UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRIA FRACTAL

A TRAVÉS DEL TRATAMIENTO DE LA AUTOSIMILITUD

INTEGRANDO UN AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÁMICA

MARÍA CRISTINA CABEZAS ESTERILLA

200529340

LINEA DE FORMACIÓN

TECNOLOGÍAS DE LA COMUNICACIÓN Y LA INFORMACIÓN

DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TICEM

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI 2015

.

UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRIA FRACTAL
A TRAVÉS DEL TRATAMIENTO DE LA AUTOSIMILITUD
INTEGRANDO UN AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÁMICA

MARÍA CRISTINA CABEZAS ESTERILLA

200529340

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE

LICENCIADA EN MATEMÁTICA Y FÍSICA

(PROGRAMA 3487)

Director:

MSc. DIEGO GARZÓN CASTRO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI 2015

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
19 FEB. 2015
Área de Educación Matemática
RECIBIDO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Tenga en cuenta: 1. *Marque con una **X** la opción escogida.* 2. *diligencie el formato con una letra legible.*

TÍTULO DEL TRABAJO:	UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRIA FRACTAL A TRAVÉS DEL TRATAMIENTO DE LA AUTOSIMILITUD INTEGRANDO UN AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÁMICA
Se trata de:	Proyecto [ ] Informe Final [X]
Director:	Diego Garzón Castro
1er Evaluador:	Fernando Angulo Díaz
2do Evaluador:	
Fecha y Hora	Año: 2015 Mes: 02 Día: 17 Hora: 6:00 pm

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
MARIA CRISTINA CABEZAS ESTERILLA	200529340	LICENCIATURA EN MATEMATICA Y FISICA

EVALUACIÓN

Aprobado	X	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año: ______ Mes: ______ Día: ______ Hora: ______

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

FIRMAS:

P/ [firma]	[firma]	
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.

b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.

c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la ***Licencia Creative Commons*** con que se publica.

d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.

e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.

VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN DIGITAL DE OBRAS

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera:

a. Usted otorga **una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE** (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la ***Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia*** cuyo texto completo se puede consultar en http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/ y que admite conocer.

Si autorizo [X] No autorizo [ ]

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala[1]:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA FRACTAL A TRAVÉS DEL TRATAMIENTO DE LA AUTOSIMILITUD INTEGRANDO UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA.

Autores:

Nombre: María Cristina Cabezas Esterilla Firma:
C.C. 29.122.553 cali

Nombre: Firma: ____________________
C.C.

Nombre: Firma: ____________________
C.C.

Fecha: febrero 27 de 2015

(Si desea una versión digital del formulario, una vez esté diligenciado utilice los programas "pdfcreator" o "Dopdf", los cuales le permitirán convertir el archivo a pdf y así podrá guardarlo)

[1] Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios, por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

A mi familia que con una historia de enseñanzas y sacrificio han contribuido desde sus posibilidades para el alcance de esta nueva meta.

A mi Asesor de Trabajo de Grado, *Magíster* Diego Garzón Castro por el apoyo y disponibilidad demostrado para el desarrollo este trabajo y de igual forma a la profesora Marisol Santacruz por sus aportes y al profesor Fernando Angulo por su dedicación y gran colaboración.

A los Amigos, Compañeros y Profesores de la Universidad presentes y ausentes que han sido parte esencial en mi proceso de formación y parte de mi historia de vida.

CONTENIDO

LISTA DE ILUSTRACIONES

RESUMEN

Los desarrollos que se dan en la geometría a partir de propuestas como la de B. Mandelbrot y que dan lugar al desarrollo de estructuras fractales son del interés para que en este trabajo de grado se pretenda abordar la visualización como un proceso que influye en el pensamiento, desde el acercamiento que se hace a la geometría fractal. Particularmente cómo los estudiantes de grado noveno entienden un objeto fractal desde la visualización del mismo, a partir de situaciones didácticas que consideren algunas construcciones que se destacan en el contexto de la geometría fractal, entre las que encontramos el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski y la curva de Koch. Sin dejar de lado la importancia que se le brinda a la llegada de las nuevas tecnologías de la información a las aulas y que en educación podrían ser generadoras de numerosas expectativas respecto al conocimiento.

Palabras claves: fractales, visualización, autosimilitud, ambiente de geometría dinámica, trasformación de semejanza.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado se realiza en el contexto de la Línea de formación de Tecnologías de la Información y Comunicación (TICEM) del Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Cali, Colombia. Tiene como objeto el presentar una secuencia de situaciones didácticas para el tratamiento de la autosemejanza a partir de la visualización que el estudiante hace de un objeto en el contexto de la geometría fractal. Por consiguiente, se desarrolla una perspectiva didáctica fundamentada en elementos de orden epistemológico, cognitivo y didáctico. Dando relevancia a la mediación de instrumentos para el aprendizaje en el aula.

El presente trabajo de grado se enmarca en investigaciones que tienen como temática la geometría fractal y que adoptan una perspectiva didáctica que se fundamenta en la visualización; la cual podría ser interpretada por los estudiantes obteniendo información a través de algunos medios como la búsqueda en Internet, brindando elementos que permitan interpretar lo necesario para la inclusión de la geometría fractal integrando un ambiente de geometría dinámica al aula para favorecer el aprendizaje. Además, desde el contexto de la geometría fractal también se exploran en este trabajo de grado aspectos didácticos para el aprendizaje de la noción de visualización partiendo de problemas propuestos en actividades diseñadas en el contexto fractal y que contemplen situaciones didácticas para ser aplicadas a estudiantes de grado noveno de educación básica.

Para comenzar se aborda el problema de investigación y su contextualización, en el que se presenta la formulación del problema para el que se propone situaciones de diseño que permitan al profesor también mediar desde un ambiente de geometría dinámica como Cabrí Geometry II Plus, posibilitando la interpretación visual al estudiante desde lo experimental de la matemática y los procesos geométricos inmersos en ella a partir, de la validación de conjeturas en un ambiente de geometría dinámica. Asimismo que los objetivos correspondientes.

Más adelante, encontramos el marco teórico considerado en el cual se propone un acercamiento a la geometría de los fractales, tomando en consideración propuestas como las de Moreno-Marin (2002) "experiencia didáctica en matemáticas: construir y estudiar fractales", Estrada (2004) "Geometría Fractal: conceptos y procedimientos para la construcción de fractales" o artículos de educación científica y tecnológica, que acercan a la visualización desde lo didáctico, cognitivo y lo tecnológico en relación con la mediación que se puede generar a partir del uso de papel o del programa Cabri Geometry II Plus en una situación matemática.

Posteriormente se presenta una micro-ingeniería didáctica fundamentada en el diseño de una situación que toma como referente metodológico la noción de situación didáctica desde una orquestación instrumental definiendo tres dimensiones de análisis: epistemológica, cognitivo y didáctico. Por último, es considerado un análisis cualitativo de las interpretaciones particulares que puedan tener los estudiantes sobre una situación diseñada que ha sido contextualizada en la geometría fractal.

1. APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

A continuación se realiza una aproximación al problema de investigación frente al cual este trabajo de grado busca abordar la visualización desde un acercamiento a la geometría fractal.

1.1 PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Según, Spinadel (2008) *"Un fractal es un ente matemático que no se define de la manera habitual como se definen otros conceptos matemáticos. Se caracteriza por una propiedad de invariancia en presencia de "cambios de escala". Esta propiedad se denomina "auto-semejanza" y puede presentarse de maneras y formas muy distintas: en algunos casos, la autosemejanza es matemática exacta y hablamos de "fractales deterministas", mientras que en otros casos, que se encuentran en el mundo real que nos rodea, la auto-semejanza es aproximada.*

Agrega también que *"Los fractales deterministas constituyen un nuevo tipo de Geometría: la* ***Geometría Fractal****, que es, ante todo, un nuevo lenguaje. Mientras que los elementos de nuestra* *bien conocida Geometría Euclidiana son líneas, círculos, esferas, etc., los elementos de la Geometría Fractal escapan a la percepción directa. Ello se debe a que son algoritmos que solamente la computadora puede convertir en formas y estructuras. El principio de auto-semejanza se presenta aproximadamente en la naturaleza: en líneas costeras y en cuencas de ríos, en la formación de nubes y en el crecimiento de árboles, en el flujo turbulento de fluidos y en la organización jerárquica de sistemas vivos" (Citado por Perera et al. (2007)).*

La geometría fractal, la cual puede ser considerada como herramienta para la modelación de fenómenos impredecibles de la naturaleza como por ejemplo aquellos que despertaron interés de Mandelbrot hoy considerado como padre de la geometría fractal, quien según lo citado por Álvarez (2005), A partir de un interrogante como: *¿Cuánto mide realmente la costa de Inglaterra? (Mandelbrot 1977, How long is the coast of Great Britain). Bien, cualquiera que tome un libro de geografía o un mapa va a poder contestar esto sin ningún tipo de problema. Imaginemos que el dato que encontramos es de 2.000 kilómetros. Ahora bien, esos 2.000Km., ¿de donde provienen?, ¿cómo se midieron? Para contestar a esta pregunta se pueden proponer, por ejemplo, tres puntos de vista diferentes:*

1. *Si medimos las costas de Inglaterra desde un satélite, vamos a ver que sus bordes son suaves, armónicos, con líneas casi rectas y ángulos prácticamente redondeados.*

2. *Probemos ahora a medir la misma distancia, pero desde un avión que vuela mucho más bajo que el satélite. ¿Qué pasaría en este caso? Ahora que vemos las cosas con más detalle por estar más próximos, nos damos cuenta que los bordes no eran en realidad tan suaves como se había observado anteriormente, sino que notamos muchas más rugosidades.*

3. *Imaginemos por último un tercer punto de partida, algo extremista, pero igualmente válido. Esta vez no estamos ni en un satélite, ni en el avión; ahora nos encontramos parados sobre la misma costa de Inglaterra con una regla como la que usábamos en la escuela, y nos ponemos a medir roca por roca, rugosidad por rugosidad, detalle por detalle.*

Ilustración 1: Medida de la línea de costa de Inglaterra con detalle.

Como resulta evidente, podemos asegurar que los resultados de las tres mediciones serán en todos los casos diferentes. Cuanto mayor nivel de detalle tengamos en cuenta a la hora de realizar la medición, mayor será el valor numérico obtenido. Teóricamente, si el nivel de detalle fuese infinito, el valor de la longitud tendería a infinito.

A partir de este ejemplo citado por Mandelbrot (1977) se puede inferir que, la geometría fractal se ha convertido en una poderosa herramienta para el análisis de diversos fenómenos complejos. Al más es que, esta ha revolucionado la ciencia de la matemática, con el aporte de modelos geométricos a numerosas estructuras naturales dado que, es una rama joven de la geometría en la que todavía hay muchas cosas por descubrir. *La utilización de los fractales en matemáticas es muy reciente y está revolucionando la ciencia actual y, en especial, las matemáticas* (Redondo & Haro, 2004). Citado por Cañadas et. al. (2008).

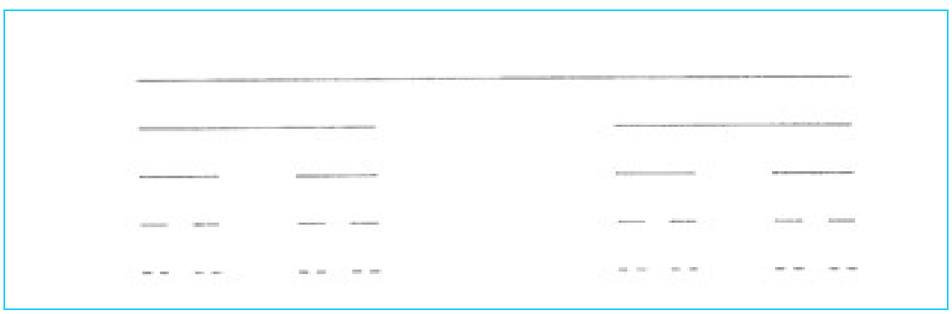


Ilustración 2: Conjunto de Cantor

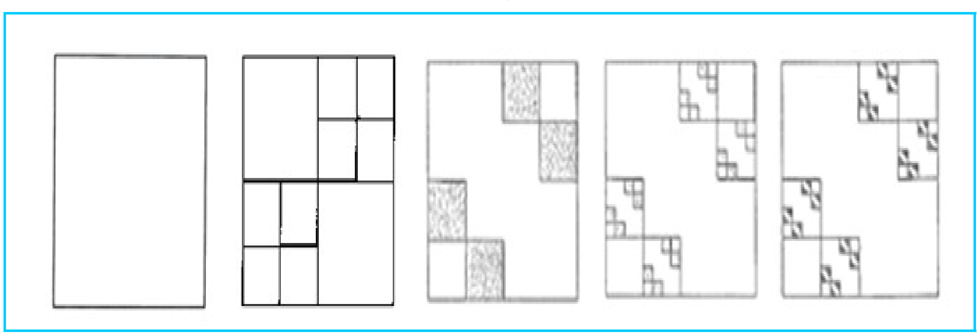


Ilustración 3: Conjunto de Besicovitch

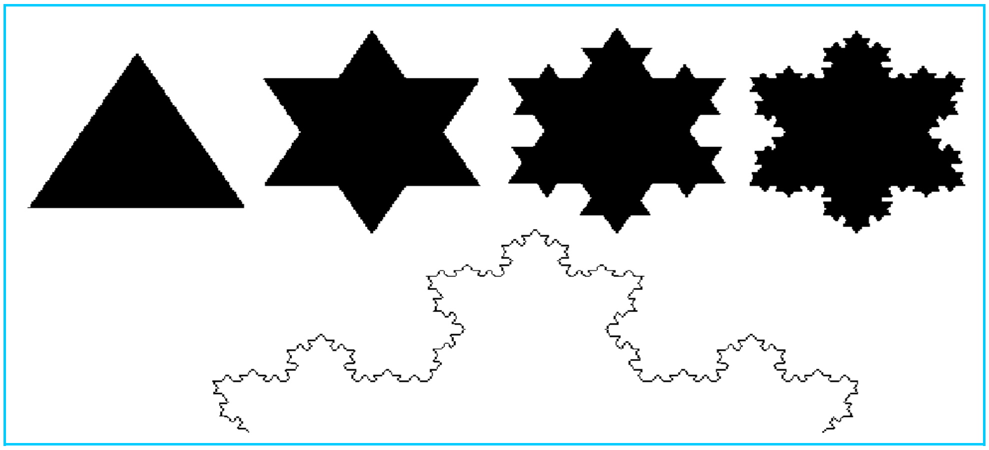


Ilustración 4: La curva del copo de nieve

Algunas investigaciones entre las que podemos mencionar la de Figueiras et. al. (2000) "*Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales"* permiten reflexionar de acuerdo a lo que visualizamos en las ilustraciones 2, 3 y 4 sobre los fractales como objetos compuestos por elementos cada vez más pequeños de si mismos, en donde el concepto de longitud pasa a ser algo muy complejo, lo que puede llegar a convertirse en una opción que podría llevar al estudiante mediante exploración a descubrir una relación de propiedades semejantes que involucren el uso de propiedades geométricas reconocidas o no por los mismos.

Algo semejante ocurre, con propuestas como la de Turégano (1997) quien infiere que *"La geometría de fractales combina varias características importantes que la hacen un ejemplo interesantísimo de unas matemáticas vivas y cambiantes, adecuadas para que los futuros maestros experimenten el nuevo enfoque propuesto para la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas" (p.169-192).*

La geometría de los fractales no se presenta de forma explícita pues permite que se experimente con procesos matemáticos que involucran diversas características de los mismos, como son la semejanza en imágenes, la visualización, la invarianza por el efecto de una transformación, las progresiones geométricas, numéricas y simbólicas, la congruencia, la autosemejanza, isometrías, homotecias, entre otras.

EUCLIDIANA	FRACTAL
La geometría euclidiana fue presentada en un documento del siglo III a.C., conocido como los Elementos de Euclides, la cual enseña elementos como curvas, líneas, puntos etc., usados por el hombre para modelizar fenómenos naturales y cuantificarlos midiendo longitudes, áreas o volúmenes, esta geometría es reconocida como tradicional considerando el estudio de objetos construidos por el hombre con dimensión entera dado un producto escalar, pudiendo ser representada algebraicamente. 	Mientras que en la geometría fractal, la cual es relativamente nueva es desarrollada a partir de la propuesta de Mandelbrot en los años setenta, considera procesos de iteración infinita para la descripción de objetos irregulares en todas las magnitudes y el análisis de numerosos fenómenos complejos, aportando modelos matemáticos que permiten describir procesos no lineales a muchas estructuras naturales. 

Ilustración 5: Comparación entre Geometría Euclidiana y Geometría Fractal

La iteración de una función o de una transformación geométrica conducen a la generación de estructuras fractales, la geometría fractal ha tenido incursión en nuestro tiempo, debido a que también es vista como un nuevo lenguaje pues los puntos, rectas, esferas, elipses y demás objetos de la geometría tradicional son reemplazados por algoritmos iterativos computacionales que permiten describir sistemas naturales, caóticos y dinámicos.

En relación con una perspectiva didáctica, las construcciones fractales permiten el análisis de diversos objetos en las situaciones de aprendizaje que se presenten en el aula, a partir de los cuales pueden estudiarse las transformaciones geométricas, donde los conceptos necesarios para dichas construcciones no superaran conceptos básicos de la geometría euclidiana y de la geometría de transformaciones, incorporadas en la mayoría de los currículos, para distintos niveles de formación.

Con ambientes de geometría dinámica por mencionar uno, Cabri Geometry II Plus de interés particular en el presente trabajo, podría mediarse en formalizar intuitivamente la teoría de la geometría fractal en el aula para el desarrollo de la visualización, a partir de una situación de aprendizaje que posibilite al estudiante la reconstrucción parcial en estructuras conocidas como las que se observan en el fractal de Gosper según ilustración 6.

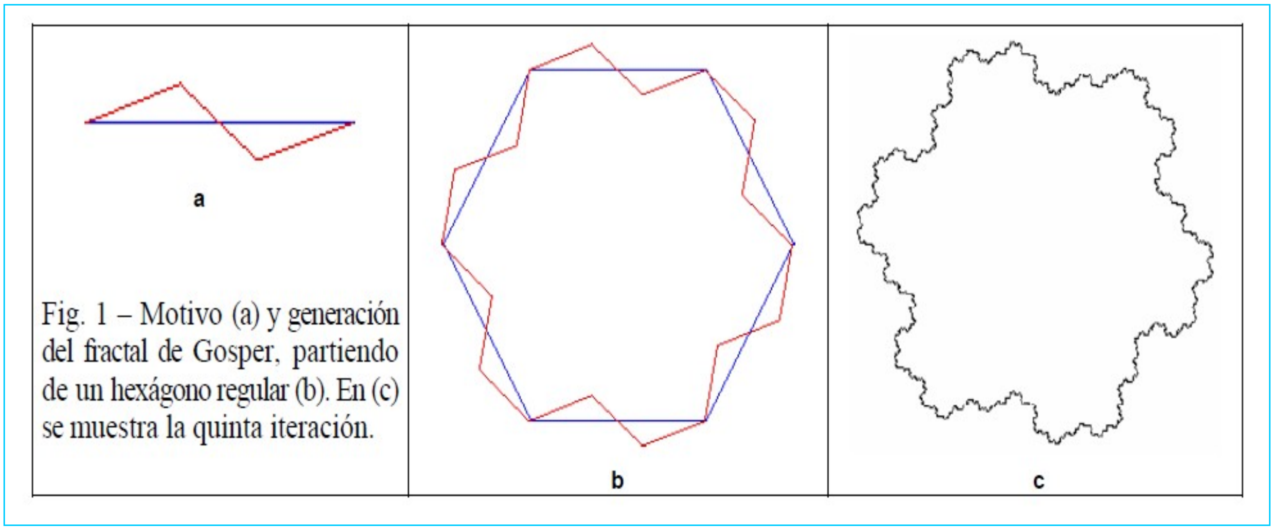


Ilustración 6: Fractal de Gosper

Por lo que se refiere a, intentar reconstruir el fractal de Gosper haciendo uso de Cabri Geometry II Plus (ilustración 7) a manera de ejemplo, nótese que puede generarse dificultad al intentar cambiar la escala arbitrariamente al reducirla. Sin embargo, la mediación de este ambiente de geometría dinámica en el aula podría generar en el estudiante una variedad de situaciones sin resolver respecto a problemas métricos como lugares geométricos, áreas, entre otros cuestionamientos no formulados y acercar al estudiante en el proceso de construcción a la comprensión de la autosemejanza o autosimilitud en forma intuitiva y validación de algunas conjeturas a partir de la interacción que tengan con el mismo.

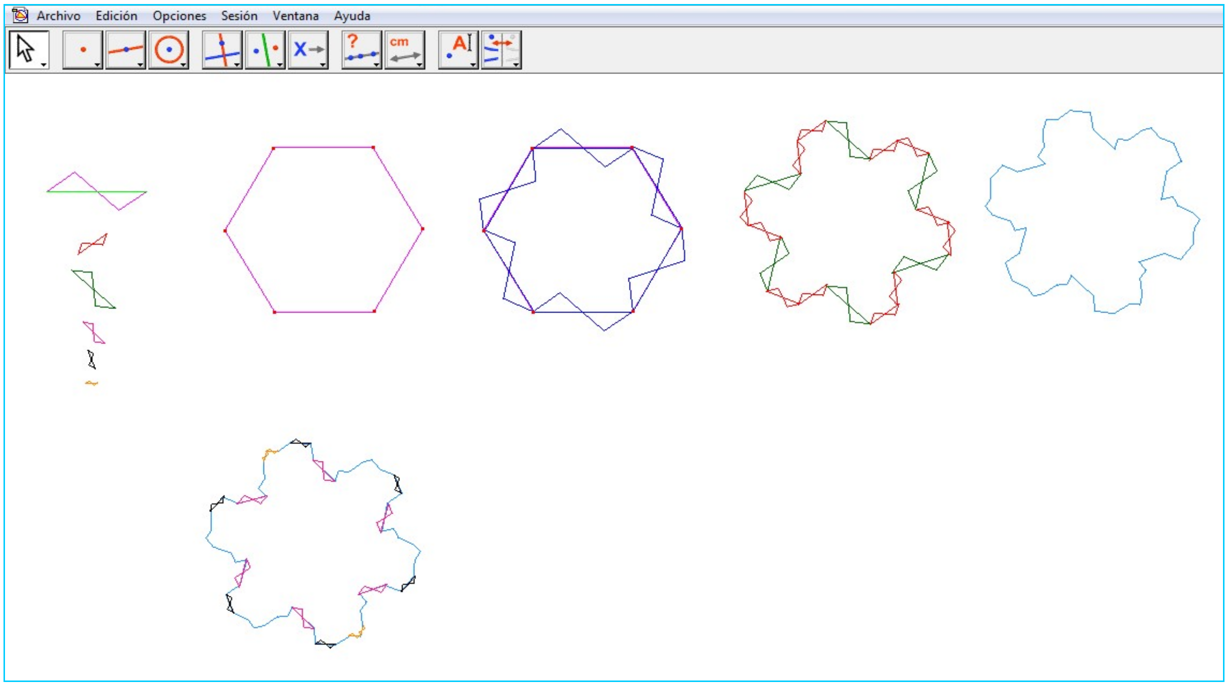


Ilustración 7: Reconstrucción del fractal de Gosper haciendo uso de Cabri Geometry II Plus.

En la actualidad son presentadas diversas definiciones de fractales pero no existe aun una que defina de manera general los mismos, por lo que se tiende a hacer referencia a sus propiedades características. Según, Spinadel (2008):

- *Un fractal tiene una estructura fina; esto es, mayor detalle en escalas arbitrariamente pequeñas.*
- *Un fractal es demasiado irregular para ser descripto con la Geometría Euclidiana tradicional, tanto local como globalmente.*
- *Con frecuencia, un fractal tiene una cierta forma de auto-semejanza, quizás aproximada o estadística.*

- *En general, la dimensión fractal es mayor que la dimensión topológica.*
- *En muchos casos interesantes, el fractal se define en forma muy simple, por lo general, con un método recursivo.*

Las imágenes fractales (como por ejemplo las de ilustración 7 y 8) presentan características muy especiales que los distinguen de la geometría Euclidiana, a la luz de un enfoque cognitivo Suárez S. P. & Ramírez V. G. (2011), manifiestan que:

"uno de los aspectos claves en la propuesta de aprendizaje de la geometría fractal es el papel que juegan las representaciones gráficas en la comprensión y construcción conceptuales".

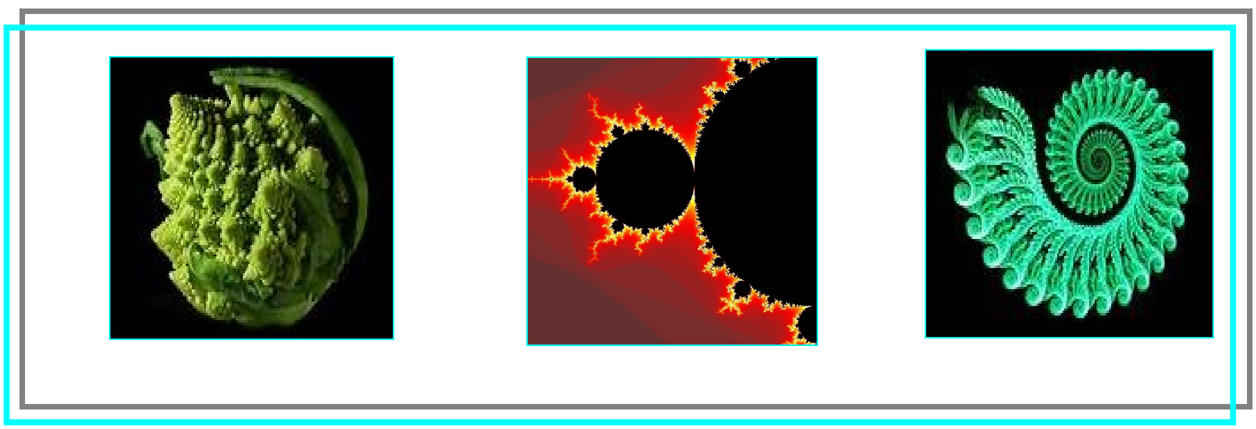


Ilustración 8: imágenes de algunos fractales

En el presente trabajo de grado se propone como pregunta que organiza la indagación **¿Qué caracteriza algunas situaciones de aprendizaje en el contexto de la geometría fractal desde la visualización y el estudio de la autosemejanza cuando se integra un ambiente de geometría dinámica?**

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo General

Fundamentar teóricamente el diseño de una secuencia de situaciones didácticas para el tratamiento de la autosemejanza o autosimilitud en el aprendizaje del estudiante desde la visualización en el contexto de la geometría fractal utilizando un Ambiente de Geometría Dinámica.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Propiciar en los estudiantes el conocimiento de propiedades básicas como autosemejanza y dimensión para observar, analizar e interpretar imágenes de los fractales.

- Identificar las posibilidades y restricciones del estudiante, al implementar un ambiente de geometría dinámica que busque favorecer el proceso de aprendizaje a través de la propia acción del estudiante.

1.3 ALGUNOS ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

El origen de la geometría fractal data de finales del siglo XIX cuando se presentan dudas sobre los principios de Euclides, el cual en el siglo III A.c., considera la intuición, los sentidos y el espacio exterior, Nápoles (2003), cita lo expresado por Mandelbrot *"la geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del cálculo infinitesimal"*.

Posteriormente, para 1975 Mandelbrot plantea la teoría de los fractales desde una perspectiva intuicionista como respuesta a lo que para el era un desafío, refiriéndose por supuesto, a la existencia de muchas formas naturales irregulares y fragmentadas que nos rodean, concibiendo y desarrollando así una nueva geometría. *"Mandelbrot rescató del olvido con su trabajo algunos problemas planteados a finales del siglo XIX y principios del siglo XX como fueron: el conjunto temario de George Cantor, las líneas que "llenan" el espacio de Giuseppe Peano y David Hilbert, la curva "no diferenciable en todos sus puntos" de Helge Von Koch, solución de ecuaciones en Dinámica no Lineal de Poincaré y el concepto de dimensión de Félix Hausdorff, entre otros"*

Los fractales son figuras cercanas a la teoría geométrica de la medida desde una iteración infinita generada a partir de procesos geométricos específicos, etimológicamente el término “fractal” proviene del término latino “fractus” cuyo significado refiere ha roto, quebrado, crear fragmentos irregulares. De dimensión no entera, dimensión desde la cual se busca describir su tamaño, al respecto cita Nápoles (2003):

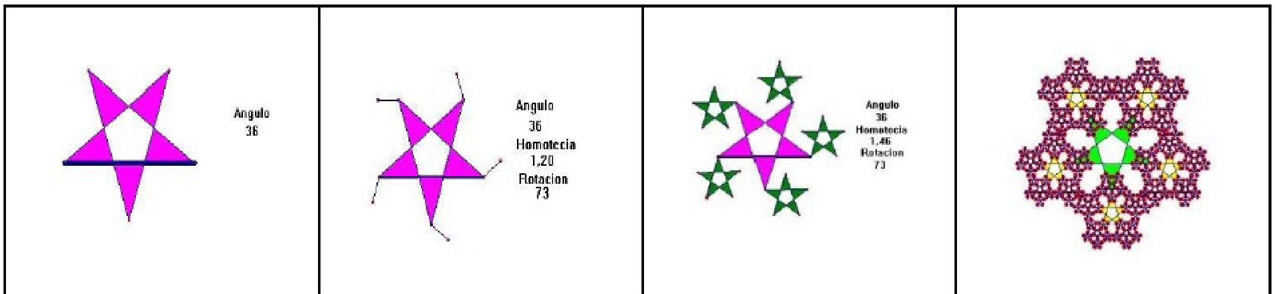
“En Matemática estamos acostumbrados a trabajar con cuatro dimensiones, que son las siguientes:

- *Dimensión 0 → Un punto*
- *Dimensión 1 → Una línea recta*
- *Dimensión 2 → Un plano*
- *Dimensión 3 → El espacio*

Existe una quinta que es la de un conjunto vacío, se dice que el mismo posee una dimensión de –1. Existen también otros conceptos distintos de dimensión y una de ellas es la dimensión de Hausdorff –Besicovich y se basa en la autosemejanza de objetos. Basados en la dimensión de Hausdorff –Besicovich se puede decir que la ya conocida por ustedes Curva de von Koch tiene una dimensión de 1.2619 y supera su dimensión topológica de 1 por generarse a partir de una recta”.

Al respecto de estos procesos de iteración se encuentra también que Suárez (s.f.) a manera de ejemplo, describe lo que llamo la estrella fractal de cinco puntas (5P) mediante el uso del ambiente de geometría dinámica Cabri Geometry II Plus (ilustración 9), llegando en su análisis de los resultados a realizar inferencias sobre las posibilidades diversas para que el estudiante:

"*descubra las propiedades básicas en los distintos tipos de geometría usadas en las figuras construidas; mediante la simulación, determina las propiedades de la composición de traslaciones, rotaciones, simetrías, homotecias y en general de transformaciones afines.*



Gráfica 1. Semilla	**Gráfica 2. Macro Intermedia**	**Gráfica 3. Macro Nivel 1**	**Gráfica 4. Estrella 5P**

Ilustración 9: Construcción de fractales con Cabri: fractal estrella 5P

Respecto a la construcción, Suárez (s.f.) manifiesta que la estrella 5P, es dibujada como una poligonal cerrada, a partir de un segmento y considerando un ángulo de treinta y seis (36) grados (…). En la que se define una primer macro, con dos parámetros, la longitud del segmento y un ángulo específico (Ver gráfica 1). Enseguida el orden en que se escogen los puntos iniciales para definir la macro es importante para darle una orientación fija a la construcción. Después una segunda macro auxiliar con dos parámetros, permite determinar un segmento trasladado a partir del original, en cada punta de la estrella: el primer parámetro es un factor de homotecia, respecto al segmento semilla y el segundo parámetro es el ángulo de rotación (Ver gráfica 2). Una tercera macro que se construye, graba el mecanismo de reproducción del fractal estrella de cinco puntas, con la cual se puede dibujar la aproximación del fractal, en el nivel deseado.

