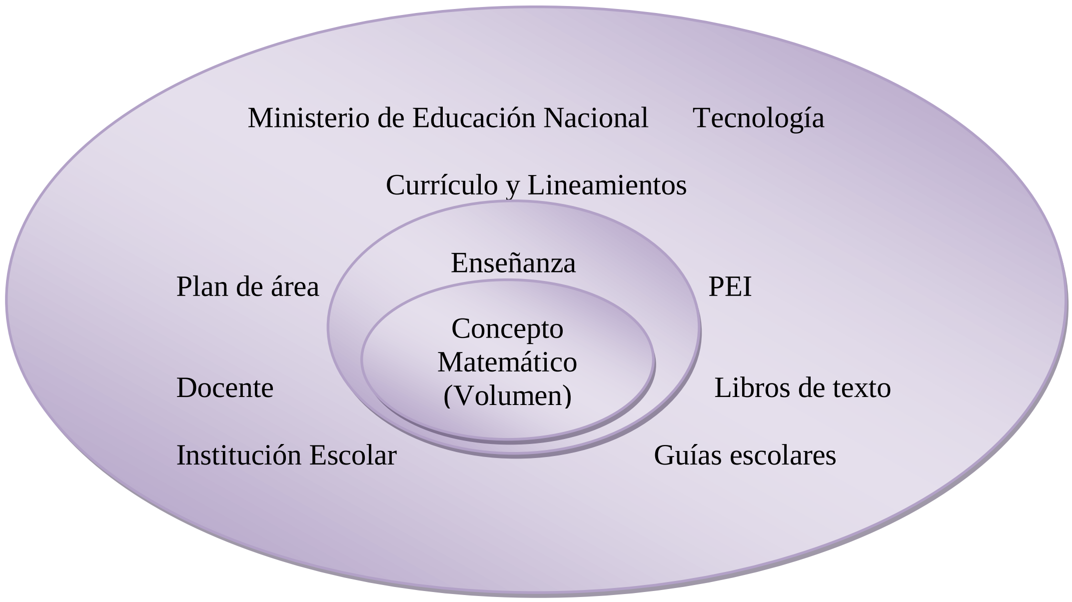


Figura 5. Diagrama del concepto Matemático (Volumen).

En el diagrama se muestra que el concepto matemático volumen no vive aislado de la enseñanza ni de elementos que la predominan. Al colocarlo en un ámbito institucional, la escuela, lo hemos puesto en el contexto de la enseñanza. Esta a su vez tampoco se puede dar de manera aislada, por eso aparecen en otro nivel, distintos elementos que influyen en la enseñanza como los docentes, las reglamentaciones del MEN, los libros de texto (o guías escolares), los planes curriculares de área, la tecnología y el Proyecto Educativo Institucional. Incluso esta primera diagramación puede ser limitada. Sin embargo, desde la postura de la TAD, resulta pertinente la explicitación de una primera aproximación a dichas relaciones, las cuales permiten el análisis concienzudo de cualquier proceso o concepto en un entorno institucional.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INSTITUCIÓN ESCOLAR

3. METODOLOGÍA

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) la mayoría de los análisis ecológicos iniciales se basan en el contraste entre las OMp que circulan en las diferentes instituciones, con las OMr. Es igualmente usual en los trabajos de corte más riguroso el uso de los REI (Recorridos de Estudio Institucional) que examinan algún fenómeno didáctico (Bien sea centrado en algún proceso o concepto matemático) desde la misma construcción ecológica, pasando por la elaboración de la OMr (actualmente denominada Modelo Epistemológico de Referencia (MER), con los respectivos análisis de los datos empíricos, hasta ponerla a prueba. Sin embargo, en este trabajo nos centramos en el primer tipo de estudio, que es el contraste entre las OMp y OMr y la primera parte de los MER, y que a pesar de la limitación que pueda representar en términos de la coherencia de todo el proceso de estudio que contempla los MER, nos permitió identificar de manera más rigurosa la ecología para el caso de la OMp.

Los momentos de la ejecución fueron distribuidos por fases, las cuales permitieron recoger la información que da cuenta de su desarrollo.

Las fases que se llevaron a cabo son las siguientes:

Fase 1: En esta fase se amplió y se refinó el marco teórico, al igual que se realizó una revisión para la guía de estudio del colegio (ver figura 6) y los compendios del currículo sugerido a la institución escolar (Plan de área de matemáticas, Estándares de Competencias Matemáticas, Ciudadanas y Laborales Generales y Lineamientos Curriculares en matemáticas).

Figura 6. Guía Escolar Arquidiocesana de Matemáticas

Fase 2: En esta etapa se construyó la OMr la cual sirvió como base para analizar las limitaciones o potencialidades al introducir el concepto matemático Volumen en una institución escolar, a la luz Sáiz M. (2002) y García, J. J. & Calvo O. L. (2007).

Fase 3: En esta fase se realizó el análisis de la OMr (desde un punto de vista estático o dinámico del volumen) y se contrasta con la OMp (presente en la guía escolar, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, Lineamientos Curriculares de Matemáticas y Plan de Área de la institución "Colegio Parroquial Nuestra Señora de los Andes") con relación a lo que plantean los referentes teóricos. Para el desarrollo del análisis se hizo necesario el uso de la guía escolar del grado quinto (5°), debido a que en la guía del grado noveno (9°), se establece únicamente una relación entre el volumen de un cubo y la función cúbica. De esta manera logramos un análisis más completo de la ecología que se da en la institución escolar.

3.1 Características de la institución

Teniendo en cuenta la importancia de los elementos que son de análisis en esta ecología, nos parece relevante realizar una contextualización de la institución escolar donde se llevó a cabo dicho proceso, en este caso, el Colegio Parroquial Nuestra Señora de los Andes de carácter privado. Algunos de los datos son de contextualización para el lector, pero los otros se mencionan porque hacen parte del análisis ecológico en el trabajo.

El Colegio Parroquial Nuestra Señora de los Andes abrió sus puertas a la comunidad en el año 1998, el cual inició sus labores de enseñanza con básica primaria extendiéndose hasta la secundaria, se encuentra ubicada en la comuna 5 barrio los Andes y se atiende a estratos 2, 3 y 4, con una cantidad de 490 estudiantes aproximadamente y 23 docentes de los cuales 4 son del área de matemáticas.

El colegio cuenta con un consejo académico en el cual participa los coordinadores de las áreas de ciencias naturales, matemáticas, ciencias sociales, lenguaje, ingles, educación religiosa, arte, tecnología y educación física. El área de matemáticas consta de 3 docentes, uno para los grados de 4° a 7°, otro para grados 9°, otro para grados 8°, 10° y 11°. Cada docente debe llevar un plan de clase en formato digital y el otro en un cuaderno de actividades, que debe coincidir con el plan de área y la guía de texto. Los planes de área vienen divido en tres periodos y cada periodo presenta unos ejes temáticos que deben ser abarcados, la guía también tiene la misma distribución. El colegio cuenta con jornada única permite que las clases de matemáticas tengan una intensidad de 7 horas (1 hora consta de 45 minutos de clase) a la semana de las cuales 2 son de estadística y 5 para matemáticas y geometría.

La institución cuenta con convenios en la Universidad del Valle, específicamente con el Laboratorio de Matemáticas, donde se realiza un trabajo experimental que fortalece la comunicación e intercambio de ideas entre los participantes, posibilitando la interacción de la teoría con la práctica por medio de objetos manipulativos concretos y favoreciendo el desarrollo de la creatividad e imaginación del educando.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DEL PLAN DE ÁREA

ANÁLISIS DE GUÍA DE TEXTO ESCOLAR

4.1 Análisis del plan de área.

En el análisis del plan de área de la institución, se revelan algunos de los elementos que lo conforman, con los cuales se pretende adquirir competencias y habilidades para desenvolverse de manera adecuada en el camino del aprendizaje dentro de la sociedad.

El propósito general del plan de área es que el estudiante, a través del respeto, la defensa y la promoción de los derechos fundamentales y su relación con las situaciones de la vida escolar en la que estos puedan ser vulnerados, tanto por las propias acciones, como por las acciones de otros, formule, razone, modele, resuelva y comunique problemas de las matemáticas, de la vida cotidiana y de otras ciencias, aplicando de forma creativa y coherente el lenguaje simbólico, los procesos y los algoritmos propios del área y reconociendo la transcendencia de las matemáticas en la consolidación de los valores sociales, ciudadanos y democráticos.

Para tener una visión general de la estructura del plan de área de la institución escolar Nuestra Señora de los Andes, es necesario aclarar que la organización y contenidos son iguales para todos los colegios Arquidiócesanos, lo único diferente que encontramos son las características propias de la institución (estrato, calendario académico, contexto, etc).

A continuación se esboza el marco conceptual de la institución escolar escogida, en el cual se muestran los componentes desde la parte histórica de las matemáticas, los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias.

