

INSTRUMENTACIÓN DEL LADO RECTO DE LA ELIPSE INFLUENCIADA POR EL GEOGEBRA

José Carlos León Ríos, Jesús Victoria Flores Salazar

Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. (Perú)

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas-IREM. (Perú)

jleonr@ulima.edu.pe, jvflores@pucp.pe

Palabras clave: enfoque instrumental, instrumentación, instrumentalización, geogebra

Key words: instrumental approach, instrumentation, instrumentalization, geogebra

RESUMEN

Nuestra investigación surge por la necesidad de reconocer que la comprensión de la elipse, no solo debe articularse a una ecuación algebraica con dos variables y a su representación en el sistema de coordenadas cartesianas. Investigaciones referidas a las secciones cónicas, reconocen otros planteamientos que movilizan representaciones y construcciones geométricas, que con sus propias complejidades giran alrededor del proceso de enseñanza y aprendizaje de la elipse. Este enfoque puede ser considerado no solo como un proceso paralelo al procedimiento tradicional sino también como un nexo al enfoque analítico actual. Nuestro trabajo estuvo dirigido a estudiantes de una universidad privada de Lima, de 16 a 18 años de edad. Empleamos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue, y el Enfoque Instrumental de Rabardel, ya que las acciones de los estudiantes permitieron identificar posibles esquemas de utilización que construyeron o movilizaron para apropiarse de las propiedades de la elipse, puntualmente las del lado recto.

ABSTRACT

Our research is based on the necessity of recognize that we can not only understand the notion of an ellipse, through the articulation to an algebraic equation with two variables and the Cartesian coordinate system. Researches recognize others approach like the representations and geometric constructions, with their own complexities around the process of teaching and learning of the ellipse. This report can be considered not only as a process parallel to the traditional analytical procedure but also they can be useful as a link to the current analytical approach. Our research was performed by undergraduate students from a private university of Lima, which age were between 16 and 18 years. We use aspects of the didactic engineering of Artigue and, the instrumental approach of Rabardel, and we analyze the actions of the students and the schemes that they constructed or moved to appropriate themselves of the properties of the ellipse, specifically the ones of the straight side.

■ Introducción

Este artículo corresponde a una de las diez actividades descritas en nuestro trabajo de investigación, que incluyeron construcciones geométricas, las cuales permitieron identificar posibles esquemas de utilización que los alumnos movilizaron para enriquecerse con las propiedades de la elipse, específicamente aquellas referidas a su lado recto. Durante dicho proceso, los alumnos construyeron otros esquemas orientados hacia algunos objetos de la actividad. Nuestra propuesta, de acuerdo al proceso histórico, esta respaldada por la existencia de múltiples concepciones vinculadas a las cónicas. Mencionamos como primeros intentos, la representación de una parábola obtenida a través de dos medias proporcionales, con la intención de construir la arista de un cubo cuyo volumen es el doble de otro cubo dado, o la descripción de su lugar geométrico descrito respecto a un sólido, posteriormente respecto a un plano y vinculado además con áreas de figuras plana como cuadrados, rectángulo y triángulos.

Mostramos algunos antecedentes que respaldan nuestra investigación. En el trabajo de Fernández (2011) la autora manifiesta que es importante promover el aprendizaje de las cónicas haciendo uso de un ambiente de geometría dinámica. Para ello, reivindica la importancia de establecer una complementariedad entre el enfoque sintético y el analítico en el estudio de las cónicas. Señala que el significado más difundido es el de los procesos algebraicos, así que considera la necesidad de conectar tanto el enfoque sintético como analítico por medio de las construcciones geométricas. De igual forma la investigación de Santa (2011) quien estudia a la elipse como lugar geométrico a través de un objeto concreto, específicamente la geometría del doblado del papel y obtiene a través de dichas construcciones la condición geométrica de la elipse. Otros trabajos, como el de Salazar (2009) y Chumpitaz (2013), nos muestran investigaciones utilizando ambientes de geometría dinámica, acompañando como marco teórico, el Enfoque Instrumental, basado en la ergonomía cognitiva, que nos brinda la posibilidad de analizar las acciones de los sujetos, permitiéndonos identificar los posibles esquemas de utilización que construyen y movilizan mientras interactúan con nuestro objeto matemático.