De ahí que, como un referente teórico de este trabajo de grado se considera la propuesta didáctica introducida como una estrategia de aprendizaje por Suárez (s.f.) quien pone de manifiesto que la misma puede ser adoptada, reformulada y enriquecida como alternativa viable para la construcción de conceptos relativos a la geometría fractal; como también la propuesta de Estrada (2004) para introducir conceptos y procedimientos básicos de la geometría fractal, se considera entonces relevante desde la intencionalidad de este trabajo algunos aspectos y resultados de cada propuesta que pueden servir para el desarrollo del mismo, entre los que encontramos:

- *"Es posible implementar estrategias didácticas de corte cognitivista para el aprendizaje y la enseñanza de la geometría, a la luz del enfoque epistemológico constructivista para la matemática. Abordar de manera intuitiva los conceptos básicos de autosemejanza, retroalimentación, dimensión y atractor, característicos de los sistemas iterados de funciones y sus diversos tipos, partiendo de las ideas y experiencias previas del estudiante, básicamente por trabajo colectivo e interacción social, prepara el terreno para explorar los distintos sistemas de representación, para cimentar la construcción formal de los conceptos geométricos, en el contexto de las estructuras matemáticas, generando una permanente reestructuración conceptual, con miras a lograr un aprendizaje significativo de estas nociones básicas de la geometría fractal".*

- *“En la construcción de los dibujos-dinámicos en Cabri Geometry II Plus, es muy importante determinar cuáles son los parámetros elegidos más apropiados, para dotar de mayor dinámica a tales construcciones, usando las opciones de desplazamiento y animación contenidas en el menú. De tal elección depende el éxito en la riqueza de las situaciones problemáticas planteadas y la amplitud de los sistemas semióticos que pueda proporcionar el modelo construido”.*

- *“Las situaciones problemáticas acá planteadas, se pueden tipificar como abiertas (“blandas”, en el sentido de J. M. Laborde), pues obedecen a situaciones menos exigentes (en términos de cantidad de parámetros, no de complejidad). Dichas situaciones son más creativas que descriptivas, poseen características que propician la imaginación y el aprendizaje por descubrimiento”.*

- *“El uso del computador como mediador de aprendizaje implica la modificación de los problemas planteados de manera tradicional, de las preguntas y cuestionamientos, de los enfoques para su solución y hasta en la interpretación de los resultados”.*

- *“(…) Las familias de fractales determinadas por los parámetros establecidos o fijados en la fase de construcción, permiten explorar amplios campos en la visualización de aproximaciones de atractores correspondientes a familias de sistemas iterados de funciones en donde subyacen estructuras similares”.*

2. MARCO TEÓRICO

Este trabajo de grado considera ciertas aproximaciones didácticas y cognitivas, en las cuales podemos destacar los procesos de visualización y situaciones para el aprendizaje sobre la enseñanza propuestas curricularmente en el contexto de la geometría fractal.

Para llevar a cabo este trabajo se hace necesaria una teoría que la sustente, de ahí que se consideren tres dimensiones teóricas: la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica. Las cuales en conjunto brindan una directriz ante los objetivos que se han planteado.

2.1 Dimensión Epistemológica

En el marco de la geometría fractal se pretende hacer uso del concepto de visualización para abordar la autosemejanza; en particular este trabajo de grado toma en consideración algunas transformaciones de isometría (rotación, traslación y homotecia). Frente a los principios matemáticos que fundamentan la teoría geométrica fractal, por ejemplo podemos remitirnos a Suárez (s.f.) quien en su artículo enuncia que:

"La geometría fractal surge en el ámbito de la matemática como una poderosa herramienta para modelar los fenómenos más impredecibles y fascinantes de la naturaleza. En la década de los años sesenta, Benoit Mandelbrot rescató del olvido con su trabajo algunos problemas planteados a finales del siglo XIX y principios del siglo XX como fueron: el conjunto ternario de George Cantor, las líneas que "llenan" el espacio de Guiseppe Peano y David Hilbert, la curva "no diferenciable en todos sus puntos" de Helge Von Koch, solución de ecuaciones en Dinámica no Lineal de Poincaré y el concepto de dimensión de Felix Hausdorff, entre otros".

El término fractal introducido para designar las formas irregulares, base del trabajo de Mandelbrot (1983), puede caracterizarse intuitivamente como una figura o modelo cuya forma es sumamente irregular, interrumpida o fragmentada, y sigue siendo así, a cualquier escala que se produzca el examen. Este comportamiento es lo que podría generar en los estudiantes el interés en analizar desde lo visual figuras de formación irregular como lo son los fractales, inmersos en este nuevo tipo de geometría. La cual genera afirmaciones como:

- "…la matemática que se aprenderá y enseñará dentro de veinte años, aún no se ha descubierto…".

- Cuando se habla de la ciencia a prevalecer en el siglo XXI, la geometría fractal y su relación con la teoría del caos, ocupan un lugar preponderante en las propuestas curriculares visionarias.

Con respecto a la autosemejanza encontramos que, es un concepto que se puede entender de una forma muy intuitiva; a grandes rasgos, visualicemos un objeto geométrico, o una figura, ahora imaginemos que esta figura está compuesta de figuras mas pequeñas, cada una de las cuales se ve idéntica a la figura original excepto por el tamaño; y a su vez cada una de estas figuras más pequeñas se compone de figuritas todavía más pequeñas (cada una de las cuales se ve idéntica a la figura de la cual se desprendió excepto por la escala, y por lo tanto también estas últimas figuritas se ven idénticas a la figura total) y así sucesivamente.

Con este procedimiento nos podemos imaginar generaciones y generaciones de figuras, cada generación se ve como su figura antecesora excepto porque es más pequeña en tamaño. Este concepto involucra la idea de semejanza que conocemos desde siempre. Para definir autosemejanza, necesitamos primero del concepto de transformación de semejanza. Una transformación de semejanza en el plano o en el espacio, la obtenemos componiendo las tres transformaciones siguientes:

1. A la figura dada se le aplica una escala, aumentando o disminuyendo el tamaño.

2. Luego a la figura que se obtuvo se le aplica una rotación respecto algún centro dado, y en el espacio se dice en que plano y en qué dirección tiene que rotarse la figura.

3. Finalmente se desplaza la figura que se obtuvo sin cambiar su tamaño ni girarla o rotarla.

Con estos tres pasos podríamos obtener una figura en la que las proporciones de la figura se preservan, salvo la escala, lo único que cambia en la figura es el tamaño y la disposición en el plano o en el espacio, aspectos como estos permiten que pueda hacerse referencia a que dos figuras son semejantes si podemos obtener una a partir de la otra mediante una transformación de semejanza y que una figura autosemejante es aquella que podemos descomponer en figuras más pequeñas, cada una de las cuales es semejante a la figura original, aclarando que no es todavía un fractal.

Se retoma entonces, lo de las transformaciones de isometría mencionadas a partir de lo expuesto por Garzón y Valoyes (2005), respecto algunas definiciones de isometría que se desean involucrar en este trabajo de grado. Estas son:

- **Traslación:** Sean dos puntos C y C' en el plano y un vector *m* de magnitud y dirección conocidas. Diremos que los puntos C y C' están relacionados mediante una traslación si el segmento $\overline{CC'}$ tiene la misma dirección y longitud del vector *m*.

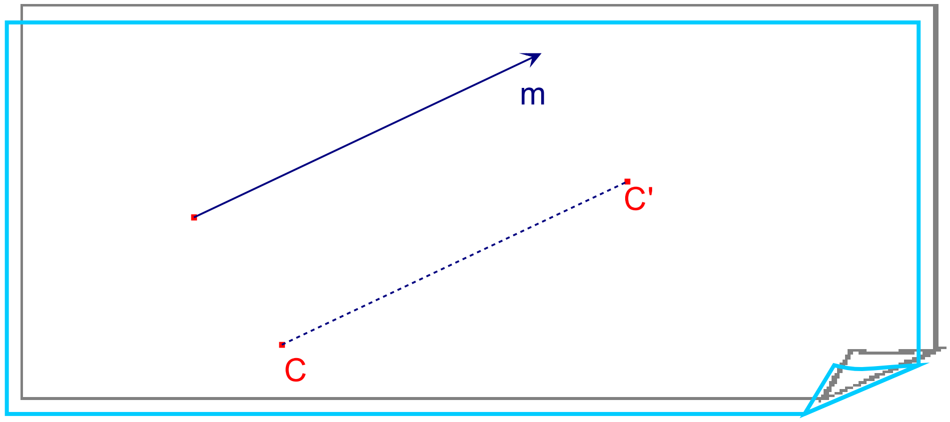


Ilustración 10: Traslación de un punto en el plano.

- **Rotación:** Supongamos un punto O en el plano, un ángulo α dado y una dirección de rotación (por ejemplo: en dirección opuesta a las manecillas del reloj). Sea C un punto cualquiera en el plano y sea C' el punto tal que $\overline{OC} = \overline{OC'}$ y <COC' = α.

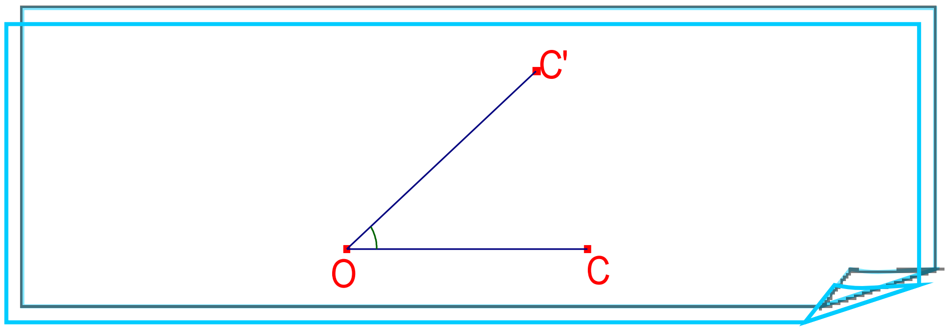


Ilustración 11: Rotación de un punto en el plano.

En este caso decimos que $\overline{OC}$ ha sido rotado un ángulo α de modo que coincide con $\overline{OC'}$. En consecuencia, podemos afirmar que los puntos C y C' están relacionados mediante una rotación o giro.

El punto O y el ángulo α son denominados centro de rotación y ángulo de rotación, respectivamente. Estos dos elementos son los que caracterizan esta clase de movimiento. Además si consideramos una rotación del plano en torno a un punto O (o a una recta perpendicular al plano que pase por O) observamos que O es un punto invariante.

También se referencia con respecto a la homotecia como se cita en Coxeter (1971), definida como:

- **Homotecia:** dos figuras son *homotéticas* cuando son semejantes y se encuentran colocadas de manera semejante, es decir si las relaciona una dilatación, la cual se define [Artin 1, pág. 54] como una transformación que preserva (o invierte) la dirección: es decir, transforma toda recta en una paralela a ella.

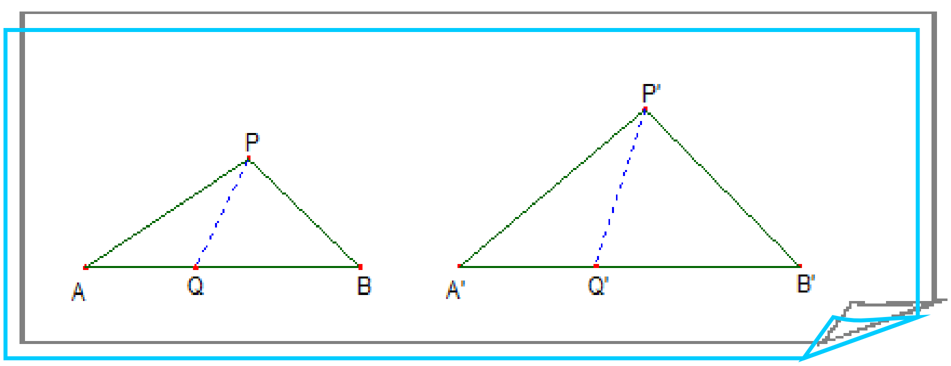


Ilustración 12: Figuras homotéticas

Por teorema *Dos segmentos de recta paralelos AB, A'B' se relacionan por medio de una dilatación única* $\overline{AB} \rightarrow \overline{A'B'}$.

Pues tenemos que todo punto P que no esté en $\overline{AB}$ se transforma en el punto P', que es el punto de intersección de la recta que pasa por A' y es paralela a $\overline{AP}$ con la recta que pasa por B' y es paralela a $\overline{BP}$ (Ilustración 12) y todo punto Q que este en $\overline{AB}$ se transforma en el punto Q', que es el punto de intersección de $\overline{A'B'}$ con la recta que pasa por P' y es paralela a $\overline{PQ}$.

Parafraseando hasta aquí referencia que se ha definido la dilatación al caracterizarla como una transformación que transforma toda recta en su paralela, pero se ha de examinar más cuidadosamente el teorema enunciado anteriormente, pues podemos encontrar para un punto cualquiera P, que no este en $\overline{AB}$, un punto correspondiente P' al trazar la paralela $\overline{A'P'}$, y la paralela $\overline{B'P'}$ a $\overline{BP}$, como se hace en (Ilustración 13) las tres rectas $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ son o bien concurrentes, o bien paralelas. Y lo mismo sucede con $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{PP}$.

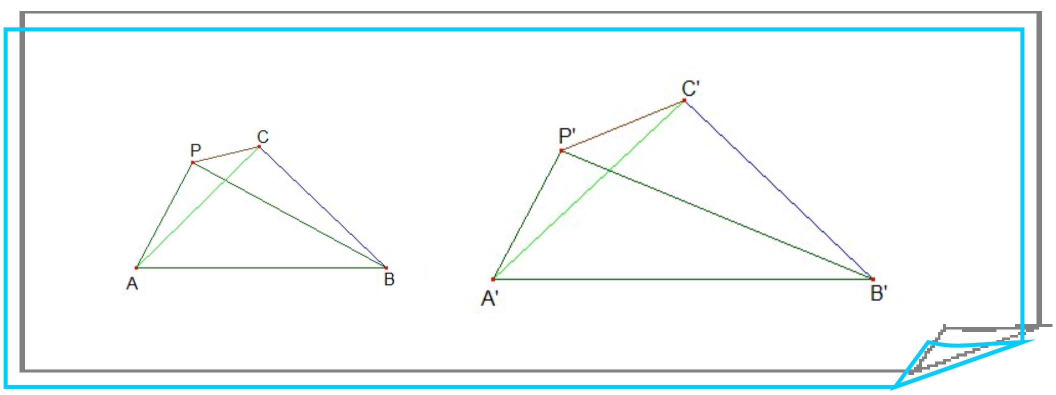


Ilustración 13: Figuras homotéticas al trazar paralelas

Con respecto a los Sistemas Iterados de Funciones (SIF) tenemos que Sabogal & Arenas (2011), hacen un acercamiento a los fractales desde los SIF enfatizando formalmente en la noción de autosimilitud (o autosemejanza) de manera rigurosa, contextualizando el mismo en los espacios métricos. Desde aquí son considerados en este trabajo de grado algunas de las definiciones, demostraciones y ejemplos que los mismos aportan para hacer referencia a los SIF.

"Definen que SIF, es una estructura de la forma $\{X; f_1, f_2, f_3, ..., f_N\}$ donde X es un espacio métrico completo y cada $f_i : X \to X, i = 1,2,...,N,$ es una contracción en *X*."

Mediante teorema explican la existencia y unicidad de los que se reconocerá como atractor de un SIF, esto es:

Teorema: *Dado un SIF* $\{X; f_1, f_2, f_3, ..., f_N\}$ *se define*

$$\begin{aligned} F: \mathcal{H}(X) &\longrightarrow \mathcal{H}(X) \\ K &\longmapsto F(K) =: \bigcup_{i=1}^{N} f_i(K); \end{aligned}$$

Entonces existe un único

$$A \in \mathcal{H}(X) \text{ tal que } F(A) = A = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(A).$$

Además para cualquier $K \in \mathcal{H}(X)$ *se tiene que*

$$\lim_{n \to \infty} F^{\circ n}(K) = A.$$

*El conjunto A lo llamaremos el **atractor** del **SIF.***

Como se menciona anteriormente se considera importante citar algunos de los ejemplos que citan Sabogal & Arenas (2011), en este caso se tomaran aquellos ya referidos en este trabajo de grado como lo son el conjunto de Cantor y al triángulo de Sierpinski, en los cuales expresan:

Ejemplo: Consideremos el SIF $\{R; f_1, f_2\}$, donde $f_1(x) = \frac{1}{3}x$, $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

En este caso $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R})$ *está definida por*

$$F(K) := f_1(K) \cup f_2(K), \qquad \forall K \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$$

Sea el conjunto semilla $C_0 = [0,1]$ *entonces es intuitivamente claro que el atractor de este SIF es el conjunto de Cantor C. Para probarlo formalmente basta observar que* $(C_n)_n$ *es una sucesión de Cauchy en* $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ *que cumple* $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n \supseteq \ldots$

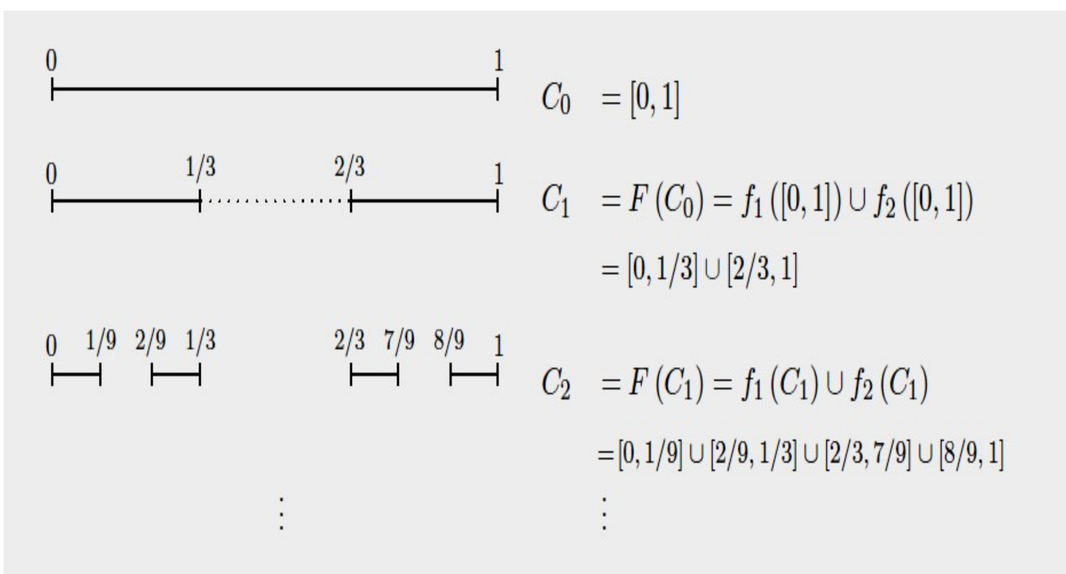


Ilustración 14: Descripción de la construcción del conjunto de Cantor

Entonces aplicando el lema que enuncia Sean (X,d) *un espacio métrico completo y* $(A_n)_n$ *una sucesión de Cauchy en* $\mathcal{H}(X)$ *tal que* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Y el teorema anteriormente citado, para obtener

$$\text{Atractor del SIF } = \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \mathcal{C}$$

Formalmente, definen un conjunto autosimilar (o autosemejante) si es el atractor de un SIF. Otro ejemplo al que hacen referencia Sabogal & Arenas (2011), es el que corresponde al triangulo de Sierpinski del cual presenta:

Ejemplo: Consideremos el SIF $\{R^2; \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\}$,

En este caso $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ *esta definida por*

$$F(K) := f_1(K) \cup f_2(K) \cup f_3(K), \qquad \forall K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2),$$

Siendo $f_1(z) = \frac{1}{2}z, \quad f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \quad y \quad f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}$

Si se toma como conjunto inicial el triángulo "relleno" K, de vértices $(0,0),(0,1)$ *y* $(1,0)$. Se *obtiene:*

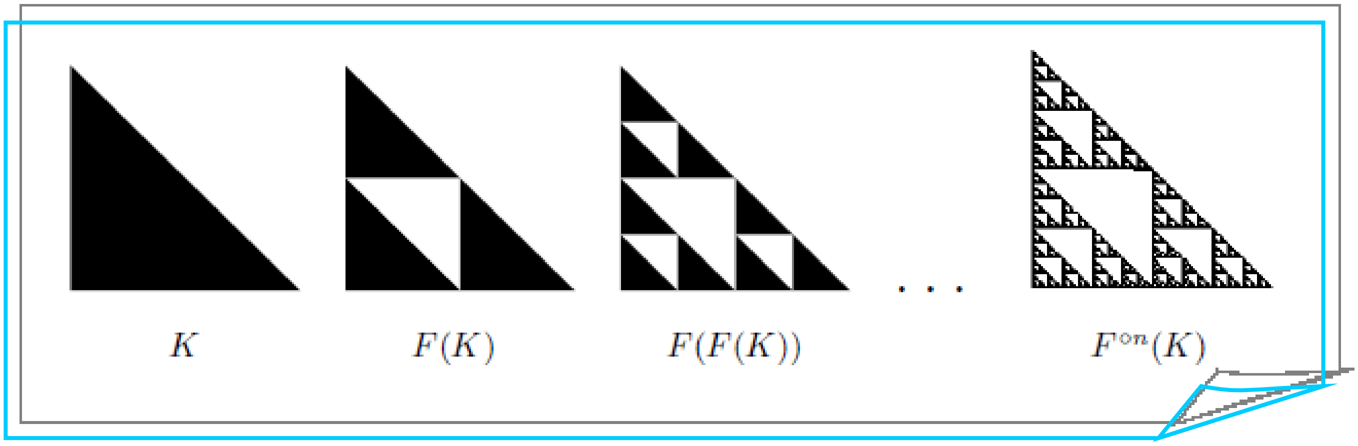


Ilustración 15:Construcción de una versión del triangulo de Sierpinski

Donde el atractor del SIF de este ejemplo, es homeomorfo[1] *a el triangulo de Sierpinski. Luego se puede ahora afirmar que el conjunto de Cantor, el triangulo de Sierpinski, (y en general cualquier conjunto unitario {x} en un espacio métrico completo), son conjuntos autosemejantes.*

Ahora abordaremos el concepto de dimensión reconociendo la existencia de varias clases de dimensiones consideradas a saber, la dimensión topológica, la dimensión de Hausdorff y la dimensión fractal.

Echeverri (2011) enuncia que, *"la dimensión es el concepto matemático que se refiere a las propiedades topológicas de una forma en tanto su capacidad de desarrollo espacial. Por ejemplo, un rectángulo es una forma que se desarrolla en el espacio en forma de plano, mientras que un cubo es un volumen. (...) Dicho de otro modo, la dimensión valora la complejidad*

[1] Dos espacios métricos X e Y se dicen homeomorfos si existe una biyección $h : X \to Y$ tal que h y h^{-1} son continuas.

representativa de una forma, a partir del número de medidas que son necesarias en su representación, 2 para el plano (largo y ancho) y 3 para el volumen (largo, ancho y profundidad). En términos mas específicos de la geometría, la dimensión es la magnitud mensurable de una forma en una dirección específica, esto es, en sentido lineal y recto, por lo que una medida en un sentido es la medida de una dimensión. De este modo se tiene que un punto no tiene dimensión; una línea tiene una dimensión: su longitud; un plano tiene dos dimensiones: largo y ancho; un volumen tiene tres dimensiones: longitud, ancho y profundidad. El punto es entonces una forma de dimensión 0, la línea de dimensión 1, el plano de dimensión 2, el volumen de dimensión 3, valores que en el lenguaje escrito se representan como 0D, 1D, 2D y 3D respectivamente. La dimensionalidad es un valor palpable por los sentidos de manera objetiva, el filo de un borde, la tersura de una superficie, la masividad de un objeto".

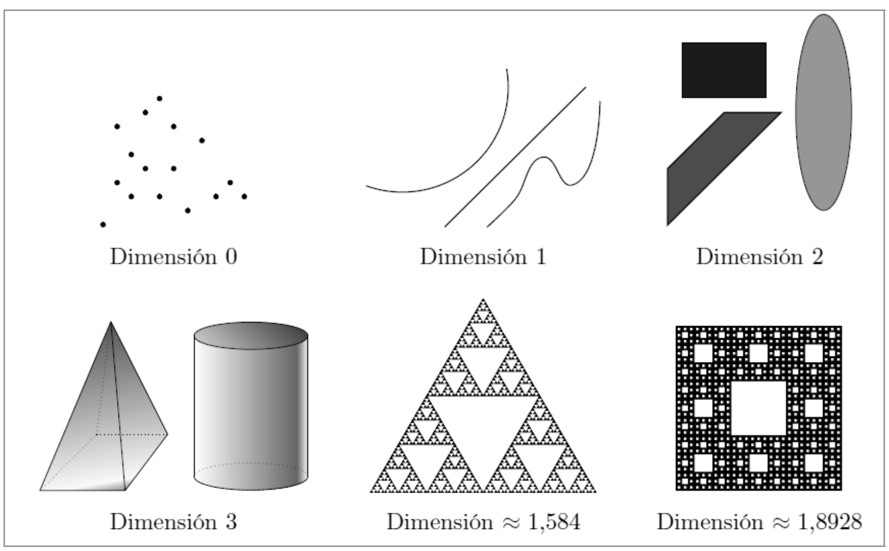


Ilustración 16: Algunos objetos y su dimensión.

Desde la topología reconocemos que un segmento rectilíneo y una circunferencia son la misma curva en tanto que posee el mismo tipo de superficie, verificable al transformar una en otra sin necesidad de manipulaciones "no topológicas" a alguna de las dos. Pero métricamente no son la misma curva en tanto que el segmento no encierra con su borde un área como ocurre con la circunferencia.

Ejemplos de este tipo, orientaron a la búsqueda de lo que significa dimensión topológica en un objeto geométrico. Devlin en (1988) (Citado por Salbor-Albor, 1998) refiere,

En una curva solo podemos movernos en una dirección, adelante o hacia atrás. En una superficie podemos ir adelante, atrás, a derecha, a izquierda. En un volumen podemos movernos, además, hacia arriba, hacia abajo. La curva tiene una dimensión, la superficie tiene dos dimensiones y el volumen tiene tres dimensiones.

Posteriormente se presenta la definición de autosemejanza sugerida por Hausdorff en (1919) (Citado por Salbor-Albor, 1998) y readaptada más adelante por Besicovich en la cual expresa,

Si al obtener desde un ente H, N entes iguales, semejantes al original, con razón de semejanza n, entonces la dimensión topológica de H es el número real D que verifica:

$$n^D = N,$$

Donde n es el factor de ampliación, N el número de copias y D la dimensión. Luego,

$$D = \frac{\ln N}{\ln n} = \frac{\ln(\text{número de copias semejantes a la figura original})}{\ln(\text{factor de ampliación para obtener la figura original})}.$$

Ejemplos: consideremos el triángulo de Sierpinski en sus primeras etapas entonces

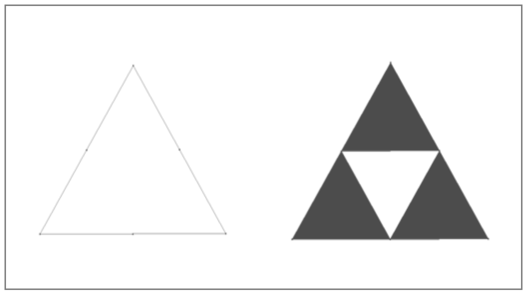


Ilustración 17: . Triángulo de Sierpinski en sus primeras etapas

N = 3 y n = 2 por lo cual, si notamos como S a nuestro triángulo tenemos que:

$$D_S = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}584 \quad es\, decir \quad 1 < D_S < 2$$

Ahora pensemos en el conjunto de cantor

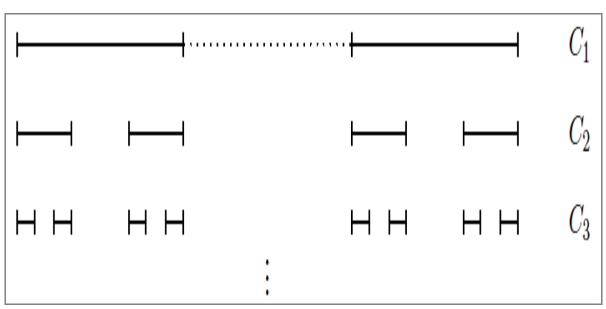


Ilustración 18: Descripción conjunto Cantor

N = 2 y n = 3 por lo cual, si notamos como C a nuestro conjunto Cantor tenemos que:

$$D_C = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}63093$$

Siendo su dimensión topológica 0.

En la curva de Koch tenemos que

N = 4 y n = 3 por lo cual, si notamos como K a nuestra curva de Koch tenemos que:

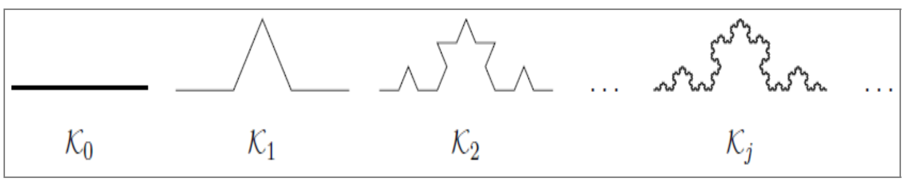


Ilustración 19: Descripción curva de Koch

$$D_K = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}26186$$

Siendo su dimensión topológica 1.