Marco Conceptual

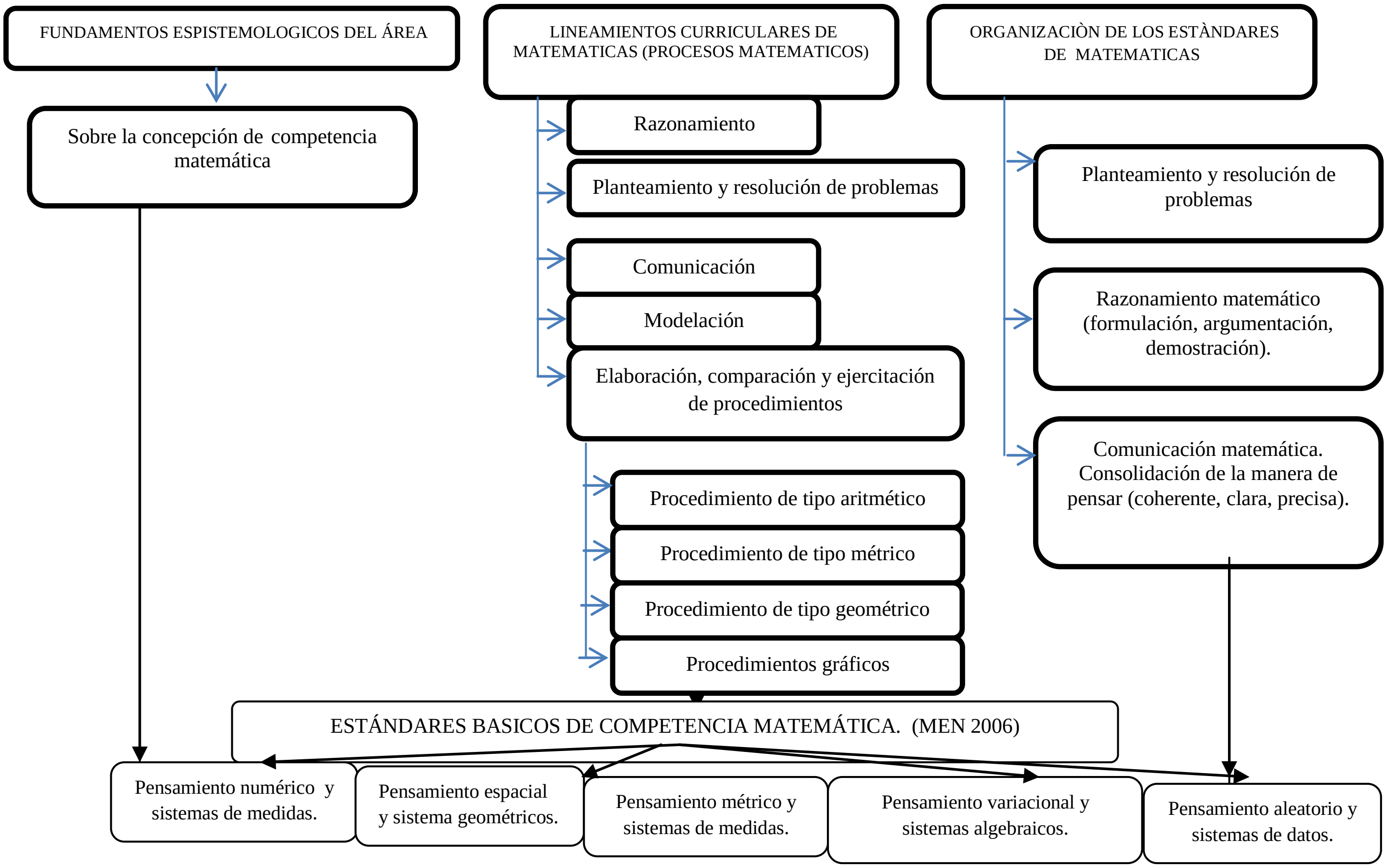


Figura 7. Estructura del plan de área de la institución escolar NSA.

El plan de área de la institución escolar seleccionada para el estudio, plantea para cada grado tres periodos y en cada uno de ellos se pacta un propósito general del área, un afectivo, un cognitivo y expresivo. Se establecen 5 indicadores de desempeño que estén relacionados con los ejes temáticos instaurados, se exponen las competencias del área, las ciudadanas, las laborales generales y los criterios de evaluación que son: los criterios socio-afectivos (identidad pastoral y responsabilidad académica), y los criterios cognitivo-expresivos de las competencias del área. Luego se muestran estrategias de apoyo, instrumentos del conocimiento, habilidades, didácticas y recursos.

A continuación se presenta un diagrama de la estructura del plan de área por periodo.

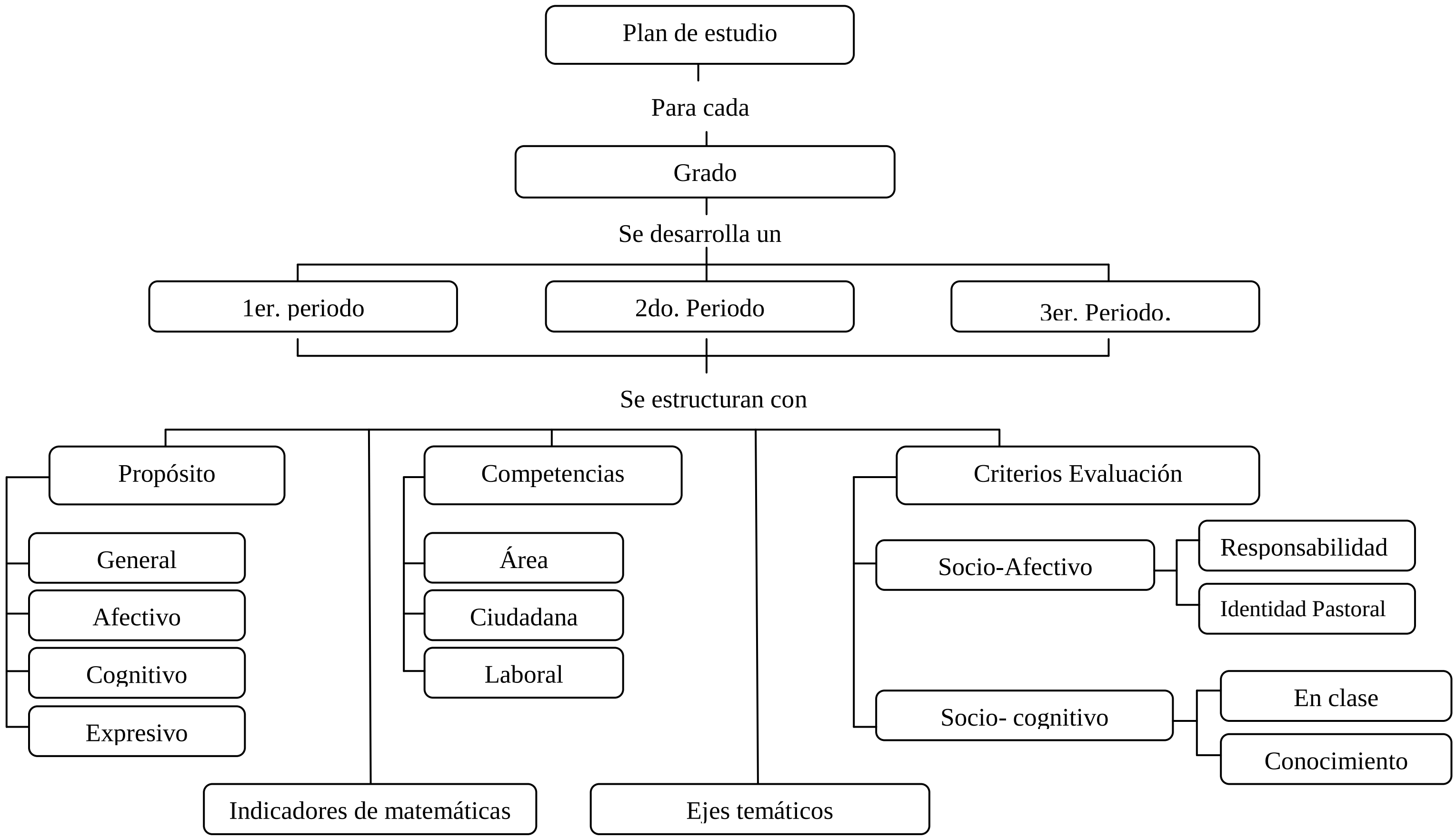


Figura 8. Estructura del plan de área para cada periodo del colegio Parroquial Nuestra Señora de los Andes.

En esta parte es importante conocer los indicadores de desempeño que dicho plan de área plantea en los diferentes niveles de básica primaria y básica secundaria, en los cuales se propone la temática del volumen.

- Comprendo la función de las unidades de medida (metro, capacidad, superficie, peso, volumen y tiempo) que corresponden al sistema métrico y decimal de mi entorno próximo, logrando con mi ayuda que mis compañeros alcancen el propósito propuesto. (2º)

- Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa) y expreso mis sentimientos y emociones mediante distintas formas y lenguajes (gestos, palabras, pintura, teatro, juegos, etc.). (3º)

- Formulo y resuelvo problemas de las unidades de medida (longitud, capacidad, superficie, volumen, peso y tiempo) que corresponden al sistema métrico decimal, reconociendo, comprehendiendo a los otros y expresando ideas y emociones, con el fin de crear y compartir significados, teniendo en cuenta el contexto. (5º)

- Generalizo, planteo y comparto procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos, para resolver problemas y para tomar decisiones en situaciones cotidianas, escuchando a mis compañeros, usando mi libertad de expresión y respetando las opiniones ajenas (7º)

Al observar estos indicadores de desempeño en el plan de área de la institución escolar encontramos que en el grado noveno no aparece ningún indicador en el cual se hable del volumen; sin embargo cuando nos remitimos a la guía escolar utilizada por los docentes y los estudiantes observamos que cuando se plantea el eje temático de funciones cúbicas, hacen mucho énfasis en el volumen y relacionan dichas funciones con el volumen de un cubo.

Además observamos que en ningún lado aparecen el por qué ni el para qué de la enseñanza de los ejes temáticos, lo cual hace que estos carezcan de una razón de existencia en la institución escolar y es allí donde aparece el "autismo temático" conocido como un fenómeno de enseñanza. Al respecto recordemos como ya se ha planteado, que:

> Puede observarse como el currículo oficial que proponen las sucesivas reformas, los documentos de las administraciones educativas y los libros de texto aprobados por éstas, consideran implícitamente que, más allá del nivel de organización de los temas, todo es transparente e incuestionable. (Gascón, 2003, p.3)

Por todo esto, estamos de acuerdo en que es significativo que en la enseñanza del volumen y del pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas, Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos, hay cuestiones que deben tenerse en cuenta, puesto que falta una mayor claridad en la aparición de los ejes temáticos con los indicadores de desempeño que deben desarrollar los estudiantes y además de la aparición de las competencias que se quieren trabajar, es necesario que determine razones propias de las matemáticas.

Una de estas cuestiones está reflejada en que el plan de área de la institución escolar está siguiendo las orientaciones de los Estándares de Competencias en Matemáticas, pero se queda corto en lo que se debe enseñar en el aula, pues hace énfasis en la teoría de manera general y no especifica ni cómo ni para qué se está enseñando, relacionando entonces esto con el fenómeno que Gascón denomina como “atomización de la enseñanza”, pues se proponen ejes temáticos aislados sin establecer las relaciones que se pueden realizar.

Con todo esto se observa cómo es que este plan de área según Cid & Bolea (2007), estaría presentando limitaciones significativas en la OM, debido a que no muestra las generatrices que explicitan la razón de ser de lo que se está enseñando, lo que podría ser una guía para los docentes que deben apropiarse de estas en las clases y que enmarcaría directamente el fenómeno de enseñanza del autismo temático, pues no explicita las relaciones entre el saber enseñado y el saber sabio.

En el plan de área no es posible evidenciar la visión estática o dinámica del volumen como concepto matemático, debido a que no se expone como eje temático en ninguno de los periodos, pero en la guía de texto es que establecen una relación del volumen de un cubo con las funciones cubicas; por lo tanto no es posible establecer las tareas, técnicas, tecnologías, teorías y praxeologías del plan de área, sin embargo, los planes de área deberían proponer una orientación disciplinar de hacia dónde y cómo poder dirigir el currículo de matemáticas y la importancia del contexto de los desarrollos tecnológicos para la educación.

4.2 Análisis de los textos escolares 9°

Existe una praxeología asociada a las tareas que permiten usar diferentes técnicas, tecnologías o teorías para solucionar las situaciones presentadas en una institución. Estas soluciones se relacionan con cuestiones matemáticas que potencializan la búsqueda de una respuesta válida o no, a determinada situación. (Gascón, 2001).