Destacamos a Trouche (2004) por las investigaciones realizadas con calculadoras gráficas y simbólicas, enmarcadas en el enfoque instrumental que articula las relaciones entre el uso de la herramienta y el desarrollo de los conceptos. Precisamente, alguno de los programas de ambiente en geometría dinámica (AGD), específicamente el software Geogebra, sirvieron como fuente de apoyo a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, en este caso la elipse.

En relación a la metodología usada en nuestra investigación, empleamos la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), esta nos permitió la experimentación y la confrontación de nuestros supuestos, elaborados en la fase previa de la metodología, con la información que recogimos durante la experimentación.

■ Aspectos del Enfoque Instrumental

Con el fin de analizar en este artículo, la instrumentación del lado recto de la elipse por parte de los alumnos, hemos considerado presentar el Enfoque Instrumental de Rabardel (2011). A continuación

describimos los términos que haremos uso en el presente artículo, y que consideramos pertinentes para analizar cómo los alumnos se instrumentaron con la noción de lado recto de la elipse.

De acuerdo al autor, señala que en toda situación de actividad en la que se utilicen artefactos o instrumentos, existe siempre una tríada de elementos: el sujeto, el instrumento y el objeto, los cuales están relacionados de manera explícita o implícita, El sujeto es el usuario, alumno; operario, trabajador, agente, individuo, grupo de individuos o estudiantes que desarrollan una determinada acción en un instrumento. El instrumento puede ser una herramienta, máquina, una propiedad como la del lado recto que sirve como mediador o intermediario entre el sujeto y el objeto. El objeto, es todo aquello donde va dirigida la acción con ayuda del instrumento.

El autor señala que inicialmente el artefacto, material o simbólico, no guarda un valor instrumental con el objeto al que se dirige. Sin embargo, indica que el artefacto es elaborado con alguna intencionalidad, siendo esta la razón de su existencia. Es decir, el artefacto pasa por un proceso de instrumentación por parte del sujeto para transformar a los objetos a los cuales se dirige y concreta una solución a un problema o a una clase de problemas sociales. Cuando nos referimos al artefacto como medio material, pensamos en un artefacto en concreto, y cuando lo mencionamos como medio simbólico, podemos pensar por ejemplo, en la representación gráfica de una elipse o en las características de sus propiedades como la que identifica el trazo de su lado recto.

Rabardel (1995), señala que el artefacto pasa al estado de instrumento, cuando el sujeto le asigna los esquemas de utilización correspondientes. Dichos esquemas de utilización inciden, por una parte, en los artefactos pues el artefacto es manipulado, convertido en medio y por otra parte, los artefactos son orientados en los objetos sobre los cuales estos artefactos permiten actuar. Por lo tanto el instrumento no existe en sí, es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, dirigida por sus esquemas que elabora, el artefacto es designado como instrumento, cuando está inscrito en su uso, en una relación instrumental entre dos entidades que son el sujeto y el objeto sobre el cual actúa.

Los esquemas a los cuales alude el autor, comprenden dos dimensiones, la primera, referida a las acciones que se focalizan en las características, propiedades y actividades específicas del artefacto, llamadas esquemas de uso (EU) y la segunda, que son las acciones orientadas hacia el objeto de la actividad, hacia la tarea principal del sujeto, llamadas esquemas de acción instrumentada (EAI). Además, un mismo esquema puede, dependiendo de la situación, ser un esquema de uso y en otra circunstancia un esquema de acción instrumentada. Por ejemplo, el trazo del lado recto de una elipse podría ser un EU, si se desea hallar la longitud de dicha cuerda, en términos de sus parámetros; pero podría tratarse también de un EAI, si un alumno inicia el estudio de la elipse y debe movilizar otros esquemas previos que coordinados unos a otros, se asimilan y acomodan para constituir el esquema lado recto. El investigador considera además, una tercera dimensión que denomina esquemas de actividad colectiva instrumentada (EACI) y que corresponde a la utilización de un instrumento en un contexto de actividades compartidas con otros usuarios, ya que como individuos somos seres que sociabilizamos constantemente, incluso los creadores del artefacto forman parte del surgimiento de los esquemas.