Sabogal & Arenas (2011), citan una inferencia aceptable pero no formal desde el punto de vista matemático:

"Un fractal es un conjunto autosemejante y cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que su dimensión topológica"

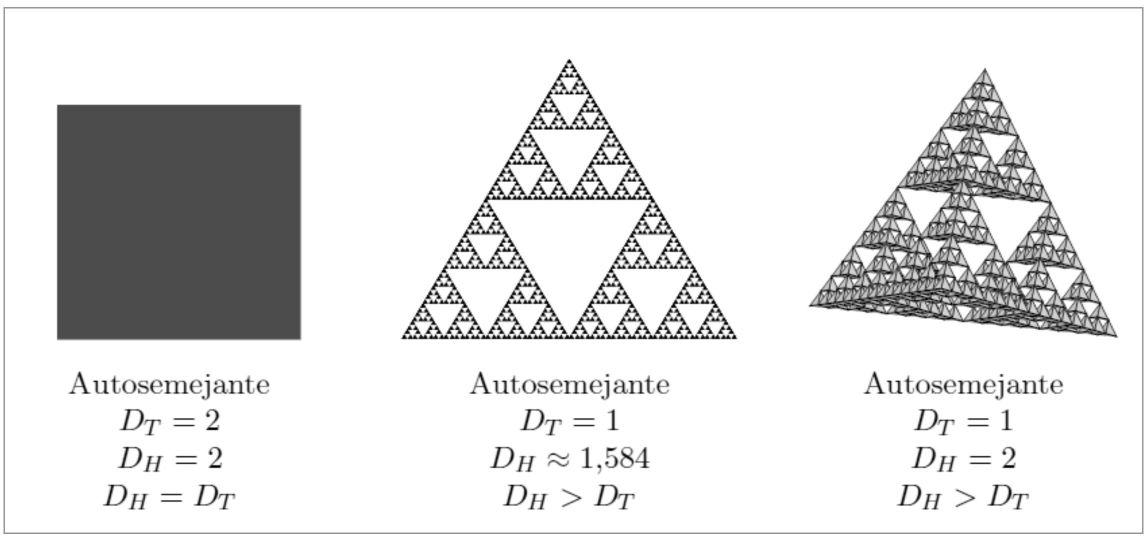


Ilustración 20: Ejemplos de figuras donde se referencia diferencias entre dimensiones, siendo DT la notación para dimensión Topológica y DH, dimensión de Hausdorff.

Hasta aquí encontramos que son diversos los aspectos a considerarse en el momento de aludir a los fractales como podemos observar en la ilustración 21, y lo necesario que resulta referirnos a estos para ampliar nuestra perspectiva respecto a las diversas inferencias que han resultado desde investigaciones como las ya consideradas al intentar definirlos.

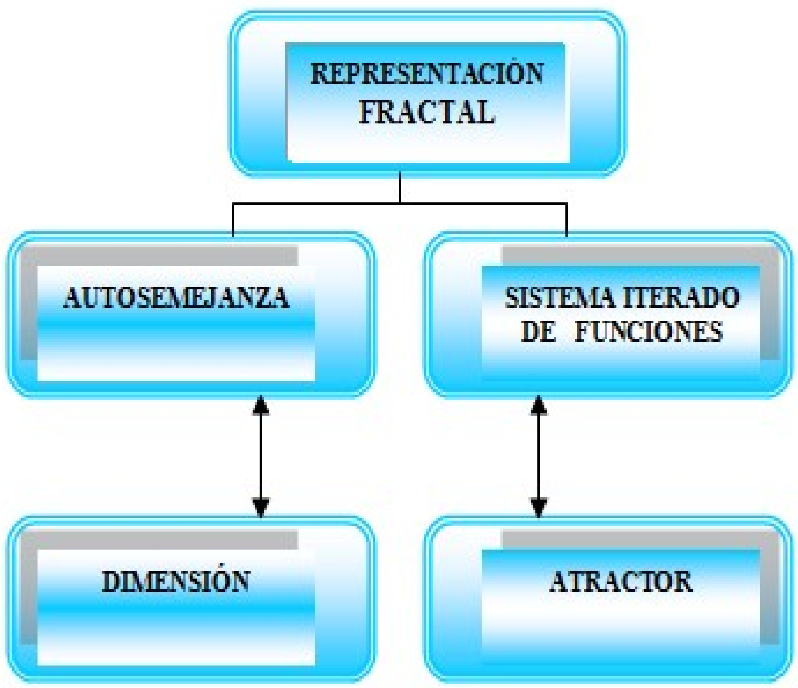


Ilustración 21: Esquema de representación fractal

2.2 Dimensión Cognitiva

En el campo de la matemática se presentan razonamientos que orientan a la comprensión de los conceptos matemáticos en los procesos de enseñanza y el aprendizaje. Dada la importancia que tiene la visualización para razonar con respecto a ciertos conceptos, es importante definir y explicar como la visualización hace parte de un proceso cognoscitivo.

La visualización de los contenidos temáticos para el aprendizaje de matemática es de fundamental importancia y la inclusión de tecnologías es una alternativa que podría ayudar a lograrlo. En su traducción Hernández y Villalba (2001) enuncian que: La geometría involucra tres clases de procesos cognitivos que cumplen con funciones epistemológicas específicas:

- Procesos de **visualización** con referencia a las *representaciones espaciales* para la ilustración de proposiciones, para la exploración heurística de una situación compleja, para echar un vistazo sinóptico sobre ella, o para una verificación subjetiva.

- Procesos de **construcción** mediante herramientas: la construcción de configuraciones puede servir como un *modelo* en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos que éstos representan.

- El **razonamiento** en su relación con los *procesos discursivos* para la extensión del conocimiento, la demostración y la explicación.

Estos procesos diferentes pueden ser realizados separadamente. Así, la visualización no depende de la construcción: hay acceso a las figuras, de cualquier manera que hayan sido construidas. Y aún si la construcción guía a la visualización, los procesos de construcción dependen sólo de las conexiones entre propiedades matemáticas y las restricciones técnicas de las herramientas usadas.

También indican que, en los cursos de geometría para niveles de educación secundaria, se presenta al estudiante un producto final y ya terminado, lo cual no da lugar a que él tome un papel activo en el desarrollo de su conocimiento matemático; además, no propicia el fomento de la creatividad y del aprendizaje significativo en el estudiante. Agregando que la geometría puede concebirse como:

- La geometría en el espacio euclídeo es n-dimensional usual, una generalización de los espacios de dos y tres dimensiones, vista esta como una herramienta para describir y medir figuras, como base para construir y estudiar modelos del mundo físico y otros fenómenos del mundo real.
- Un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas en Matemáticas y en otras ciencias; por ejemplo, gráficas y teoría de gráficas, histogramas,

entre otros. En teoría de probabilidad, el espacio de muestreo o espacio de muestreo universal, a menudo denotado por S, Ω o U (por "universo"), de un experimento.

- La geometría como aquella que estudia las idealizaciones del espacio, ocupándose de las propiedades y medidas de las figuras geométricas en el espacio tridimensional. Como una herramienta en aplicaciones, tanto tradicionales como innovadoras, como por ejemplo, gráficas por computadora, procesamiento y manipulación de imágenes, reconocimiento de patrones, robótica, investigación de operaciones.

Consideraciones que nos pueden llevar a inferir que la geometría podría despertar en el estudiante habilidades que le permitan entender aquello que lo rodea y como desde unos procesos visuales ya establecidos sean capaces de investigar, explorar y aplicar nuevas actividades sin limitar el contexto para las mismas.

Al respecto el Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2004) afirma que:

> *La geometría tiene una larga historia siempre ligada a las actividades humanas, sociales, culturales, científicas y tecnológicas. Ya sea vista como una ciencia que modela nuestra realidad espacial, como un excelente ejemplo de sistema formal o como un conjunto de teorías estrechamente conectadas, cambia y evoluciona permanentemente y no se puede identificar únicamente con las proposiciones formales referidas a definiciones, conceptos, o teoremas. Ella es el resultado de una combinación entre diversos procesos*

cognitivos asociados a la actividad geométrica y la comunicación de los resultados de dicha actividad (p1).

Y ante la necesidad de investigar y buscar nuevos horizontes en la enseñanza de la geometría el MEN (2004) señala:

Para poder diseñar ambientes de aprendizaje ricos en actividades geométricas en las distintas dimensiones, los maestros de matemáticas debemos experimentar con diversas facetas del panorama geométrico. Entre más dimensiones y conexiones de la geometría conozcamos, podremos guiar con mayor éxito a nuestros alumnos en la experiencia de aprender a aprender geometría y les ayudaremos a sentar bases sólidas para ampliar el panorama en los siguientes años escolares y en la vida (p3).

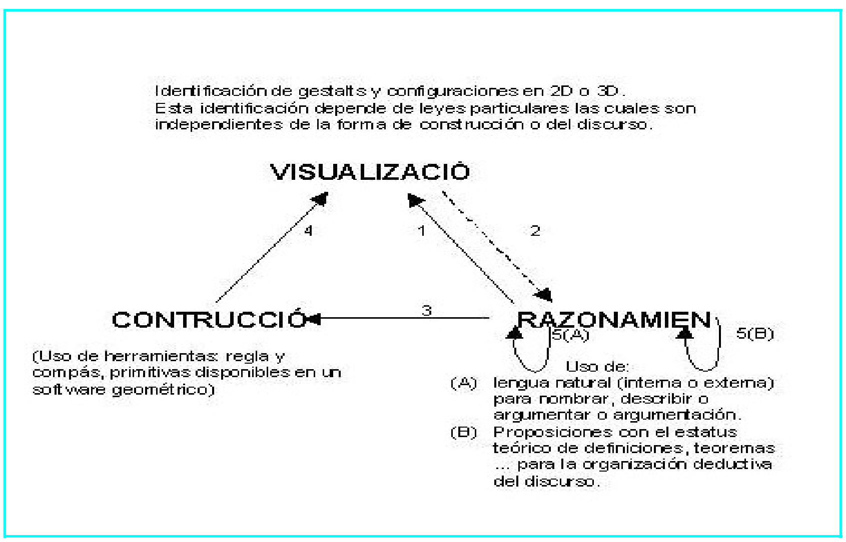


Ilustración 22: Las interacciones cognitivas subyacentes involucradas en la actividad geométrica[2]

[2] Imagen tomada de http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria_archivos/image004.jpg

En la ilustración 22 cada flecha representa la forma en la que una clase de proceso cognitivo puede apoyar a otra clase en cualquier tarea. La flecha 2 está punteada porque la visualización no siempre ayuda al razonamiento. La flecha 5(B) enfatiza que el razonamiento B puede desarrollarse de una manera independiente. En muchos casos podemos tener un circuito más largo. Por ejemplo 2-5(B)-3 puede representar la forma de encontrar el orden de construcción para una figura dada; 4-2-5(A) o 5(B) puede representar formas de describir un orden de construcción.

Por tanto puede verse el problema básico de la enseñanza de la geometría en escuelas anteriores y posteriores a las escuelas de nivel medio, como sigue: ¿cómo conseguir que los alumnos vean la comunicación entre estas tres clases de procesos? Las dificultades provocadas por la demostración son bien conocidas, y parece más natural favorecer primero los procesos de construcción y visualización. Pero esto provoca la siguiente pregunta general: ¿la práctica en cualquiera de las clases de procesos trae consigo el desarrollo para las otras dos clases?

Investigaciones como las de Duval (2001) han permitido anteponer el siguiente marco de análisis:

1. Las tres clases de procesos deben ser desarrollados separadamente.

2. El trabajo en la diferenciación entre diferentes procesos de visualización y entre diferentes procesos de razonamiento es necesaria en el currículo, pues existen varias formas de ver una figura; de la misma manera hay varias formas de razonar.

3. La coordinación de estas tres clases de procesos puede ocurrir realmente sólo después de este trabajo de diferenciación.

Planchar (2002) señala que los alcances cognitivos que tiene la visualización matemática se pueden determinar si se describen y definen diversos aspectos y elementos que confluyen en el campo de la visualización.

Duval (1998) es referenciado en la propuesta citada por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) donde se reflexiona sobre el aprendizaje de la geometría y que alude a los procesos de la visualización para caracterizar su desarrollo, estos niveles son:

- El primer nivel es: El nivel de percepción visual

Este nivel es el más básico de la visualización es donde se dan las primeras introducciones o primeros contactos con la imaginación de figuras geométricas. A los niños en edades entre los 2 y 4 años, se les estimula en este nivel con diferentes juegos para que desarrollen la actividad cognitiva, de tal forma que los niños pudiesen relacionar los objetos con diferentes figuras geométricas a través del juego sin importar que no conozcan los nombres de esas las mismas, pero que tengan la capacidad para reconocer sus formas. Lo que orienta a empezar con lo más básico, reconociendo las figuras, comparándolas con el mundo real y teniendo una idea general de cómo es la forma del objeto o figura.

- El segundo nivel: El nivel de percepción de elementos constitutivos

Al pasar el primer nivel de visualización entramos en el segundo nivel el cual es más complejo porque comenzamos con un análisis constitutivo de cómo está formada la figura, su tamaño y orientación no son tan relevantes como si lo eran en el primer nivel. Sin embargo, entran en juego las relaciones geométricas las cuales son de un análisis mayor como: la perpendicularidad y el paralelismo, por mencionar algunas.

Para profundizar un poco más en lo que son los elementos cognitivos debemos enfocarnos no solamente en la percepción visual que tengamos de esa figura geométrica, sino en aquellas características que tengan las imágenes que vemos a simple vista y también de aquellas que quedan ocultas. Este segundo nivel de visualización nos ayuda a ver las figuras de dos formas distintas y descubrir figuras que se forman con complementos.

- El tercer nivel: Nivel operativo de percepción visual.

En este nivel ya tenemos la percepción de las imágenes y de los elementos constitutivos, ya podemos utilizarlos para hacer una manipulación de los objetos, pensando cómo y de que otras formas estas pueden tener relaciones más elaboradas.

Un ejemplo de este nivel es el caso de las llamadas “*pruebas sin palabras*”, las cuales consisten en desarmar una figura mediante sus configuraciones y volviéndola a formar con una estructuración muy diferente a la original. De esto se trata el nivel operativo de percepción visual, es tener un pensamiento abstracto para poder imaginar que otra forma le puedo dar a las relaciones de las configuraciones que estén en ellas. Se presenta entonces en la ilustración 23 un cuadro comparativo que presenta un posible ejemplo que den explicación a lo que enuncian los niveles anteriores.

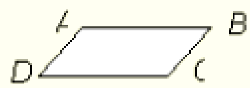
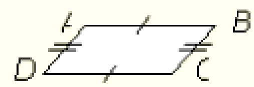
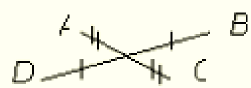
APREHENSIÓNPERCEPTUAL	APREHENSIÓN DISCURSIVA de una figura: Asociación de gestalts y proposiciones que determinan el objeto representado	
I. Visual	(*cambio de anclaje*) II a. Visual → Discursiva	II b. Discursiva → Visual
 La identificación de una **gestalt** 2D/2D. Puede ser vista como un techo, como la parte superior de una mesa, como un cuadrado en un plano distinto del frontal, como un paralelogramo, etc. Las Gestalts son más fácilmente vistas como representaciones geométricas *cuando están siendo construidas con herramientas* (regla y compás, primitivas de algún software geométrico)	 "ABCD es un paralelogramo" En el contexto de una proposición geométrica, esta **gestalt 2D**/2D de *varias gestalt constituyentes* **1D/**2D (aquí las líneas como lados de un ...). La representación geométrica está dada a través de las relaciones entre las gestalt constituyentes. Esta es la razón del porqué las gestalt 2D son vistas más fácilmente como configuraciones en relación a su construcción. La aprehensión discursiva geométrica involucra *un* ***cambio dimensional*** *en la aprenhensión perceptual* de las gestalt 2D/2D.	"Sea *ABCD* un   paralelogramo ... " Varias configuraciones posibles para el objeto matemático "paralelogramo": las relaciones entre segmentos (las propiedades del objeto representado) son enfatizadas con marcas.

Ilustración 23: Diferentes accesos en una figura[3]

[3] Imagen tomada de http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria_archivos/image004.jpg

Encontramos también que Hernández et al. (2001) manifiestan que *"En la geometría plana, como en la geometría del espacio, el cambio dimensional es un proceso cognitivo básico de la forma como uno ve una representación figural. Y podemos llevar más adelante la tesis de que la visualización en geometría cumple cabalmente un rol heurístico cuando los objetos o propiedades matemáticas que son relevantes para una demostración pueden ser vistas en una configuración de una dimensión mayor que la dimensión de las gestalts o subconfiguraciones que representan esos objetos en la figura inicial"*.

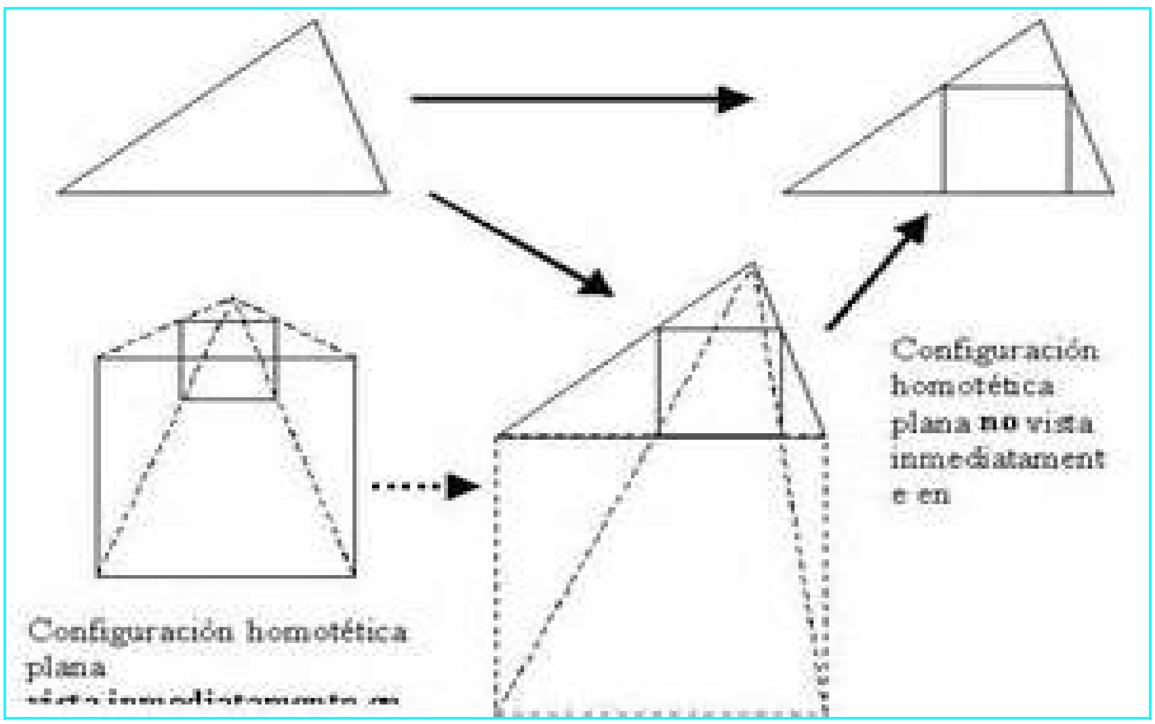


Ilustración 24: Construcción de un cuadrado inscrito en un triángulo[4]

[4] Imagen tomada de http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria_archivos/image004.jpg

Como proceso cognitivo se entiende pues, que la visualización presenta una complejidad de gran importancia en las situaciones didácticas. Luego, muchas de las prácticas educativas reflejan el poco desarrollo de actividades en torno a la exploración y construcción del espacio tridimensional, que es el espacio inmediato a la vida de los estudiantes. Se comparte entonces que es fundamental que comprendamos y analicemos que perspectivas tienen los estudiantes al observar los objetos desde enfoques de visualización, los cuales van desde lo más simple a lo más abstracto (riguroso), por lo que no es lógico dejar de lado dichos niveles.

En última instancia, si la visualización es un recurso intuitivo que algunas veces es necesario para llegar a una demostración, el razonamiento depende exclusivamente del corpus de proposiciones (definiciones, axiomas, teoremas) de los que se dispone. Y, en algunos casos la visualización puede ser engañosa o imposible. Sin embargo, estas tres clases de procesos cognitivos están cercanamente conectados y su sinergia es cognitivamente necesaria para la competencia en geometría.

En general, se considera que el término visualización se utiliza en referencia a figuras o representaciones pictóricas ya sean estas internas o externas. En ese sentido Presmeg (1986) se refirió a las imágenes visuales en el estudio "Visualización y matemáticos" , ella suscribió la definición de imágenes visuales como un esquema mental que representa información visual o espacial. Las gráficas, los diagramas, las figuras geométricas construidas manualmente o en computadoras generan representaciones internas y éstas fortalecen el proceso cognitivo que conduce al aprendizaje. Cuando se habla de representaciones internas, se refieren a las imágenes mentales, imágenes visuales, imágenes conceptuales.

Son variados los estudios experimentales que se han realizado con estudiantes de diversos niveles que han tratado aspectos diversos relacionados con la visualización. Por ejemplo, Moses (1977) [citado en Presmeg, 1986] clasificó los métodos en visuales y no visuales para la resolución de problemas. También él caracterizó, como personas matemáticamente visuales aquellas que prefieren resolver un problema con métodos visuales, aunque éste se pueda resolver por ambos métodos, visual y no visuales.

2.2.1 Pensamiento Visual y Pensamiento Simbólico

Para entender la visualización como un elemento trascendente en el proceso de aprendizaje de un concepto matemático, no se puede pensar que sólo con "ver una figura" se pueda desarrollar un proceso de aprendizaje del objeto matemático. Se debe considerar la vinculación con estructuras más complejas para la adquisición del objeto conceptual. Sin embargo, muchos estudiantes y profesores prefieren utilizar procedimientos algebraicos que argumentos visuales en la solución de problemas.

Vinner (1989), Eisenberg & Dreyfus (1990) señalaron que hay predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual. Algunos estudios están de acuerdo en que los estudiantes muestran preferencia por lo simbólico, es decir, trabajar con las expresiones algebraicas.

En un estudio que realizó Presmeg (1986) concluyó que los estudiantes destacados en matemáticas prefieren métodos no visuales para resolver los problemas. Además, señaló factores internos y externos que inclinan a los estudiantes a métodos no visuales. Entre los factores internos están aquellos relacionados con la abreviación de pasos; en la resolución de problemas están ligados con la abreviación y economía de la lógica. En cuanto a los factores externos Presmeg (1986) señaló:

a) Es posible que los matemáticos, por su naturaleza, favorezcan el pensamiento no visual. El componente lógico-verbal es el *sine qua non* de las habilidades matemáticas mientras el espacial visual no es obligatorio.

b) Una segunda posibilidad es que el currículo de las escuelas de matemáticas, en el cual el desarrollo está medido por la aplicación de cuestionarios y exámenes favorece al pensador no visual.

c) Las escuelas enfatizan en los métodos no visuales y si estos métodos visuales ocurren no son evaluados por los profesores.

2.2.2 Dificultades que pueden presentarse desde la Percepción Visual

La percepción visual es una de las vías para acercarnos a los objetos. Pero este acercamiento no implica que se realicen operaciones con los objetos y que haya discriminación en sus propiedades. La percepción visual, en algunas ocasiones, puede perturbar la aprehensión del objeto. En muchas ocasiones esto tiene que ver con los tipos de imágenes que se establezcan en los individuos.

Cuando se trata de hacer traslaciones del mundo físico a uno gráfico o algebraico algunas veces surgen dificultades. Ciertos elementos figúrales provocan que el estudiante se dirija a respuestas incorrectas. Monk (1992) se refirió a este problema como traslación icónica. Esto puede ser producto de la intuición (primer acercamiento que mucho tenemos de los fenómenos) y conducen a respuestas erradas. Se ha investigado que los procesos visuales intuitivos no son suficientes para alcanzar los otros niveles de abstracción que permitan las representaciones semióticas.

Otra situación que conduce a respuestas incorrectas es cuando los estudiantes aprehenden el objeto localmente y no globalmente. Monk (1992) afirmó que algunos estudiantes no tienen problema para entender datos representados gráficamente de una manera “puntual”, presentan serias dificultades para el entendimiento global" (es el tipo de razonamiento que se requiere en cálculo).

2.2.3 La Visualización Desde un Ambiente Físico y Tecnológico

Presmeg (1997) define visualización como*: "the processes involved in constructing and transforming visual mental images, as well as those used in drawing figures or diagrams or constructing or manipulating them on computer screens" (p. 304).* En el marco teórico de este trabajo se considera relevante la definición de visualización empleada por Presmeg (1997), ya que en ella se incluyen aspectos relacionados con el trabajo en ambientes informáticos. Concretamente, Presmeg (1997) precisa la visualización como el proceso asociado a la construcción y transformación de imágenes mentales visuales[5], y como éstas son utilizadas al dibujar figuras o diagramas o en la construcción y manipulación de ellas en el computador.

Así, es por medio de la visualización como el sujeto construye, modifica o transforma los objetos geométricos tanto en su mente como en la pantalla del computador aplicando y apropiándose de las propiedades geométricas de dichos objetos. Es aquí donde radica la importancia del ambiente de geometría dinámica, debido a que este podría permitir al sujeto

[5]Presmeg (2006) denomina imagen mental visual a un constructo mental que representa información visual o espacial.

operar en tiempo real con la representación semiótica de los objetos geométricos de manera similar a como se realiza en el espacio físico, teniendo en cuenta que este no constituye un registro de representación semiótica.

Por otra parte, es conveniente señalar la importancia de las imágenes mentales en la situación matemática en tanto que, según lo escrito por Plasencia (2000), optimizan las estrategias de resolución de problemas de los alumnos.

Investigaciones de autores como Wheatley (1990, 1991, 1997), Brown (1993), Brown y Wheatley (1989, 1990, 1991), han puesto de manifiesto que existe relación entre la utilización de imágenes y "tener éxito" en la resolución de problemas matemáticos. En sus estudios, básicamente de corte cualitativo, encontraron que los alumnos que frente a problemas "no rutinarios" usaron imágenes en sus razonamientos tuvieron más "éxito" que los alumnos que abordaron las tareas de forma procedimental. (p. 51).

Referente a esto, el MEN (2004) señala que:

Muchas personas creen que la visualización es una habilidad innata y una cuestión que debe permanecer al margen de la situación educativa. Sin embargo, dado que los procesos de visualización están en la base de la situación cognitiva en geometría el *alumno debe ir evolucionando en la "forma de mirar" los objetos, desde percepciones visuales simples, hasta aquellas que le permiten explotar el potencial heurístico de la visualización. (p. 10).*

Al hacer un análisis de lo referenciado hasta aquí respecto la visualización, se puede considerar que la visualización juega un papel importante al momento en que el estudiante enfrente las situaciones que se propongan en la secuencia didáctica, pues es ese proceso de manipulación cognitiva que el estudiante también puede hacer mentalmente ante representaciones de objetos geométricos presentados en una configuración en pantalla, lo que pudiese permitir al estudiante desde el desarrollo de sus habilidades conceptuales tener un acercamiento a conjeturar en este caso, sobre propiedades semejantes presentes en los conjuntos fractales utilizados en la situación propuesta.

2.3 Dimensión Didáctica

Para la ejecución de este trabajo de grado y la justificación de futuras situaciones de diseño, que den cuenta de la relevancia de los diseños fractales en el reconocimiento de las propiedades de las semejanzas, se hace necesaria una teoría que la sustente. Por esta razón, se recurre a la teoría de situaciones didácticas.

2.3.1 Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)

La teoría de situaciones se enmarca en una concepción constructivista – en el sentido Piagetiano- del aprendizaje, a partir de la cual Brousseau (1986) postula que el sujeto produce conocimiento como resultado de la adaptación a un "medio" con el que interactúa:

> "*El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (p.13).*

Consecuentemente, podemos aseverar que la noción de medio es uno de los aportes más importantes de la teoría de situaciones didácticas ya que, en concordancia con lo expuesto por D'Amore (2008),

> *"Es en el medio donde el alumno pone en juego sus conocimientos previos, experimenta, elabora hipótesis y conjeturas, todo ello con el fin de solucionar un problema matemático propuesto"*

En este sentido, el papel del docente consiste en asistir la adaptación del alumno al medio, ello en virtud de que el docente conoce bien las necesidades de dicho medio. Brousseau (1999) afirma que:

> *"(...) La descripción sistemática de las situaciones didácticas es un medio más directo para discutir con los maestros acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo éstos podrían tomar en cuenta los resultados de las investigaciones en otros campos. La teoría de las situaciones aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores y con los profesores."*

Cabe resaltar que la teoría de situaciones didácticas no solo caracteriza las relaciones que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje entre el alumno, el docente, y el saber matemático sino también las relaciones existentes de esta triada con un medio didáctico determinado que, según Brousseau (1993) esta formado por el subsistema donde actúa el alumno (materiales, juegos, situaciones didácticas, etc.). Citado por Arcila et. Al. (2012).

En este trabajo, Cabrí Geometrie II Plus y las situaciones propuestas constituyen el medio con el cual interactúa el alumno. Esto se observa cuando el alumno, a fin de hallar solución a la situación propuesta, realiza construcciones geométricas en lapiz y papel y explorando con los diversos artefactos del ambiente de geometría dinámica. A su vez, Cabrí Geometrie II Plus genera retroacciones que posibilitan en el alumno la creación de esquemas de uso y posteriormente posibles esquemas de acción instrumentada de construcción geométrica.

Estos esquemas, producto de la interacción entre el medio y el alumno, podrían favorecer la emergencia de nuevo conocimiento matemático. Al respecto de las retroacciones, estas le indican al alumno si la construcción que está realizando cumple con ser solución de la situación planteada, o si por el contrario debe modificar su estrategia de solución. Este conocimiento es entonces producto de la adaptación y conlleva a que los artefactos usados evolucionen hasta convertirse en instrumentos para el alumno.

Luego, haciendo referencia a las relaciones existentes entre el sistema didáctico[6] y el medio podemos establecer que, por una parte, el saber matemático se relaciona con la situación en tanto que modela los problemas que sólo dicho conocimiento permite resolver de manera óptima.

---

[6]Chevallard (1991) representa el sistema didáctico como una relación ternaria entre el profesor, el alumno y el saber enseñado.

Entre tanto, el profesor debe concebir y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan experimentar en la realidad, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y en las cuales el conocimiento en cuestión aparezca como una solución a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento sea construible por los alumnos.

En torno a las interacciones entre medio y alumno, el alumno responde a las variables didácticas del medio generando o utilizando conocimientos previos que le permitan dar respuestas cada vez cercanas al conocimiento que se pretende movilizar con la situación planteada. El medio en el cual el alumno debe resolver los problemas matemáticos, debe ser de alguna forma familiar o muy próxima a un entorno conocido por el alumno. Esto último, le permite reconocer y generar soluciones por adaptación a las pequeñas perturbaciones o variables didácticas introducidas por el profesor o por el mismo medio.

Por otra parte, es evidente que el concepto de situación es particularmente importante en la teoría de situaciones didácticas, Brousseau (1999) la define de la siguiente manera:

> *Hemos llamado "situación" a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas "situaciones" requieren de la adquisición "anterior" de todos los conocimientos y esquemas*

necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso "genético".

En general, la teoría de situaciones (TSD) plantea tres tipos de situaciones:

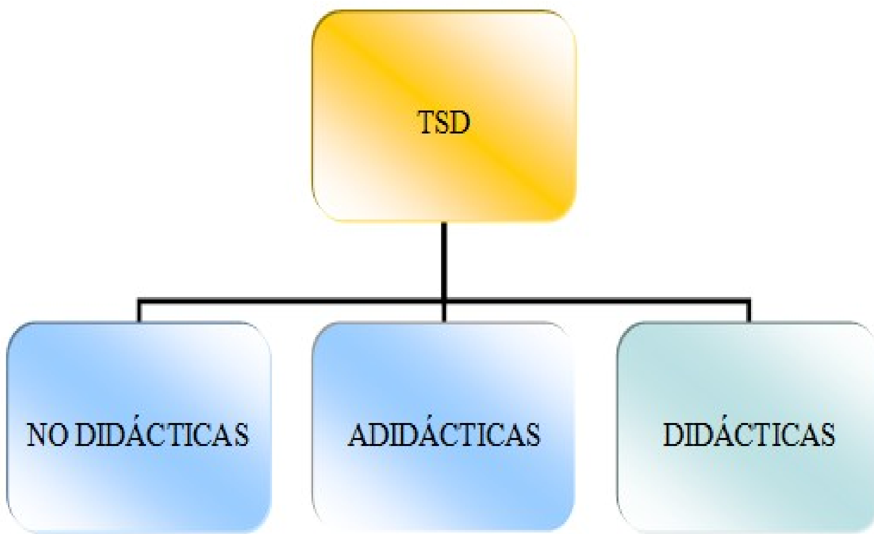


Ilustración 25: Esquema de situaciones en la Teoría de Situación Didáctica.