Sin embargo estas cuestiones deben transformarse y adaptarse a la situación para que se lleve a cabo un estudio adecuado de la tarea planteada. En esta ocasión para el análisis de la guía escolar utilizada (9º) aclaramos que a pesar de hablar sobre el concepto de volumen en el primer periodo, no hay una relación explicita con los ejes temáticos planteados para dicho periodo, pues lo que se hace en la guía es establecer una relación del volumen de un cubo con la función cúbica.

A continuación, en la figura 9, se muestra la estructura del segundo periodo de la guía escolar, la cual nos permitirá realizar un análisis del texto, que posteriormente brindará las pautas de análisis del cómo se articulan los ejes temáticos de los enunciados con las tareas (praxis) y el tipo de definición (logos) utilizado por la guía escolar, para identificar la técnica para la resolución de las tareas planteadas desde las pautas que nos brinda la TAD, teniendo en cuenta la OMr del capítulo 2.

Cada periodo de la guía está conformado por la presentación del periodo, la prueba diagnóstica (únicamente en el primer periodo) y una serie de talleres en los cuales se abarca cada uno de los ejes temáticos planteados en el plan de área de la institución escolar seleccionada. Estos talleres se desarrollan en tres fases: la fase afectiva, la fase cognitiva y la expresiva. .

PRESENTACIÓN

Colegio:	Grado: Noveno	Área: Matemáticas
Docente:	Tiempo previsto: Un periodo	Horas: 48 Horas /Periodo

PROPÓSITOS DE PERÍODO:

AFECTIVO:
Que mostremos mucho interés por evidenciar desde nuestras relaciones interpersonales, responsabilidad escolar, identidad pastoral y cultura ecológica, avances significativos en la comprehención eficaz de enunciados de los problemas matemáticos que involucren sucesiones, progresiones, números complejos y el análisis gráfico de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

COGNITIVO:
Que comprehendamos los procedimientos para resolver y plantear problemas que involucren números complejos, sucesiones, progresiones, análisis gráfico de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas, y tengamos claridad cognitiva sobre cada una de las habilidades y ejes temáticos categóricos.

EXPRESIVO:
Que apliquemos las operaciones matemáticas requeridas para la solución de problemas matemáticos que involucren números complejos, interpretemos diferentes tipos de expresiones matemáticas relacionadas con sucesiones y progresiones y resolvamos problemas matemáticos, siguiendo instrucciones dadas, relacionados con sucesiones y progresiones, demostrando nuestros avances en el desarrollo del pensamiento matemático.

EVALUACIÓN: INDICADORES DE DESEMPEÑO:
- Comprehendo eficazmente enunciados de los problemas matemáticos que involucren el análisis gráfico de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
- Aplico las operaciones matemáticas requeridas para la solución de problemas matemáticos que involucren números complejos.
- Resuelvo problemas matemáticos, siguiendo instrucciones dadas, relacionados con sucesiones y progresiones.

ENSEÑANZAS (COMPETENCIAS Y HABILIDADES)

Utilizar	Verificar	Seleccionar
Resolver problemas	Reconocer	Construir
Simplificar	Justificar	Modelar
Identificar	Aplicar	Describir
Conjeturar	Generalizar	Analizar

EJES TEMÁTICOS:
- Análisis gráfico de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
- Sucesiones y Progresiones.
- Números Complejos.

2

DIDÁCTICAS:
- Proposicional y conceptual Anticonstructivista, Expresiva y Explicativa.

Equipo Académico-Pedagógico Área Matemáticas | Colegios Arquidiocesanos de Cali

Figura 9. Estructura del segundo periodo de la guía escolar 9º

Es así como en este análisis y observando lo propuesto por la guía escolar, especificando en las tareas (ejemplos, actividades, ejercicios a resolver, resolución de problemas), buscamos evaluar que tanto permiten tomando como referente lo que menciona la TAD al respecto, pues hay cuestiones que para resolverse necesitan de una estructura que los determine.

De esta manera es importante manifestar que la mayoría de las cuestiones matemáticas que se asocian al saber hacer, sumergidas en las instituciones escolares están previamente estructuradas en un nivel temático y nominalmente organizadas; pero antes de afirmar esto es pertinente conocer la estructura que compone en nuestro caso los textos escolares. (Gascón, 2002).

4.2.1 Análisis de la praxis (tareas, técnicas)

Caracterización de la guía escolar teniendo en cuenta la forma como introduce el volumen.

A continuación en la tabla 6 se describe básicamente la guía escolar y que además contiene los datos en donde se caracteriza de manera particular el objeto de estudio a analizar, poniendo en evidencia cómo se introduce el concepto de volumen en la institución escolar, basándonos en el texto escolar (guía), la cual muestra las características y relaciones de los conceptos desarrollados.

	GUÍA ESCOLAR GRADO 9º
¿Cómo se introduce el concepto de volumen?	El texto inicia con la presentación de tres cubos de diferentes longitudes, generando tres interrogantes: ¿ cómo se halla el volumen de cada uno de los cubos?, ¿Habrá alguna función que relacione el lado de un cubo con su correspondiente volumen? y ¿ En qué conjunto numérico se puede definir esa función?. Luego establece la función que relaciona la variable lado de un cubo (X) con el volumen del mismo, lo cual genera que $y = x^3$
Estructura de la presentación del tema de volumen	Funciones cubicas Función volumen de un cubo Ejercitación Función cúbica pura Ejercitación Funciones de la forma $y = x^3 \pm d$

Tabla 6. Contextualización del volumen en la guía escolar analizada.

Muestra de tareas.

A continuación se mencionan 4 tareas propuestas por la guía escolar, de las cuales se escogió una muestra, la cual llamaremos $T_{1,}$ $T_{2,}$ $T_{3,...}T_{n,}$ a las cuales daremos una posible solución.

T_1: Cuál es el volumen de un cubo de lado:

a. 3m
b. $6cm$

T_2: Dibujo un sólido cuyo volumen sea el formado por un cubo de lado x y un cubo de lado $x + 3$. ¿Cuál es su volumen?

T_3: Encuentro el volumen del cubo cuyo lado mide:

a. $\frac{1}{2}\ cm$
b. $\frac{2}{3}\ cm$
c. $8\ cm$
d. 10 cm
e. $\sqrt{2}\ cm$
f. $\sqrt{5}\ cm$

T_4: Encuentro el lado de un cubo cuyo volumen es:

a. $1000\ cm^3$
b. $216\ cm^3$
c. $5\ cm^3$
d. $3cm^3$
e. $125\ cm^3$
f. $\frac{1}{64}\ cm^3$

De este mencionaremos las técnicas empleadas en la solución de tareas propuestas en los textos escolares, en las cuales presentaremos una breve descripción de las herramientas conceptuales y algorítmicas que debe tener el estudiante para solucionar las tareas.

Para la solución de las tareas propuestas en la guía escolar del grado 9º, se pretende categorizar las tareas planteadas según algunos aspectos en común que presentan y que de acuerdo a ello, se puede dar solución mediante determinado criterio.

4.2.2 Análisis del logos (tecnologías, teorías)

La guía escolar del grado 9º, inicia contextualizando al estudiante con unan situación relacionada con cubos de diferentes tamaños, donde a partir de la observación debe responder a unos interrogantes, de manera que permitan reconocer la importancia de estos objetos matemáticos en la vida cotidiana.

A continuación se hace un desarrollo de algunas formar de hacer y aplicar la técnica para la solución de las tareas propuestas por el texto escolar.

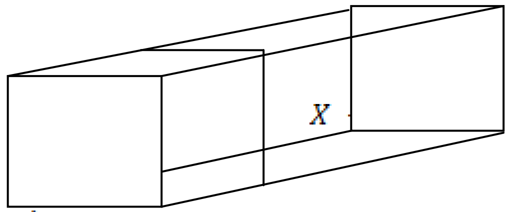
$T_{1:}$ Cuál es el volumen de un cubo de lado: a. $3m$ b. $6cm$

Solución: Teniendo en cuenta la función $y = x^3$, el volumen de los cubos seria: en el caso a. 27 cm^3 y en b. 216 cm^3.

La solución planteada para esta tarea se remite al uso de la función cúbica de una sola variable cuyo valor es constante, lo cual nos remite solamente a usar una fórmula, de tal manera que se calcula el volumen de un cubo. (Visón Estática)

T_2 Dibujo un sólido cuyo volumen sea el formado por un cubo de lado x y un cubo de lado x + 3. ¿Cuál es su volumen?

Solución:



$V = (x)\ (x)\ (x+3)$

$V = x^2\ (x+3)$

$V = x^3 + 3x^2$

T$_3$. Encuentro el volumen del cubo cuyo lado mide:

a) $\frac{1}{2}\ cm$

b) $\frac{2}{3}\ cm$

c) $8\ cm$

d) $10\ cm$

e) $\sqrt{2}\ cm$

Solución: En este punto debemos tener en cuenta que algunos de los ejercicios planteados requieren de la aplicación de propiedades de números racionales y otros de números enteros. De esta forma sería para el a. $\frac{1}{8}\ cm^3$, b. $\frac{8}{27}\ cm^3$, c. 512 cm^3, 1000 cm^3 y para el caso d, aplicamos lo siguiente:

$$(\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{2}) \qquad = 2 \times \sqrt{2} \ = 2\sqrt{2}$$

T$_4$: Encuentro el lado de un cubo cuyo volumen es:

a. 1000 cm^3
b. 216 cm^3
c. 5 cm^3
d. 3 cm^3
e. 125 cm^3
f. $\frac{1}{64}\ cm^3$

Solución: Para esta situación, como se quiere conocer el valor del lado de un cubo dado su volumen, debemos considerar el siguiente proceso:

$$y = x^3 \text{ de donde } \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3}$$

$$\sqrt[3]{y} = x$$

Donde "y" corresponde al volumen del cubo y "x" es el valor de lado del cubo. De esta forma el valor del lado de un cubo para:

a. $10\ cm$ para el cubo $1000\ cm3$
b. $6\ cm$ para el cubo $216\ cm3$
c. $\sqrt[3]{5}$ cm para el cubo $5\ cm3$
d. $\sqrt[3]{3}$cm para el cubo $3\ cm3$
e. $5\ cm$ para el cubo $125\ cm3$
f. $\frac{1}{4}$ cm para el cubo $\frac{1}{64}\ cm^3$

Las tareas 1, 3 y 4 muestran que para ser resueltas lo único que se necesita es tener en cuenta la fórmula $y = x^3$, tomandose como punto de partida para hallar tambien el valor del lado de un cubo que tiene ciertas magnitudes.

Por lo que podemos notar allí una tendencia hacia una visión estática del volumen, es decir, que los objetos tratados se pueden mirar desde un punto de vista en el cual simplemente se le hace tratamiento a una fórmula para responder otros interrogantes, generando así un algoritmo de solución.