En relación a la dependencia entre artefacto y esquema, el investigador considera que un mismo esquema puede aplicarse a una multiplicidad de artefactos de la misma clase, por ejemplo, en el trazado del lado recto de una elipse, se movilizan esquemas de utilización que pueden ser trasladados al trazo del lado recto de una hipérbola. De manera recíproca, un artefacto es susceptible de ser insertado en otros esquemas de utilización en la que otros significados y funciones le serán atribuidos. El lado recto de la elipse puede ser insertado en otros esquemas de utilización, por ejemplo adaptado para la construcción de pilotes en arquitectura.

Finalmente, el autor define la Génesis Instrumental como la elaboración instrumental, es decir el proceso de construcción de un artefacto a un instrumento. Este proceso se realiza por medio de la instrumentalización y la instrumentación. El primero es un proceso referido al surgimiento, evolución y atribución de las propiedades del artefacto. Por ejemplo, la instrumentalización del lado recto se consigue cuando el alumno atribuye de manera gradual, ciertas componentes como el hecho de ser perpendicular al eje mayor, que pasa por uno de los focos, los cuales deben ser determinados gráficamente. El segundo caso, es un proceso que abarca el surgimiento y la evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada, debido a la acomodación, coordinación, asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos. En ese sentido, mostramos en esta actividad, cómo en el proceso de instrumentación del lado recto de la elipse, hay indicios de reconocimiento de sus propiedades, y que dicho esquema puede ser coordinada con otros esquemas para determinar su longitud correspondiente. Ambos procesos, según indica el investigador, contribuyen de manera solidaria al surgimiento y a la evolución del instrumento.

■ Análisis de la experiencia desarrollada

La experiencia que presentamos en este artículo, trata de la instrumentación del lado recto de la elipse. Es importante señalar que nuestra investigación en general se desarrolló en tres encuentros, cada uno de noventa minutos. La experiencia que mostramos, corresponde a la actividad quinta del segundo encuentro y está dividida en cinco ítems. En ese sentido, destacamos que los alumnos movilizaron en las primeras cuatro actividades, algunos esquemas de uso como el trazo de la cuerda de una circunferencia o parábola, y construyeron otros, como el esquema la condición geométrica de una elipse, la relación de sus parámetros y el trazo de algunos de sus elementos como eje mayor, eje menor y los focos.

Figura 1. Elipse

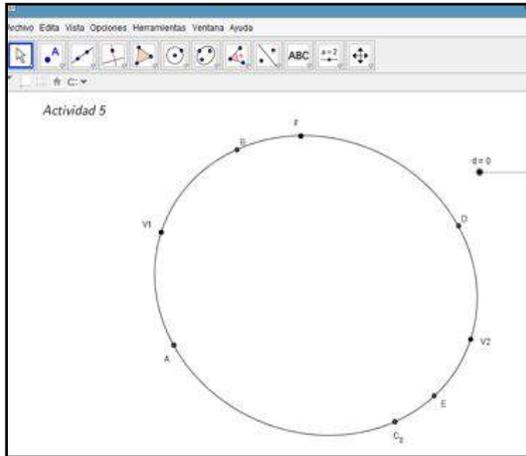
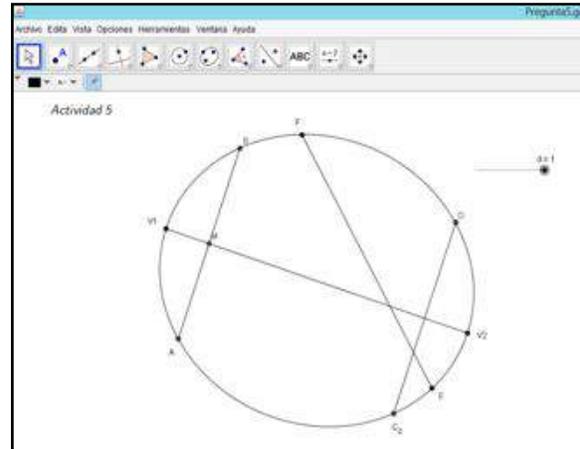