Brousseau (1993), supone que para todo conocimiento existe al menos una situación fundamental que lo caracteriza y lo diferencia de los otros y que permite la emergencia de dicho conocimiento. A estas situaciones fundamentales Brousseau (1986) las denomina situaciones adidácticas y postula que:

> *"El término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego."*

Son ellas las que preservan el sentido de un conocimiento específico, puede interpretarse que el conocimiento en cuestión emerge como una estrategia de resolución de innegable relevancia para resolver el problema que se ha planteado.

También Brousseau (1993), define la situación fundamental como un conjunto de situaciones específicas de un conocimiento que permiten engendrar un conjunto de problemas que proporcionan una buena representación de dicho conocimiento. También, define la noción de situación adidáctica (o fase adidáctica dentro de una situación didáctica) como aquellos momentos del proceso de aprendizaje en los cuales el trabajo del alumno se independiza del control directo del profesor.

Es decir, cuando el alumno esta en capacidad de producir y utilizar por sus propios medios el saber que se espera que construya, en una situación no prevista y que no involucra acciones concretas de enseñanza por parte del profesor, entonces a este suceso se le conoce como situación adidáctica.

En las situaciones adidácticas el profesor regula sus intervenciones buscando que sus alumnos se apropien continuamente del problema pero sin explicitar ninguna estrategia de solución. El profesor puede intervenir con preguntas generadas a partir de la observación de las acciones de los alumnos y las retroacciones del medio. Por ejemplo, algunos de los cuestionamientos que el profesor puede plantear a sus alumnos son ¿Qué crees que genera ese resultado?, ¿De qué otras formas lo explicarías?

Asimismo, Brousseau (citado por Trujillo, Castro, Guerrero & Delgado, 2007) delimita la situación didáctica como un conjunto de relaciones establecidas implícita y explícitamente entre los alumnos, cierto medio (que incorpora instrumentos y objetos) y el profesor, con el objetivo de que los alumnos aprendan un conocimiento matemático especifico.

Conforme a lo expuesto por Margolinas (2009), puede concluirse que la situación didáctica generaliza una situación adidáctica dada la mediación del docente en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Mientras que en la situación didáctica el profesor interviene sobre el alumno y el medio con la intención de regular las situaciones adidácticas que emergen y los aprendizajes que ellas generan, en la fase adidáctica el profesor restringe su participación y es el alumno quien gestionará la construcción del conocimiento con la ayuda de sus conocimientos previos y las retroacciones generadas en su interacción con el medio.

Las situaciones didácticas permiten considerar la posibilidad de modelar formas de enseñanza nuevas que se dan desde lo experimental, inmersas en un sistema didáctico desde un problema matemático propuesto. Cada situación didáctica se encuentra regulada por un contrato didáctico que no es más que un conjunto de obligaciones implícitas y explícitas relativas a un saber interpuesto entre el profesor y el alumno. Detalladamente, Trujillo et al. (2007) subrayan que:

> *Es el conjunto de normas o cláusulas de un "contrato" que tácitamente, sin acuerdo previo, rigen las obligaciones recíprocas entre profesor y alumnos con relación al proyecto de estudio que comparten. El objeto del contrato es el conocimiento C a ser enseñado y aprendido; es un contrato dinámico, evoluciona en el desarrollo de las situaciones, por ejemplo, inicialmente el alumno no está obligado a responder por cierto tipo de problema pero al final del curso es su obligación hacerlo en términos de los saberes institucionalizados por el profesor. (p. 68).*

Según Margolinas (2009), las situaciones no didácticas, son aquellos problemas que se generan de forma espontánea, y se le presentan tanto al profesional como al sujeto en su vida cotidiana.

Brousseau (1993) plantea que en el desarrollo de una situación adidáctica específica de un conocimiento determinado, son apreciables las siguientes fases o situaciones:

- Las situaciones de acción, en las que se genera una interacción entre los alumnos y el medio. Los alumnos deben tomar las decisiones necesarias para organizar sus estrategias de resolución del problema planteado.

- Las situaciones de formulación, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones entre alumnos. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.

- Las situaciones de validación, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que necesariamente debe ser así.

- Las situaciones de institucionalización, destinadas a establecer convenciones sociales. En estas situaciones se intenta que el conjunto de alumnos de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación.

Las situaciones a considerar en este trabajo de grado son del tipo de situación adidáctica, las cuales permitirán caracterizar la relevancia de las transformaciones de isometría en un problema de construcción geométrica en el plano y rastrear cada una de las etapas correspondientes a este tipo de situación. Por otra parte, la variable didáctica constituye otro de los conceptos importantes en la teoría de las situaciones didácticas.

Desde el punto de vista de Brousseau (1993), la variable didáctica es un elemento de toda situación adidáctica que es susceptible a modificaciones por parte del docente y que altera el estatus de las estrategias de solución del alumno. Es decir, las variables didácticas son aquellas que el profesor modifica en procura de un cambio en las estrategias de solución del alumno que lo encaminen a la apropiación del saber matemático esperado.

Por lo tanto, en el marco de la teoría de las situaciones didácticas, se espera tomar situaciones a-didácticas que permitan al estudiante hacer uso de sus habilidades visuales en pro de movilizar dicho saber puesto en juego tal que, ante las posibles variables de la situación adidáctica en cuestión, el alumno pueda encontrar una estrategia óptima de solución que persevere.

3. DISEÑO Y METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓN

En este trabajo se presenta el desarrollo de una secuencia propuesta como un diseño experimental que toma como referente metodológico la microingeniería, referenciado en el componente cognitivo de la ingeniería didáctica utilizada para el análisis de las situaciones que se presentan.

3.1 ENFOQUE METODOLOGICO

La propuesta para aplicación de la secuencia didáctica que esta contextualizada en geometría fractal, es dirigida a estudiantes de grado noveno y se presenta como una estrategia que permita evaluar las condiciones académicas de los estudiantes respecto lo conceptual en la movilización de la semejanza como una propiedad invariante en algunas transformaciones de isometría como las ya mencionadas en la dimensión matemática.

"(...) el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un

grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase". (Douady, 1996, p. 241).

Douady (1996) establece que la ingeniería didáctica en tanto metodología de investigación presenta las siguientes características:

- Un diseño experimental basado en las producciones didácticas en el aula: concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Aquí pueden distinguir dos niveles: uno de microingeniería y otro de macroingeniería.

- Un registro de estudios de caso y un sistema de validación interna que contrasta los análisis *a priori* y a *posteriori*.

A continuación son utilizados algunos aspectos de las cuatro fases que comprende la microingeniería didáctica.

3.2 FASES DE LA METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Ahora considerando en el presente trabajo estos aspectos de la ingeniería didáctica, particularmente en la perspectiva de la visualización y la integración de un ambiente de geometría dinámica contextualizada en la geometría fractal, se presenta un proceso que constara de cuatro fases:

3.2.1 Primera fase: Análisis preliminares

En concordancia con lo expuesto por Artigue (1998), se selecciona el siguiente análisis preliminar: El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica. (p. 38).

Artigue (1998), sostiene que el análisis de las restricciones toma en consideración tres dimensiones: la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica.

- Dimensión cognitiva: Aquí se reflexiona acerca de cómo los procesos de visualización y de génesis instrumental intervienen en los procedimientos de solución de los estudiantes a los problemas planteados relacionados con las habilidades del estudiante ante situaciones que involucran propiedades de semejanza en determinadas figuras.

Considérese entonces que, una situación de acción podría permitir al estudiante tomar las decisiones requeridas para organizar las estrategias a aplicar en la resolución de un problema planteado, a partir de su confrontación con el medio. Pero ¿cómo validan la construcción?, desde una perspectiva instrumental puede establecerse que la validación se realiza mediante el uso del arrastre y conceptualmente en función de las propiedades presentes en la construcción.

El diseño e implementación de las situaciones propuestas de construcción geométrica en el ambiente dinámico Cabrí Geometry II Plus puede favorecer las mismas, en tanto que la retroacción del ambiente dinámico posibilite la exploración, visualización y pruebas (haciendo uso del arrastre) generada por el estudiante. Siendo Cabrí Geometry II Plus un medio que puede permitir el desarrollo de situaciones adidácticas como las ya mencionadas en la TSD.

Por consiguiente, las situaciones propuestas en la metodología de este trabajo admiten diversas estrategias para su solución a partir de transformaciones de isometría tales como rotación, traslación, homotecias entre otros, que surgen en la medida en que el estudiante conjetura, prueba y da inicio a una posible argumentación frente al problema planteado en la situación propuesta. En la que también él mismo puede integrar macroconstrucciones que permitan al estudiante hacer distinción entre las propiedades invariantes presentes.

Laborde (2009) se refiere a la existencia de tres tipos de problemas, al hacer uso de un ambiente de geometría dinámica como el propuesto para el desarrollo de la secuencia, Cabrí Geometry II Plus:

a) Problemas que potencian su ejemplificación cuando se usa Cabri, son problemas que tienen solución en otros medios como por ejemplo papel y lápiz pero que con Cabri se multiplican las posibles soluciones a ser exploradas por los alumnos.

b) Problemas que se plantean de igual forma tanto en papel y lápiz como en Cabri pero se cambian las estrategias que siguen los alumnos, para solucionar el problema por el solo hecho de ser planteados en Cabri.

c) Tareas o problemas no existentes en papel y lápiz que solo adquieren sentido cuando se plantean con Cabri.

Al respecto Moreno (2002) conceptúa que:

> *"[…] Las herramientas computacionales, modifican la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático… Algunos autores se han interesado por la génesis instrumental de las herramientas computacionales (Rabardel, 1995)".*

Al aceptar la mediación de la pizarra electrónica de los ordenadores y computadoras, no se trata de trabajar con las mismas prácticas educativas tradicionales. Se deben modificar las situaciones problemáticas, los problemas, las tareas, las representaciones y hasta la forma de indagar e investigar respecto al conocimiento matemático.

Al respecto de los principios con que fue elaborado el programa Cabri Geometry, Laborde (1998) manifiesta:

> *"[...] El programa ha sido elaborado con la idea que el paso por las primitivas geométricas debería favorecer el uso de conocimientos geométricos(...). El entorno, responde pues, a la intención de ofrecer un sistema de significantes que tenga un dominio mayor de funcionamiento, en relación con la geometría y que haga más evidentes los límites del dominio de interpretación".*

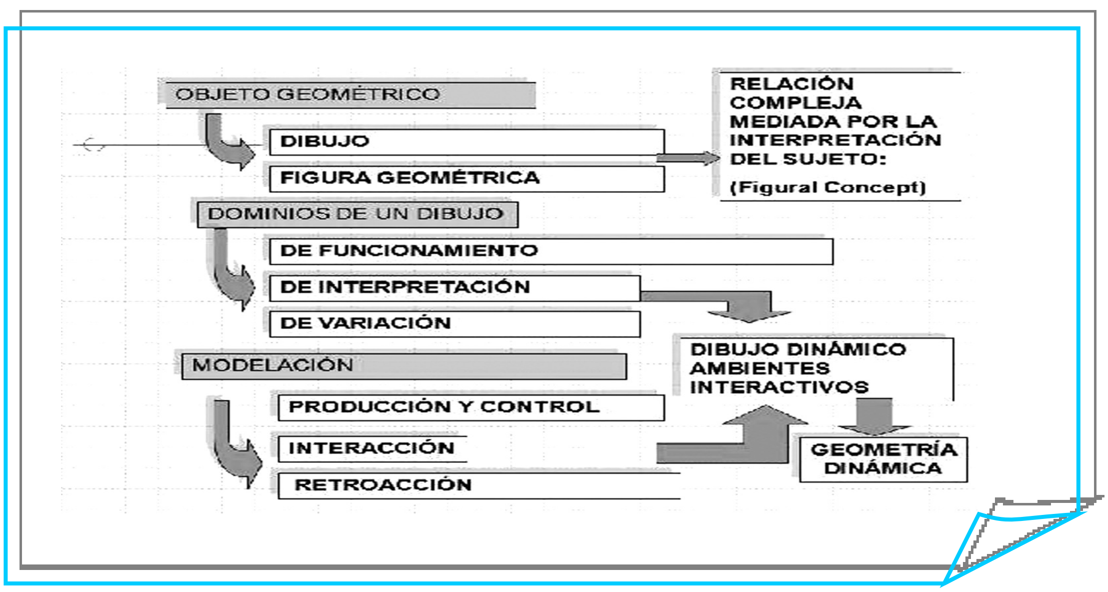


Ilustración 26: Ambiente de geometría dinámica Cabri Esquematizado. Laborde (1998)

“En cuanto al ambiente de geometría dinámica generado por el programa Cabri Geometry, considero que la distinción inicial entre primitivas geométricas y de construcción es de gran importancia. Poder hacer y grabar macroconstrucciones (que posteriormente pueden convertirse en primitivas de construcciones más elaboradas) constituye un elemento fundamental que le proporciona una flexibilidad y la capacidad de hacer dibujos dinámicos cada vez más complejos, que se escapan a la intencionalidad inicial.”

Frente a las opciones que se pueden plantear en geometría dinámica, Laborde (2006) afirma:

“(…) se pueden plantear situaciones “robustas” y situaciones “blandas”. Las primeras provienen de la construcción de una figura que satisface condiciones geométricas. Las construcciones robustas requieren conocimientos que los alumnos no tienen y se caracterizan por los teoremas y propiedades al estilo tradicional. Las construcciones blandas son aún más importantes para ayudar a obtener las construcciones robustas. Son construcciones de una figura que no satisface todas las condiciones”

- Dimensión epistemológica: Esta dimensión da cuenta del papel de la geometría fractal y la autosemejanza, a partir de las transformaciones de isometría en los procedimientos de solución para los problemas de construcción geométrica presentados a los estudiantes.

La geometría fractal en su desarrollo ha sido de gran ayuda en las herramientas para solucionar problemas de la ciencia de la computación, física, estadística, etc. Siendo evidente que los fractales abarcan campos que en la geometría diferencial serian imposibles de describir, como lo son las líneas costeras, plantas, montañas, sistema nervioso, anatomía humana, el cerebro entre otras.

> *"(...) una clasificación general de fractales puede ser considerada, dependiendo del tipo de estructuras que en ellos subyacen y que son empleados para generar las representaciones de los atractores"*

Entre los cuales encontramos los fractales autosemejantes, generados por los distintos tipos de sistemas iterados de funciones (SIF) que son de interés particular para este trabajo de grado. En la búsqueda de dar sustento formal a la teoría fractal, algunas investigaciones han recurrido a la geometría de las transformaciones desde los espacios vectoriales, como también el algebra lineal, el espacios euclídeo y el espacio afín.

Hutchinson (1981), proporciona un sustento matemático a los fractales autosemejantes, generados por sistemas iterados de funciones, que consta de una colección finita de afinidades contractivas, sobre un espacio métrico completo, más específicamente una colección infinita de niveles del fractal generados de forma recursiva. Afinidades contractivas que permiten estructurar y clasificar los diversos tipos de sistemas iterados de funciones que subyacen como modelos matemáticos de los fractales autosemejantes.

- Dimensión didáctica: Considera conceptos referidos a las variables de tipo didáctico inherente a los problemas propuestos, contemplando la teoría asociada a los mismos y su relación con la teoría de situaciones didácticas.

3.2.2 Segunda fase: Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas

Se presenta un análisis *a priori* de las situaciones consideradas en el diseño experimental propuesto como secuencia didáctica para ser aplicada en el aula, análisis *a priori* que se puede concebir como un análisis de significado en tanto que:

> "*Si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción de un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones. (Artigue, 1998, p. 44).*

Consecuentemente, el análisis *a priori* en esta fase tendrá por objetivo determinar cuáles son aquellas variables didácticas en las situaciones propuestas, que al modificarse ocasionaran un cambio en las estrategias de solución de los estudiantes, al igual que el análisis del proceso cognitivo de visualización que el estudiante hace al indagar en la posibilidad de identificar e interpretar propiedades geométricas en objetos presentes en la construcción y que puedan orientarlos en el reconocimiento de la semejanza en un objeto Fractal.

Por lo tanto, este análisis se fundamentara en los supuestos considerados por quien investiga. Por otra parte, dado que el proceso de validación se basa en confrontar los análisis *a priori* y *a posteriori*, entonces es correcto afirmar que desde esta fase comienza dicho proceso.

De esta manera es propuesta una secuencia didáctica que da cuenta de la noción de autosimilaridad como un concepto importante en Geometría Fractal, a partir de la idea de conjunto autosimilar, como aquel que está constituido por copias de si mismo. En este sentido el concepto de autosimilaridad en el desarrollo de la secuencia se aborda desde la manipulación de algunos conjuntos de construcciones fractales como: conjunto de cantor, triángulo de Sierpinski, curva de Koch.

Dando lugar a procesos de visualización, análisis y comunicación contextualizada en torno a la geometría fractal, de acuerdo a las transformaciones de isometría que se pueden presentar en figuras que hacen parte de la secuencia propuesta en particular con el movimiento a partir del la exploración que el estudiante puede hacer en los conjuntos fractales ya mencionados y cuyos nombre son cambiados en la presentación de cada situación.

Se inicia a partir de la definición de fractal que se toma para el interés de esta secuencia: Un fractal son aquellos objetos compuestos por elementos cada vez más pequeños de si mismos. Cuyo propósito general busca aportar en el trabajo con fractales a partir de la definición desde la cual pueda tenerse una cercanía a su reconocimiento, desde aspectos meramente visuales hasta identificar el concepto de autosimilaridad brindado anteriormente.

Lo anterior significa el planteamiento de una secuencia didáctica que contribuya en el desarrollo de procesos propios del pensamiento matemático que propicie en los estudiantes la confianza en sus propias capacidades conceptuales desde el reconocimiento de propiedades geométricas presentes en algunas figuras y que los mismos identifican a partir de transformaciones isométricas presentes en ellas.

Se presenta una secuencia didáctica que considere como variables didácticas la exploración del cambio en la escala de las figuras que presentan transformación, la composición de transformaciones que movilicen aspectos relacionados con rotaciones y traslaciones en el plano como propiedades invariantes que se destaquen en ellas, la utilización de macroconstrucciones para explorar dichas propiedades invariantes entre las figuras semejantes posibilitadas desde el arrastre al explorar las mismas.

3.2.2.1 Descripción General de la Secuencia Didáctica

A continuación se presentan las situaciones (Tapete Triangular, Caminos y Curva en Picos) que conforman la secuencia didáctica, las cuales quedan como propuesta para ser aplicadas en una próxima investigación, a partir de los ajustes que se han realizado después de haber aplicado una primera secuencia que se deja en los anexos dado que la misma es considerada como instrucional y no es acorde a situaciones adidácticas que se propuso tener en cuenta en la misma, retomando un razonamiento que gire en torno a la acción, la formulación, validación e institucionalización articuladas con las variables didácticas alrededor de una consigna. Desde aquí se dispone presentar las situaciones, propósitos y tiempo de las mismas:

SITUACIÓN	PROPOSITO	TIEMPO
Tapete Triangular (a, b)	Describir la semejanza como una propiedad invariante en una composición de transformaciones isométricas a partir de procesos de visualización. Desarrollar el concepto de homotecia, reconociendo alguna de sus propiedades.	Ciento Ochenta minutos
Caminos (a, b, c)	Reconocer diferencias entre la unidad y los patrones de medición. Desarrollar el concepto de homotecia, reconociendo alguna de sus propiedades. Trabajar con una expresión para entender la dimensión en un objeto.	Doscientos Setenta minutos
Curva en Picos (a, b)	Describir la semejanza como una propiedad invariante en una composición de rotaciones.	Noventa minutos

Ilustración 27: Presentación general de la secuencia didáctica

3.2.2.I.1 Análisis *a priori* de la Situación 1: Tapete Triangular

Esta situación llamada Tapete Triangular, presenta como propósito describir la semejanza como una propiedad invariante en una composición de transformaciones isométricas a partir de procesos de visualización, dando inicio a la secuencia didáctica introduciendo elementos importantes que desde una situación de acción y formulación permita a los estudiantes explorar en una actividad matemática utilizando Cabri Geometry II Plus e indagar en el movimiento de la figura el cual puede visualizar a través del arrastre de la misma.

En esta situación la consigna que establece las características del movimiento, parte desde la hipótesis de una figura compuesta por objetos geométricos en principio estáticos, pero que pueden ser modificados a partir de una transformación. Al ingresar al archivo "Situación 1" los estudiantes afrontan una figura que aparentemente está compuesta de un objeto común, en este caso un triángulo equilátero tal como aparece en la (ilustración 28).

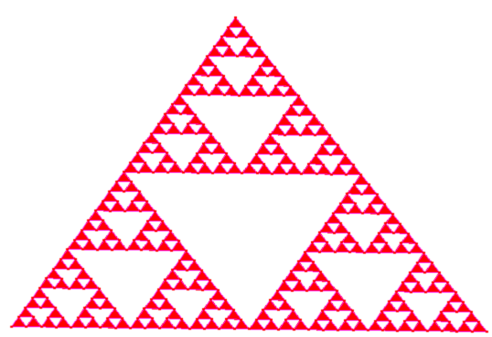


Ilustración 28: Configuración en pantalla presentada en Situación 1a "Tapete Triangular"

La construcción del Tapete Triangular se observa en la (ilustración 29), la cual deja en evidencia que se parte de la macro de un triángulo equilátero proporcionado por Cabri Geometry II Plus, en donde los puntos medios ubicados a cada lado del mismo se convierten en los objetos iniciales y los triángulos resultantes al unir los puntos medios con los puntos vértices del triángulo equilátero, generan otros triángulos con iguales propiedades salvo la escala del inicial, que pasan a ser los objetos finales para la validación de la macroconstrucción en la situación 1a presentada a los estudiantes bajo el nombre de Tapete Triangular, el cual en la geometría fractal es reconocido como el triángulo de Sierpinski.

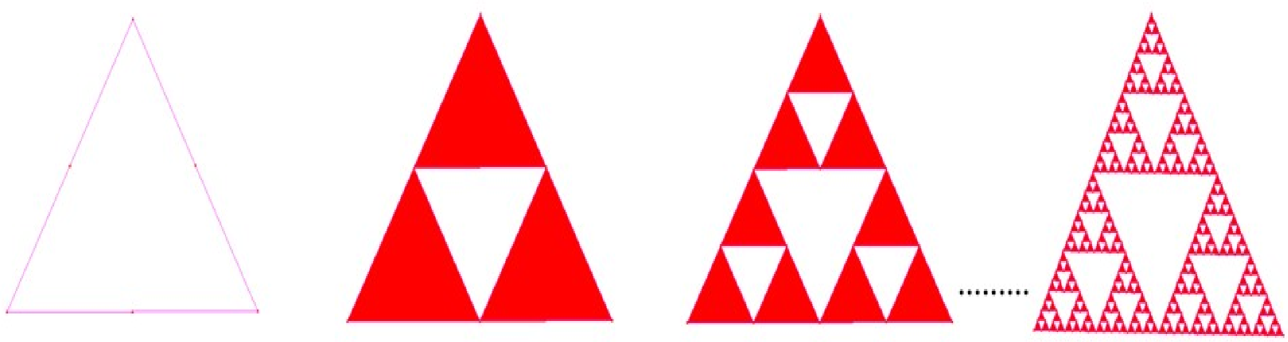


Ilustración 29: Construcción del Tapete Triangular.

En donde los vértices del triángulo equilátero considerado inicialmente pueden ser movidos por medio del arrastre de manera que los que se encuentran en su interior no se deforman, es decir se mantienen semejantes dado la macroconstrucción generada con la herramienta proporcionada por el ambiente dinámico con el que se trabaja Cabri Geometry II Plus.

La Situación 1a dada la macroconstrucción se presenta los siguientes interrogantes ¿Qué objetos geométricos reconoce? ¿Qué propiedades permanecen invariantes en la macroconstrucción? Esperando que el estudiante haga uso de los conceptos geométricos que conoce, para identificar visualmente los objetos geométricos presentes en la macroconstrucción dada, y que también utilice el arrastre como método importante para dar validez a la justificación de aquello que observa y que en determinados puntos puede moverse.

Desde aquí, el estudiante ya se acerca a la identificación de un conjunto autosimilar, pero también es de considerarse que el estudiante se formule otra serie de interrogantes que considere apreciable en su desarrollo como: ¿Cuántas figuras hay? ¿Qué puede decirse respecto del área de la figura? ¿Qué transformación relaciona un objeto geométrico con otro?

Se presenta entonces dentro de esa situación otra macroconstrucción donde el estudiante puede hacer uso de la homotecia para que en su desarrollo pueda ayudar al mismo a ampliar o brindar las respuestas que pueda tener para los interrogantes formulados, generados y aquellos que vienen con la misma actividad como tal. Al ingresar al archivo "Situación 1b" los estudiantes afrontan una figura que aparentemente está compuesta de un objeto común, en este caso un triángulo equilátero tal como aparece en la (ilustración 30).

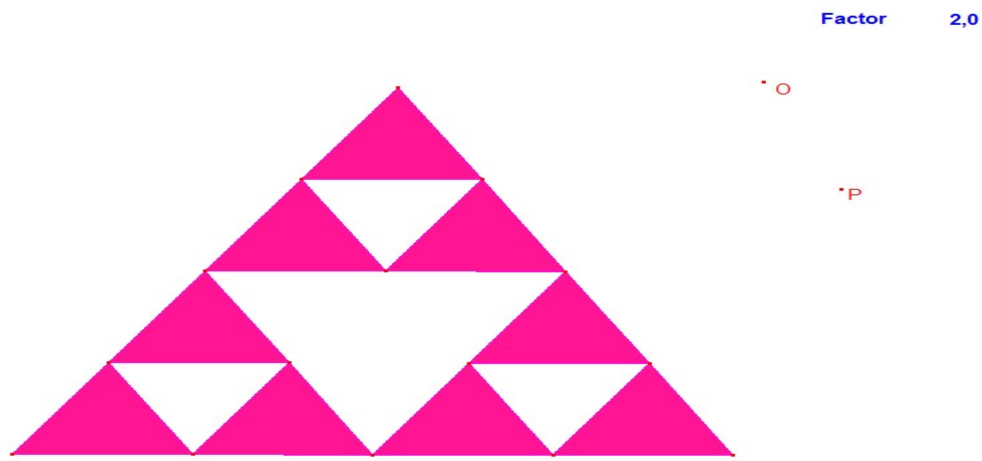


Ilustración 30: Configuración en pantalla presentada en Situación 1b "Tapete Triangular"

Para su desarrollo se espera que el estudiante pueda reconocer en la macroconstrucción que tipo de transformación se presenta y las propiedades como por ejemplo la forma, que se conservan en la figura en la medida en que hace uso del arrastre y las otras herramientas que facilita el ambiente dinámico en el cual se trabaja.

3.2.2.I.2 Análisis *a priori* de la Situación 2: Caminos

En esta situación de acción se presenta una construcción donde se consideran aquellos patrones numéricos y geométricos subyacentes en la misma, esperando que los estudiantes no presenten dificultades al hacer el análisis de magnitudes numéricas en la visualización de un segmento que ha sido trisecado inicialmente y a partir del cual se inicia un proceso que al parecer multiplica el mismo pero con escala diferente.

El arreglo presentado en la (ilustración 31), de la situación 2a tiene como propósito reconocer diferencias entre la unidad y los patrones de medición, donde se espera que el estudiante involucre la exploración, visualización y manipulación para generalizar respecto de patrones numéricos y geométricos que rigen en la figura en tanto a la medida de los objetos implicados.

Ilustración 31: Configuración en pantalla de la situación 2a “Caminos”

En la construcción presentada en la (ilustración 32), se hace evidente la construcción oculta respecto a la trisección del segmento aplicando el teorema de Thales.

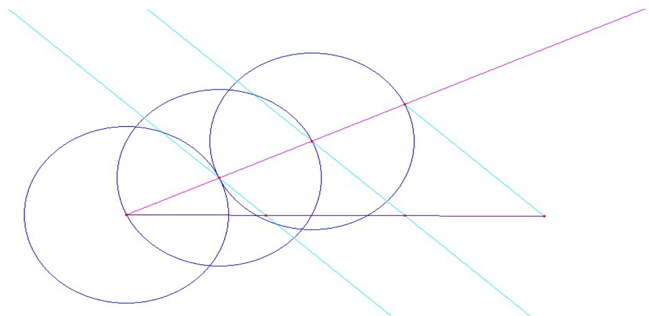


Ilustración 32: Construcción de la Trisección del segmento.

Construcción en donde el medio restringe el arrastre de puntos, circunferencias y rectas, centrando el interés en encontrar cuales son los puntos que pueden arrastrarse para moverlos sobre la figura en la pantalla.

De nuevo se trabaja con macroconstrucciones al igual que en la situación 1a, haciendo uso de una herramienta del ambiente dinámico Cabri Geometry II Plus en el cual se trabaja, y que consiste en una secuencia de comandos actuando sobre unos objetos iniciales para producir nuevos objetos finales, permitiendo definir procesos complejos para que los estudiantes puedan explorar en una figura razonando sobre las propiedades invariantes en la misma al estudiar la transformación particularmente de semejanza en este caso que la figura presenta. Con un tiempo de duración esperado de Ciento Ochenta minutos.

La situación 2a presenta como consigna ¿Qué tipo de patrones se repiten en la figura? En donde se espera que el estudiante reconozca propiedades en objetos geométricos que presentan la misma forma aunque no necesariamente el mismo tamaño, haciendo aproximaciones a propiedades de semejanza.

Desde aspectos meramente visuales, el estudiante puede manifestar ver el mismo objeto geométrico con diferente tamaño y hacer uso de otras herramientas proporcionadas por el ambiente dinámico en el cual se trabaja como rectas paralelas, distancia o longitud, homotecia, traslación, entre otros. Ampliando sus conjeturas sobre el movimiento de algunos puntos en la figura evidenciados desde el arrastre de los mismos. Situación que también acerca al estudiante a una idea de autosimilaridad como aspecto particular en un objeto fractal.

Pensando en que el estudiante tenga preguntas que involucren otras opciones del ambiente dinámico como las mencionadas anteriormente, son propuestas dentro de esta situación otras actividades (2b, 2c) que involucran directamente el uso de traslación y homotecia, las cuales podrían permitir al estudiante el reconocimiento de propiedades semejantes al trabajar con homotecias.

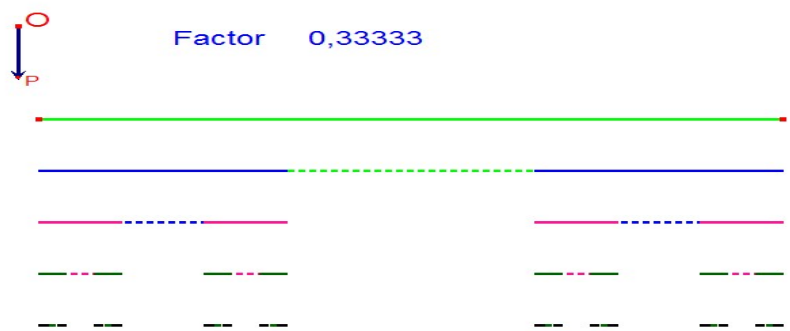


Ilustración 33: Configuración en pantalla de la situación 2b "Caminos"

De igual manera, estas actividades pueden permitir al estudiante trabajar la dimensión de un objeto respecto su perspectiva visual del mismo.