No obstante, pensamos que hace falta presentar otro tipo de tareas, como la 2, en donde, para buscar una solución se necesite hacer una propuesta de solución diferente a lo planteado en los otros ejercicios, permitiendo a quien lo quiera resolver establecer su propio diseño.

Tomando como muestra los enunciados planteados anteriormente y algunas de las soluciones que le dimos a estos enunciados, nos encontramos con algunas técnicas específicas (función cubica; volumen de un cubo y propiedades de la radicación) con las cuales es posible solucionar las tareas.

En lo poco que se presenta del volumen en la guía escolar escogida y en el plan de área notamos que carecen de una definición explicita de dicho concepto, el estudio del volumen se ha convertido en una búsqueda de la capacidad de un objeto tridimensional y los elementos del discurso tecnológico-teórico, se han atomizado en múltiples OM puntuales lo cual evidentemente y de acuerdo con nuestro modelo limita la emergencia del concepto.

La construcción de la OMr tal como se realizó en el capítulo 2, nos muestra que aunque se hace un intento por relacionar las funciones cúbicas con el volumen, solo se utiliza la función del volumen de un cubo y se restringe la de otros objetos tridimensionales de tal manera que se queda en una visión estática, lo que permite identificar el tipo de soluciones que se pueden generar.

Elementos tecnológico-teóricos

A continuación daremos una descripción concreta y textual de los conceptos, definiciones, teoremas y características claves que están en la guía escolar y que permiten el uso de determinada técnica al momento de solucionar un problema matemático relacionado con el volumen, debido a que los elementos teóricos y tecnológicos que se dan en el texto escolar para la solución de las diferentes tareas carecen de un sustento teórico claro, hemos preferido llamarlos enunciados matemáticos.

Enunciados matemáticos (Em) propuestos por los textos escolares para el desarrollo del concepto de volumen.

Em1: la función que relaciona la variable x (lado del cubo) con el volumen del mismo, está dada por la ecuación: $y = x^3$.

Em2: Como muchas funciones de volumen se pueden expresar con sólo un coeficiente y una variable al cubo, entonces se concluye que: las funciones que se expresan como el producto de una constante por una variable independiente elevada al cubo, son funciones cúbicas puras y se representan así: $y = ax^3$.

Em3: Consideremos los siguientes cubos de lados x, a los cuales en el primer caso se le ha agregado un sólido de volumen fijo d
Luego, en este caso, el volumen total del sólido resultante es: $v(x) = x^3 + d$.

Em4: En el segundo caso, al cubo de lado x, se le ha quitado un sólido de volumen fijo d. Luego, en este caso, el volumen del sólido resultante es: $v(x) = x^3 - d$.

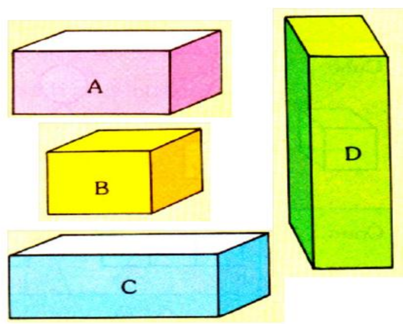
En estos enunciados se puede evidenciar que la única relación que se considera es la del volumen de un cubo con la función cúbica, pues todos muestran únicamente situaciones relacionadas con las funciones cubicas, aunque con ellos es posible dar solución a las tareas planteadas, se observa cómo se deja de lado los otros campos en los cuales puede actuar el volumen y las relaciones establecidas en apartados anteriores como volumen y capacidad, volumen y masa, y volumen y peso.

Haciendo una comparación entre los pocos Enunciados matemáticos (Em), planteados por la guía escolar y relacionándolos con la OMr, la guía escolar está falta en su mayoría del logos, dado que en sus enunciados forman parte de las maneras de hacer un cálculo matemático y no hay preguntas que puedan cuestionar al estudiante explorando las respuestas posibles del como, por qué y para qué aprende esos contenidos matemáticos, provocando un aprendizaje bastante segmentado. Los textos analizados se enmarcan en un entorno puramente numérico, lo que nos permite ver procesos básicamente algorítmicos, que no permiten un análisis exhausto del ejercicio a trabajar, donde tiende a ser una mera ejemplificación de lo que se propone para ser abordado como eje problemático o como una manera de hacer emerger algún campo de problemas que pueda soportar con rigor un proceso de estudio medianamente prolongado, estructurado y soportado en las tecnologías que podrían organizar de manera más coherente una OM.

Para poder revisar la ecología presente en la institución escolar sobre el concepto de volumen se hizo necesario además del análisis centrado en el ciclo 8º-9º, revisar lo que se encontraba en los demás ciclos, encontrando que sólo en grado quinto se trabaja algo de la noción de volumen, por lo que incluiremos dicho análisis aquí. De esta manera presentamos algunas tareas mostradas en la guía escolar del grado quinto (5°):

T_1: Observo las cajas y respondo:

- ¿Cuál ocupa mayor espacio?
- ¿Cuáles ocupan el mismo espacio? Justifico cada una de mis respuestas.



Solución: El que ocupa mayor espacio horizontalmente es la caja azul, verticalmente es la caja verde, pero en todo el espacio es la caja verde ya que esta posee una altura mayor que la de la caja azul.

Aparentemente las cajas C y D ocupan el mismo espacio, pues sus tamaños son muy semejantes, comparados con las otras cajas.

T_2: Cada prisma rectangular está formado por centímetros cúbicos. Hallo el volumen de cada uno y completo la tabla:

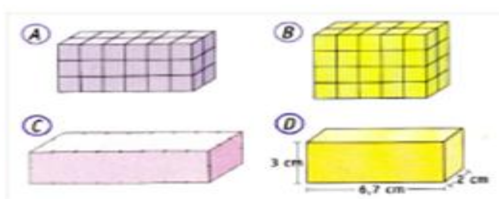
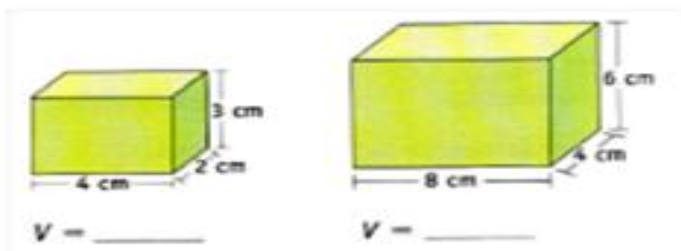


FIGURA	A	B	C	D
Largo				
Ancho				
Alto				
Volumen				

Solución: Para completar la tabla se debe analizar cuántos cubitos tienen las figuras A y B, en el caso de la figura C, se debe mirar en cuántas partes está dividido cada uno de los lados de la caja y en la figura D, sólo se deben transcribir los datos, pues están explícitos, lo cual se enmarcaría dentro de la visión dinámica y estática, pues en algunos casos antes de utilizar el algoritmo matemático se deben buscar estrategias que permitan identificar cada una de las medidas.

FIGURA	A	B	C	D
Largo	$6cm$	$5cm$	$8cm$	$6{,}7\ cm$
Ancho	$2cm$	$2cm$	$3cm$	$2cm$
Alto	$3cm$	$4cm$	$2cm$	$3cm$
Volumen	$36cm^3$	$40cm^3$	$48cm^3$	$40{,}2cm^3$

$T_{3:}$ Si multiplico por dos cada una de las dimensiones de un prisma rectangular. ¿Cuántas veces aumenta su volumen?

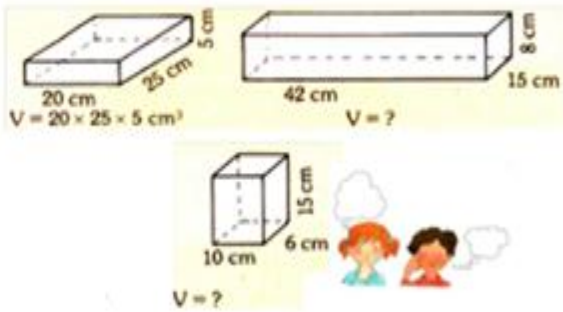


Solución: Inicialmente buscamos el volumen del primer cubo: $V = 4cm\ x\ 2cm\ x\ 3cm = 24cm^3$

Ahora, el volumen del segundo cubo es: $V = 8cm\ x\ 4cm\ 6cm = 192cm^3$

De este modo se observa que el volumen del segundo cubo es 8 veces el volumen del primero. Si multiplico la dimensión (volumen de cada caja) de cada una de las cajas por dos, tendría *48 cm*^{3} *y 384 cm*^{3}, si es cada lado en la primera seria *8 cm, 4 cm* y *6 cm* él $V = 192\ cm^3$ y en la segunda caja son *16 cm, 8 cm* y *12 cm;* $V = 1536\ cm^3$, aun así se conserva que el volumen de la caja grande sea 8 veces mayor que la de la primera. Por lo cual se logra deducir que si aumentamos *n* veces el tamaño de cada uno de los lados de un cubo, el volumen del cubo resultante será n^3 veces mayor que el primero.

T$_4$: Encuentro el volumen de cada uno de los gráficos que aparecen a continuación:



Solución: Aplicamos la formula $V = largo\ x\ ancho\ x\ alto$

$V_1 = (20\ x\ 25\ x\ 5)cm^3 = 2500\ cm^3$

$$V_2 = (42\ x\ 15\ x\ 8)cm^3 = 5040\ cm^3$$

$$V_3 = (10\ x\ 6\ x\ 15)\ cm^3 = 900\ cm^3$$

En donde lo único que hay que tener presente es el proceso algoritmico, pues para cualquiera de los graficos que muestren y que sean semejantes a estos, el procedimiento será el mismo.

T$_5$: Realizo las siguientes conversiones teniendo en cuenta los múltiplos y submúltiplos:

a. $4\ KL =$ ______ L
b. $2\ DL =$ ____L
c. $9\ cL =$ ____DL
d. $25\ DL =$ ____cL

Solución: Para realizar las conversiones se debe tener en cuenta la siguiente tabla:

kilolitro	hectolitro	decalitro	litro	decilitro	centilitro	mililitro
kL	HL	DL	L	dL	cL	mL
1.000 L	100 L	10 L	1 L	0,1 L	0,01 L	0,001 L

a. Como KL está a 3 espacios a la derecha de L, multiplico por 1000,
   $4x\ 1000 = 4000$, por lo tanto $4KL = 4000L$
b. Como DL está a 1 espacio a la derecha de L, multiplico por 10, $2\ x\ 10 = 20$, por lo tanto $2DL = 20L$
c. Como cL está a 3 espacios a la izquierda de DL, divido por 1000,
   $9/\ 1000 = 0{,}009$, por lo tanto $9cL = 0{,}009\ DL$

d. Como DL está a 3 espacios a la derecha de cL, multiplico por 1000,

$25 \ x \ 1000 = 25000$, por lo tanto $25DL = 25000cL$

Las tareas propuestas muestran que más que establecer la relación entre la función cúbica con el volumen de un cubo, se debe hacer un análisis e involucrar otras relaciones como por ejemplo las conversiones de medidas. Además se permite hacer análisis sin necesidad de hacer uso de fórmulas del ocupe de espacios de cada uno de los cuerpos. Por todo esto, podemos observar allí, la tendencia hacia la visión dinámica del volumen, la cual nos aleja un poco de mirarlo como simples fórmulas, a las cuales hay que obedecer.