Figura 2. Cuerdas de una Elipse



En el primer ítem, tiene como objetivo que los alumnos muestren la definición de cuerda que traen consigo de acuerdo a la prueba de diagnóstico. Para ello se les muestra una elipse y un deslizador, como se observa en la figura 1. Los alumnos arrastran el deslizador y unas cuerdas aparecen simultáneamente. Dado que están instrumentados con el trazo de la cuerda en una circunferencia o de una parábola, no tuvieron inconvenientes en indicar que el segmento que une dos puntos distintos de una elipse corresponde a la definición de cuerda. Como se muestra en la figura 2, los alumnos hicieron uso de la herramienta “Elige y mueve” sobre el deslizador de la vista gráfica y determinaron las cuerdas de la elipse.

En el segundo ítem, los alumnos deben trazar la cuerda que corresponde al eje menor y describir su procedimiento. Como se tenía previsto en el *análisis a priori*, los estudiantes localizaron los extremos de los ejes haciendo uso de las herramientas del Geogebra, y luego trazaron el segmento que une dichos extremos. Afirmamos que ambos equipos A y B, están instrumentados respecto a la definición del eje menor de la elipse pues el primero de los equipos redactó que el eje menor de una elipse, es un *segmento perpendicular al eje focal y que pasa por el centro de la elipse*, mientras que el segundo equipo indicó que el eje menor correspondía a una *mediatriz ya que es una recta perpendicular por el punto medio del eje mayor*. De igual forma, para describir los enunciados anteriores que corresponden al eje menor, movilizaron sus esquemas de utilización entre los miembros de los equipos, asignadas a los esquemas de acción colectiva instrumentada.

Figura 3. Focos A

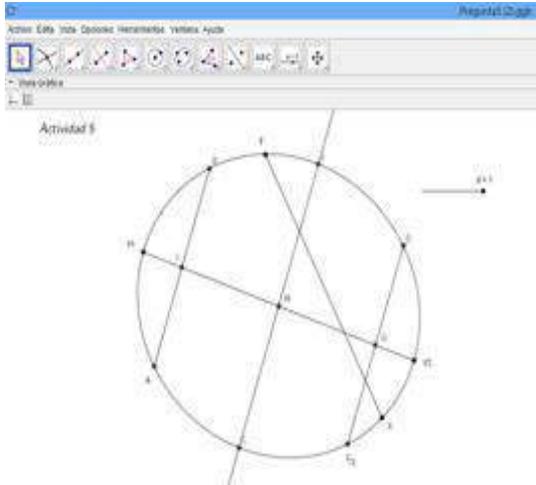
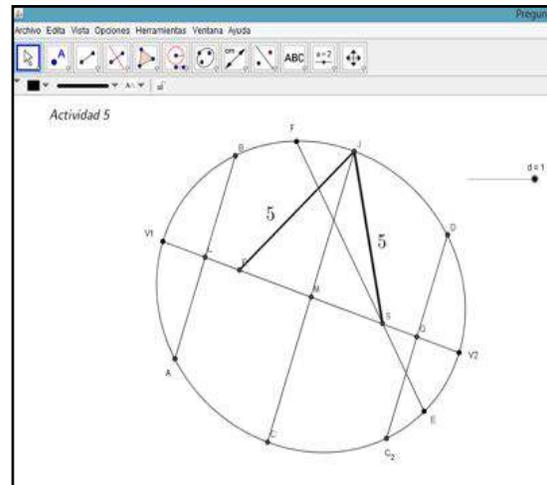