3.2.2.I.3 Análisis *a priori* de la Situación 3: Curva en Picos

Esta situación de validación, busca que el estudiante encuentre relaciones de semejanza propiciadas desde el arrastre, mediante exploración de herramientas como la rotación que le permitan en su propósito, describir la semejanza como una propiedad invariante en una composición de rotaciones.

Es importante que el estudiante realice comparaciones entre las figuras presentadas en (la ilustración 34), para que intente explicar a otro lo que visualiza cuando hace uso del arrastre y compara algunos lados y ángulos en las figuras.

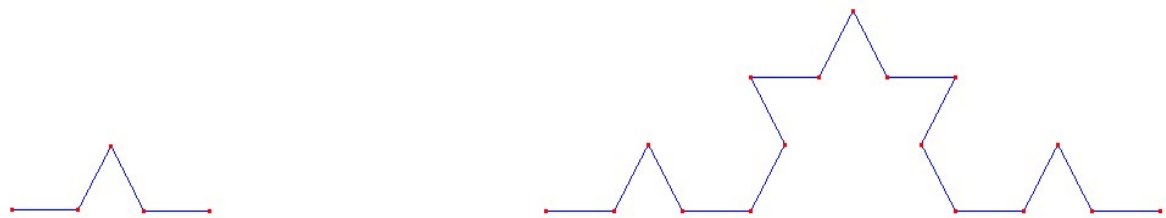


Ilustración 34: Configuración en pantalla de la situación 3a"Curva en Picos"

De forma análoga a las situaciones anteriores, la figura presentada a los estudiantes tiene construcciones ocultas que hacen uso de macroconstrucciones, como se puede observa a continuación,

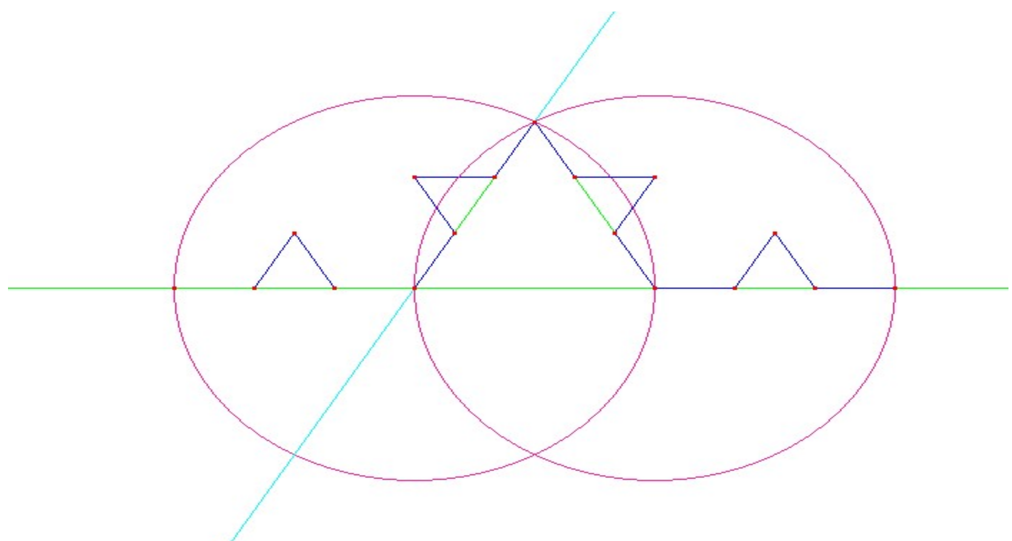


Ilustración 35: Construcción de la Curva en Picos.

Esta situación llamada Curva en Picos, se presenta en el cierre de la secuencia propuesta esperando permitir que los estudiantes puedan referenciar sus experiencias en las otras dos situaciones anteriores para el desarrollo de la misma. Siendo la consigna de la situación ¿Cómo explicarías a un compañero que estas dos figuras comparten propiedades? La cual con sus propias palabras se esperaría que el estudiante intente responder.

Como también que el estudiante pueda identificar y/o construir un conjunto autosimilar, con un acercamiento a la construcción del fractal de la curva de Koch llamado aquí Curva en Picos, a través de movimientos que desde un ambiente de geometría dinámica como Cabrí Geometry II Plus permiten generarse en medio de la resolución a otras consignas que el estudiante se formule como por ejemplo ¿Cómo son los ángulos en la figura?

Se propone en esta situación una segunda actividad llamada situación 3b según la ilustración 36, en la que también se busca que el estudiante explore otras herramientas del ambiente dinámico, como por ejemplo la animación de un punto.

Ilustración 36: Configuración en pantalla de la situación 3b“Curva en Picos”

3.2.3 Tercera fase: Experimentación

En esta fase se presenta la secuencia didáctica diseñada a los sujetos seleccionados para desarrollarla. Simultáneamente quien investiga toma el registro correspondiente de los procedimientos de solución. Las actividades a considerar son adaptaciones realizadas a partir de los aportes de Santacruz (2011) y de la propuesta familias de fractales autosemejantes en el plano, con la implementación del ambiente dinámico proporcionado por Cabri Geometry II Plus.

Se pretende que la secuencia propuesta sea desarrollada de acuerdo al uso de conocimientos previos del estudiante respecto propiedades de semejanza sobre su forma individual de visualizar aquello que lo rodea. Generando razonamientos desde actividades que lleven al mismo a tomar decisiones e implementando un ambiente dinámico que amplíe la posibilidad de interpretación visual al estudiante desde lo experimental de la matemática y los procesos geométricos inmersos en ella.

Cuyo objetivo general sería que, a través del desarrollo de la secuencia, el estudiante esté en capacidad de definir procesos de transformaciones de isometrías en algunas figuras desde las propiedades de semejanza que pueda reconocer en las mismas acercándolo a identificar un conjunto autosimilar en el contexto de la geometría fractal; para que a su vez reconozcan propiedades básicas de objetos fractales, al analizar e interpretar imágenes de los mismos.

Aportando reflexiones relacionadas con la enseñanza en el aula de la geometría fractal, en busca de caracterizar las posibilidades y restricciones de los estudiantes en la aplicación de movimientos en el plano (rotación, traslación y homotecia) descritos verbalmente en el papel o en un ambiente dinámico.

Durante el desarrollo de las situaciones, los estudiantes tendrán la posibilidad de discutir de forma grupal las inquietudes que se van presentando como obstáculos notorios para ellos, buscando proseguir con la situación propuesta, dejando registros escritos en las guías de trabajo de las actividades con las cuales se cuenta.

3.2.4 Cuarta fase: Análisis *a posteriori*

El análisis *a posteriori* se basa en los registros recogidos en la fase de experimentación, es decir, en las observaciones y en las producciones de los sujetos mientras estos desarrollan las situaciones propuestas. Finalmente, las conclusiones serán presentadas a la luz de los propósitos planteados para las situaciones de la secuencia, presentando también una caracterización de la población donde sea aplicada, al igual que la descripción del contexto de la experimentación y los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia didáctica.

Siendo esta secuencia presentada para una propuesta de investigación que se haga posteriormente no es presentada resultados para la tercera y cuarta fase de experimentación y análisis *a posteriori* respectivamente, pues estas quedan a consideración de quien realice la investigación.

4. CONCLUSIONES

Son presentadas las conclusiones de este trabajo de grado inicialmente desde el análisis a la pregunta que introduce la indagación, posteriormente el reconocimiento respecto de los objetivos planteados, seguido de algunas inferencias relacionadas con la secuencia aplicada y la secuencia que se deja como propuesta, finalmente algunas reflexiones personales.

En cuanto a la pregunta que introduce la indagación en este trabajo de grado, se considera que pudo presentarse una secuencia que considerara los objetivos planteados en el mismo y el análisis para la misma secuencia.

Con lo que respecta al objetivo general, puede decirse que se estableció de forma teórica el diseño de una secuencia de situaciones didácticas que estuviese contextualizada en la geometría fractal, la cual se intereso en los procesos visuales y geométricos por parte de los estudiantes para abordar la autosimilitud y la dimensión fractal en algunas construcciones generadas o dadas, inmersas en situaciones cuyo desarrollo esperado sea dado a partir de las estrategias de razonamiento empleadas por los estudiantes.

Respecto al primer objetivo especifico se tiene que, la aplicación de la secuencia didáctica inicial implico el análisis de propiedades básicas presentes en las construcciones generadas mediante la observación e iteración que se daba entre los estudiantes. Análisis que parte desde formulaciones, comentarios y razonamientos que no daban cuenta de una respuesta concreta, permitiendo en general a los estudiantes centrar sus observaciones visuales en características como la igualdad en la forma más no en la medida de las partes que constituían los conjuntos fractales presentes al momento de explicar sus argumentos; situación que se esperaría no se presente en la secuencia dejada como propuesta.

Con lo que se refiere al segundo objetivo específico son analizadas las posibilidades y restricciones del estudiante al implementar un ambiente de geometría dinámica en su proceso de formación respecto a situaciones enmarcadas en la geometría fractal; es por ellos que dentro de las posibilidades del estudiante pudo observarse que, la implementación del programa Cabrí Geometry II Plus, posibilitó a los estudiantes validar algunas inferencias obtenidas en las situaciones propuestas mediante la observación y el razonamiento durante el desarrollo de la secuencia aplicada en algunas construcciones, donde fue de fundamental importancia el elemento arrastre del programa para la manipulación de las mismas.

En lo que concierne a las restricciones, ante un primer acercamiento del docente y los estudiantes para el uso del programa Cabrí Geometry II Plus, es de destacar la familiarización que en un tiempo limitado tuvieron los mismos con las funcionalidades del programa, para el desarrollo de una de las situaciones. Hecho que se tiene en consideración al dejar en una secuencia propuesta situaciones que impliquen el uso del programa en mención para cada una.

Por otro lado, puede resaltarse que la poca participación por parte del docente, posiblemente contribuyó a que los estudiantes generaran estrategias que los llevaran a tener inferencias que dieran respuestas para formulaciones presentes en la secuencia en cualquiera de sus situaciones.

Durante el desarrollo de la secuencia, fue evidente la necesidad de los estudiantes en implementar herramientas de medida para validar algunas respuestas. Como también que, aun con las dificultades que presentaban los estudiantes en la lógica de sus argumentaciones a determinadas formulaciones de la secuencia, en el momento de socializar e intentar explicar su idea los estudiantes insistían en la existencia de una forma que cambiaba de tamaño.

El desarrollo de la situación 2 de la secuencia aplicada, puso en evidencia dificultades de los estudiantes de grado noveno de la institución, en lo que respecta a conceptos que deberían ser de posible aplicación por parte de los mismos.

La aplicación de la secuencia didáctica, contextualizada en la geometría fractal para cada una de sus situaciones, hizo evidente como los estudiantes realizan inferencias cercanas a lo que define un conjunto autosimilar a partir de lo que visualizan, independientemente de que se de un concepto previo del mismo que lo defina.

En el desarrollo de la secuencia aplicada, se observaron estrategias grupales e individuales al momento de argumentar el análisis que respecto a la visualización se hacían de las construcciones generadas o dadas para su estudio en la secuencia. Lo que permitió desde la experiencia con la secuencia, que algunos estudiantes manifestaran sus apreciaciones con respecto a que existía una relación directa entre las imágenes pues siendo esta pequeña o grande mantenían una forma en particular por la semejanza de las mismas.

Al analizar cada una de las situaciones propuestas se encuentran que la manera como han sido planteadas son demasiado instructivas, por lo cual para hacer compatible los análisis presentados de las situaciones son ajustadas en cuanto al diseño con la teoría, a partir de la experiencia con la aplicación de la secuencia aplicada, dejando una propuesta que a futuro pudiese ser retomada para una nueva investigación.

Como reflexión personal, a partir de la experiencia con la secuencia aplicada, puedo interpretar que la práctica en geometría en forma visual y manipulativas para construcciones generadas desde determinadas consignas que han sido propuestas, pudiesen contribuir a la motivación de los estudiantes frente a un tema, además de la comprensión y conceptualización del mismo en las inferencias de los estudiantes.

También, como docente en formación la experiencia de presentar y analizar una secuencia que estuviese contextualizada en la geometría fractal, es enriquecedora por tanto entran en juego diversos factores considerados o no de conceptos, tiempo, espacio, diseño y manera particular en que se enseña y evalúa en el aula. Como también las variables que deben tenerse en consideración al momento de rediseñarla.

Se espera que los aportes que brinde este trabajo de grado, puedan ser considerados por otros docentes en formación o en ejercicio de la profesión, para ser enriquecido con cambios, mejoras y otras de consideración al igual que de utilidad para la enseñanza.

REFERENCIAS

Arcila, J.H. et al. (2012). Caracterización del Uso de las Transformaciones de Isometría Mediante el Diseño de una Secuencia de Problemas Abiertos de Construcción Geométrica con Cabri 3D. Cali, Colombia. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Artigue, M. et al. (1998). Ingeniería didáctica. (Eds.). Ingeniería didáctica en educación matemática. Colombia: una empresa docente.

Artigue, M. (2002).Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Ben-Chaim, Lappan & Houang. (1989). "The Role of visualization in the middle school mathematics curriculum". *Focus Learning Problems in Mathematics*. Winter Edition, Vol. 11, N.1. p. 49-60.

Brousseau G. (1986): Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Brousseau G. (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. (J. Centeno, Begoña M. & J. Murillo, Trads.). España: Seminario Matemático García de Galdeano, de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Zaragoza. (Trabajo original publicado en 1986).

Brousseau G. (1999): *"Educación y Didáctica de las matemáticas"*, en Educación Matemática, México.

Cañadas María C. et. Al. (2008). Fractales: Hasta el Infinito y más Allá (o más Acá). Grupo PI.

Castro E., Castro E. (1997). *La educación matemática en la secundaria.* Coordinador:

Luis Rico. Editorial Horsori, Pág. 95 -124.

Castro E., Castro E. (1997). Representaciones y Modelización. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Capitulo 4. Encontrado en *http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CastroE97-2531.PDF*

Cedillo, T. (2006). La Enseñanza De Las Matemáticas En La Escuela Secundaria: *Los sistemas algebraicos computarizados*. RMIE, Enero-Marzo, Vol. 11, Núm. 28, PP. 129-153.

Chevallard, (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Codes, V. M. et. al. (2005). Entorno Computacional y Educación Matemática: Una Revisión del Estado Actual. IX SIMPOSIO SEIEM. Grupo de investigación: Didáctica del Análisis
Colombia, Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares*. Bogotá, D.C., Colombia: Autor.

Coxeter H.S.M (1971). Fundamentos de Geometría. Ed. Limusa-Wiley, S.A. México/ Buenos Aires. Pág. 96, 228.

Cunningham, S.(1991).The Visualisation environment for mathematics education. In W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), MAA notes number19: *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp.67-76). MAA.

Dueñas, W.H. et al. (2012). Con lógica 11. Serie de Matemáticas para Educación Básica Secundaria y Media. (pp. 70-72). Educar S.A.

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collage-seconde. En Barbin, E.,Douady, R. (Eds.). Enseñanza de las matemáticas:

Relación entre saberes, programas y prácticas. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.

Duval, R (1999). *Semíosis y Pensamiento Humano, Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Cali. Valle. 147 - 314P.

Duval, R (2001). *La geometría desde un punto de vista cognitivo. Traducción: Hernández, Víctor y Villalba.* PMME - UNISON.

Estrada W F. (2004). Geometría Fractal: Conceptos y Procedimientos para la construcción de fractales. Cooperativa Editorial Magisterio.

Figueiras L. et. al. (2000). *Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales.* Suma 35. pp.45-54.

Garzón, D. & Valoyes, L. (2005). *Notas de Clase de Geometría l*. Cali, Colombia: Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Guzman M, et al. (1993). Estructuras Fractales y sus aplicaciones. Barcelona: Editorial Labor.

Hernández, V. & Villalba, M. (2001). *Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI.* Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original. Recuperado de http://www.euclides.org/menu/articles2.htm

Hitt F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto Real. *Revista de Educación Matemática.* Vol. 7 - No. 1, Abril, México.

Hutchinson J.E. (1981).Fractals and Self-Similarity. Indiana: Univ. Math J. 30, 713-749.

Laborde, C. (2009). *The critical role of tasks and teacher in the use of dynamic geometry in the mathematics classroom: example with Cabri*. Conferencia dictada en Universidad del Valle, Cali, Colombia. http://matematicas.univalle.edu.co/ccm/.

Madrigal G. C. et. al. (2012). Pensamiento Geométrico y Espacial. Facultad de Ciencias Básicas. Escuela De Matemáticas. Departamento de Enseñanza de la Matemáticas. Universidad de Costa Rica.

Mandelbrot, B. (1983). The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman and Company.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. (M. Acosta & J. Fiallo, Trads.). Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander (trabajo original en francés publicado en 1993).

Marmolejo A. G. A. (2007). Algunos tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras geométricas: procesos de visualización y factores de visibilidad. Universidad Del Valle. Instituto De Educación Y Pedagogía.

Martin, G. (1998). *Geometric constructions*. New York, EE.UU: Springer-Verlag.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). Lineamientos Curriculares en Educación Matemática. Bogotá: Magisterio, p. 60.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales.* Bogotá, D.C: Colombia. Enlace Editores LTDA. Recuperado de http://www.slideshare.net/colsaludcoopnorte/articles-p-g-archivo.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En MEN, *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN.

Molina, R. et. al. (2004) El papel de la visualización en el aprendizaje de la matemática. Antología. Chilpancingo. Pág. 7.

Moreno, L. (2002). Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización. En: Ministerio de Educación Nacional & Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media (Eds.). *Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia*. Bogotá, D.C., Colombia: MEN.

Nápoles V. J. E. (2003). El Infinito al Alcance de la Mano: Una Introducción a la Geometría Fractal. Conferencia 1.

Peña N. E. (2011). Definición Geométrica de la Multiplicación de Reales Usando Homotecias. Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al titulo de: Magíster en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Arauca.

Perera et. al. (2007), *Geometría Fractal*, 3ra. Edición, Editorial Nueva Librería, ISBN.

Pizarro R. A. (2009). Las TICs en la enseñanza de las Matemáticas. Aplicación al caso de Métodos Numéricos. Tesis de Magíster en Tecnología Informática Aplicada en Educación. Universidad Nacional de la Plata. Facultad de Informática.

Planchart M. O. (2002). La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función. Tesis Doctorado. UAEM. Instituto de Ciencias de la Educación.

Plasencia, I. (2000). Fundamentos teóricos. En: Universidad de la Laguna (Eds.). *Análisis del papel de las imágenes en la situación matemática: Un estudio de casos* (pp. 21-101). La Laguna, México: Universidad de la Laguna.

Presmeg, N. (1997). Generalization using imagery in mathematics. En: L. D. English (Ed.). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Presmeg, N. (2006). *Research on visualization in learning and teaching mathematics*. Obtenido el 15 de diciembre de 2009, de la base de datos JSTOR.

Sabogal S. & Arenas G. (2011). *Una Introducción a la Geometría Fractal.* Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

Salbor-Albor C. (1998). *Sobre el concepto de fractal*. Ciencia. Marchena (Sevilla).

Santacruz M. (2011). *Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un AGD: El caso de la rotación en educación primaria.* Cali, Colombia. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Spinadel M. (2008), *Fractales*. Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y la Arquitectura. Laboratorio de Matemática y Diseño. Universidad de Buenos Aires.

Suárez S. P. (2002). Fractales Autosemejantes con Cabri. Congreso Iberocabri 2002. Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Santiago de Chile.

Suárez S. P. (s.F.). La Representación en Educación Matemática: Atractores de Sistemas Iterados de Funciones (IFS´s). Grupo de Investigación Pirámide UPTC.

Suárez S. P. & Ramírez V. G. (2011). Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación. Grupo de investigación: Pirámide. Praxis & Saber - Vol. 2. Núm. 3, P. 27 – 60.

Turégano P. (1997). Hacer matemáticas mediante la geometría de fractales. Dpto. de Matemáticas de la Universidad de Castilla – La Mancha. Epsilon No. 39, P. 169-192.

Vinner S. (1989). The Avoindance of visual considerations in Calculus. Focus Learning Problems of Mathematics. *Antología de Educación Matemática.* Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. p 85-93.

Wegner, T. y Tyler B. (1995).El mundo de los fractales, convierta los números en una realidad fractal. Madrid: Ediciones Anaya Multimedia S.A

ANEXOS

LISTA DE ANEXOS

Pág.

ANEXO A: SECUENCIA DIDÁCTICA APLICADA CON SUS RESPECTIVOS ANÁLISIS

I. Descripción General de la Secuencia Didáctica Aplicada.

a. Descripción General de la Situación 1 Secuencia Aplicada.

Esta situación presenta como propósito un acercamiento a la construcción de fractales a través de movimientos en el plano, como método dinámico mediante secuencia de situaciones. Desde donde se espera construir el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski y la curva de Von Koch, con la aplicación de movimientos geométricos de homotecia, rotación y traslación en el plano. Cuyo tiempo de duración esperado sea de cuarenta y cinco minutos.

b. Descripción General de la Situación 2 Secuencia Aplicada.

En esta situación es propuesta de forma ilustrativa cada una de las etapas del proceso de construcción de los fractales de Cantor, Sierpinski y Koch, para los cuales se pide dar respuesta a cada una de las formulaciones presentadas. Esperando encontrar patrones aritméticos y geométricos subyacentes en el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski y la curva de Koch. Cuyo tiempo de duración esperado sea de noventa minutos.

c. Descripción General de la Situación 3 Secuencia Aplicada.

Esta situación presenta de forma ilustrativa una serie de conjuntos reconocidos como fractales, para los cuales se pide dar respuesta a cada una de las formulaciones presentadas. Esperando que el estudiante pueda identificar y/o construir un conjunto autosimilar, con un tiempo de aplicación de la situación esperado de cuarenta y cinco minutos.

d. Descripción General de la Situación 4 Secuencia Aplicada.

La situación presenta un acercamiento a la construcción de fractales a través de movimientos en el plano, como método dinámico mediante secuencia de situaciones desde un ambiente de geometría dinámica como Cabrí Geometry II Plus. Esperando construir el triángulo de Sierpinski mediante la aplicación del ambiente de geometría dinámica propuesto. Cuyo tiempo de duración esperado sea de noventa minutos.

i. Análisis *a priori* Situación 1

La situación presenta tres actividades, cada una de las cuales tiene pretende buscar guiar al estudiante en el desarrollo de la misma y enunciaciones para cumplir con el propósito de la situación.

Se parte de un primer momento donde se esperaría que el estudiante no presente dificultades en la utilización de magnitudes numéricas diferentes de valores enteros, para ser aplicados en las medidas de los segmentos resultantes. Como también pudiese suceder que el estudiante presente dificultad para dividir en partes iguales el segmento inicialmente dibujado con una medida particular.

Otra manifestación por parte del estudiante pudiese ser que después, de realizado este proceso una cantidad finita de veces no es posible seguir generando la división en los segmentos.

Se espera que el estudiante en el desarrollo de la segunda actividad pudiese generar la construcción de un triángulo, a partir de un segmento que ha dibujado previamente y dividido en partes iguales. Al igual que, no tenga dificultades cuando se le indica que suprima el segmento base y que el mismo tenga claro cual es dicho segmento.

Para este momento se espera que el estudiante pudiese reconocer los cambios que se han generado en la construcción e identificado el orden de la misma según su momento. También que al continuar con el desarrollo de la actividad, tuviese la habilidad de encontrar similitudes al comparar los objetos construidos, en tanto la distinción visual de las figuras o errores presentes en el desarrollo de la construcción.

En el desarrollo de la situación, el estudiante al intentar construir el objeto fractal propuesto, puede tener la posibilidad de recurrir a conceptos previos (rotación, traslación, homotecia), para su aplicación en el desarrollo de algunas competencias básicas en su proceso académico, los cuales pueden también haber sido olvidados o no vistos.

Al desarrollar la construcción se espera que el estudiante consiga realizar un bosquejo del o de los objetos solicitados e intente observar semejanzas en el mismo de tal forma que le permita encontrar algunas propiedades geométricas para una posterior modelización en un ambiente dinámico. Esperando que las situaciones propuestas con la mediación del docente, permitan al estudiante detectar detalles comunes existentes en los objetos exceptuando el tamaño y en donde la autosimilaridad pasaría a ser una propiedad inherente al objeto.

ii. Análisis *a priori* Situación 2 Secuencia Aplicada

La situación consta de tres actividades, cada una de las cuales presenta consignas, que consideran la forma ilustrativa para cada una de las etapas del proceso de construcción de los fractales de Cantor, Sierpinski y Koch, que pudiera generar en el estudiante la confrontación de la experiencia adquirida en el proceso de desarrollar la situación 1 con el desarrollo de la situación 2 y de lugar al cumplimiento del propósito de la misma.

En esta situación se espera que los estudiantes puedan hacer uso de la percepción visual para identificar características comunes, a partir de las imágenes brindadas y que intuitivamente estas pudieran permitir al estudiante reconocer las transformaciones que se generan en el plano como también, pudiese hacer énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial al explorar en el plano utilizando lápiz y papel, identificando las transformaciones que han sido aplicadas en las figuras.

Desde la percepción visual el estudiante podría decir, que lo mismo que se ve a gran escala se ve a pequeña escala, proporcionando una idea de autosimilaridad, lenguaje a partir del cual podría notarse la cercanía del estudiante ante el significado científico que se le ha atribuido a un objeto al referirse al mismo como un fractal.

Como también, se busca estimular al estudiante en la formulación de modelos geométricos para comprender algunos fenómenos con mayor profundidad, implementando un sistema dinámico para aprovechar la capacidad interactiva de este a partir, de procedimientos sencillos para el trabajo con objetos fractales.

iii. Análisis *a priori* Situación 3 Secuencia Aplicada

La situación contiene una actividad que desde lo ilustrativo presenta una serie de conjuntos reconocidos como fractales (Cantor, Sierpinski y Koch), con un enunciado generalizado para el cual se pide dar respuesta a cada conjunto, en la búsqueda de lograr que el estudiante pudiese identificar un conjunto autosimilar y desde está experiencia tener herramientas que fortalezcan conceptos para construir alguno más adelante.

iv. Análisis *a priori* Situación 4 Secuencia Aplicada

La situación presenta una actividad que busca posibilitar en los estudiantes la capacidad para que reproduzcan la construcción de un fractal mediante movimientos (rotación, traslación, homotecia) involucrados, desde una serie de guías que se presentan paso a paso por escrito para ser aplicadas en un ambiente de geometría dinámica desconocido para ellos como Cabri Geometry II Plus.

Pretendiendo también, invitar a los estudiantes a involucrarse en la generación de sus propios objetos fractales a partir de lo dinámico de este ambiente geométrico nuevo para ellos, y que el carácter interactivo del mismo sea propicio para unas creaciones que sean fruto de su imaginación y su creatividad.

Considerando las características que han podido interiorizar de un objeto fractal, como también pudiera convertirse este espacio en el escenario para el intercambio de ideas, la formulación de conjeturas, el comprobar o refutar las mismas, la generalización de ideas y finalmente la argumentación de que aquello que han construido es un fractal o no dependiendo las condiciones.

II. Tercera fase: Experimentación Secuencia Aplicada.

En esta fase se presenta la secuencia didáctica diseñada a los sujetos seleccionados para desarrollarla. Simultáneamente quien investiga toma el registro correspondiente de los procedimientos de solución. Las actividades a considerar son adaptaciones realizadas de la propuesta Geometría Fractal: conceptos y procedimientos para la construcción de fractales y familias de fractales autosemejantes en el plano, usando el ambiente de geometría dinámica proporcionado por Cabri Geometry II Plus.

Se pretende que la secuencia propuesta sea desarrollada de acuerdo a un modelo constructivista, en donde se busca que el estudiante aprenda e interiorice haciendo uso de conocimientos previos sobre su forma individual de visualizar aquello que lo rodea. Razonando desde actividades que sean condicionadas a una construcción, llevándolos a tomar decisiones e implementando algunos recursos didácticos como por ejemplo el de un ambiente de geometría dinámica Cabrí Geometry II Plus, posibilitando la interpretación visual al estudiante desde lo experimental de la matemática y los procesos geométricos inmersos en ella.

Cuyo objetivo general sería que, a través del desarrollo de la secuencia, el estudiante este en capacidad de definir e identificar un conjunto autosimilar en el contexto de la geometría fractal. Además, se busca aplicar una secuencia didáctica que permita que los estudiantes de grado noveno, reconozcan propiedades básicas de objetos fractales, al analizar e interpretar imágenes de los mismos.

Al igual que dar a conocer la secuencia didáctica a los docentes de la institución educativa y a otros interesados, para aportar reflexiones relacionadas con la enseñanza en el aula de la geometría fractal que permitan caracterizar las posibilidades y restricciones de los estudiantes en la aplicación de movimientos en el plano (rotación, traslación y homotecia) descritos verbalmente en el papel o en un ambiente dinámico.

Durante el desarrollo de las situaciones, los estudiantes tendrán la posibilidad de discutir de forma grupal las inquietudes que se van presentando como obstáculos notorios para ellos, buscando proseguir con la actividad propuesta, dejando registros escritos en las guías de trabajo de las actividades con las cuales se cuenta.

III. Cuarta fase: Análisis *a posteriori* Secuencia Aplicada.

El análisis *a posteriori* se basa en los registros recogidos en la fase de experimentación, es decir, en las observaciones y en las producciones de los sujetos mientras estos desarrollan las situaciones propuestas. Finalmente, las conclusiones serán presentadas a la luz de los objetivos planteados para la secuencia. Se presenta entonces una caracterización de la población, al igual que la descripción del contexto de la experimentación. También, los resultados obtenidos de la aplicación de la secuencia didáctica.

a. Caracterización de la población

Esta secuencia se aplicó a estudiantes de la jornada de la mañana de grado noveno en una institución educativa ubicada al oriente de la ciudad de Cali, la aplicación de la secuencia se realizó en dos espacios: el primero el aula de clases, la cual contaba con pupitres para cada uno de los estudiantes, el escritorio con su respetiva silla para el docente, buena iluminación, sistema cerrado de cámaras y sonido. Y el segundo la sala de sistemas que cuenta con los equipos de computo necesarios para el grupo y el desarrollo de la situación que requiere el uso de Cabrí Geometry II Plus, tablero, televisor, el escritorio con su respetiva silla para cada estudiante y el docente, buena iluminación, sistema cerrado de cámaras y aire acondicionado.

Las situaciones fueron desarrolladas de manera individual y grupal organizando el trabajo en parejas, se le dio inicio a la aplicación de la secuencia, con una explicación breve con respecto a la implementación de la misma, la cual sería aplicada en las secciones de la clase de geometría, y realizadas en el aula de clase o aula de sistemas.

Luego se continua con la situación 1, haciendo entrega de la guía que contenía las consignas de la misma, siendo aplicada de manera individual aunque los estudiantes tienen la libertad de socializar entre ellos sus dudas o consultar al docente de la institución cuando fuese necesario, el cual intenta contestar las mismas sin ser muy explicito.