Elementos tecnológico-teóricos

A continuación daremos unas definiciones, teoremas y características claves que están en la guía escolar con respecto al volumen y que permiten el uso de determinada técnica al momento de solucionar un problema matemático.

Enunciados matemáticos (Em) propuestos por los textos escolares para el desarrollo del concepto de volumen.

Em$_1$: La materia ocupa un lugar en el espacio, el cual se mide en tres dimensiones. Este espacio tridimensional ocupado por una cantidad de materia se conoce como volumen, también el aire y cualquier gas ocupa un volumen.

Em$_2$: las unidades de volumen sirven para medir el espacio que ocupa un cuerpo. Las unidades de volumen más usadas son: el metro cubico (m^3) y el centímetro cubico (cm^3).

Em$_3$: para medir el volumen de los líquidos y los gases también puedo fijarme en la capacidad del recipiente que los contiene, utilizando las unidades de capacidad, especialmente (L) y el mililitro (mL). Existe una equivalencia entre las unidades de volumen y las de capacidad.

$1L = 1dm^3$ $\qquad$ $1mL = 1cm^3$

Em$_4$: las unidades de capacidad sirven para medir la cantidad de liquido que cabe en un recipiente.

Entre los pocos Enunciados matemáticos planteados por la guía escolar y relacionándolos con la OMr, encontramos que hay pocas definiciones para el concepto de volumen, aunque se observa una posible relación de este concepto matemático con la física (masa y capacidad), pero no existe una distinción clara entre ellas como se plantea en la OMr.

Sin embargo aquí se observa que a diferencia de los enunciados matemáticos presentados en la guía del grado noveno, aquí hay una mayor aclaración del concepto de volumen y se tienen en cuenta contextos y relaciones diferentes a la de la función cúbica con el volumen de un cubo, lo cual nos permite alejarnos un poco de la visión estática que nos muestra una mera fórmula que se debe obedecer a través de procesos algorítmicos.

4.3 Contraste entre los documentos de ley, el plan de área y la guía escolar.

Se puede observar que entre los diferentes pensamientos no existe una relación en cuanto al concepto de volumen, no especifica la conexión entre representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes, las propiedades y relaciones geométricas, la presentación de información, las expresiones algebraicas con el cálculo y el uso de técnicas e instrumentos de medidas del volumen. Lo que por el momento se podría decir, es que los estándares no dejan percibir de manera explícita cómo podría hacerse ese trabajo de manera integrada.

De acuerdo a la coherencia vertical, es claro que se conserva la idea de trabajar la propiedad de medir y calcular el volumen de una forma integrada en el aula de clases con los estudiantes, indicando un buen planteamiento que va en contra de los fenómenos como la atomización y el autismo temático en la enseñanza. Sin embargo no sucede lo mismo en la coherencia horizontal ya que no hay una integración clara entre los diferentes pensamientos y además no hay una propuesta clara para instaurar las conexiones de las competencias de cada uno de los conocimientos, los procesos y los contextos, de tal manera que no es posible por el momento determinar el modelo epistemológico de referencia para introducir el volumen en la escuela que exigirá un análisis más detallado en el desarrollo de este trabajo. Con lo anterior podemos decir que este planteamiento apunta hacia una visión estática del concepto de volumen ya que lo toman como un objeto matemático de cálculo, de tal manera que puede generar posibles implicaciones en la enseñanza como que no se movilicen relaciones del volumen con otros conceptos matemáticos (integral, limites, axiomática y funciones), física (capacidad, masa y peso) y fortalecer sus definiciones.

Presentamos un contraste entre los contenidos propuestos en los documentos de carácter oficial, el plan de área para el grado 9º y la guía escolar del mismo grado para determinar la presencia o no, de la relación existente en el desarrollo del volumen, lo cual se observa en la siguiente tabla:

PLAN DE ÁREA DE MATEMÁTICAS: Temas y subtemas	GUÍA ESCOLAR GRADO 9º: Contenido
Funciones reales	
Función polinómica: Función constante Función Lineal Función cuadrática Función Cúbica	Función Función constante Función lineal. Función afín Rectas paralelas y rectas perpendiculares. Aplicación función afín. Función cuadrática. Aplicación: Función cuadrática. Función cúbica Función volumen de un cubo Función cúbica pura Funciones de la forma $y = x^3 \pm d$
Función trascendente: Función exponencial Función logarítmica	• Funciones exponenciales Función exponencial de las graficas Identificación de grafica de funciones exponenciales. Transformaciones de funciones exponenciales. Crecimiento exponencial. Decrecimiento exponencial. • Funciones logarítmicas Ecuaciones logarítmicas Aplicaciones de las ecuaciones logarítmicas. Graficas de funciones logarítmicas.

Tabla 7. Contraste entre los contenidos propuestos por el plan de área y la guía escolar.

Al contrastar los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN 2006), el plan de área y la guía escolar del grado noveno (9°), observamos que hay una relación entre algunos de los contenidos que han sido propuestos, sin embargo también es de notar que en el plan de área y la guía escolar hay contenidos que no están establecidos en los Estándares y los Lineamientos para este grado. No obstante, se presenta de nuevo la "atomización de la enseñanza", pues no se observa manera clara la conexión que se hace entre los contenidos de un periodo a otro.

Sin embargo, se pone en evidencia la presencia de las dos visiones estática y dinámica del concepto de volumen, mostrando que es pertinente hacer observaciones y análisis más minuciosos para poder entender la razón de ser de estas. Y aunque se pensaba que no existía inicialmente la visión dinámica, queda puntualizado que hay otras relaciones establecidas y que esa visión estática es simplemente un caso particular de aquellas relaciones.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

En este trabajo, el análisis ecológico del concepto de volumen en la institución escolar ha mostrado que se requieren estudios empíricos que puedan contrastar las OMr con las OMp, debido a que la forma en que se está relacionando el volumen de un cubo con la función cúbica, no ha sido en general la más eficaz, ya que la relación establecida no abarca el concepto trabajado de otras figuras geométricas y mucho menos la de los poliedros regulares.

La elaboración de la OMr pone en evidencia la comodidad en algunos casos de introducir el volumen desde una visión dinámica, estableciendo relaciones con la matemática en la actualidad (axiomática, limite y funciones cubicas) y la física (capacidad, masa, peso, principio de Arquímedes).

Por otra parte, en el análisis del plan de área es necesario que en las instituciones se piensen estos planes como elementos importantes en donde los docentes puedan conocer el por qué y él para qué se están enseñando las obras matemáticas en el aula de clase, lo cual implicaría diseñar y experimentar la forma como este concepto se abarcaría y si la estructura algebraica a la que se está sometiendo puede ser suficientemente potente para responder un sin número de cuestiones que por el momento sólo pueden suponerse, dada la amplitud de problemáticas a las que habría que responder.

Asimismo, es necesario que al momento de elaborar el plan de área, las instituciones escolares puedan plantear una OM que dé cuenta de los diferentes contenidos, donde el docente participe en la estructuración del cómo, cuándo y por qué se hace necesario enseñar ciertas OM donde no haya una atomización ni un autismo en la enseñanza. En la organización del plan de área se hace necesario, tener en cuenta los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas para mirar en qué medida pueden soportar un trabajo coherente con las cuestiones a las que responde la OM relacionada con el volumen u otros conceptos matemáticos propuestos como objeto de enseñanza.

Cuando hablamos de la “guía escolar grado 9°”, se puede decir que la manera como aborda el volumen con las diferentes tareas, no es tan evidente para el estudiante, pues estas ponen de ante mano las diferentes técnicas, como la función cúbica, lado, ancho y alto, y las propiedades de la radicación como suficientes para que el estudiante aprenda el concepto de volumen, haciéndose evidente la falta de un logos que amplié la OMp, planteándose la necesidad de abordar el volumen desde un punto de vista no solo estático sino también estableciendo relaciones con otros conceptos mencionados en el desarrollo de este informe. En la guía del grado 5° se aborda el concepto de volumen con algunos elementos de la física (masa, capacidad), pero no se establece una claridad cognitiva de lo que son estos conceptos, su relación con el volumen y qué los hace diferentes.

Un aspecto igualmente significativo en el plan de área y la guía de texto, es el desglose de los contenidos matemáticos en “temas” sobre los que se concentra la atención, sin la posibilidad de establecer relaciones que apunten a identificar OM local o regional (autismo temático). Así pues desde la TAD, el análisis muestra que existen limitaciones en cuanto a la OMp, debido a que, en gran medida ha perdido su razón de ser porque no se evidencia claramente cómo desarrollar el concepto de volumen, dejando entre ver los fenómenos mencionados de atomización de la enseñanza y el autismo temático. De esta manera consideramos que con todos los factores que limitan la emergencia de una Obra Matemática no solo del concepto de volumen, sino en general, es de gran importancia realizar modificaciones en nuestro sistema curricular, de tal forma que no solo se piense en los temas a trabajar sino también en un currículo que incluya preguntas problematizadoras con una razón de ser.

En la OMr se plantearon tres preguntas relacionadas con el volumen; ¿Qué papel desempeña la construcción del concepto de volumen a través de la historia y cuál puede ser su aporte a la construcción de una OMr?, ¿Se enseña el concepto de volumen relacionado con capacidad, masa y peso?, ¿Se establecen relaciones entre el concepto de volumen, las funciones cúbicas y los objetos tridimensionales? Para las tres preguntas se evidencia unas pocas relaciones que se ven reflejadas en la OMp, específicamente en la guía de texto aunque esta no es planteada en el plan de área, permitiéndonos observar que puede existir un posible cambio en el tratamiento de las OM en la institución escolar, teniendo en cuenta algunos momentos históricos del volumen.

Por otro lado, debido a que no existen una variedad de modelos para abordar el volumen desde un entorno que no sea netamente algebraico (reemplazo de fórmulas), se cree necesario que no se deben descartar investigaciones o acercamientos que se han desarrollado por autores como Mariana Sáiz, quien enriquece cada día la red de definiciones, significados y relaciones que conforman la OM de volumen.

Después de todo, podemos decir que para estudiar y enseñar una OM en general, se debe inicialmente plantear interrogantes del tipo:

- ¿Para qué, por qué y cómo fue creada? Es decir ¿Cuál es su razón de ser?
- ¿Cuáles serían las posibles técnicas, y elementos teóricos y tecnológicos con los cuáles se pueden resolver los diferentes problemas?