Figura 1. Focos B



En el tercer ítem se les indica que la cuerda que es perpendicular al eje focal y contiene a uno de los focos de una elipse, se llama lado recto. El alumno debe nombrar en su misma representación gráfica, al menos a una de las cuerdas que cumplan con dicha condición y describir su procedimiento. En las figuras 3 y 4, mostramos las diferentes construcciones que realizan los equipos A y B, para indicar si alguna de las cuerdas mostradas corresponde a las características del lado recto.

En el *análisis a priori* pensamos que los alumnos no tendrían inconvenientes en reconocer que las cuerdas mostradas no corresponden a los lados rectos de la elipse ya que los alumnos están instrumentados con su condición geométrica de la elipse y con la propiedad de la mediatriz. Sin embargo el equipo A, hace uso de la relación entre los parámetros $a^2 = b^2 + c^2$, lo cual demuestra que probablemente se hallen instrumentados también en dicha propiedad intrínseca.

De acuerdo a ello, en la figura 3, el equipo A, moviliza el EAI $a^2 = b^2 + c^2$ y comprueba la relación entre los parámetros, ya que determina las distancias del centro al extremo del eje mayor, menor y a uno de los puntos que suponen como el foco. En ese sentido, es importante señalar que la relación entre los parámetros de la elipse: $a^2 = b^2 + c^2$ fue constituida por los alumnos en actividades anteriores, cuando los EU: la condición geométrica de la elipse y el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo, se coordinaron unos a otros. En este ítem, la relación entre los parámetros, evolucionó como posible EU pues permitió verificar que las cuerdas que cortan al eje mayor de la elipse no corresponden al lado recto de la elipse.

En la figura 4, el equipo B movilizó como EU la condición geométrica de la elipse que indica que *dado un punto de la elipse, la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante*, y reconoció que el extremo del eje menor debe equidistar de los focos, porque tiene instrumentada (EU) la propiedad de la mediatriz que aplicó en la definición del eje menor.

Los alumnos determinan que si la longitud del eje mayor mide diez, entonces de acuerdo al análisis que presentaron en el párrafo anterior, la medida del segmento que une el extremo del base del triángulo isósceles corresponden a los focos de la elipse, por donde se trazarían los lados rectos, los cuales no coinciden con las cuerdas que la representación gráfica señala.

Ambos equipos consideraron que las cuerdas no coinciden con las características de lado recto. Además, movilizaron como posibles esquemas de utilización, la noción de cuerda de una elipse, trazo de sus ejes, vértices, focos, condición geométrica de la elipse, la relación entre los parámetros y el uso de algunas herramientas del Geogebra como recta perpendicular, recta paralela, segmento, puntos de intersección, distancia entre dos puntos.

En el cuarto ítem, se les pide localizar los puntos que representan los focos de la elipse respecto a la figura anterior. De acuerdo a nuestro *análisis a priori*, ambos equipos localizaron dichos puntos sobre el eje mayor, trazando una circunferencia de radio igual a la longitud del semieje mayor.

Tanto la condición geométrica de la elipse como la mediatriz siguen instrumentados pues reconocen que el extremo del eje menor equidista de los focos, como se observa en la construcción representada por la figura 5.