En la aplicación de la situación 2 los estudiantes nuevamente trabajan de forma individual y socializan con sus compañeros del grupo, pero se presentan muchas dudas con una de las actividades donde se les consultaba la base, altura, perímetro y área de un triángulo por lo que debió el docente hacer algunas observaciones al respecto. La situación 3 se trabajo de forma similar a las anteriores.

Para la aplicación de la situación 4 el docente del área de informática facilita el tiempo de su clase y el espacio de la sala de sistemas para el desarrollo de la actividad, donde se pudo trabajar en parejas y mantener la actitud de socialización que el grupo venia presentando en las situaciones anteriores. Finalmente la secuencia se aplica en cuatro días de acuerdo al horario disponible del profesor del área de matemáticas con el grado noveno de la institución.

b. Análisis *A Posteriori* de la Experimentación

Se presentan los resultados obtenidos en el desarrollo de la secuencia didáctica propuesta contextualizada en la Geometría Fractal, con estudiantes de grado noveno de educación básica, mediante el desarrollo de actividades que llevasen al reconocimiento de conjuntos fractales entre los que podíamos encontrar el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski y la curva de Koch.

i. Análisis *a posteriori* Situación 1

Para la aplicación de esta situación, se esperaba que los estudiantes de grado noveno de la institución, tuviesen conocimientos básicos de geometría plana relacionados con puntos, segmentos, rectas, paralelogramos, polígonos, etc. Aunque la situación para algunos estudiantes, se convirtió en una experiencia nueva de enseñanza – aprendizaje pues manifestaban no haber recibido clases de geometría antes y otros que no recordaban con seguridad conceptos básicos.

Se considera que esta situación pudiese tener dificultades en su desarrollo, pues probablemente por la condición de irregularidad para un estudio continuo de algunos estudiantes en una sola institución, se de lugar a obstáculos por desconocimiento de muchos conceptos y/o con dudas por ejemplo de ¿Qué es un segmento? Interrogante que surge a partir, de la actividad 1 de la situación 1 donde se intenta orientar al estudiante para la construcción del conjunto de Cantor.

La situación 1, orienta a los estudiantes a generar acciones desde los inicios de las mismas, tal que de manera poco explicita genera las condiciones que permiten al estudiante dar respuesta desde sus limitaciones para con ciertos conceptos a las formulaciones planteadas, como se puede observar en la ilustración 37 de los siguientes apartados para algunas construcciones y respuestas brindadas por los estudiantes al desarrollar la situación.

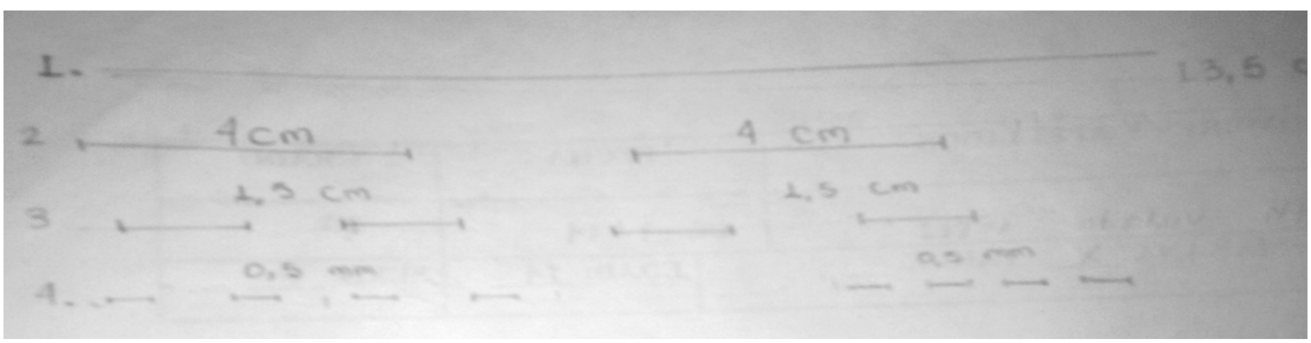


Ilustración 37: Construcción del conjunto de Cantor desarrollada por estudiante Secuencia Aplicada.

Puede observarse que hay presente un proceso en el que las partes modifican su tamaño, sin embargo el estudiante intenta dejarlo evidente implementando valores numéricos que indiquen la medida correspondiente a lo obtenido antes y después. También se puede identificar, como el estudiante llega desde la construcción a brindar respuesta a formulaciones como ¿Qué ocurre con la magnitud de los segmentos obtenidos? Realizando conjeturas desde su experiencia, con respecto al tamaño de las partes sin hacer alusión a segmento, infiriendo al consultarse ¿Qué ocurre con la cantidad de segmentos? Que los mismos disminuyen su tamaño y describe posteriormente que si repitiéramos el proceso de forma indefinida no quedaría nada del segmento.

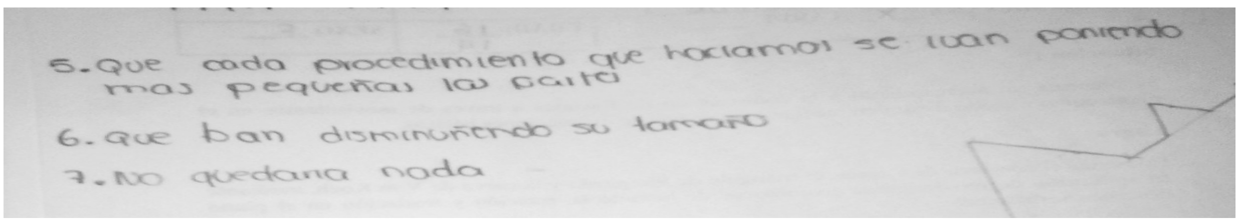


Ilustración 38: Respuesta a las formulaciones de la construcción del conjunto de Cantor desarrollada por estudiante A en la situación 1 Secuencia Aplicada.

Otro estudiante dando respuesta a esta misma actividad como lo indica la ilustración 26 hace uso de una hoja cuadriculada que fue entregada junto con la situación 1 pensando en el desarrollo de la actividad 3, en esta hoja el estudiante intenta orientarse por los cuadros presentes en la hoja, pero pueden observarse que hay diferencias en la igualdad de los segmentos que presenta.

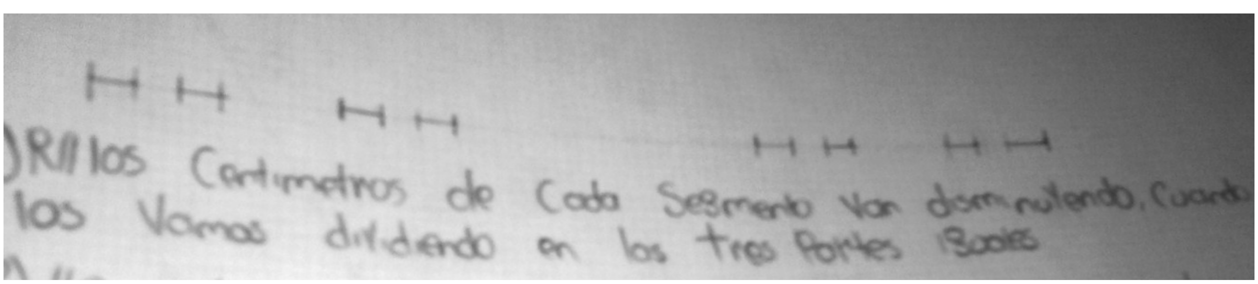


Ilustración 39: Respuesta a las formulaciones de la construcción del conjunto de Cantor desarrollada por estudiante B en la situación 1 Secuencia Aplicada.

Las conjeturas que el estudiante C realiza respecto a las formulaciones planteadas en la actividad, se relacionan con la cantidad de segmentos presentes en tanto al aumento de los mismos y considerando también el cambio en el tamaño que presentan los segmentos en cada momento de la situación 1. Ilustración 40.

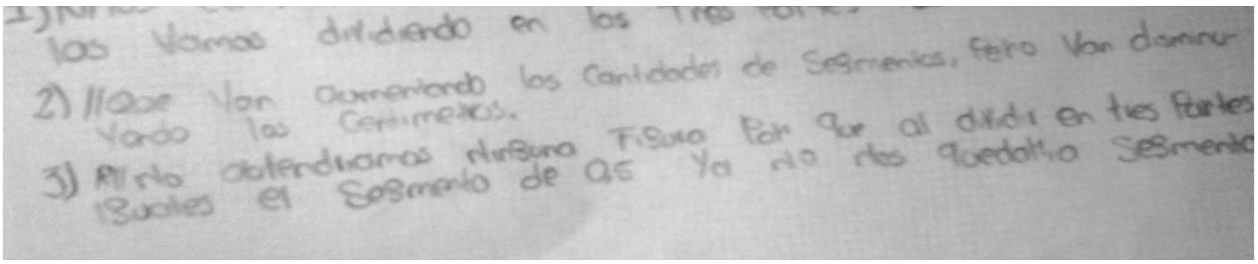


Ilustración 40: Respuesta a las formulaciones de la construcción del conjunto de Cantor desarrollada por estudiante C en la situación 1 Secuencia Aplicada.

Algunos otros razonamientos que los demás estudiantes participantes en el desarrollo de la actividad presentan ante las formulaciones de la misma son:

A la formulación ¿Qué ocurre con la magnitud de los segmentos obtenidos? Contestaron:

Estudiante D: "Lo que ocurrió en la magnitud de los segmentos es que han reducido su tamaño".

Estudiante E: "Lo que paso fue que todos se dividieron y así mismo hace que se vayan haciendo más pequeños"

Estudiante F: “Los centímetros de cada segmento van disminuyendo, cuando los vamos dividiendo en las tres partes iguales”

A la formulación ¿Qué ocurre con la cantidad de segmentos? Algunos estudiantes contestaron:

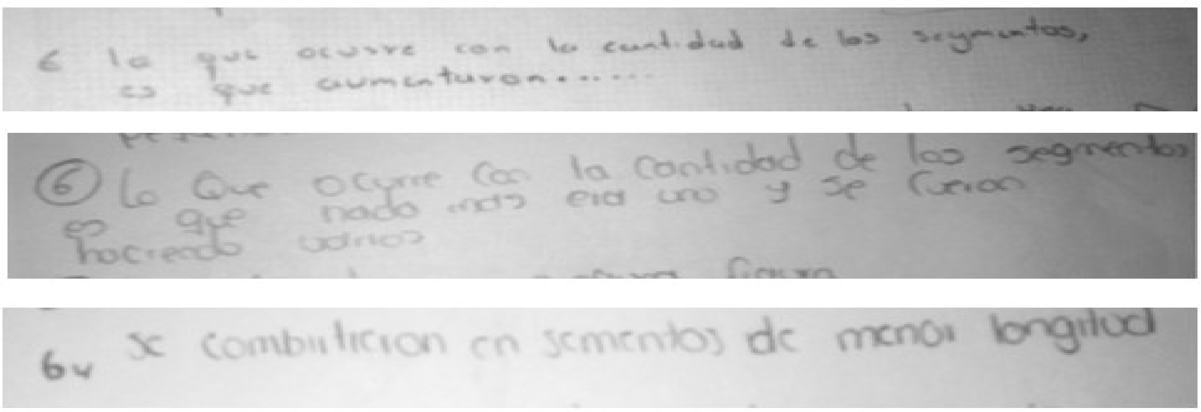
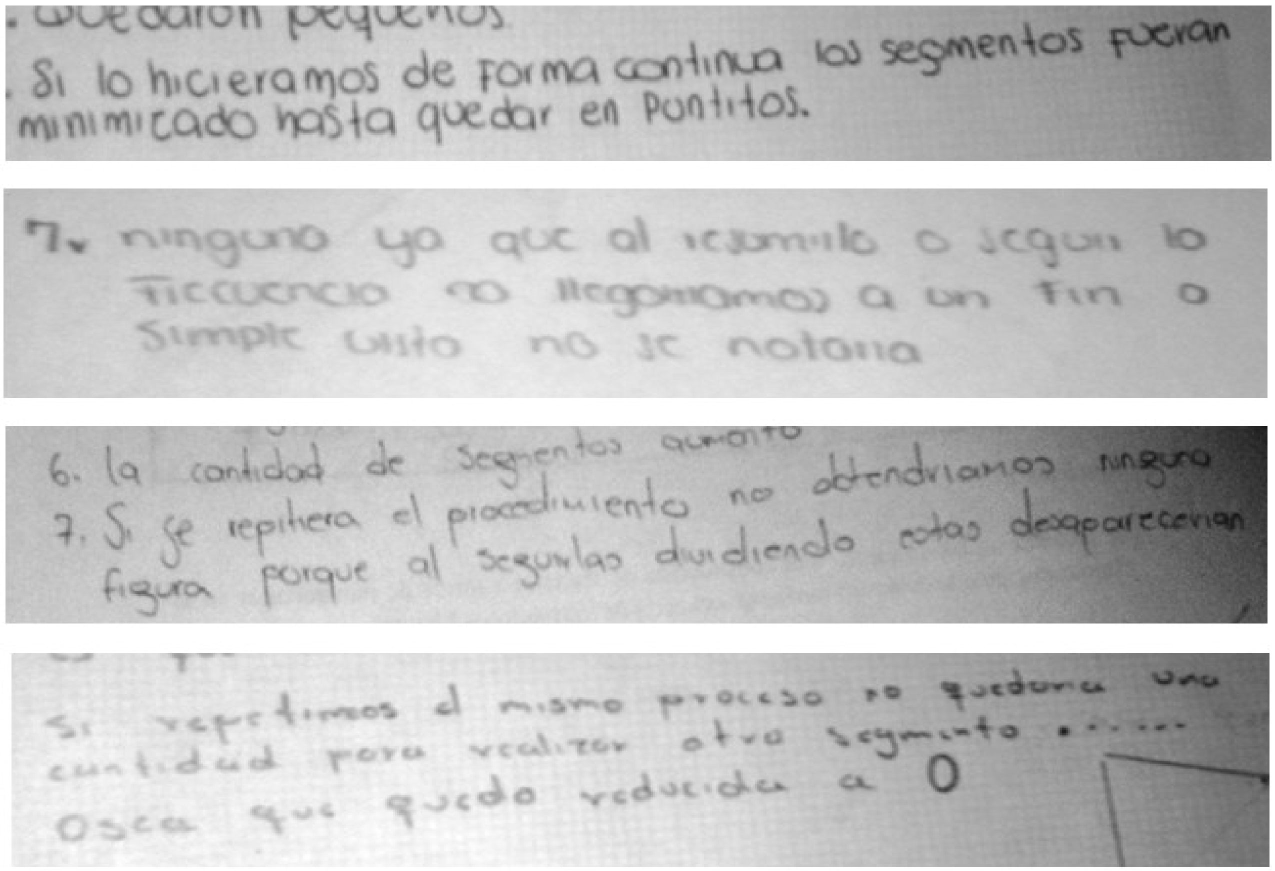


Ilustración 41: Respuesta a formulaciones de la construcción del conjunto de Cantor desarrollada por varios estudiantes en la situación 1 Secuencia Aplicada.

Como se puede observar en las diversas respuestas manifestadas por algunos de los estudiantes participantes en el desarrollo de la actividad, estos se orientan a manifestar que la cantidad de segmentos van aumentando con un tamaño menor al inicialmente dado para el segmento construido, lo que hace parte de la intencionalidad de la construcción al aplicar movimientos en el plano, generando en los estudiantes formulaciones que no están alejadas entre sí. Luego ante la formulación, si repitiéramos el proceso de forma indefinida, describe ¿Cuál crees que sería la forma de la figura obtenida? Algunas respuestas fueron:



quedaron pequeños.
Si lo hicieramos de forma continua los segmentos fueran minimicado hasta quedar en puntitos.

7. ninguno ya que al resumilo o seguir lo frecuencio no llegamamos a un fin o simple visto no se notaria

6. la cantidad de segmentos aumento
7. Si se repitiera el procedimiento no obtendriamos ninguna figura porque al seguirlas dividiendo estas desaparecerian

si repetimos el mismo proceso no quedaria una cantidad para realizar otro segmento ......
osea que quedo reducida a 0

Ilustración 42: Respuesta a formulaciones de la construcción del conjunto de Cantor desarrollada por varios estudiantes en la situación 1 Secuencia Aplicada.

En general la gran mayoría de los estudiantes participantes en el desarrollo de la situación 1 para el caso de la actividad 1 hace referencia, a que el segmento es dividido en varias partes y que su tamaño se ve afectado, por lo cual ante una situación constante de este proceso no podrían tener un segmento para ser dividido, si no se encuentra a la vista de lo que ellos puedan visualizar, pues manifiestan que estos se convierten en puntos de tal manera que no es posible dividirlos.

Con la actividad 2 de la situación 1 se presentan construcciones que pudiesen ser consideradas como contradictorias entre si, pues es evidente que para la gran mayoría no es posible generar la construcción. Sin embargo, según lo que se puede observar en las imágenes de la ilustración 43, los estudiantes procuran mantener una igualdad en la longitud de los segmentos en cada cambio de la construcción desde lo que interpretan.

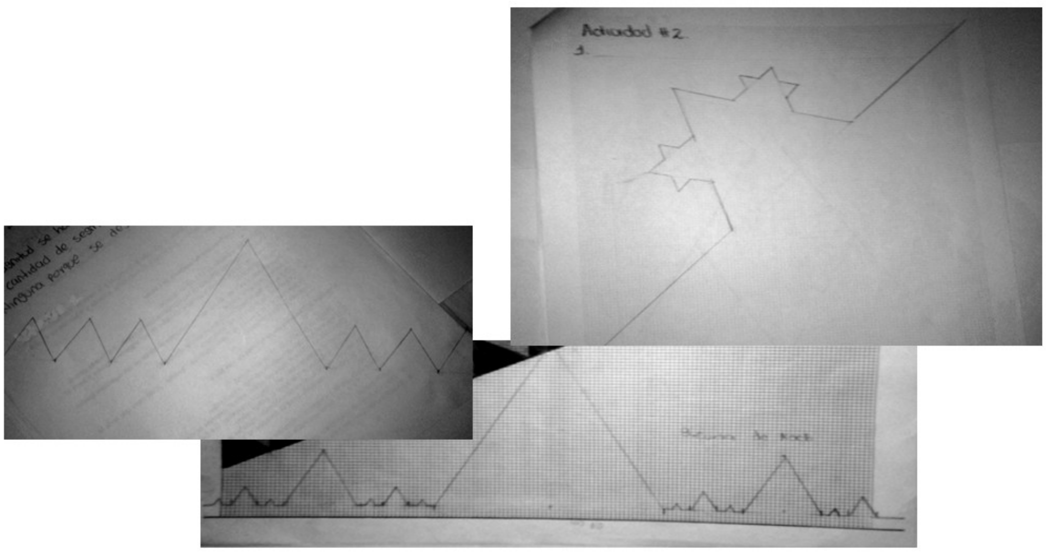


Ilustración 43: Respuesta a construcción de la curva de Von Koch desarrollada por varios estudiantes en la situación 1 Secuencia Aplicada.

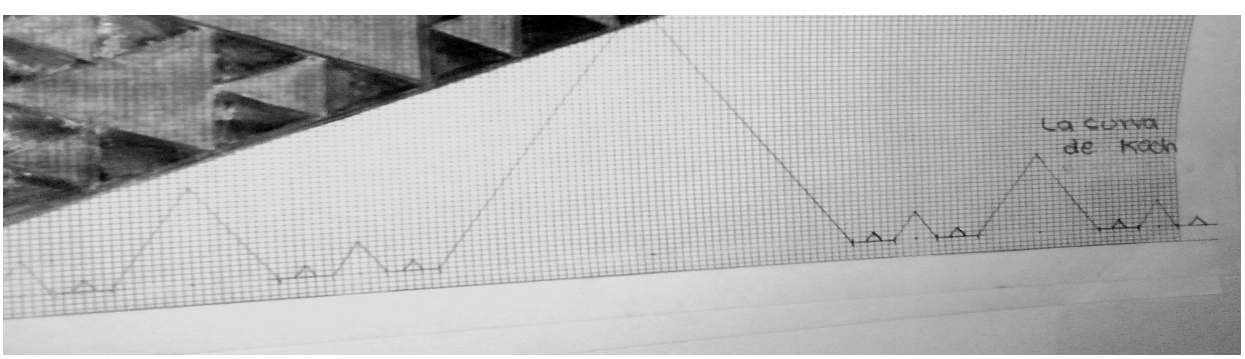


Ilustración 44: Respuesta a construcción de la curva de Von Koch desarrollada estudiante A en la situación 1 Secuencia Aplicada.

Lo que se observa en la construcción de la ilustración 44, fue lo que la gran mayoría de los estudiantes que desarrollaron la actividad pudo interpretar, lo que orienta a pensar sobre la posibilidad de que deben replantearse las formulaciones para dicha actividad o que al parecer los estudiantes no han conseguido obtener una correcta interpretación para la construcción solicitada. Aunque se presento un caso en que un estudiante en su construcción se acercaba a lo solicitado como lo muestra la ilustración 45.

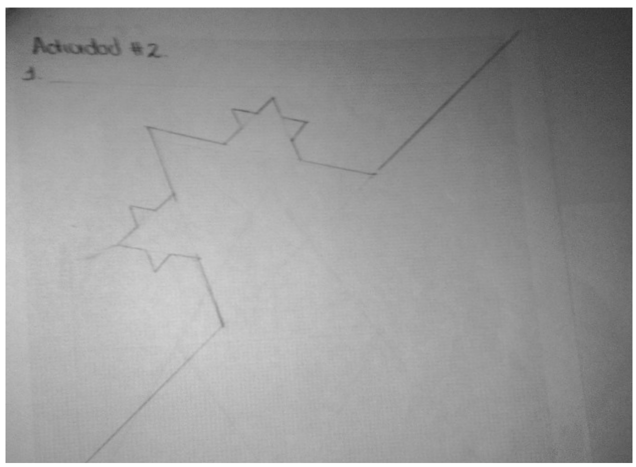


Ilustración 45: Respuesta a construcción de la curva de Von Koch desarrollada estudiante B en la situación 1 Secuencia Aplicada.

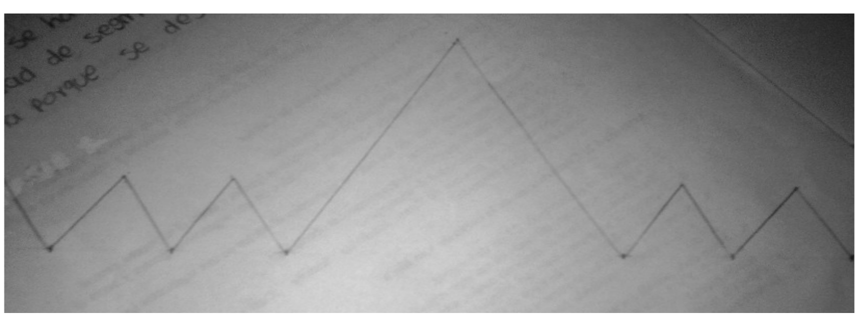


Ilustración 46: Respuesta a construcción de la curva de Von Koch desarrollada estudiante C en la situación 1 Secuencia Aplicada.

En la construcción de la ilustración 46, al parecer el estudiante interpreto que debía iniciar con la construcción de la curva de Koch de primer orden de forma reiterativa, respetando las medidas iguales en las curvas presentes en ambos lados de la inicialmente construida. Lo que permite inferir que para el desarrollo de la actividad 2 en la situación 1, se presentan dificultades de interpretación que se convierten en obstáculos para la obtención de la construcción de la curva de Von Koch.

Para el desarrollo de la actividad 3 de la situación 1 se noto mayor comprensión por parte de los estudiantes en la construcción, como puede evidenciarse en la ilustración 47, la cual muestra las etapas de construcción del triángulo de Sierpinski.

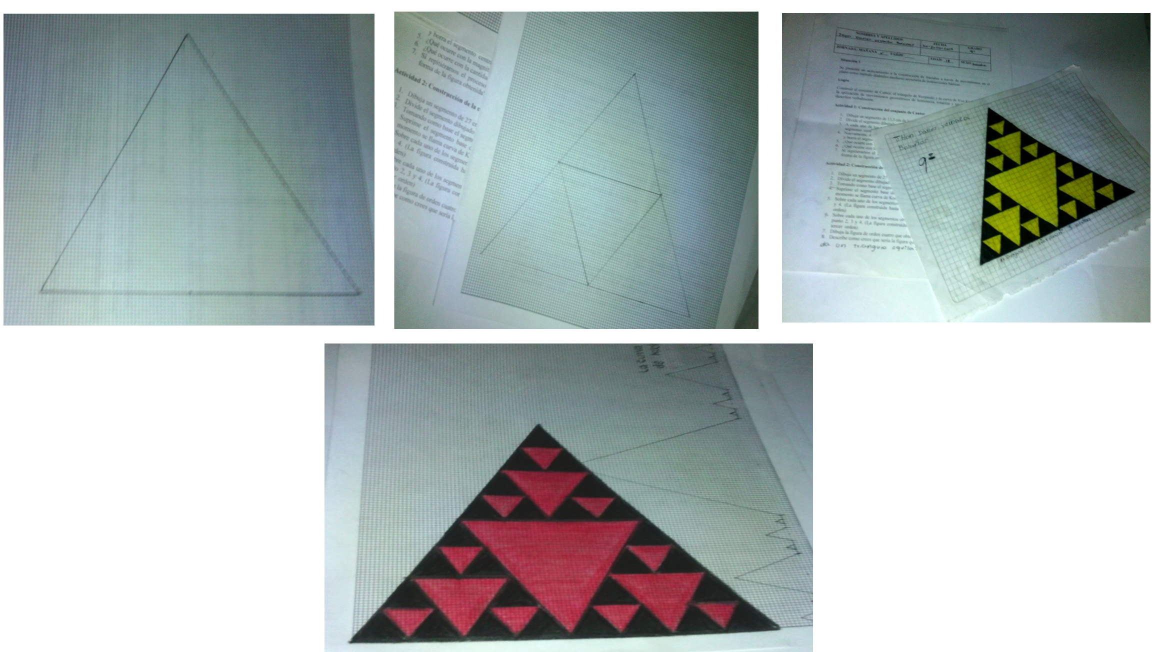


Ilustración 47: Respuesta a construcción por etapas del triángulo de Sierpinski desarrollada por varios estudiantes en la situación 1 Secuencia Aplicada.

Sin embargo unos pocos estudiantes dejaron en evidencia los obstáculos que se les presentan con algunos conceptos para el desarrollo de la actividad, como lo muestran la ilustración 48.

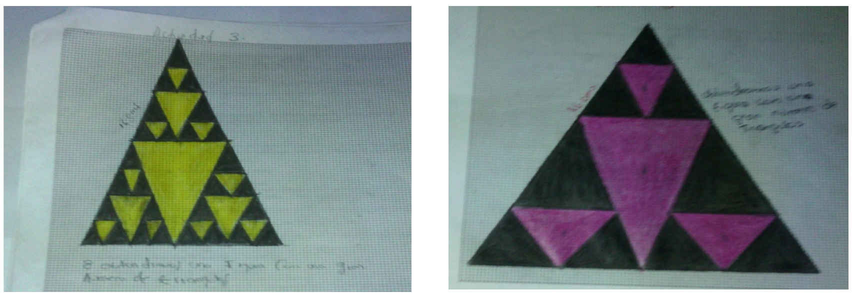


Ilustración 48: Respuesta a construcción por etapas del triángulo de Sierpinski desarrollada por varios estudiantes en la situación 1 Secuencia Aplicada.

Finalmente se termina el desarrollo de la situación 1, donde se mantuvo una socialización por parte de los estudiantes en el aula, quienes en algunos momentos generalizan desde una conclusión que han intuido. Aunque para algunos no sea del todo cierta por los mismos obstáculos que han observado en relación con los conceptos de geometría ya mencionados. Cumpliendo con el acercamiento a la construcción de fractales, a través de movimientos en el plano para lo cual se empleo el tiempo esperado.

En está situación a pesar de que se requirió la mediación del docente en algunos momentos de las construcciones, ante la necesidad de dar orientaciones para algunas dificultades manifestadas por los estudiantes en el desarrollo de la situación, se encontró que algunas fueron previstas en el análisis *a priori* para la misma con lo que respecta a:

- Dividir en partes iguales el segmento inicialmente dibujado con una medida particular.
- Después de realizarse la división del segmento una cantidad finita de veces, no es posible seguir generando la división.
- Habilidad en el estudiante para encontrar similitudes al comparar los objetos construidos en tanto la distinción visual de las figuras.

También pudo observarse que la gran mayoría de los estudiantes lograron realizar un bosquejo como mínimo de lo solicitado, intentando destacar en su construcción semejanzas en la misma según los cambios que se presentan.

ii. Análisis *a posteriori* Situación 2

Para la aplicación de esta situación, se esperaba que los estudiantes puedan aplicar sus conocimientos sin dificultades, para analizar patrones numéricos y geométricos en algunas construcciones dadas; como también el reconocimiento de la altura, perímetro, área, y base de un triángulo equilátero; al igual que el manejo de algunas notaciones numéricas.

Para el desarrollo de la actividad 1 en la situación 2 se presentaron unas imágenes por etapas, donde en cada una de estás etapas la imagen sufría cambios que debían ser analizados por los estudiantes para dar respuesta a formulaciones que se repetían en cada etapa, estás eran: ¿Cuántos segmentos hay? y ¿Cuál es la longitud de cada segmento, si el segmento original mide una unidad? Al igual que la diligencia de un recuadro para completar según la notación acorde en fracción o decimal con respecto a la longitud, en este caso de un segmento. Cabe resaltar que la mediación del docente durante el desarrollo de la prueba para aclarar dudas a los estudiantes fue muy poca, acción que se evidencia en las respuestas similares que brindan los estudiantes de la situación.

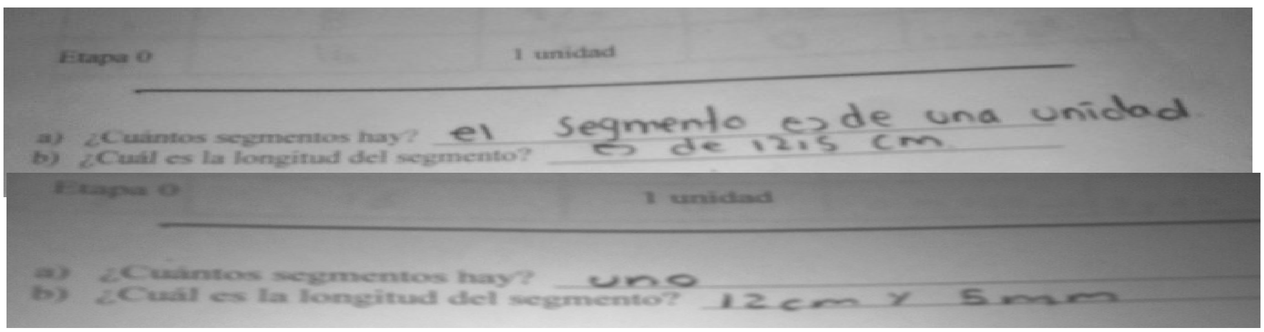
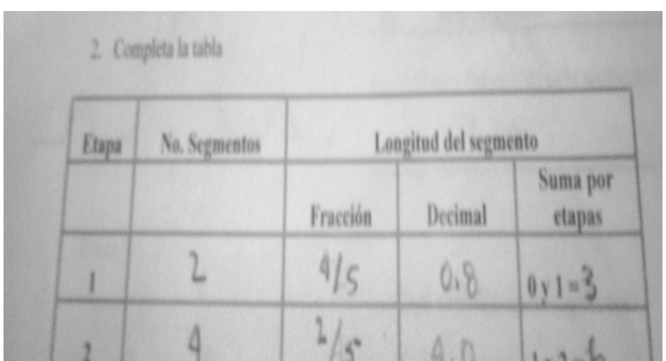


Ilustración 49: Respuesta a formulaciones para análisis de construcción fractal del conjunto de Cantor presentadas por etapas desarrollada por varios estudiantes en la situación 2 Secuencia Aplicada.