Permitiéndonos no ser limitados a un plan de área rígido, estático y sin cuestionamientos, o a unos texto guía, que replican modelos de enseñanza que están cargados no sólo de errores, sino de ideas ingenuas y procesos netamente algorítmicos, aportando a una construcción de las matemáticas con un valor formativo y edificador para el educando.

De esta manera este análisis presenta la propuesta del Ministerio de Educación a través de los Lineamientos Curriculares (1998) y Los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) y de la institución escolar por medio del plan de área y en este caso la guía escolar que es diseñada por la misma institución abarcando su propia pedagogía, dejando abierto un interrogante sobre cuáles son las posibilidades o limitaciones que se presenta en el aula de clase en el desarrollo de la OM.

BIBLIOGRAFÍA

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas*. Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona.

Bastán, M. Y, Buffarini, F. Y, Licera, M. et Rosso, F. (2008). *La problemática del profesor de matemática vinculada con la formación inicial y continua*. Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas Físico Química y Naturales. Universidad Nacional de Río Cuarto. Córdoba. Argentina.

Boltianskii, V. (1978). *Hilbert's Third Problem (Scripta series in mathematics).* VH Winston & Sons. Washington DC. EE.UU.

Cid, E. & Bolea, P. (2007). *Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico.* Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Chevallard, Y, Bosch, M. et Gascón, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Chevallard, Y. (1999) *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico.* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266.

García, J. J. & Calvo O. L. (2007). *La medida de sólidos en los libros XI y XII de los Elementos de Euclides*. Tesis de pregrado. CENDOPU, Universidad del Valle, Cali.

Gascón, J. (1998). *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*, Recherches en Didáctica des Mathématiques, Vol.18/1, nº52, pp. 7-33. Universidad Autónoma de Barcelona.

Gascón, J. (2001): *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matematica Educativa: *RELIME* (pendiente de publicación).

Gascón, J. (2002): *El problema de la educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas.* Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española, 5/3, 673-698.

Gascón, J. (2003). *Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria I: desaparición escolar de la razón de ser de la geometría*. Suma Madrid, n. 44, p. 25-38

Gascón, J. & Bosch, M. (2009). *Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria*. En González, María José; González, María Teresa; Murillo, Jesús (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 89-114). Santander: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Gillings, R. (1982). *Mathematics in the Time of the Pharaohs.* Cambridge, Mass and Lond: Mit press (Reprint New York: Dover).

ICFES SABER. (2013). *Resultados Pruebas Saber Grado Noveno*. Recuperado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteEstablecimiento.jsp.

Kline, M. (1990). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press Paperback. New York. Toronto.

Latorre, H. (2009). *Sistema métrico en el desarrollo del pensamiento matemático.* CENDOPU, Universidad del Valle, Cali.

Marsden, E. & Tromba, A. (1991). *Vector calculus*. Publicada originalmente en inglés por W. H. Freeman and Company, Nueva York.

MEN, (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá D.C.– Colombia. Ed. Magisterio.

MEN, (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá D.C. Colombia. Ed. Magisterio.

Rey M. & Narváez, J. L. (2010). *Aportes a la construcción de la noción de estimación a partir de la matemática de los albañiles*. CENDOPU, Universidad del Valle, Cali.

Sáiz, M. (2002). *El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto matemático volumen y su enseñanza.* Tesis de doctorado. México: DME, Cinvestav

Sáiz, M. (2005).). *Transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del volumen.* Documento de trabajo de la autora. Disponible en: http://es.scribd.com/doc/52362622/Una-discusion-sobre-el-concepto-matematico-de-volumen-con-fines-didactico.

Sáiz, M. (2007). *El volumen ¿Por dónde empezar?* Texto que acompaña a la conferencia magistral. Disponible en: http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf. Versión corregida en 2013.

ANEXOS

Anexo 1: Funciones cubicas relacionados con el volumen de un cubo.

GUÍA - TALLER Nº. 17 FUNCIONES CÚBICAS

Tiempo previsto: La semana número 17 del ___al ____ de ____Horas de trabajo: **4**

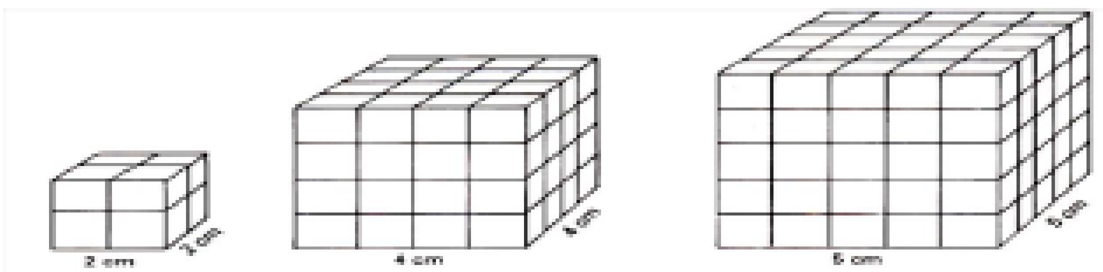
ACTIVIDAD DE MOTIVACIÓN:

- Un caracol sube por una pared vertical de 5 metros de altura. Durante el día sube 3 metros, pero durante la noche se queda dormido y resbala 2 metros. ¿En cuántos días subirá la pared?
- Un enfermo debe tomar una aspirina cada media hora. ¿En cuánto tiempo se tomará 10 aspirinas?

PROPÓSITO EXPRESIVO: Que yo analice en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones especificas pertenecientes a familias de funciones polinomicas (lineales, cuadráticas y cúbicas).

INDICADORES DE DESEMPEÑO: Comprehendo eficazmente enunciados de los problemas matemáticos que involucren el análisis gráfico de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Función volumen de un cubo
Considere los siguientes cubos, con la longitud del lado dado.



ANALIZO
¿Cómo se halla el volumen de cada uno de los cubos?
Y si se conoce que el lado de un cubo es 1, ¿cómo se halla el volumen de ese cubo?
¿Habrá alguna función que relacione el lado de un cubo con su correspondiente volumen?

¿En qué conjunto numérico se puede definir esa función? ¿En los enteros? ¿En los enteros positivos? ¿En los enteros negativos? ¿En los reales? ¿Por qué?

Observe que el volumen para nuestro primer cubo será:
$v = 2.2.2 = 2^3 = 8\ Cm^3$
Para el segundo cubo será:
$v = 4.4.4 = 4^3 = 64\ Cm^3$
Para el tercer cubo será:
$v = 5.5.5 = 5^3 = 125 Cm^3$
¿Cuál sería el volumen de un cubo de lado x?

De acuerdo con los ejemplos podemos concluir que la función que relaciona la variable x(lado del cubo) con el volumen del mismo, está dada por la ecuación:
$y = x^3$
Esa función es una función cúbica.

Ejemplo
Cuál es el volumen de un cubo de lado: a. 7cm b. 2m

Solución: a. El volumen de un cubo es:
$v = x^3$
$v = (7cm)^3$
$v = 343cm^3$

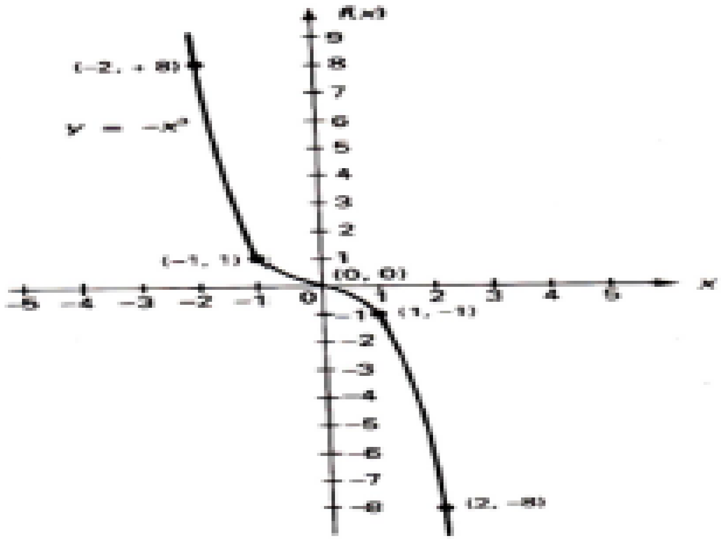
Solución: b. El volumen de un cubo es:
$v = x^3$
$v = (2cm)^3$
$v = 8cm^3$

Y ahora lo intento
Cuál es el volumen de un cubo de lado:
a. 3m b. 6cm

Anexo 2: Relación entre la función cubica y el volumen de un cubo.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^3$							

y localicemos dichos puntos en el plano:



Observe que ésta es la misma gráfica de $y = x^3$ pero reflejada con respecto al eje y.

Y ahora lo intento

Completo la siguiente tabla y represento su gráfica.

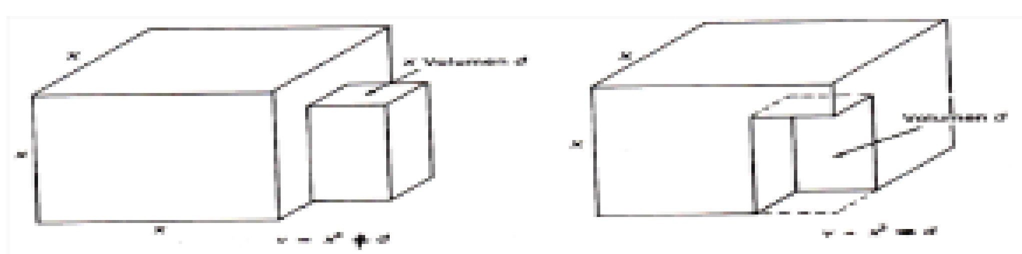
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2x^3$							

Compare la gráfica resultante con la gráfica inicial $f(x) = x^3$

¿Qué se concluye? El coeficiente tiene algún efecto sobre la gráfica? Explique y compruebe.