Figura 5. Trazo del lado Recto de ambos equipos

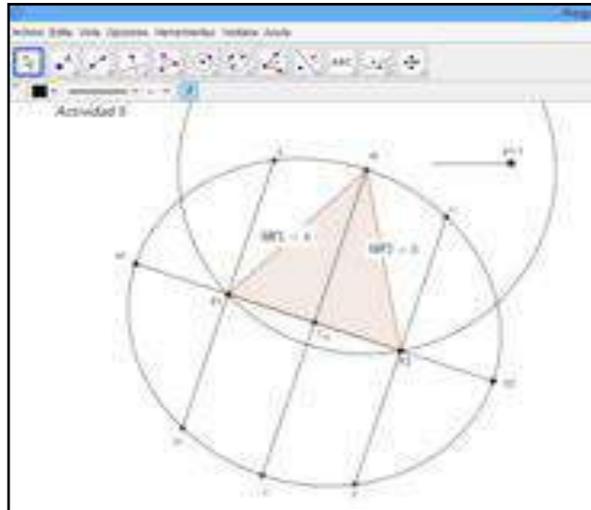


Figura 5. Trazo del lado Recto ambos equipos

Finalmente, en el ítem 5, se les pide que compruebe que la longitud del lado recto de una elipse es $\frac{2b^2}{a}$. Se les sugiere, el trazo de un triángulo en el interior de la elipse, cuyos vértices sean los focos de la curva y el vértice restante ubicado en un extremo del lado recto.

Figura 7. Lado recto en términos de los parámetros - B

$$\begin{array}{l}
 (2a - y)^2 = y^2 + (2c)^2 \\
 4a^2 - 4ay + y^2 = y^2 + 4c^2 \\
 a^2 - ay = c^2 \\
 \frac{a^2 - c^2}{a} = y \\
 \frac{b^2}{a} = y \\
 \text{Lado recto} = \frac{2b^2}{a}
 \end{array}$$

En este proceso hay una conversión del artefacto lado recto a instrumento, es decir el proceso de la génesis instrumental del lado recto, dicha cuerda tiene un valor instrumental para el sujeto ya que logra orientarla hacia el objeto de la actividad, hacia las primeras tareas, es decir hay una apropiación del artefacto lado recto, para realizar una tarea específica, determinar su longitud.

■ Consideraciones finales

La confrontación de los análisis a priori y a posteriori de la actividad diseñada, muestra que existen indicios de apropiación, reconocimiento y aplicación de la noción de lado recto a través del proceso de la génesis instrumental y que el Geogebra contribuyó no solo como mediador en la secuencia de la actividad, sino también como una herramienta integradora en la enseñanza y aprendizaje de este concepto.

Existen indicios que en dicha actividad, los alumnos determinaron una nueva propiedad para validar la posición de los focos de la elipse, es decir construyeron y movilaron un nuevo esquema de acción instrumentada que indica que la *distancia de uno de los extremos del eje menor de la elipse a uno de los focos es igual a la longitud del semieje mayor*, la cual construyeron movilizandolos EU mediatriz y condición geométrica de la elipse.

Asimismo, observamos que esta actividad permitió a los alumnos la interacción en el proceso de construcción, la observación de sus resultados y la validación de sus conjeturas cuando hicieron uso del Geogebra y que a pesar que dichas acciones fueron conservadas de manera permanente durante la secuencia de aprendizaje, deben ser observadas nuevamente en actividades posteriores para comprobar dicho nivel de instrumentación.

Reconocimiento. La presente investigación se realizó con el apoyo financiero del fondo para el desarrollo de líneas de investigación, en la línea de investigación: Tecnologías y medios de expresión en enseñanza de las matemáticas, de la Escuela de Postgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

■ Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Chumpitaz, L. (2013). *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediados por el software Geogebra con estudiantes de ingeniería*. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, Facultad de ciencias de la educación, Pontificia Universidad Católica. Lima, Perú.
- Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus*. Tesis de Maestría en Educación Matemática, Instituto de educación y pedagogía, Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* [Traducido por M. Acosta]. Colombia: Universidad Nacional de Santander.
- Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço*. Tesis de doctorado no publicada, Pontificia Universidade Católica. São Paulo, Brasil.
- Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele*. Tesis de Maestría en Educación Matemática, Facultad de educación, Universidad de Antioquía. Medellín, Colombia.
- Trouche, L. (2004). *Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations* (pp. 281-387). France: Université Montpellier II.