En el momento de analizar las etapas del proceso de construcción del conjunto de Cantor y brindar respuesta a las formulaciones, encontramos como se evidencia en la ilustración 49, las dificultades que presentan los estudiantes al relacionar la cantidad de segmentos con la longitud de los mismos. Pues para el caso de la etapa 0 puede observarse la indicación de una unidad haciendo alusión a la cantidad de segmentos presentes en la imagen, sin embargo los estudiantes cuando se les consulta por la longitud del segmento deciden hacer uso de la regla para medir y brindar una respuesta con unidades de medidas particulares.

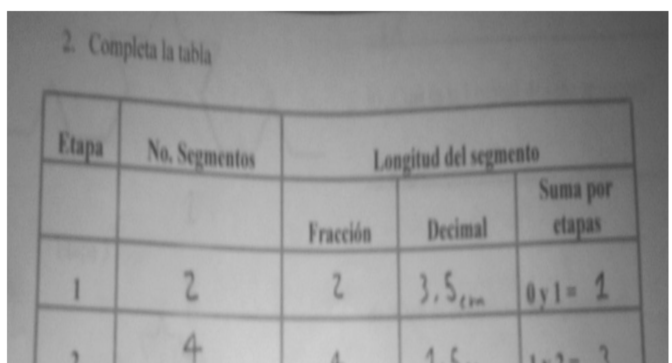
Como puede observarse con respecto a lo que el estudiante visualiza y escribe en cuanto a cantidad en la formulación ¿Cuántos segmentos hay? es notoria la validación de sus aciertos, lo que puede ser resultado de la experiencia anterior al resolver la situación 1, pero contradictoria en el momento de dar respuesta a la formulación ¿Cuál es la longitud de cada segmento, si el segmento original mide una unidad? Pues se encontraron dificultades en el desarrollo de las habilidades y competencias de los estudiantes en la identificación de las unidades de medición de la longitud.

Estas dificultades que se han hecho evidentes, pasan a ser los obstáculos que los estudiantes presentan para el desarrollo de la tabla que los mismos deben completar según la información encontrada de forma visual anteriormente, como puede observarse en la ilustración 50.



2. Completa la tabla

Etapa	No. Segmentos	Longitud del segmento		
		Fracción	Decimal	Suma por etapas
1	2	4/5	0,8	0 y 1 = 3
2	4	2/5	4,0	1 y 2 = 6
3	8	1/5	2,0	2 y 3 = [illegible]
4	16	-4/6	0	3 y 4 = 24



2. Completa la tabla

Etapa	No. Segmentos	Longitud del segmento		
		Fracción	Decimal	Suma por etapas
1	2	2	3,5 cm	0 y 1 = 1
2	4	4	1,5 cm	1 y 2 = 3
3	8	8	5 mm	2 y 3 = 5
4	16	16	0,78125 mm	3 y 4 = 7

Ilustración 50: Solución a cuadro para completar desde las formulaciones para análisis de construcciones fractales presentadas por etapas desarrollada por varios estudiantes en la situación 2 Secuencia Aplicada.

De acuerdo con las respuestas en esta actividad puede inferirse que hay claridad en los estudiantes al brindar respuesta a formulaciones que requieren de la visualización que puedan hacer de imágenes dadas, pero gran deficiencia en las habilidades para comparar longitudes.

En el caso de desarrollar la actividad 2 de la situación 2 se tiene que son reiterativas las dificultades evidenciadas en la anterior actividad con lo respectivo a las longitudes, como se puede observar en la ilustración 51, pero también debe destacarse sus habilidades en relación con las apreciaciones que tienen los estudiantes al analizar y visualizar una imagen.

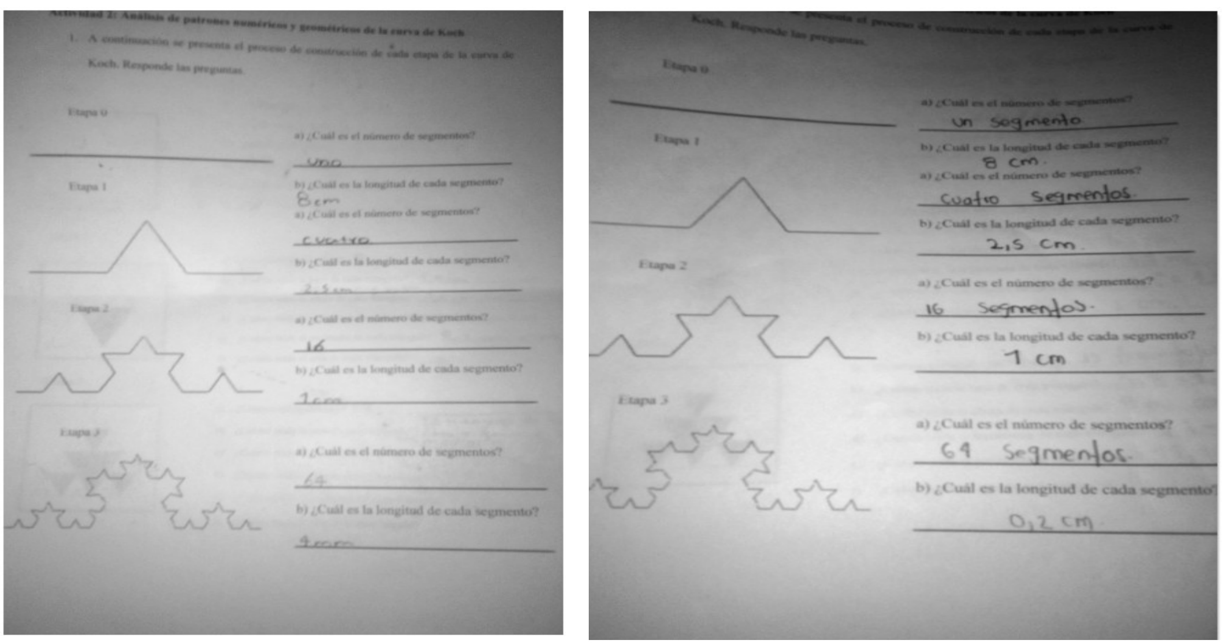
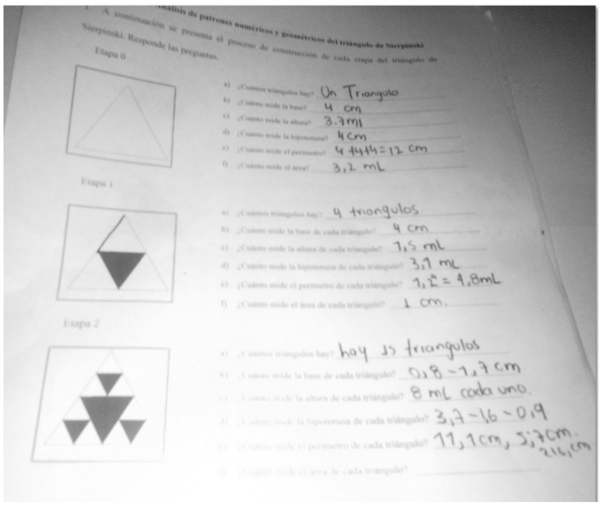


Ilustración 51: Respuesta a formulaciones para análisis de construcción fractal de la curva de Koch presentada por etapas desarrollada por varios estudiantes en la situación 2 Secuencia Aplicada.

En la actividad 3 de la situación 2 se encuentran contradicciones entre los estudiantes que desarrollan la actividad, lo que se considera como una respuesta lógica con respecto a las dificultades conceptuales que se han hecho evidentes y que no son esperadas por parte del docente para los estudiantes del grado noveno en el cual se da desarrollo a la situación.



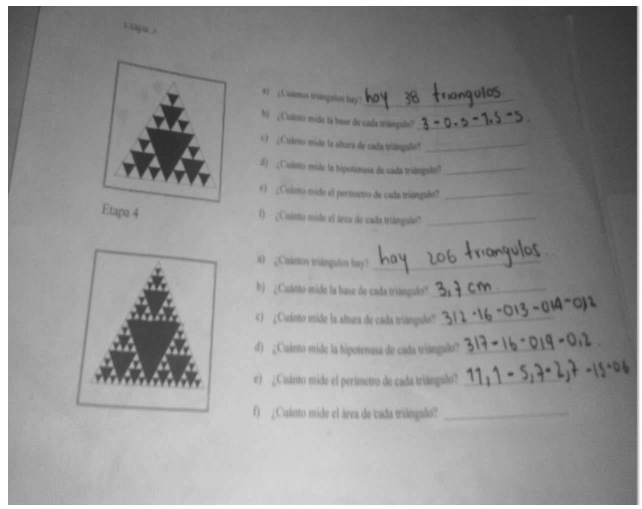


Ilustración 52: Respuesta a formulaciones para análisis de construcción fractal del Triángulo de Sierpinski presentada por etapas desarrollada por varios estudiantes en la situación 2 Secuencia Aplicada.

Finalmente con lo que respecta al desarrollo de la situación 2, se encuentra que las argumentaciones brindadas por los estudiantes carecen de organización y lógica, pues no hay coherencia de lo que expresan con lo que escriben o quieren decir. Sin embargo en algunos momentos de la situación se aprecia que los estudiantes identifican patrones geométricos en las construcciones dadas, pues identifican como iguales las partes que constituyen la imagen independientemente de los cambios que se van presentando en cada etapa y de la escala o forma de la misma.

iii. Análisis *a posteriori* Situación 3

La situación 3 que solo presenta una actividad, centra su interés en la autosimilaridad que el estudiante identifica en cada uno de los conjuntos dados, de tal forma que son ellos quienes se acercan a una definición de autosimilar cuando intentan dar respuesta a la formulación: Explica cuál crees que sería la razón para decir que los siguientes conjuntos son autosimilares.

Como era de esperarse inicialmente los estudiantes encontraron semejanzas entre los conjuntos brindados y aquellos trabajados en las situaciones anteriores. Algunas de las argumentaciones brindadas por los estudiantes las podemos observar en la ilustración 53, donde puede reconocerse el acercamiento a la definición misma de autosimilaridad que los mismos han generado desde su propia experiencia sin haberles hablado antes de ella.

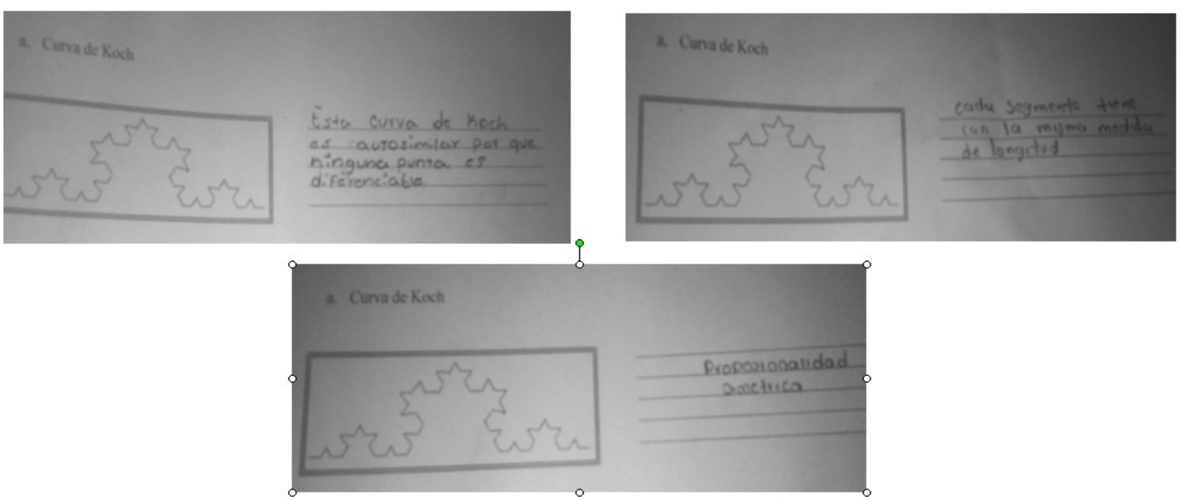


Ilustración 53: Argumentación de varios estudiantes para explicar autosimilaridad en la situación 3 Secuencia Aplicada.

En la curva de Koch se encuentra que parte de las justificaciones de los estudiantes para reconocerla como autosimilar son que:

- Existe proporcionalidad y simetría.
- No hay diferencia en las formas de la imagen en cualquiera de sus partes, aunque el estudiante no relaciona con coherencia lógica lo escrito con lo expresado.
- Identifican cada parte de la imagen con un único objeto que posee igual longitud y forma.
- Relación de la forma de la imagen con objetos de su entorno.

Justificaciones que son reiterativas al analizar las argumentaciones hechas por los estudiantes a los otros conjuntos brindados como muestran las ilustración 54, para dar razón de conjunto autosimilar, permitiendo así cumplir con el propósito de la situación esperado desde el análisis *a priori.*

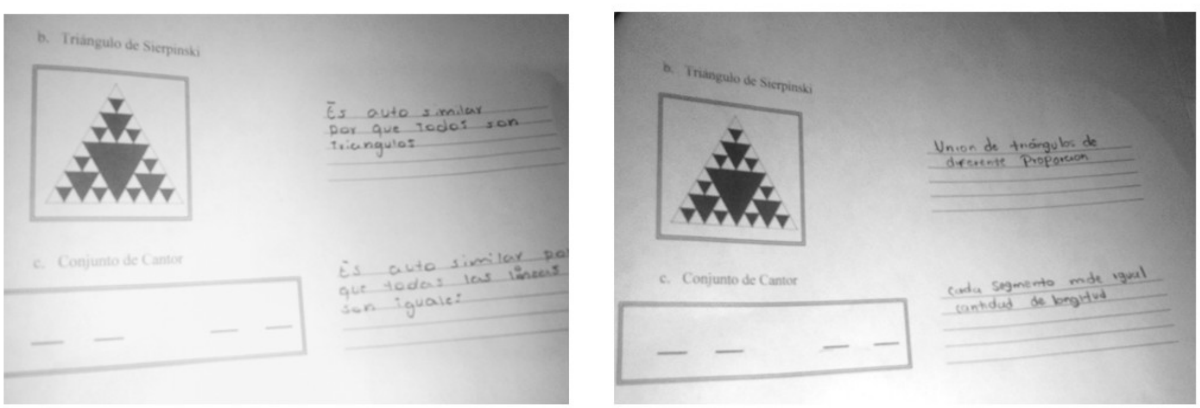


Ilustración 54: Argumentación de varios estudiantes para explicar autosimilaridad en la situación 3 Secuencia Aplicada.

iv. Análisis *a posteriori* Situación 4

Para el desarrollo de esta situación fue necesario contextualizar a los estudiantes en la implementación que se hacia de un ambiente de geometría dinámica conocido como Cabrí Geometry II Plus, desconocido hasta dicho momento para los estudiantes de grado noveno de la institución educativa. Dicha contextualización parte de la interacción que los estudiantes tienen de forma exploratoria en tanto a las variadas opciones que esté ofrece, con elementos como el arrastre que le permita a los estudiantes manipular las construcciones realizadas, generando conclusiones a través de la visualización que los mismos realizan.

Con la ayuda de la guía facilitada a cada estudiante, la cual cuenta con orientaciones para la manipulación de macros[7] y reconociendo las habilidades de los estudiantes al aplicar estrategias para abordar e interactuar con un programa geométrico desconocido.

Cabe resaltar que el desarrollo de la situación, también se convierte en una experiencia de enseñanza – aprendizaje para el docente, pues el mismo no conocía el programa de Cabrí Geometry II Plus, lo cual contribuyó a una estrategia de socialización más participativa del docente con los estudiantes al desarrollar la situación.

Las ventajas que brindan la tecnología en el diario vivir de los estudiantes, permitió destacar destrezas de los mismos para dar inicio y abrir el programa de Cabrí Geometry II Plus,

[7] Para efectos de este trabajo se considerara macros, la automatización de un proceso que se repite varias veces en la construcción geométrica de acuerdo a ciertas condiciones.

que con ayuda del docente de sistemas previamente había sido instalado en los equipos de la sala de computo. Posteriormente antes de seguir con la guía, el docente y los estudiantes se brindan un espacio para explorar y manipular el programa por alrededor de diez minutos, durante los cuales socializan en grupos pequeños de estudiantes lo que visualizaban mientras se familiarizan con el arrastre de las imágenes al manipular el ratón del equipo de computo.

Culminado el tiempo de exploración empleado para reconocer algunos elementos del programa, los estudiantes abordan el desarrollo de la situación para construir un triángulo equilátero. Se encuentra que la gran mayoría de los estudiantes no tuvieron dificultades para hacer uso de la herramienta polígono regular y construir el triángulo equilátero aunque con unas medidas diferentes a la solicitada.

Algunos otros estudiantes optaron por utilizar la herramienta segmento para construir el triángulo intentando desde lo que podían visualizar en la pantalla que fuese equilátero y se presento el caso con un estudiante que intento construir el triángulo con pentágonos, guiado según él mismo por el icono de la herramienta polígono regular que observaba en la imagen de la guía, por una mala interpretación de lo leído.

Siguiendo la guía de la situación se da uso a la herramienta de distancia o longitud, para buscar que el triángulo construido tenga la longitud de 16 cm, lo cual se convierte en toda una experiencia para los estudiantes cuando visualizan en pantalla las observaciones que aparecen al acercar el cursor a la figura antes construida y como esta cambia dependiendo del lugar, como por ejemplo: este polígono regular o perímetro de este polígono si acercaban el cursor al lado de la figura, este punto si lo acercaban a uno de los vértices de triángulo o distancia de este punto.

Inicialmente para colocar la longitud de cada lado del triángulo, los estudiantes tuvieron dificultad pues lo tomaban como el perímetro del polígono, pero una vez socializada la inquietud logran darse cuenta de que *"al acercar el cursor a distintos vértices al tiempo, la información que aparece es diferente"* inferencia hecha por uno de los estudiantes durante la exploración en la construcción.

Acción que una vez ejecutada los orienta a hacer uso del arrastre, como una de las estrategias utilizada por algunos estudiantes para alcanzar la longitud en los lados del triángulo equilátero solicitado, mientras que otros deciden rehacer el triángulo para volver a tomar la longitud de sus lados, partiendo de la idea de tamaño que tienen y apoyándose en lo que logran visualizar en la pantalla.

Luego, desde su experiencia en la socialización los otros estudiantes dan validez a la estrategia al hacer uso del arrastre para manipular la construcción e identificar el movimiento en los vértices del triángulo permitiendo sustentar sus argumentaciones. Aquellos estudiantes que hacen uso de segmentos para la construcción del triángulo, se dan cuenta de los errores en su construcción y deben retomar para la construcción del triángulo.

En la socialización que se tiene en cada momento de la construcción puede hacerse evidente la gestión didáctica del profesor, en tanto que a partir de las inferencias que van teniendo los estudiantes se generalizan estrategias para ser aplicadas en la construcción. También se observo que para el desarrollo de la construcción mayor facilidad para el manejo de esta herramienta por la familiaridad que los estudiantes habían tenido con otros programas durante su formación académica, según lo manifestaban algunos de ellos.

Luego con la herramienta punto medio, se presento una corta discusión con respecto a la opción a tomar, es decir si debía ser: punto medio de este lado del polígono o punto medio de este punto sobre este polígono; orientándose nuevamente por aquello que podían visualizar en las pantallas e intentando tener coherencia, con lo que previamente habían construido y analizado en las demás situaciones.

A partir de aquí, la exploración y construcción se torna un poco más individual o de parejas para su socialización, como puede observarse en las ilustración 55 sin dificultades hasta el momento donde se alude a revisar la construcción mostrando las etapas de macroconstrucción, pues algunos estudiantes en su necesidad de seguir explorando lo que lograban era “eliminar” la construcción, al no saber manipular el recuadro que aparecía en la pantalla, experiencia que dio elementos a los demás estudiantes para iniciar con la correcta revisión de la construcción.

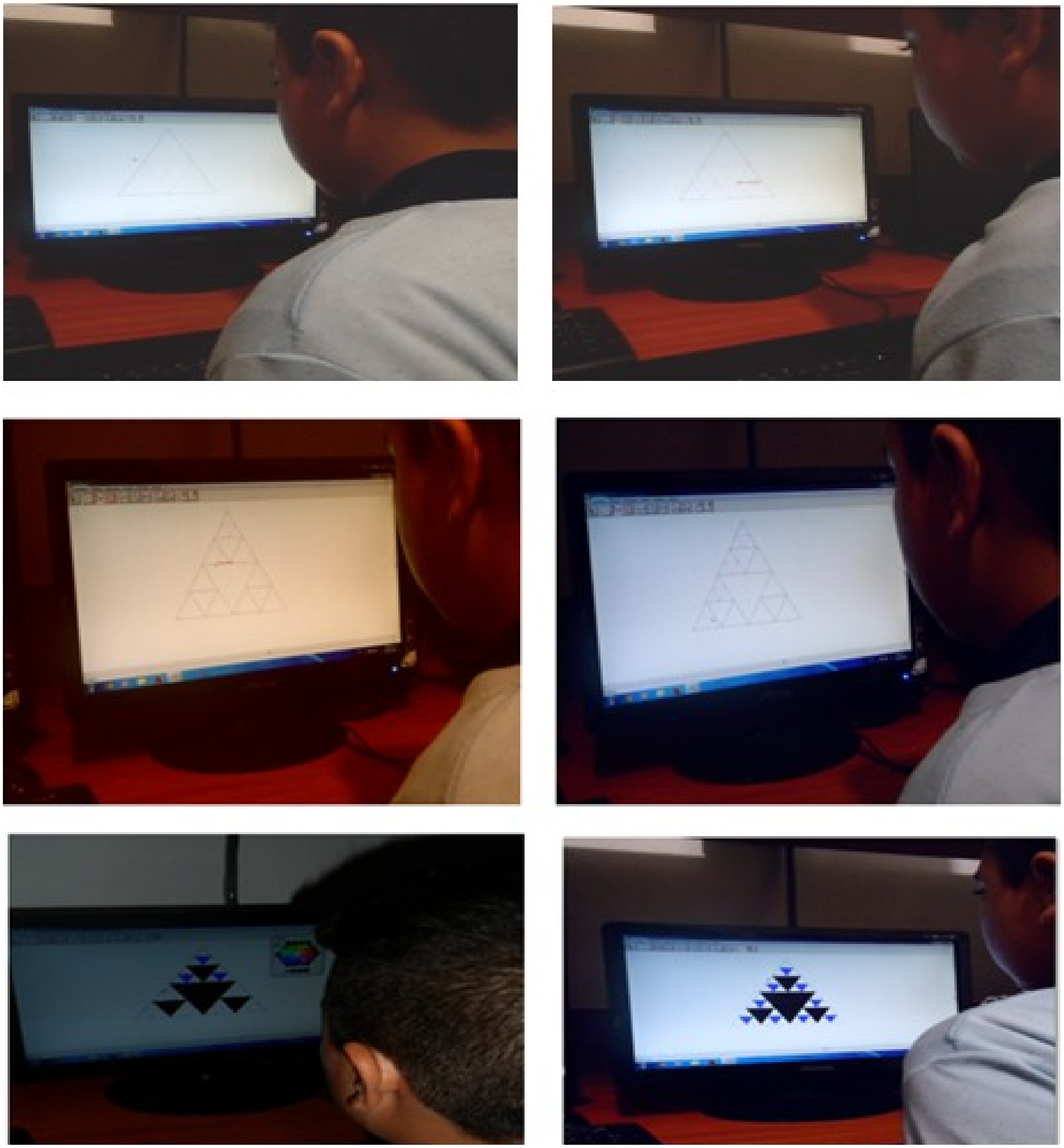


Ilustración 55: Construcción de fractal construido por etapas utilizando Cabri Geometry II Plus en el aula de sistemas según guía de la situación 4 Secuencia Aplicada.

Una vez terminada la situación, los estudiantes manipulan la construcción haciendo uso del arrastre, para buscar cambios en el triángulo construido, como puede observarse en la ilustración 56, de acuerdo con las variaciones presentes en su escala, hacer uso de la herramienta rellenar para cambiar colores en la misma, como también las otras opciones disponibles en los distintos iconos en la parte superior de la ventana.

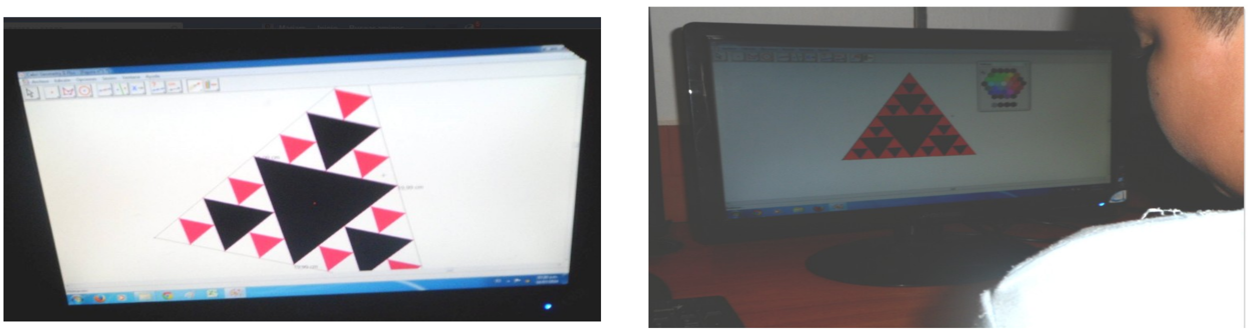


Ilustración 56: Manipulación de construcción fractal construido utilizando Cabri Geometry II Plus en el aula de sistemas según guía de la situación 4 Secuencia Aplicada.

Por otra parte, algunos estudiantes intentan generar otras construcciones de forma autónoma.

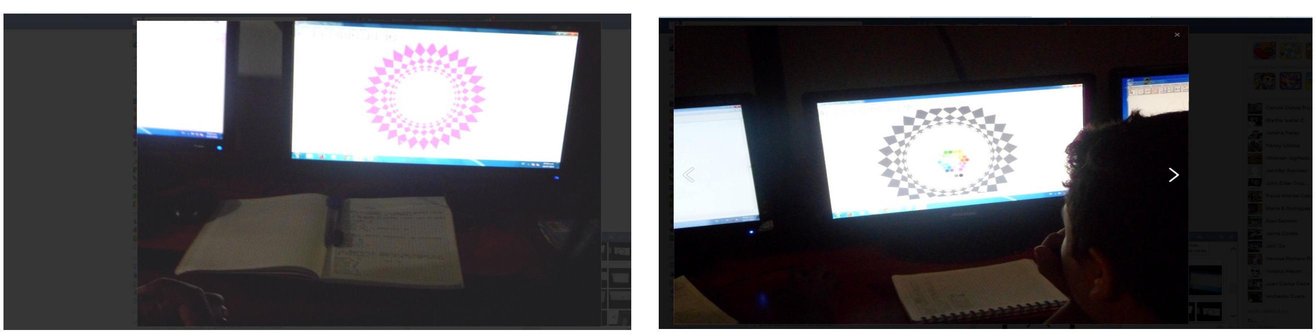


Ilustración 57: Manipulación de Cabri Geometry II Plus en el aula de sistemas.

Finalmente se concluye con la aplicación de la situación, dando respuesta a las formulaciones realizadas por el docente, estas son: ¿Qué ventajas se encuentra al trabajar geometría en un ambiente dinámico? ¿Qué notan en común en la figura final? ¿Cómo les pareció el trabajo con el programa Cabrí Geometry II Plus? Las cuales debían ser argumentadas desde la experiencia con el desarrollo de la situación, donde los estudiantes desde sus propias inferencias intentan dar solución a las mismas, como se evidencia en la ilustración 58, que a continuación se presentan.

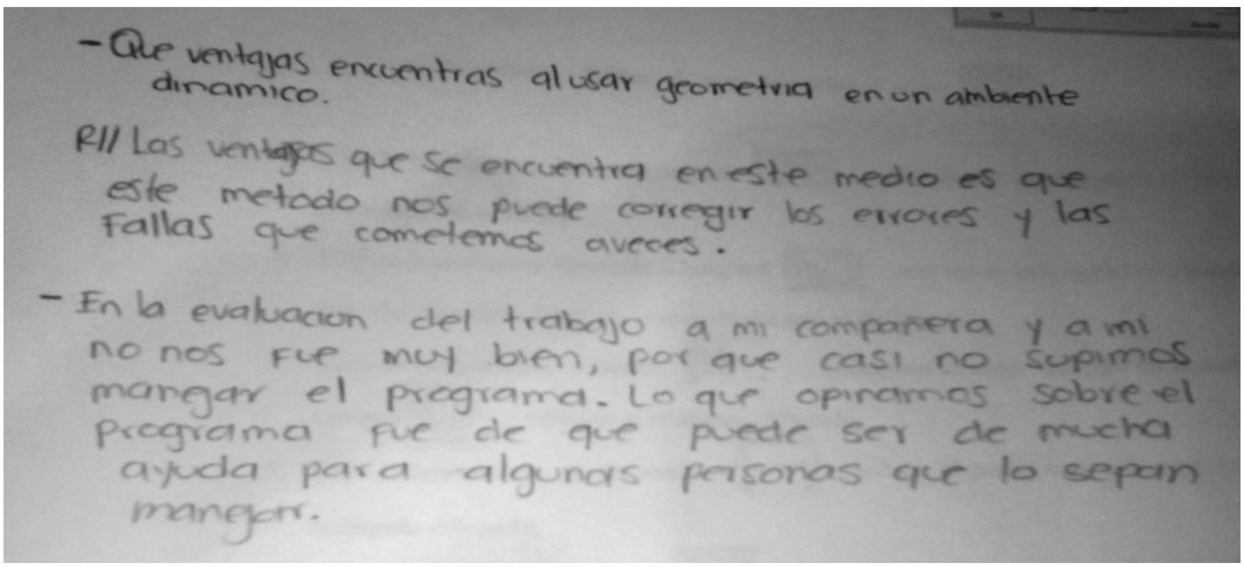

-Que ventajas encuentras al usar geometria en un ambiente dinamico.
R// Las ventajas que se encuentra en este medio es que este metodo nos puede corregir los errores y las Fallas que cometemos aveces.
- En la evaluacion del trabajo a mi compañera y a mi no nos fue muy bien, por que casi no supimos manejar el programa. Lo que opinamos sobre el programa fue de que puede ser de mucha ayuda para algunas personas que lo sepan manejar.

Ilustración 58: Respuesta de los estudiantes a las formulaciones generadas a partir del trabajo con Cabri Geometry II Plus, en el aula de sistemas siguiendo guía de situación 4.