Funciones de la forma $Y = x^3 \pm d$

Consideremos los siguientes cubos de lados x , a los cuales en el primer caso se le ha agregado un sólido de volumen fijo d.
Luego, en este caso, el volumen total del sólido resultante es : $v(x) = x^3 + d$



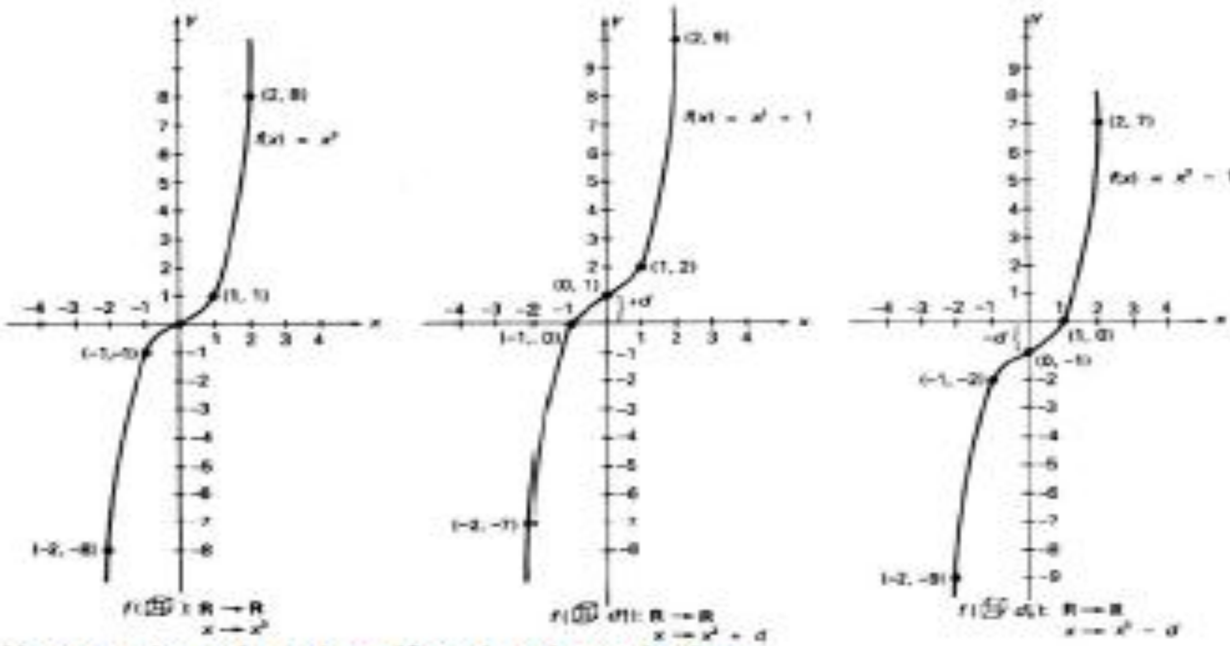
En el segundo caso, al cubo de lado x, se le ha quitado un sólido de volumen fijo d. Luego, en este caso, el volumen del sólido resultante es: $v(x) = x^3 - d$

Estos ejemplos nos permiten deducir dos nuevas funciones: $y = x^3 + d$ y $y = x^3 - d$ cuyos pares ordenados se obtienen a partir de los pares ordenados de $y = x^3$, sumando o restando una cantidad constante d, a la segunda componente de cada par.

Por ejemplo, si $d = 1$, se tiene: (realiza proceso en el cuaderno)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^3	-27	-8	-1	0	1	8	27
x^3+1	-26	-7	0	1	2	9	28
x^3-1	-28	-9	-2	-1	0	7	26

Anexo 3: Tareas de la funcion cubica relacionadas con el volumen de un cubo.



Veamos qué sucede con las gráficas de cada una de ellas:

Observe que la gráfica de $y = x^3 + 1$, se desplaza 1 unidad hacia arriba; y la de $y = x^3 - 1$, se desplaza 1 unidad hacia abajo. En general:

> La gráfica de $y = x^3 + d$, se desplaza una distancia d hacia arriba y la gráfica de de $y = x^3 - d$ se desplaza una distancia d hacia abajo.

Ejercito

Trazo la grafica de las siguientes funciones (también $y = x^3$ en el mismo plano), observo y escribo lo que sucede.

1. $y = x^3 + 3$
2. $y = x^3 - 3$
3. $y = x^3 + 2x$
4. $y = x^3 - 2x$
5. $y = (x - 2)^3$
6. $y = (x + 2)^3$
7. $y = (x - 3)^3$
8. $y = (x + 3)^3$

Pienso Criticamente

Dibujo un sólido cuyo volumen sea el formado por un cubo de lado x y un cubo de lado x + 3 . ¿Cuál es su volumen?

PARA INDAGAR

Encuentro el volumen del cubo cuyo lado mide:

1. $\frac{1}{2}$ cm
2. $\frac{2}{3}$ cm
3. 8 cm
4. 10 cm
5. $\sqrt[3]{2}$ cm
6. $\sqrt[3]{5}$ cm

Encuentro el lado de un cubo cuyo volumen es:

7. 1,000 cm^3
8. 216 cm^3
9. $\frac{1}{64}$ cm^3
10. 5 cm^3
11. 3 cm^3
12. 125 cm^3

Trazo la gráfica de las siguientes funciones cúbicas:

13. $y = x^3 + 5$
14. $y = x^3 + 7$
15. $y = x^3 - 7$
16. $y = 2x^3 - 3$
17. $y = x^3 + 2x$
18. $y = x^3 - 2x$
19. $y = x^3 + x^2$
20. $y = x^3 - x^2$

GRADO 5º

Anexo 4: Medidas de volumen

TALLER # 35

INSUMO O NOMBRE DEL TALLER: *MEDIDAS DE VOLUMEN*

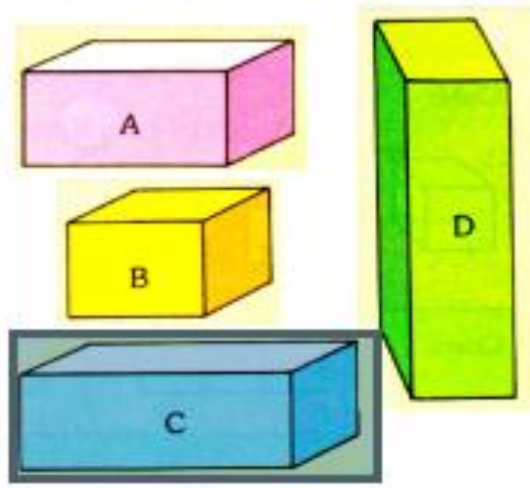
TIEMPO PREVISTO:(Semana **TREINTA Y CINCO** del__al__de_______Horas de trabajo:4)

FASE AFECTIVA: ACTIVIDAD DE MOTIVACIÓN: *OTRAS CAJAS*

Observo las cajas y respondo:

- ¿Cuál ocupa mayor espacio?
- ¿Cuáles ocupan el mismo espacio?

Justifico cada una de mis respuestas.



PROPÓSITO EXPRESIVO:

- Que yo identifique las unidades de volumen y realice conversiones entre ellas.

INDICADOR DE DESEMPEÑO:

- Formulo y resuelvo problemas de las unidades de medida (longitud, capacidad, superficie, volumen, peso y tiempo) que corresponden al sistema métrico decimal en contextos determinados.

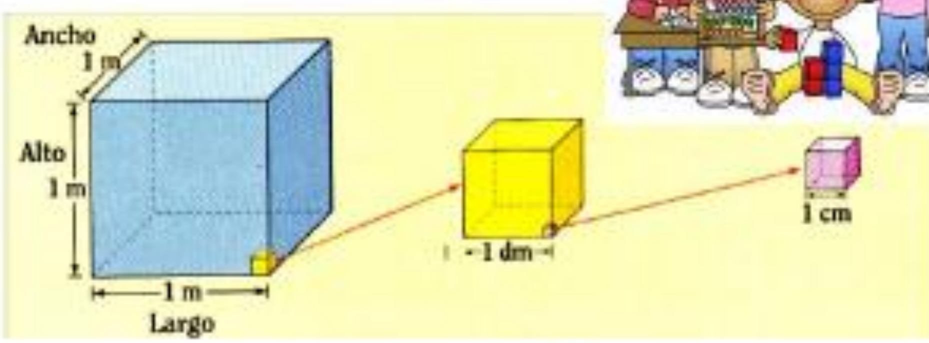
FASE COGNITIVA: CLARIDAD COGNITIVA

La materia ocupa un lugar en el espacio, el cual se mide en tres dimensiones. Este espacio tridimensional ocupado por una cantidad de materia se conoce como **volumen.** Un simple grano de arena tiene volumen, lo mismo que una manzana, un ladrillo, una persona, una montaña y un planeta.

También el aire y cualquier gas ocupan volumen. **Ejemplo:** Cuando se respira, se inhala aire y a medida que se llenan los pulmones, se siente y se ve cómo el volumen del pecho aumenta.

Anexo 5: Unidades de volumen.

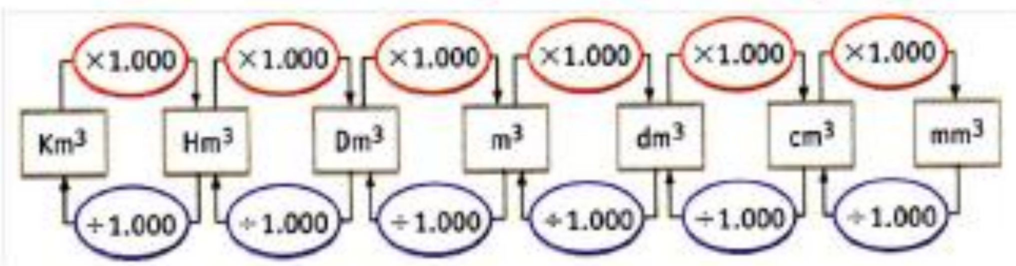
Las unidades de volumen sirven para medir el espacio que ocupa un cuerpo. Las unidades de volumen más usadas son: el metro cúbico (m^3) y el centímetro cúbico (cm^3).



Un cubo que mide 1 m de largo, 1 m de ancho y 1 m de alto es un metro cúbico (1 m^3).	Un cubo que mide 1 dm de largo, 1 dm de ancho y 1 dm de alto, es un decímetro cúbico (1 dm^3).	Un cubo que mide 1 cm de largo, 1 cm de ancho y 1 cm de alto, es un centímetro cúbico (1 cm^3).

UNIDADES DE VOLUMEN

Cada unidad de volumen en 1000 veces mayor que la unidad inmediata inferior y 1000 veces menor de la unidad inmediata superior, como lo describe el siguiente gráfico.



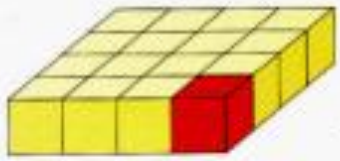
Ejemplo: Convierto 2 metros cúbicos en centímetros cúbicos.

$$2\ m^3 \times 1.000 \times 1.000 = 2\ m^3 \times 1.000.000 = 2.000.000\ mm^3.$$

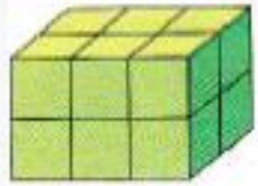
ACTIVIDAD # 56

1. Si cada  es un centímetro cúbico. ¿Cuántos cm^3 tiene cada figura?

Anexo 6: Planteamiento de tareas; unidad de medida.