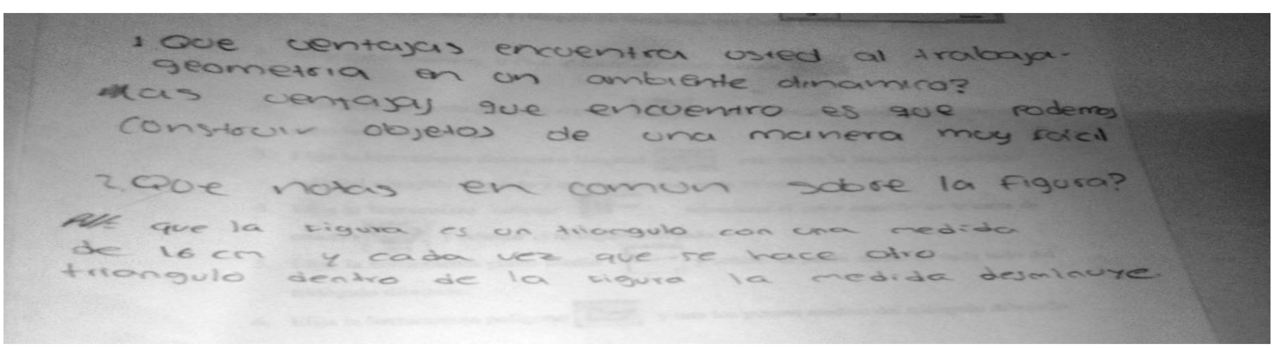

1 Que ventajas encuentra usted al trabaja geometria en un ambiente dinamico?
Las ventajas que encuentro es que podemos construir objetos de una manera muy facil
2 Que notas en comun sobre la figura?
R// que la figura es un triangulo con una medida de 16 cm y cada vez que se hace otro triangulo dentro de la figura la medida desminuye.

Ilustración 59: Respuesta de los estudiantes a las formulaciones generadas a partir del trabajo con Cabri Geometry II Plus, en el aula de sistemas siguiendo guía de situación 4.

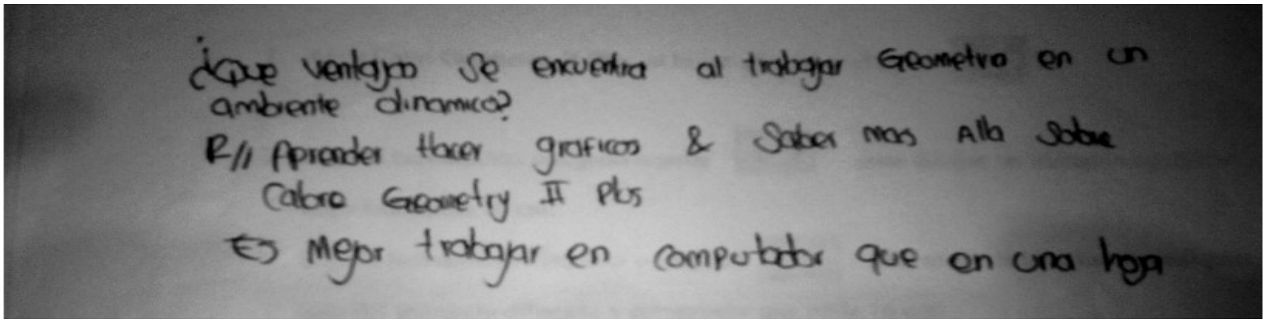

¿Que ventaja se encuentra al trabajar Geometra en un ambiente dinamico?
R// Aprender hacer graficos & Saber mas Alla sobre Cabro Geometry II Plus
Es mejor trabajar en computador que en una hoja

Ilustración 60: Respuesta de los estudiantes a las formulaciones generadas a partir del trabajo con Cabri Geometry II Plus, en el aula de sistemas siguiendo guía de situación 4.

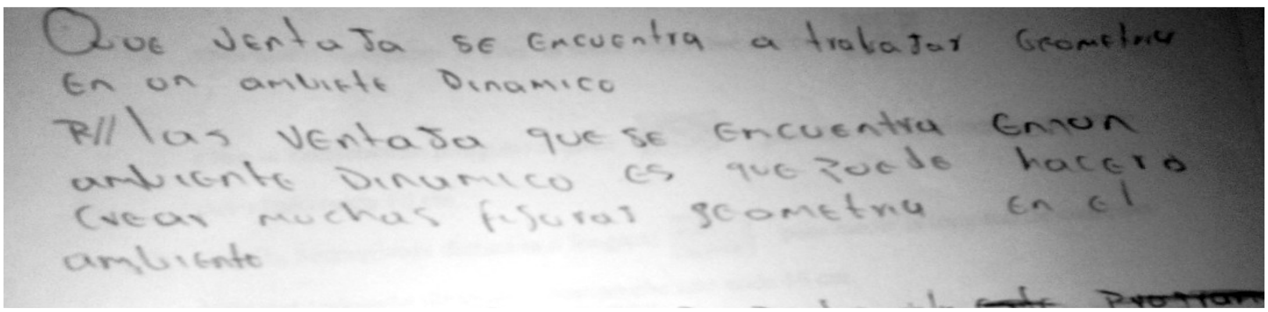

Que ventaja se encuentra a trabajar Geometria en un ambiete Dinamico
R// las ventaja que se encuentra en un ambiente Dinamico es que puede hacer o crear muchas figuras geometria en el ambiente

Ilustración 61: Respuesta de los estudiantes a las formulaciones generadas a partir del trabajo con Cabri Geometry II Plus, en el aula de sistemas siguiendo guía de situación 4.

Luego, se ha dado cumplimiento a la aplicación de las actividades de las situaciones propuestas dando por terminado el desarrollo de la secuencia.

ANEXO B: GUÍA SITUACIÓN 1, SECUENCIA DIDÁCTICA APLICADA

ACTIVIDADES DE CONSTRUCCIÓN FRACTAL

NOMBRES Y APELLIDOS	FECHA	GRADO
JORNADA: MAÑANA _____ TARDE _____	EDAD: _____	SEXO _____

Situación 1

Se presenta un acercamiento a la construcción de fractales a través de movimientos en el plano como método dinámico mediante secuencia de instrucciones básicas.

Logro

Construir el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski y la curva de Von Koch, mediante la aplicación de movimientos geométricos de homotecia, rotación y traslación en el plano descritos verbalmente.

Actividad 1: Construcción del conjunto de Cantor

1. Dibuja un segmento de 13,5.cm de longitud.
2. Divide el segmento dibujado en tres segmentos iguales y borra el segmento central.
3. A cada uno de los nuevos segmentos divídelos en tres segmentos iguales y borra el segmento central.
4. Nuevamente, a cada uno de los nuevos segmentos divídelos en tres segmentos iguales y borra el segmento central.
5. ¿Qué ocurre con la magnitud de los segmentos obtenidos?
6. ¿Qué ocurre con la cantidad de segmentos?
7. Si repitiéramos el proceso de forma indefinida, describe ¿Cuál crees que sería la forma de la figura obtenida?

Actividad 2: Construcción de la curva de Von Koch

1. Dibuja un segmento de 27.cm de longitud.
2. Divide el segmento dibujado en tres segmentos iguales.
3. Tomando como base el segmento medio, sobre el construye un triángulo equilátero.
4. Suprime el segmento base del triángulo construido. (La figura construida hasta el momento se llama curva de Koch de primer orden)
5. Sobre cada uno de los segmentos obtenidos repite los pasos indicados en el punto 2, 3 y 4. (La figura construida hasta el momento se llama curva de Koch de segundo orden)
6. Sobre cada uno de los segmentos obtenidos repite de nuevo los pasos indicados en el punto 2, 3 y 4. (La figura construida hasta el momento se llama curva de Koch de tercer orden)
7. Dibuja la figura de orden cuatro que obtendríamos al repetir el procedimiento.
8. Describe como crees que sería la figura que obtendríamos en un quinto orden.

Actividad 3: Construcción del Triángulo de Sierpinski

1. Dibuja un triángulo equilátero cuyo lado mida 16.cm en una hoja cuadriculada.
2. Señala el punto medio de cada lado.
3. Une los puntos medios utilizando segmentos.
4. Colorea el triángulo central de los cuatro triángulos que se han formado. (Un color calido preferiblemente).
5. Sobre cada uno de los tres triángulos que no han sido coloreados repite los pasos del punto 2, 3 y 4 (Utiliza para colorear el mismo color)
6. De nuevo, sobre cada uno de los tres triángulos que no han sido coloreados repite los pasos del punto 2, 3 y 4 (Utiliza para colorear el mismo color)
7. Colorea de negro todos los triángulos que no han sido coloreados con el color que elegiste. (La región formada por los triángulos coloreados de negro se llama triángulo de Sierpinski de tercer orden).
8. Describe como crees que sería la figura que obtendríamos en un cuarto orden al continuar con este proceso.

ANEXO C: GUÍA SITUACIÓN 2 SECUENCIA DIDÁCTICA APLICADA,

ANÁLISIS DE CONJUNTOS FRACTALES.

NOMBRES Y APELLIDOS	FECHA	GRADO
JORNADA: MANANA _____ TARDE _____	EDAD: _____	SEXO _____

Situación 2

Se presenta de forma ilustrativa cada una de las etapas del proceso de construcción de los fractales de Cantor, Sierpinski y Koch, para los cuales se pide dar respuesta a cada una de las preguntas consultadas.

Logro

Encontrar patrones aritméticos y geométricos subyacentes en el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski y la curva de Koch.

Actividad 1: Análisis de patrones numéricos y geométricos del conjunto de Cantor

1. A continuación se presenta el proceso de construcción de cada etapa del conjunto de Cantor. Responde las preguntas.

Etapa 0 1 unidad

a) ¿Cuántos segmentos hay? ________________________________

b) ¿Cuál es la longitud del segmento? ________________________________

Etapa 1

a) ¿Cuántos segmentos hay? ____________________

b) ¿Cuál es la longitud de cada segmento, si el segmento original mide una unidad?

____

Etapa 2

a) ¿Cuántos segmentos hay? ____________________

b) ¿Cuál es la longitud de cada segmento, si el segmento original mide una unidad?

____

Etapa 3

a) ¿Cuántos segmentos hay? ____________________

b) ¿Cuál es la longitud de cada segmento, si el segmento original mide una unidad?

____

c) ¿Cuántos segmentos forman el conjunto de cantor en su etapa cuatro?

____

d) ¿Cuál es la longitud de cada segmento?

____

2. Completa la tabla

Etapa	No. Segmentos	Longitud del segmento		
		Fracción	Decimal	Suma por etapas
1				0 y 1 =
2				1 y 2 =
3				2 y 3 =
4				3 y 4 =

Actividad 2: Análisis de patrones numéricos y geométricos de la curva de Koch

1. A continuación se presenta el proceso de construcción de cada etapa de la curva de Koch. Responde las preguntas.

Etapa 0

a) ¿Cuál es el número de segmentos?

____

b) ¿Cuál es la longitud de cada segmento?

Etapa 1

a) ¿Cuál es el número de segmentos?

____

b) ¿Cuál es la longitud de cada segmento?

____

Etapa 2

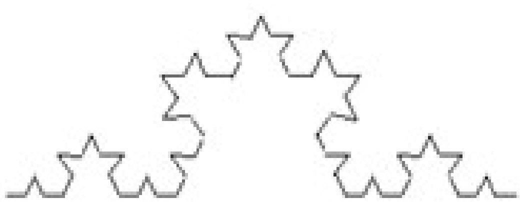
a) ¿Cuál es el número de segmentos?

____

b) ¿Cuál es la longitud de cada segmento?

____

Etapa 3



a) ¿Cuál es el número de segmentos?

____

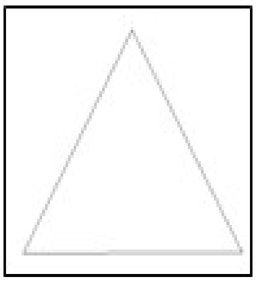
b) ¿Cuál es la longitud de cada segmento?

____

Actividad 3: Análisis de patrones numéricos y geométricos del triángulo de Sierpinski

1. A continuación se presenta el proceso de construcción de cada etapa del triángulo de Sierpinski. Responde las preguntas.

Etapa 0



a) ¿Cuántos triángulos hay? ______________________________

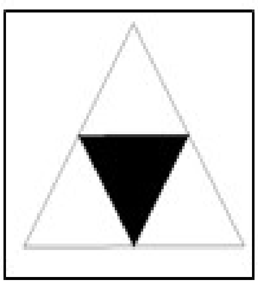
b) ¿Cuánto mide la base? ______________________________

c) ¿Cuánto mide la altura? ______________________________

d) ¿Cuánto mide el perímetro? ______________________________

e) ¿Cuánto mide el área? ______________________________

Etapa 1



a) ¿Cuántos triángulos hay? ______________________________

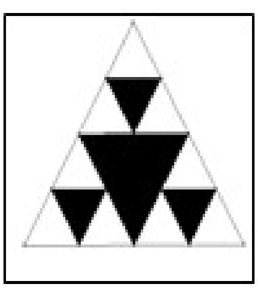
b) ¿Cuánto mide la base de cada triángulo? ____________________

c) ¿Cuánto mide la altura de cada triángulo? ____________________

d) ¿Cuánto mide el perímetro de cada triángulo? ________________

e) ¿Cuánto mide el área de cada triángulo? ____________________

Etapa 2



a) ¿Cuántos triángulos hay? ______________________________

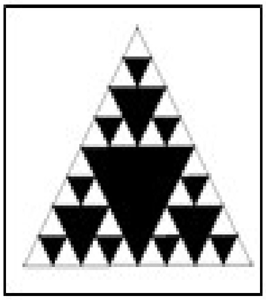
b) ¿Cuánto mide la base de cada triángulo? ____________________

c) ¿Cuánto mide la altura de cada triángulo? ____________________

d) ¿Cuánto mide el perímetro de cada triángulo? ________________

e) ¿Cuánto mide el área de cada triángulo? ____________________

Etapa 3



a) ¿Cuántos triángulos hay? ______________________________

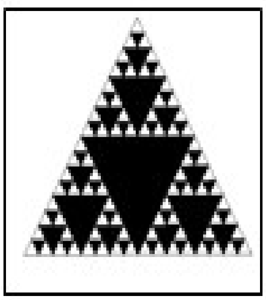
b) ¿Cuánto mide la base de cada triángulo? ____________________

c) ¿Cuánto mide la altura de cada triángulo? ____________________

d) ¿Cuánto mide el perímetro de cada triángulo? ______________

e) ¿Cuánto mide el área de cada triángulo? ____________________

Etapa 4



a) ¿Cuántos triángulos hay? ______________________________

b) ¿Cuánto mide la base de cada triángulo? ____________________

c) ¿Cuánto mide la altura de cada triángulo? ____________________

d) ¿Cuánto mide el perímetro de cada triángulo? ______________

e) ¿Cuánto mide el área de cada triángulo? ____________________

ANEXO D: GUÍA SITUACIÓN 3 SECUENCIA DIDÁCTICA APLICADA, IDENTIFICACIÓN DE AUTOSIMILITUD.

NOMBRES Y APELLIDOS	FECHA	GRADO
JORNADA: MAÑANA _____ TARDE _____	EDAD: _____	SEXO _____

Situación 3

Se presenta de forma ilustrativa una serie de conjuntos reconocidos como fractales, para los cuales se pide dar respuesta a cada una de las preguntas consultadas.

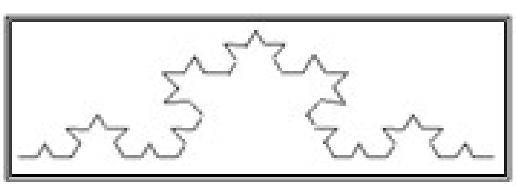
Logro

Identificar y construir un conjunto autosimilar.

Actividad 1: Autosimilaridad

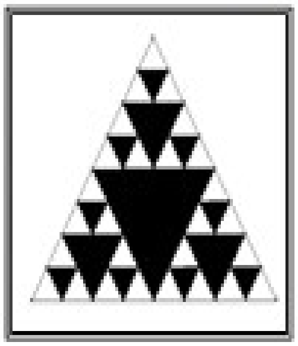
1. Explica cuál crees que sería la razón para decir que los siguientes conjuntos son autosimilares.

a. Curva de Koch

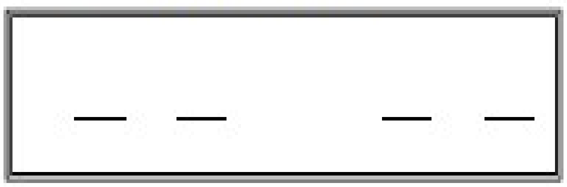


____
____
____
____
____

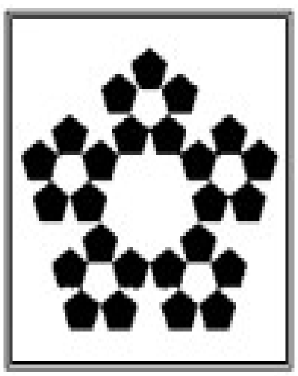
b. Triángulo de Sierpinski



c. Conjunto de Cantor



d. Pentágono de Sierpinski



ANEXO E: GUÍA SITUACIÓN 4 SECUENCIA DIDÁCTICA APLICADA,

CONTRUCCIÓN EN CABRI GEOMETRY II PLUS.

NOMBRES Y APELLIDOS	FECHA	GRADO
JORNADA: MAÑANA _____ TARDE _____	EDAD: _____	SEXO _____

Situación 4

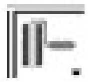
Se presenta un acercamiento a la construcción de fractales a través de movimientos en el plano como método dinámico mediante secuencia de instrucciones básicas desde un ambiente de geometría dinámica como Cabri Geometry II Plus.

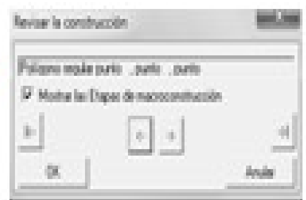
Logro

Construir el triángulo de Sierpinski mediante la aplicación del ambiente de geometría dinámica Cabri Geometry II Plus.

Actividad 1: Construcción del Triángulo de Sierpinski con Cabri Geometry II Plus

1. Abrir Cabri Geometry II Plus al hacer clic sobre el icono
2. Elija la herramienta polígono regular para dibujar un triángulo equilátero cuyo lado mida 16 cm.
3. Elija la herramienta distancia o longitud cm para medir la longitud de cualquier lado del triángulo dibujado y compruebe que mide 16 cm.
4. Elija la herramienta rellenar seleccione el color amarillo de la carta de colores y rellenar el triangulo dibujado.
5. Elija la herramienta punto medio y señale el punto medio de cada lado del triángulo dibujado.
6. Elija la herramienta polígono y una los puntos medios del triángulo dibujado.

7. Elija la herramienta rellenar  seleccione el color negro de la carta de colores  y rellenar el triángulo central de los cuatro triángulos que se han formado.
8. Sobre cada uno de los tres triángulos que no han sido coloreados repite los pasos de los punto 4, 5 y 6.
9. De nuevo, sobre cada uno de los triángulos que no han sido coloreados repite los pasos de los punto 4, 5 y 6. (La región formada por los triángulos coloreados de negro se llama triángulo de Sierpinski de tercer orden).
10. Elija en el menú edición la opción revisar la construcción señalando la opción de mostrar las etapas de macroconstrucción.



ANEXO F: GUÍA SITUACIÓN 1: TAPETE TRIANGULAR, SECUENCIA DIDÁCTICA .

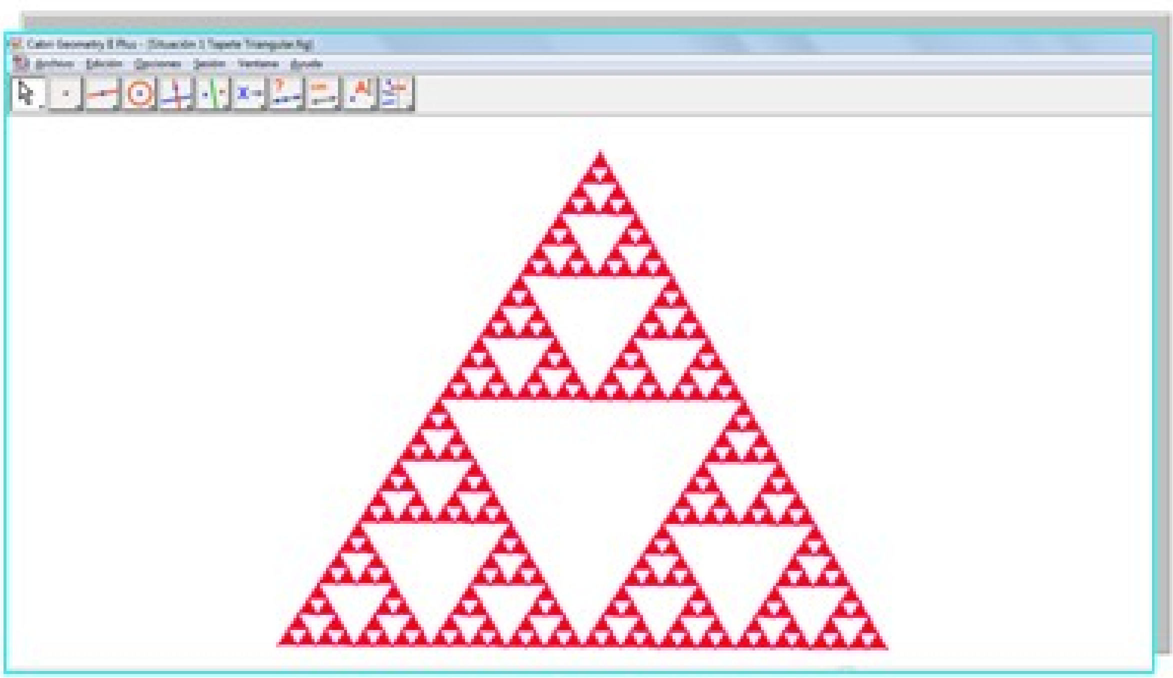
NOMBRES Y APELLIDOS	FECHA	GRADO
JORNADA: MAÑANA ____ TARDE ___	EDAD:_____	SEXO: _____

Situación 1a: Tapete Triangular

Propósito: Describir la semejanza como una propiedad invariante en una composición de transformaciones isométricas a partir de procesos de visualización.

Tiempo: 90 minutos.

Dada la macroconstrucción ¿Qué objetos geométricos reconoces? ¿Qué propiedades permanecen invariantes en la macroconstrucción?



NOMBRES Y APELLIDOS	FECHA	GRADO
JORNADA: MAÑANA ____ TARDE ___	EDAD:_____	SEXO: _____

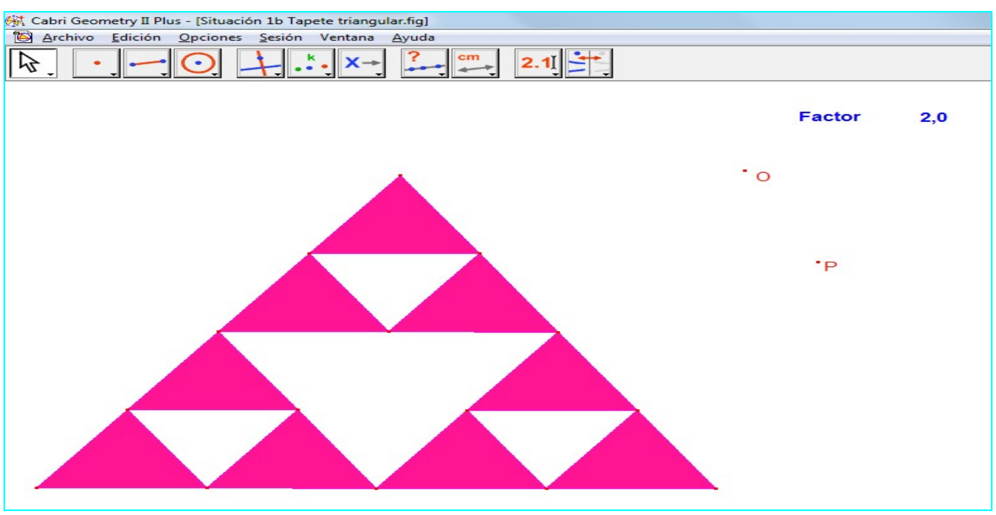
Situación 1b: Tapete Triangular

Propósito: Desarrollar el concepto de homotecia, reconociendo alguna de sus propiedades.

Tiempo: 90 minutos.

Dada la macroconstrucción del tapete triangular en sus primeras etapas ¿Qué transformación visualizas en la configuración en pantalla, cuando utilizas la opción de homotecia sobre alguno de los triángulos (polígonos) con respecto al punto O utilizando el factor 2,0?

a) ¿Qué ocurre al mover el punto O?
b) ¿Qué ocurre al aumentar o disminuir el factor utilizado?
c) ¿Qué sucede al mover un punto de la macroconstrucción dada?
d) ¿Es igual con el punto P al utilizar la opción de homotecia sobre alguno de los triángulos (polígonos) utilizando el factor 2,0?
e) ¿Qué diferencias encuentras?
f) ¿Obtienes respuestas iguales a los ítems a, b y c con respecto al punto P?



ANEXO G: GUÍA SITUACIÓN 2: CAMINOS, SECUENCIA DIDÁCTICA.

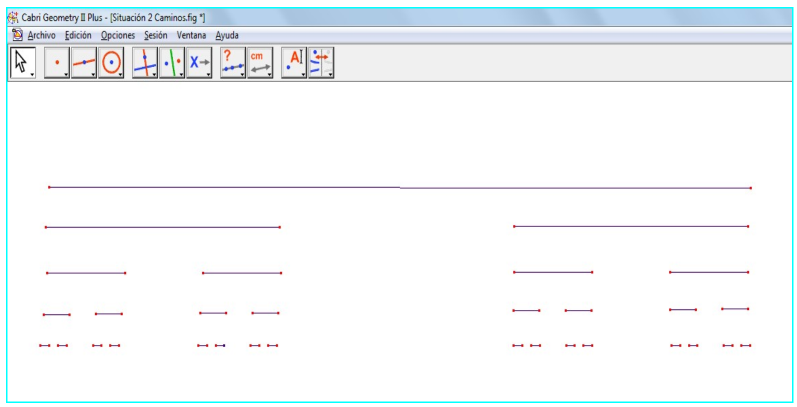
NOMBRES Y APELLIDOS	FECHA	GRADO
JORNADA: MAÑANA ____ TARDE ___	EDAD:_____	SEXO: _____

Situación 2a: Caminos

Propósito: Reconocer diferencias entre la unidad y los patrones de medición.

Tiempo: 90 minutos.

Dada la macroconstrucción de Caminos ¿Qué tipo de patrones se repiten en la figura? Completa la tabla sabiendo que la longitud del segmento en la etapa 0 es L.



ETAPA	No. SEGMENTOS	LONGITUD CADA SEGMENTO	LONGITUD DE LA FIGURA
0		L	
1			
2			$4\frac{L}{9}$
3			
4			
n			

NOMBRES Y APELLIDOS	FECHA	GRADO
JORNADA: MAÑANA ____ TARDE ___	EDAD:_____	SEXO: _____

Situación 2b: Caminos

Propósito: Desarrollar el concepto de homotecia, reconociendo alguna de sus propiedades.

Tiempo: 90 minutos.

Dada la macroconstrucción de Caminos ¿Qué transformación visualizas en la configuración en pantalla, cuando utilizas homotecia sobre el segmento dado con respecto a los puntos extremos del mismo, utilizando el factor dado de 1/3 (es decir 0,3333…) y posteriormente la opción de traslación sobre los segmentos generados con respecto al vector $\vec{OP}$? (repitiendo este procedimiento varias veces)

a) ¿Qué ocurre al mover el punto O?
b) ¿Qué ocurre al aumentar o disminuir el factor utilizado?
c) ¿Qué sucede al mover un punto de la macroconstrucción dada?

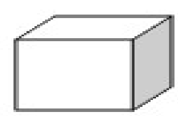
NOMBRES Y APELLIDOS	FECHA	GRADO
JORNADA: MAÑANA ____ TARDE ___	EDAD:_____	SEXO: _____

Situación 2c: Caminos

Propósito: Trabajar con una expresión para entender la dimensión en un objeto.

Tiempo: 90 minutos.

Considere un segmento, un cuadrado y un cubo de los cuales se tiene que su dimensión es 1, 2 y 3 respectivamente. Si aplicamos la expresión $F^{d} = n$ siendo el factor de escala **F**, el número de elementos **n** y la dimensión **d.** ¿Qué sucede al dividir cada segmento por la mitad de forma reiterada? ¿Cómo queda la tabla al completarla?

ETAPA	No. SEGMENTOS	LONGITUD CADA SEGMENTO	LONGITUD DE CADA FIGURA (SEGMENTO, CUADRADO Y CUBO)			$F^{d}=n$	GRAFICA
0		L					_____________
							
							
1							
2							
3							
4							

ANEXO H: GUÍA SITUACIÓN 3: CURVA EN PICOS, SECUENCIA DIDÁCTICA.

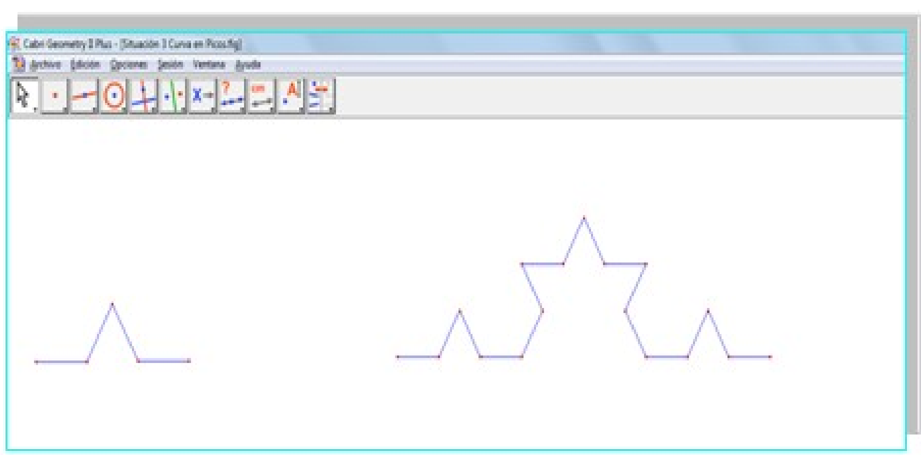
NOMBRES Y APELLIDOS	FECHA	GRADO
JORNADA: MAÑANA ____ TARDE ___	EDAD:_____	SEXO: _____

Situación 3a: Curva en Picos

Propósito: Describir la semejanza como una propiedad invariante en una composición de transformaciones isométricas a partir de procesos de visualización.

Tiempo: 45 minutos.

Dada la macroconstrucción de Curva en Picos ¿Cómo explicarías a un compañero que estas dos figuras comparten propiedades?



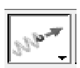
NOMBRES Y APELLIDOS	FECHA	GRADO
JORNADA: MAÑANA ____ TARDE ___	EDAD:_____	SEXO: _____

Situación 3b: Curva en Picos

Propósito: Describir la semejanza como una propiedad invariante en una composición de transformaciones isométricas a partir de procesos de visualización.

Tiempo: 45 minutos.

Dada la macroconstrucción de Curva en Picos al realizar homotecia teniendo en cuenta un factor dado y con respecto a cada uno de los puntos del triángulo ΔABC dado ¿Cómo es el comportamiento de las figuras resultantes al mover cualquiera de los puntos del triángulo ΔABC ? ¿Qué pasa con la medida de los segmentos en las figuras obtenidas al animar los puntos del triángulo ΔABC?

(Utiliza la opción animación )