_____ cm³



_____ cm³

2. Realizo cada conversión indicada:

- 3,5 m³ = _______ = _______ cm³
- 48 Hm³ = _______ = _______ m³
- 7,65 cm³ = _______ = _______ mm³
- 2.328 m³ = _______ = _______ Hm³
- 45,9 Hm³ = _______ = _______ Km³
- 328 mm³ = _______ = _______ cm³

3. Cada prisma rectangular está formado por centímetros cúbicos. Hallo el volumen de cada uno y completo la tabla.

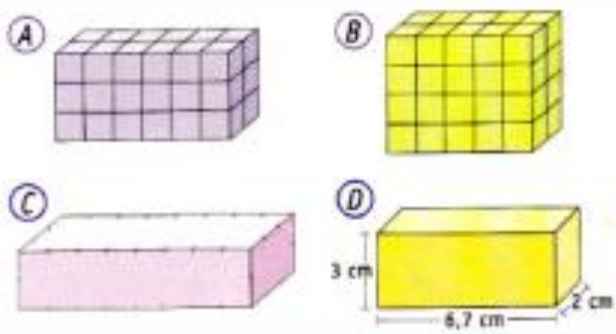
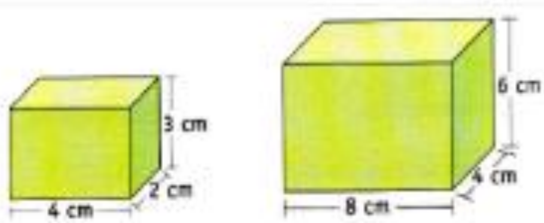


FIGURA	A	B	C	D
Largo				
Ancho				
Alto				
Volumen				

4. Si multiplico por dos cada una de las dimensiones de un prisma rectangular, ¿Cuántas veces aumenta su volumen?



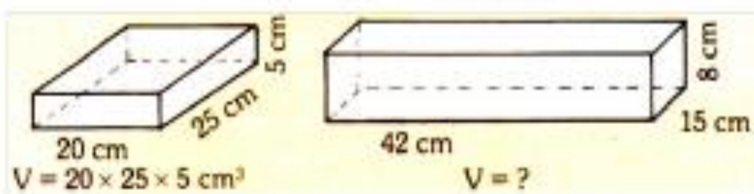
V = _______ V = _______

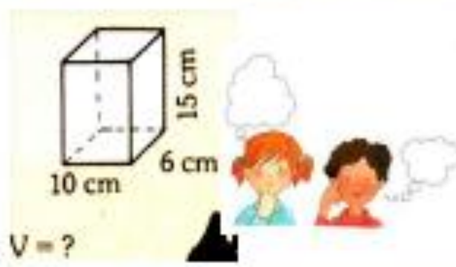
Anexo 7: Calculo el volumen de un prisma.

5. Resuelvo cada uno de los siguientes problemas:

- ✓ Hallo el volumen de un prima rectangular que tiene las siguientes medidas:
  Largo: 12 cm
  Ancho 2/3 de lo que mide el largo
  Alto: 0.0035 Dm.
- ✓ El volumen de un prisma rectangular es de 432 cm^3. Si de altura mide 9 cm, ¿cuáles pueden ser sus medidas de largo y de ancho?

6. Encuentro el volumen de cada uno de los gráficos que aparecen a continuación:





A ESCRIBIR

ALGUNOS VOLÚMENES EN EL CUERPO HUMANO

El cuerpo humano es la estructura física y material del ser humano. A continuación se presentan los volúmenes de algunos órganos principales de nuestro cuerpo como el corazón, los pulmones y los riñones.

Volumen Pulmonar Corriente: volumen de aire inspirado o espirado en cada respiración normal; es de unos 500 mL aproximadamente.
Capacidad Inspiratoria (CI): Es la cantidad de aire que una persona puede respirar comenzando en el nivel de una espiración normal y distendiendo al máximo sus pulmones (3,500 mL aproximadamente).
Volumen de los Riñones: Diariamente los riñones procesan unos 200 litros de sangre para producir hasta 2 litros de orina.
Volumen del corazón: El volumen total varía entre 500 a 800 mililitros, siendo más importante el volumen de eyección del ventrículo izquierdo.

- Explico con mis propias palabras lo que indica cada uno de los volúmenes nombrados en esta lectura.

INDAGO

Consulto 5 productos del mercado, que se vendan teniendo como referencia una medida de volumen. Luego, los dibujo en mi cuaderno.

Anexo 8: Medidas de Capacidad.

TALLER # 36

INSUMO O NOMBRE DEL TALLER: *MEDIDAS DE CAPACIDAD.*

TIEMPO PREVISTO: (Semana **TREINTA Y SEIS** del__al__de_______Horas de trabajo: 4)

FASE AFECTIVA: ACTIVIDAD DE MOTIVACIÓN: *BOTELLAS*

Algunas bebidas vienen en botellas. Observo con atención las de la imagen y respondo:

- ✓ ¿En cuál de las dos botellas creo se puede envasar más líquido? Explico mi respuesta.

PROPÓSITO EXPRESIVO:

- Que yo identifique las unidades de capacidad y realice conversiones entre ellas.

INDICADOR DE DESEMPEÑO:

- Formulo y resuelvo problemas de las unidades de medida (longitud, capacidad, superficie, volumen, peso y tiempo) que corresponden al sistema métrico decimal en contextos determinados.

FASE COGNITIVA: CLARIDAD COGNITIVA

Para medir el volumen de los líquidos y los gases también puedo fijarme en la capacidad del recipiente que los contiene, utilizando las unidades de capacidad, especialmente el litro (L) y el mililitro (mL). Existe una equivalencia entre las unidades de volumen y las de capacidad:

$$1\ L = 1\ dm^3 \qquad 1\ mL = 1\ cm^3$$

En la siguiente **tabla de posición** observo el nombre, la abreviatura y el valor de los **múltiplos (kL,hL,daL) y submúltiplos (dL, cL, mL)** más usuales del **litro**. En algunos libros el hectolitro se abrevia como HL y el decalitro como DL.

kilolitro	hectolitro	decalitro	litro	decilitro	centilitro	mililitro
kL	HL	DL	L	dL	cL	mL
1.000 L	100 L	10 L	1 L	0,1 L	0,01 L	0,001 L

Como puede observarse en la tabla de posición, el valor de cada unidad es 10 veces mayor que el valor de la unidad situada a su derecha. Es decir:

1 kL = 10 hL = 100 daL = 1.000 L = 10.000 dL = 100.000 cL = 1.000.000 mL.

Anexo 9: Unidades de capacidad.

Para convertir una unidad determinada en otra pedida, **situada a su derecha** (menor), tengo que **multiplicarla** por la unidad seguida de tantos ceros como posiciones hay, en la tabla, entre la unidad determinada y la pedida.

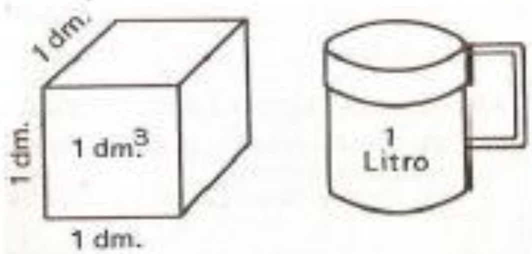
Ejemplo: Convierto 7 **HL** en **dL**.

Como desde **HL** a **dL** hay 3 posiciones, hacia la **derecha**, tengo que **multiplicar** por 1000. Por lo tanto, 7 **hL** = 7 x 1.000 = 7.000 **dL**.
Lo que equivale a correr la coma 3 lugares a la derecha: 7,0000 X 1.000 = 7.000,0 (los ceros a la derecha de la coma de decimales no tienen valor y puedo poner los que necesitemos).

RECUERDO: Las unidades de capacidad sirven para medir la cantidad de líquido que cabe en un recipiente.

1Litro = 1 dm^3

1 Litro = 1000 cm^3



Otras medidas de capacidad. Algunos elementos como la gasolina y el vino se venden teniendo como referencia el galón y la botella, que son otras medidas de capacidad.

1 botella= 720 cm^3

1 garrafa= 20 Litros

1 galón = 3600 cm^3 = 5 botellas

ACTIVIDAD # 57

1. Realizo las siguientes conversiones teniendo en cuenta los múltiplos y submúltiplos del litro.

- 4 kL = ________L
- 8 cL= ________L
- 5HL= ________L
- 2 DL= ________L
- 7 mL= ______dL
- 3 dL= _______mL
- 9 cL= ________DL
- 5 kL= _______mL
- 6 dL= ________kL
- 25 DL = ______cL
- 256 dL= ______L

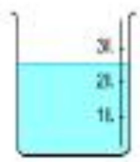
Anexo 10: Calcular la capacidad del recipiente.

2. El consumo de agua de una vivienda viene expresado en m^3.

Estos son los consumos de agua de la familia Rodriguez, correspondiente a los meses de agosto y septiembre.

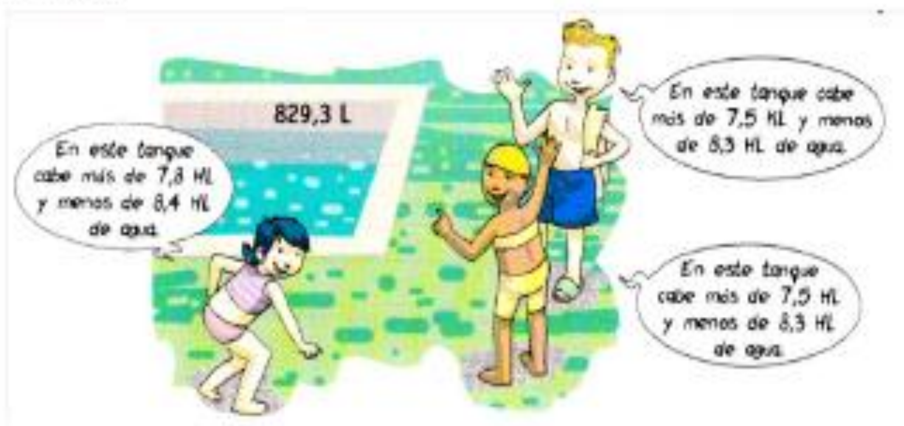
-¿Cuántos litros de agua gastó la familia Rodriguez en los dos meses juntos?
-¿Cuál fue la diferencia de la cantidad de agua consumida en los dos meses?
- Si cada m^3 de agua tiene un costo de $1145,23, ¿cuánto pagó la familia Rodriguez por el consumo de agua en cada mes?

3. Hallo la cantidad de liquido que contiene la vasija.



El número de Litros es [ ] L.

4. Observo la capacidad del tanque. Descubro cuál niño dice la verdad. Justifico mi respuesta.



5. Resuelvo los siguientes problemas:

- En una garrafa vacia en la que caben 20 litros, echo el total de 15 botellas de un tercio de litro llenas. ¿Cuántos litros hay en la garrafa?
- Si una cucharada sopera equivale a 12 mL y un enfermo toma una cucharada sopera de jarabe tres veces al dia, ¿qué cantidad de jarabe tomará en una semana?
- Una caja de leche tiene 6 tetra-brik de 1 litro. ¿Cuántas cajas necesito para tener 40 litros?